ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЕРЕВАН

„АСТРОФИЗИКА" — научный журнал, издаваемый Академией наук Армянской ССР. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой.

Журнал предназначается для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал выходит 4 раза в год, цена одного номера 1 рубль, подписная плата за год 4 рубля. Подписку можно произвести во всех отделениях Союзпечати, а за границей через агентство „Международная книга", Москва, 200.

«Աստղաֆիզիկա»-ն գիտական հանդես է, որը հրատարակվում է Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի կողմից: Հանդեսը տպագրում է ինքնատիպ հոդվածներ աստղերի ֆիզիկայի, միգամածությունների ու միջաստղային միջավայրի ֆիզիկայի, աստղաբաշխության և արտագալակտիկական աստղագիտության, ինչպես նաև աստղաֆիզիկային սահմանակից բնագավառների գծով:

Հանդեսը նախատեսված է գիտական աշխատակիցների, ասպիրանտների և բարձր կուրսերի ուսանողների համար:

Հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան 4 անգամ, 1 համարի արժեքն է 1 ռուբլի, բաժանորդագինը 4 ռուբլի մեկ տարվա համար: Բաժանորդագրվել կարելի է «Սոյուզպեչատ»-ի բոլոր բաժանմունքներում, իսկ արտասահմանում «Մեժդունարոդնայա կնիգա» գործակալության միջոցով, Մոսկվա, 200:

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

СПЕКТРЫ ГАЛАКТИК МАРКАРЯНА. VIII

М. А. АРАКЕЛЯН, Э. А. ДИБАЙ, В. Ф. ЕСИПОВ

Поступила 15 июля 1973

Приведены результаты спектральных наблюдений 66-и объектов из пятого списка [1] галактик с ультрафиолетовым континуумом. Эмиссионные линии обнаружены в спектрах 51-й галактики. Объекты № 471 и 504 обладают спектральными особенностями ядер сейфертовских галактик.

Весной 1973 г. со спектрографом с контактным ЭОП в кассегреновском фокусе 125 *см* рефлектора Крымской станции ГАИШ продолжались наблюдения объектов из пятого списка [1] галактик с ультрафиолетовым континуумом. Результаты более ранних наблюдений 16-и объектов этого списка опубликованы в [2]. В настоящем сообщении приведены результаты наблюдений 66-и галактик списка [1]. Как и в [2], наблюдения проводились в красной области спектра, охватывающей интервал длин волн между λ 5500 и λ 7500. Данные о 51-й галактике, в спектре которой обнаружены эмиссионные линии, представлены в табл. 1, содержащей красные смещения z и глазомерные оценки интенсивности эмиссионных линий, и последующих примечаниях. Индексы „s", „m" и „w" обозначают соответственно сильную, умеренную и слабую эмиссии.

Маркарян 402. Эллипсоидальный, умеренно конденсированный объект [1]. Спектр содержит сильную H_α и умеренной интенсивности дублет [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83.

Маркарян 403. Сфероидальный, довольно компактный объект [1]. В спектре имеются умеренной интенсивности H_α и дублет [NII] $\lambda\lambda$ 6548/83. Интенсивность [NII] λ6583 примерно равна интенсивности H_α + [NII] λ 6548. Линии очень узкие.

Таблица 1

№	m_{pg}	z	Интенсивность эмиссионных линий			Спектральный тип
			[S II] λλ 6717/31	[N II] λλ 6548/83	H_α	
1	2	3	4	5	6	7
402	16	0.024	—	*m*	*s*	sd2e
403	16.5	0.024	—	*m*	*m*	d2e
404	15.5	0.004	—	*w*	*m*	d2
406	15.5	0.017	—	*w*	*m*	ds2e
407	15	0.005	—	—	*m*	sd3e
408	15	0.005	*m*	*w*	*s*	ds2
409	15	0.005	*w*	—	*w*	d3e
410	16	0.023	—	*w*	*m*	sd2
411	15.5	0.005	—	*w*	*s*	d3
412	15.5	0.015	*w*	*w*	*s*	sd2e
413	15.5	0.038	—	*m*	*s*	s2e
414	16.5	0.039	—	—	*w*	d1e
415	16	0.030	—	*w*	*m*	d2e
416	15.5	0.004	*w*	*w*	*m*	sd2e
418	14.5	0.006	*w*	*w*	*s*	d2e
420	15.5	0.043	*w*	—	*m*	d2e
422	15.5	0.030	—	—	*w*	sd3e
423	15.5	0.032	*m*	*m*	*m*	ds3e
424	15.5	0.007	*w*	*m*	*s*	ds2e
426	15	0.005	—	*w*	*m*	s1
427	15.5	0.022	—	*w*	*m*	d3e
428	15.5	0.041	—	*m*	*m*	sd3e
429	14.5	0.005	*w*	*w*	*m*	ds2e
430	14.5	0.020	—	—	*m*	sd2e
432	14.5	0.011	—	—	*m*	ds2e
435	15	0.022	—	*w*	*m*	d2e
438	16.5	0.022	—	—	*m*	ds3e
439	12.5	0.003	—	*w*	*m*	sd2e
440	16.5	0.049	—	*m*	*m*	sd1e
441	15.5	0.018	*m*	*w*	*s*	d2e
444	15.5	0.015	*w*	*w*	*s*	sd2e
447	16.5	0.022	—	*w*	*s*	ds3e
449	14	0.003	*w*	*m*	*s*	d2e
451	15	0.016	—	*w*	*s*	d2e
454	17	0.023	—	*w*	*m*	sd2e

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7
456	15.5	0.034	—	—	*m*	d3e
461	15.5	0.016	—	*w*	*w*	sd3e
465	16	0.009	—	*w*	*m*	s2e
468	15.5	0.041	—	—	*s*	d2
470	15.5	0.015	—	—	*w*	sd3e
471	15.5	0.034	—	—	*w*	d2e
472	15.5	0.015	—	—	*w*	d2e
473	16	0.043	*w*	*w*	*m*	d3e
477	16	0.038	*w*	*m*	*s*	d2e
482	15	0.010	—	—	*w*	ds3e
489	14.5	0.031	*w*	*m*	*s*	d2e
496	16	0.029	*m*	*s*	*s*	s2e
497	15	0.033	—	—	*m*	d2
499	15	0.026	*w*	*m*	*s*	s3e
500	16.5	0.026	—	—	*m*	d2e
504	17	0.036	—	—	*s*	sd2e

Маркарян 404. Карликовый объект, являющийся компонентом яркой спиральной галактики NGC 2964. Спектр содержит умеренной интенсивности H_α и слабый дублет [N II] λλ 6548/83. Красное смещение яркой галактики, согласно [3], равно 0.0043, что неплохо согласуется с нашим определением красного смещения карликового спутника.

Маркарян 406. Компактный объект с H_α умеренной интенсивности и слабым дублетом [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 407. Сфероидальный компактный объект [1]. В спектре содержится умеренной интенсивности H_α.

Маркарян 408. Компактный объект с несимметрично примыкающим туманом [1]. Спектр содержит сильную H_α, слабый дублет [N II] λλ 6548/83 и умеренной интенсивности дублет [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 409. Сфероидальный объект с оболочкой [1]. В спектре имеются очень слабые H_α и [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 410. Эллипсоидальный, довольно компактный объект с умеренной интенсивности линией H_α и слабым дублетом [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 411. Сфероидальный объект со слабой короной. В спектре имеются очень сильная H_α и очень слабый дублет [N II] λλ 6548/83. Линии наклонные.

Маркарян 412. Компактный объект с выбросами [1]. Спектр содержит очень сильную H_α и слабые дублеты [N II] λλ 6548/83 и [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 413. Компактный сфероидальный объект с сильной H_α и умеренной интенсивности [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 414. Пара галактик со слабой H_α.

Маркарян 415. Сфероидальная компактная галактика с умеренной интенсивности линией H_α и слабым дублетом [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 416. Сферическая компактная галактика с умеренной интенсивности H_α и слабыми дублетами [N II] λλ 6548/83 и [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 418. В [1] описана как возможная иррегулярная галактика круглой формы. Спектр содержит сильную H_α и слабые дублеты [N II] λλ 6548/83 и [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 420. Очень компактный, несколько вытянутый объект [1]. Спектр содержит умеренной интенсивности довольно диффузную H_α. Линия [N II] λ 6583, возможно, блендируется с линией ночного неба. В спектре имеется также слабый дублет [S II] λλ 6717/31. Возможно, что объект обладает слабо выраженными спектральными особенностями ядер сейфертовских галактик.

Маркарян 422. Сферическая галактика со слабой H_α.

Маркарян 423. Сфероидальный объект с выбросом [1]. В спектре содержатся умеренной интенсивности H_α, [N II] λλ 6548/83 и [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 424. Несколько вытянутый объект со слабой короной [1]. В спектре имеются сильная H_α, умеренной интенсивности [N II] λλ 6548/83 и слабый дублет [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 426. Согласно [1], возможная иррегулярная галактика. Спектр содержит умеренной интенсивности H_α и очень слабый дублет [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 427. Пара соприкасающихся сфероидальных галактик [1]. Спектр содержит умеренной интенсивности H_α и слабый дублет [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 428. Неправильная галактика с умеренной интенсивности диффузными H_α и [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 429. Сфероидальный объект с H_α умеренной интенсивности и слабыми дублетами [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83 и [S II] $\lambda\lambda$ 6717/31.

Маркарян 430. Согласно [1], в спектре этого сфероидального образования с кольцевым выбросом заметны H_α, H_β и дублет [OIII] $\lambda\lambda$4959/5007. На нашей спектрограмме, охватывающей красную область, видно лишь диффузное сгущение. Красное смещение вычислено в предположении, что это — H_α. Если предположение правильно, то не исключена возможность, что объект обладает слабо выраженными спектральными особенностями ядер сейфертовских галактик.

Маркарян 432. Галактика, представляющая собой ядро с двумя выбросами [1]. В спектре имеется лишь умеренной интенсивности H_α.

Маркарян 435. Сфероидальная, несколько вытянутая галактика с умеренной интенсивности H_α и слабым дублетом [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83.

Маркарян 438. Компактный сфероидальный объект с H_α умеренной интенсивности.

Маркарян 439. Яркая сферическая галактика с оболочкой [1]. Спектр содержит умеренной интенсивности H_α и слабый дублет [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83. Объект невысокой светимости.

Маркарян 440. Сферический компактный объект с двумя выбросами [1]. В спектре содержатся умеренной интенсивности H_α и дублет [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83.

Маркарян 441. Объект, возможно, двойной [1]. В спектре содержатся сильная H_α, слабый дублет [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83 и умеренной интенсивности дублет [S II] $\lambda\lambda$ 6717/31.

Маркарян 444. Сферический объект со слабой, несколько вытянутой оболочкой [1]. Спектр содержит сильную H_α и слабые [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83 и [S II] $\lambda\lambda$ 6717/31.

Маркарян 447. Компактный, несколько вытянутый объект [1] с сильной H_α и слабым дублетом [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83.

Маркарян 449. Яркая галактика с сильной H_α, умеренной интенсивности дублетом [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83 и слабым дублетом [S II] $\lambda\lambda$ 6717/31. В [1] высказано предположение, что это — спиральная галактика, видимая с ребра. Однако невысокая светимость ($M_{pg} \approx -16.5$) делает это предположение маловероятным.

Маркарян 451. Сферическая галактика с короной [1]. Спектр содержит сильную H_α и слабый дублет [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 454. Сфероидальный объект с асимметричной оболочкой [1]. В спектре содержатся умеренной интенсивности H_α и слабый дублет [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 456. Сфероидальный объект с выбросом [1]. В спектре содержится умеренной интенсивности H_α.

Маркарян 461. Сфероидальный, несколько вытянутый объект со слабой короной [1]. В спектре имеются слабые H_α и [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 465. Компактный сфероидальный объект с оболочкой [1]. В спектре имеются умеренной интенсивности H_α и слабый дублет [N II] λλ 6548/83.

Маркарян 468. Компактный объект с сильной H_α.

Маркарян 470. Ядро яркой галактики со слабой H_α.

Маркарян 471. Сфероидальный объект с выбросами. Спектр содержит слабую, но широкую (~50 A) H_α. По-видимому, может быть отнесен к объектам типа ядер сейфертовских галактик.

Маркарян 472. Несколько вытянутый объект со слабой H_α.

Маркарян 473. Компактный объект с умеренной интенсивности H_α и слабыми [N II] λλ 6548/83 и [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 477. Компактный объект с выбросами [1]. В спектре имеются сильная H_α, умеренной интенсивности [N II] λλ 6548/83 и слабый дублет [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 482. Эллиптический объект со слабой H_α.

Маркарян 489. Компонент двойной системы [1]. В спектре имеются сильная H_α, умеренной интенсивности дублет [N II] λλ 6548/83 и слабый дублет [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 496. Пара галактик. В спектре более яркого (восточного) компонента имеются очень сильная H_α, сильный дублет [N II] λλ 6548/83 и умеренной интенсивности дублет [S II] λλ 6717/31.

Маркарян 497. Сферический объект с выбросами. Спектр содержит H_α умеренной интенсивности.

Маркарян 499. Сфероидальный компактный объект с очень сильной H_α, умеренной интенсивности дублетом [N II] $\lambda\lambda$ 6548/83 и слабым дублетом [S II] $\lambda\lambda$ 6717/31. Ранее исследован У. Л. У. Сарджентом [4] в числе компактных галактик Цвикки.

Маркарян 500. Компактный, несколько вытянутый объект с H_α умеренной интенсивности.

Маркарян 504. Галактика эллиптической формы, в спектре которой имеется сильная H_α с шириной $\sim$60 A. Объект проявляет спектральные особенности ядер сейфертовских галактик.

Кроме перечисленных наблюдались также объекты № 405, 417, 421, 431, 433, 434, 437, 442, 445, 446, 452, 455, 457, 466 и 481, в спектрах которых эмиссионные линии обнаружены не были. Объект № 498 наблюдать не удается, так как спектр целиком забивается светом близлежащей яркой звезды.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга

THE SPECTRA OF MARKARIAN GALAXIES. VIII

M. A. ARAKELIAN, E. A. DIBAY, V. F. YESIPOV

The results of spectral observations of 66 objects from the fifth list [1] of galaxies with ultraviolet continuum are presented. The emission lines are detected in the spectra of 51 galaxies. Objects No. 471 and 504 have the spectral features of the nuclei of Seyfert galaxies.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Е. Маркарян, В. А. Липовецкий,* Астрофизика, 8, 155, 1972.
2. *М. А. Аракелян, Э. А. Дибай, В. Ф. Есипов,* Астрофизика, 9, 319, 1973.
3. *G. de Vaucouleurs, A de Vaucouleurs,* Reference Catalogue of Bright Galaxies, Univ. of Texas Press, Austin, 1964.
4. *W. L. W. Sargent,* Ap. J., 160, 405, 1970.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 | АВГУСТ, 1973 | ВЫПУСК 3

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ АТМОСФЕРАХ

В. В. ИВАНОВ, Ш. А. САБАШВИЛИ

Поступила 16 июля 1973

Перенос излучения в полубесконечной атмосфере рассматривается как процесс многократных рассеяний фотонов. Изучаются случаи, когда функция источников определяется интегральным уравнением с симметричным разностным ядром (изотропное монохроматическое рассеяние, перенос излучения в частотах спектральных линий и др.). При довольно общих предположениях относительно ядра уравнения и свободного члена получена асимптотика n-го члена разложения решения в ряд Неймана при $n \to \infty$.

1. *Введение.* Расчет поля излучения в полубесконечной атмосфере в широком классе случаев (изотропное и анизотропное монохроматическое рассеяние [1, 2], перенос излучения в спектральных линиях при отсутствии локального термодинамического равновесия (ЛТР) [3] и — при некоторых дополнительных предположениях — лучистый перенос тепла в несерых атмосферах с ЛТР [4, 5]) сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\, S(\tau')\, d\tau' + S_0(\tau). \qquad (1)$$

Здесь искомая функция $S(\tau)$ есть так называемая функция источников, $S_0(\tau)$ — заданная функция, описывающая распределение в атмосфере первичных источников фотонов, λ — вероятность выживания фотона при рассеянии, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, наконец, ядерная функция $K(\tau)$ такова, что

$$\int_0^\infty K(\tau)\, d\tau = 1, \tag{2}$$

причем $K(\tau) \geqslant 0$. Явный вид $K(\tau)$ определяется деталями взаимодействия излучения и вещества (индикатрисой рассеяния, профилем коэффициента поглощения в линии и т. п.), однако во всех случаях $K(\tau)$ является суперпозицией экспонент.

Наиболее прямой путь для нахождения функции источников состоит в последовательном учете рассеяний разных порядков, иначе говоря, в итеративном решении уравнения (1). В результате $S(\tau)$ представляется в виде ряда Неймана

$$S(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n S_n(\tau), \tag{3}$$

где

$$S_{n+1}(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\, S_n(\tau')\, d\tau', \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4}$$

Когда λ мало, этот способ очень эффективен. Однако если λ близко к единице, ряд Неймана сходится медленно, и непосредственное использование метода итераций становится затруднительным.

Медленная сходимость ряда (3) означает, что существенный вклад в его сумму дают далекие члены. Между тем, следует ожидать, что при больших n функции $S_n(\tau)$ упрощаются, принимая некоторую простую асимптотическую форму. Если ее удастся найти, учет далеких членов ряда (3) перестанет быть проблемой, и итеративное решение сделается эффективным также и при λ, мало отличающихся от единицы. Обсуждению этого и близких к нему вопросов и посвящена настоящая статья.

2. *Основные результаты.* Начнем с формулировки основных результатов, найденных в работе.

Обозначим

$$V(u) := \int_0^\infty K(\tau) \cos u\tau\, d\tau \tag{5}$$

и предположим, что $(u > 0)$

$$1 - V(u) \sim u^{2\gamma} \varphi(u), \quad u \to 0, \tag{6}$$

где γ — некоторая постоянная, $0 < \gamma \leqslant 1$, которую мы будем называть характеристическим показателем, и $\varphi(u)$ — функция, медленно меняющаяся в нуле, т. е. такая, что

$$\lim_{u \to 0} \frac{\varphi(au)}{\varphi(u)} = 1, \quad 0 < a < \infty. \tag{7}$$

В частности, φ может быть постоянной (чаще всего так именно и бывает). Во всех случаях, с которыми до сих пор приходилось иметь дело в теории переноса излучения, условие (6) выполнялось, так что оно не является каким-либо существенным ограничением.

Пусть, далее, $\widetilde{S}(\tau)$ — решение однородного уравнения

$$\widetilde{S}(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\widetilde{S}(\tau')\,d\tau' \tag{8}$$

с нормировкой $\widetilde{S}(0) = 1$. Тогда, если в (1) источниковый член $S_0(\tau)$ таков, что интеграл

$$S^* = \int_0^\infty S_0(\tau)\widetilde{S}(\tau)\,d\tau \tag{9}$$

сходится, то при фиксированном τ и $n \to \infty$ имеет место асимптотическое представление

$$S_n(\tau) \sim S^* c(n)\widetilde{S}(\tau), \tag{10}$$

где

$$c(n) = \frac{1}{\pi} s\Gamma(s)\varphi^{-s}(n^{-s})\,n^{-(1+s)}, \qquad s \equiv \frac{1}{2\gamma}, \tag{11}$$

и $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Формулой (10) выражается основной результат, найденный в работе. Приведем также два других полезных результата. Первый из них является основой вывода формулы (10), а второй — ее простым следствием.

Обозначим

$$H(z) = 1 + \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}}\,\Phi(\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

где $\Phi(\tau)$ — резольвентная функция уравнения (1), т. е. ограниченное при $\tau \to \infty$ решение уравнения

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\,\Phi(\tau')\,d\tau' + \frac{\lambda}{2}K(\tau). \qquad (13)$$

Важная роль H-функции в задачах о многократном рассеянии света в полубесконечных атмосферах хорошо известна (см., например, [2, 3, 6]).

Функцию $H(z)$ можно разложить в ряд Тейлора по λ.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n H_n(z). \qquad (14)$$

Оказывается, что при фиксированном z и $n \to \infty$ для $H_n(z)$ справедливо асимптотическое представление

$$H_n(z) \sim c(n)\, z H^0(z), \qquad (15)$$

где $c(n)$ по-прежнему дается формулой (11) и через $H^0(z)$ обозначена H-функция для $\lambda = 1$. В этом состоит первый из упомянутых выше двух результатов.

Второй результат формулируется так. Пусть $S(\tau)$ и $S^0(\tau)$ — решения уравнения (1) при одном и том же свободном члене и вероятностях выживания фотона при рассеянии, равных соответственно λ и 1. Тогда, если интеграл (9) сходится, то при $1/2 > \gamma \geqslant 1$ для фиксированного τ и $\lambda \to 1$ имеет место асимптотическое представление

$$S(\tau) \sim S^0(\tau) - c_1(1-\lambda)\, S^* \bar{S}(\tau), \qquad (16)$$

где

$$c_1(x) = \frac{1}{\sin \pi s}\left(\frac{x}{\varphi(x^s)}\right)^s, \qquad s \equiv \frac{1}{2\gamma}. \qquad (17)$$

Наряду с выводом этих и близких к ним асимптотических формул мы рассматриваем их важнейшие частные случаи, указываем те работы, в которых ранее были получены различные специальные случаи приведенных только что общих выражений, и кратко обсуждаем связь асимптотик при $n \to \infty$ с нестационарной теорией переноса излучения.

3. *Разложение H-функции.* Как уже упоминалось, в основе всех наших результатов лежит даваемая (15) асимптотика n-го члена раз-

ложения H-функции по степеням λ. Ее получить сравнительно нетрудно, так как в явное выражение для H-функции зависимость от λ входит простым образом.

Исходим из хорошо известного интегрального представления H-функции (см., например, [6], § 40, [3], § 5.4):

$$\ln H(z) = -\frac{z}{\pi}\int_0^\infty \ln(1-\lambda V(u))\frac{du}{1+z^2u^2}. \tag{18}$$

Дифференцируя его по λ и пользуясь (14), получаем

$$\sum_{n=1}^\infty nH_n(z)\lambda^{n-1} = zH(z)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{V(u)}{1-\lambda V(u)}\frac{du}{1+z^2u^2}. \tag{19}$$

Рассмотрим поведение интеграла в правой части при $z=\mathrm{const}$ и $\lambda\to1$, предполагая, что характеристический показатель $\gamma>1/2$. В этом случае при $\lambda\to1$, как легко видеть, интеграл расходится. Найдем главный расходящийся член. Основной вклад в интеграл при $1-\lambda\ll1$ дает область малых u. В этой области $V(u)$ в знаменателе подынтегрального выражения можно заменить асимптотикой (6), а множитель $V(u)/(1+z^2u^2)$ положить равным единице, и рассматриваемый интеграл оказывается асимптотически равен

$$I(\lambda) = \int_0^1 \frac{du}{1-\lambda+u^{2\gamma}\varphi(u)}. \tag{20}$$

Положим здесь $u=(1-\lambda)^s x^s$, где $s=1/2\gamma$, и воспользуемся тем, что в силу (7) $\varphi((1-\lambda)^s x^s)\sim\varphi((1-\lambda)^s)$ при $\lambda\to1$. В результате получим

$$I(\lambda)\sim\frac{s}{(1-\lambda)^{1-s}}\int_0^{(1-\lambda)^{-1}} \frac{x^{s-1}dx}{1+\varphi((1-\lambda)^s)\,x}, \tag{21}$$

откуда

$$I(\lambda)\sim\frac{\pi s}{\sin\pi s}(1-\lambda)^{s-1}[\varphi(1-\lambda)^s]^{-s}\equiv\pi f(1-\lambda). \tag{22}$$

Вводя эту асимптотику вместо интеграла в правую часть (19), находим, что если $1\geqslant\gamma>1/2$, то при $z=\mathrm{const}$ и $\lambda\to1$

$$\sum_{n=1}^\infty nH_n(z)\lambda^{n-1}\sim zH^0(z)f(1-\lambda). \tag{23}$$

Мы заменили также в правой части $H(z)$ на $H^0(z)$, т. е. на предельное значение H-функции при $\lambda = 1$, что, разумеется, можно сделать в пределах той точности, с которой мы ведем сейчас вычисления (удерживаются лишь члены, расходящиеся при $\lambda \to 1$).

Из расходимости при $\lambda \to 1$ правой части в (23) следует, что когда λ близко к единице, основной вклад в сумму стоящего слева ряда дают далекие члены. Из факта разделения переменных z и λ в правой части (23) вытекает тогда асимптотическое представление $H_n(z)$ в форме (15), с неизвестным пока $c(n)$. Вводя это выражение для $H_n(z)$ в левую часть (23), находим, что асимптотически при $\lambda \to 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc(n)\lambda^{n-1} \sim f(1-\lambda). \tag{24}$$

Далее, при $1 - \lambda \ll 1$ мы имеем $\lambda^n = [1-(1-\lambda)]^n \sim \exp[-(1-\lambda)n]$. Пользуясь этим и заменяя суммирование интегрированием, приходим к асимптотическому соотношению

$$\int_0^{\infty} e^{-(1-\lambda)x} c(x)\, x dx \sim f(1-\lambda), \quad \lambda \to 1, \tag{25}$$

которое можно рассматривать как интегральное уравнение для $c(x)$. Непосредственной подстановкой в это уравнение убеждаемся, что его решение есть

$$c(x) = \frac{1}{\pi} s\Gamma(s)\, \varphi^{-1/s}(x^{-1/s})\, x^{-(1+s)}, \tag{26}$$

что и устанавливает справедливость (15) для $1 \geqslant \gamma > 1/2$.

Применимость (15) с $c(n)$, даваемым (11), также и для $0 < \gamma \leqslant 1/2$ можно доказать сходным образом. Отличие от вывода для случая $\gamma > 1/2$ состоит в следующем: вместо (19) следует исходить из соотношения, которое получается из (18), если его продифференцировать по λ не один, а $[1/2\gamma] + 1$ раз, где $[1/2\gamma]$ — целая часть $1/2\gamma$.

4. *Разложения решения основного уравнения.* В этом разделе дается вывод основного результата работы — формулы (10), а также разложения (16).

Начнем с рассмотрения резольвентной функции $\Phi(\tau)$. Ее разложение в ряд Тейлора по λ есть

$$\Phi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(\tau). \tag{27}$$

Подставляя (27) и (14) в (12), имеем

$$H_n(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} \Phi_n(\tau)\, d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Это соотношение позволяет по найденной в предыдущем разделе асимптотике $H_n(z)$ при $n \to \infty$ получить соответствующую асимптотику $\Phi_n(\tau)$. Пользуясь тем, что, как известно, (см., например, [3], § 5.6)

$$zH^0(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} \tilde{S}(\tau)\, d\tau, \tag{29}$$

из (28) и (15) находим ($\tau = \text{const}$, $n \to \infty$)

$$\Phi_n(\tau) \sim c(n)\, \tilde{S}(\tau). \tag{30}$$

Пусть, далее, $\Gamma(\tau, \tau')$ — резольвента уравнения (1), т. е. решение этого уравнения со свободным членом $(\lambda/2) K(|\tau - \tau'|)$. Мы имеем

$$\Gamma(\tau, \tau') = \sum_{n=1}^\infty \lambda^n \Gamma_n(\tau, \tau'), \tag{31}$$

где

$$\Gamma_1(\tau, \tau') = \frac{1}{2} K(|\tau - \tau'|), \tag{32}$$

$$\Gamma_{n+1}(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \int_0^\infty K(|\tau - t|)\, \Gamma_n(t, \tau')\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

причем

$$\Gamma_n(\tau, \tau') = \Gamma_n(\tau', \tau). \tag{34}$$

Легко убедиться, что при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое представление

$$\Gamma_n(\tau, \tau') \sim c(n)\, \tilde{S}(\tau)\, \tilde{S}(\tau'). \tag{35}$$

Оно получается из (33), если воспользоваться (8). При этом следует учесть симметрию Γ_n относительно τ и τ', а также принять во внимание, что $\Gamma_n(\tau, 0) = \Phi_n(\tau) \sim c(n)\, \tilde{S}(\tau)$ (см. (30)).

Имея (35), получить (10) уже просто. По определению резольвенты

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \int_0^\infty S_0(\tau')\,\Gamma(\tau, \tau')\,d\tau'. \tag{36}$$

Вводя сюда разложения S и Γ из (3) и (31) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим

$$S_n(\tau) = \int_0^\infty S_0(\tau')\,\Gamma_n(\tau, \tau')\,d\tau', \quad n = 1, 2, \ldots \tag{37}$$

Подстановка (35) в (37) приводит к искомому соотношению (10).

Переходим к изучению поведения $S(\tau)$ при $\lambda \to 1$. Обозначим через $S(\tau)$ и $S^0(\tau)$ ограниченные на бесконечности решения уравнения (1) при одном и том же свободном члене $S_0(\tau)$ и вероятностях выживания фотона при рассеянии, равных соответственно λ и 1. Из (3) находим тогда

$$S(\tau) = S^0(\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda^n)\,S_n(\tau). \tag{38}$$

Но при $1 - \lambda \ll 1$ мы имеем $\lambda^n \sim \exp[-(1-\lambda)\,n]$, так что

$$S(\tau) \sim S^0(\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-(1-\lambda)n})\,S_n(\tau). \tag{39}$$

Если $1/2 < \gamma \leqslant 1$ и λ близко к единице, основной вклад в сумму этого ряда дают далекие члены, а в них вместо $S_n(\tau)$ можно подставить асимптотику (10). Заменяя суммирование интегрированием, вместо (39) находим окончательно

$$S(\tau) \sim S^0(\tau) - c_*(1-\lambda)\,S^*\,\tilde{S}(\tau), \tag{40}$$

где обозначено

$$c_*(x) = \int_0^\infty (1 - e^{-xt})\,c(t)\,dt. \tag{41}$$

Чтобы доказать (16), нам осталось убедиться, что $c_*(x) \sim c_1(x)$ при $x \to 0$, где $c_1(x)$ дается формулой (17). Из (41) находим, учитывая (26) и (7),

$$c_*'(x) \sim \frac{s\Gamma(s)}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt}\, t^{-s} \frac{dt}{[\varphi(t^{-1})]^s} \sim \frac{s}{\sin \pi s}\,[\varphi(x^s)]^{-s} x^{s-1}, \qquad x \to 0, \quad (42)$$

откуда при учете вытекающего из (41) условия $c_*(0) = 0$ и следует, что $c_*(x) \sim c_1(x)$ при малых x. Представление (16) тем самым доказано.

5. *Частные случаи.* Для применений наибольший интерес представляет случай, когда $S_0(\tau) = e^{-\tau/z}$. Решение уравнения (1) при таком свободном члене мы будем обозначать $S(\tau, z)$, т. е.

$$S(\tau, z) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\, S(\tau', z)\, d\tau' + e^{-\frac{\tau}{z}}. \qquad (43)$$

Интерес к этому случаю связан с двумя обстоятельствами. Во-первых, при изотропном рассеянии (как монохроматическом, так и в частотах линии) $S(\tau, z)$ пропорциональна функции источников в задаче о диффузном отражении от полубесконечной среды. Во-вторых, $S(\tau, z)$ лишь на постоянный множитель отличается от вероятности выхода фотона с глубины τ (после любого числа рассеяний). Обсуждение относящихся к этому вопросов см., например, в [1], гл. III и VI, и в [3], гл. V и VI.

Согласно (9) и (29), в рассматриваемом случае

$$S^* = zH^0(z), \qquad (44)$$

так что формулы (10) и (16) принимают вид

$$S_n(\tau, z) \sim c(n)\, zH^0(z)\, \tilde{S}(\tau), \qquad (45)$$

$$S(\tau, z) = S^0(\tau, z) - c_1(1-\lambda)\, zH^0(z)\, \tilde{S}(\tau). \qquad (46)$$

Обозначим, далее,

$$\rho_n(z, z_0)\, zz_0 = \frac{1}{4}\int_0^\infty S_n(\tau, z_0)\, e^{-\frac{\tau}{z}}\, d\tau, \qquad (47)$$

$$\rho(z, z_0) = \sum_{n=0}^\infty \lambda^{n+1} \rho_n(z, z_0). \qquad (48)$$

Учитывая (45) и (46), находим

$$\rho_n(z, z_0) = \frac{1}{4} c(n) H^0(z) H^0(z_0), \tag{49}$$

$$\rho(z, z_0) = \rho^0(z, z_0) - \frac{1}{4} c_1(1-\lambda) H^0(z) H^0(z_0), \tag{50}$$

где через ρ^0 обозначена функция ρ при $\lambda = 1$. Величина $\rho(z, z_0)$ есть коэффициент отражения полубесконечной среды, а $\rho_{n-1}(z, z_0)$ — вклад в коэффициент отражения, даваемый n-кратно рассеянными фотонами.

Чтобы получить явные выражения для величин $c(n)$ и $c_1(1-\lambda)$, входящих в полученные выше асимптотические выражения, нужно конкретизировать вид ядра $K(\tau)$. Рассмотрим наиболее интересные примеры.

В классическом случае изотропного монохроматического рассеяния

$$K(\tau) = E_1(\tau) = \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{51}$$

Здесь

$$V(u) = \int_0^\infty E_1(\tau) \cos u\tau d\tau = \frac{1}{u} \operatorname{arctg} u = 1 - \frac{1}{3} u^2 + \ldots, \tag{52}$$

так что $\gamma = 1$, $\varphi = 1/3$, и

$$c(n) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}, \qquad c_1(1-\lambda) = \sqrt{3(1-\lambda)}. \tag{53}$$

При рассеянии излучения в частотах линии с профилем коэффициента поглощения $\alpha(x)$ имеем (см., например, [3], гл. II)

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1(\alpha(x)\tau)\, dx, \tag{54}$$

где A — нормировочная постоянная:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, dx = 1.$$

Если профиль доплеровский, т. е. $\alpha(x) = e^{-x^2}$, то

$$V(u) = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{-1/2} u + \ldots, \quad u \to 0, \tag{55}$$

так что в этом случае $\gamma = 1/2$, $\varphi(u) = (\sqrt{\pi}/4)(\ln 1/u)^{-1/2}$, и поэтому, согласно (11),

$$c(n) = \frac{4}{\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{\ln n}}{n^2}. \tag{56}$$

При лоренцовском профиле $\alpha(x) = (1 + x^2)^{-1}$ мы имеем

$$V(u) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} u^{1/2} + \ldots, \quad u \to 0 \tag{57}$$

т. е. $\gamma = 1/4$, $\varphi = \sqrt{2}/3$, так что

$$c(n) = \frac{9}{\pi} \frac{1}{n^3}. \tag{58}$$

Если про коэффициент поглощения $\alpha(x)$ известно лишь, что вдали от центра линии, при достаточно больших $|x|$, он убывает степенным образом, так что $\alpha(x) \sim W|x|^{-\varkappa}$, где W и $\varkappa$ — некоторые постоянные, $W > 0$, $\varkappa > 1$, то этой информации оказывается достаточно, чтобы получить $c(n)$. Можно показать, что в этом случае $\gamma = (\varkappa - 1)/2\varkappa$, $\varphi = \mathrm{const}$, и поэтому $c(n) \propto n^{-(2\varkappa-1)/(\varkappa-1)}$. В частности, если коэффициент поглощения фойгтовский, т. е.

$$\alpha(x) = \frac{U(a, x)}{U(a, 0)}, \tag{59}$$

где $U(a, x)$ — нормированная функция Фойгта:

$$U(a, x) = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}\, dy}{(x-y)^2 + a^2} \tag{60}$$

и a — фойгтовский параметр, то

$$\alpha(x) \sim \frac{a}{U(a, 0)\sqrt{\pi}} \frac{1}{x^2}, \qquad |x| \to \infty. \tag{61}$$

В этом случае $\varkappa = 2$, $\varphi = [(2\pi a U(a, 0)]^{1/2}/3$ (см. [3], § 2.7), и поэтому (10) дает

$$c(n) = \frac{9}{\pi^2 a\, U(a, 0)} \frac{1}{n^3}. \tag{62}$$

В литературе имеется ряд результатов, близких к полученным нами или являющихся их частными случаями. В работе Т. Малликина [7] была получена асимптотика $H_n(z)$ при $n \to \infty$ для случая монохроматического рассеяния, т. е. формула (15) с $c(n)$ из (53). Асимптотики по n при анизотропном монохроматическом рассеянии исследовались А. Уэсуги и В. Ирвином [8] и Х. ван де Хюлстом [9]. В частном случае изотопного рассеяния из выражений, найденных в [8] и [9], следуют наши формулы (53). Единственными известными нам публикациями по теории переноса в частотах спектральных линий, в которых изучается вклад рассеяний высоких порядков, являются статьи Дж. Финна [10—12]. Хотя строгие асимптотики по n в них найдены не были, полученные полуэмпирические формулы (в значительной мере основанные на анализе численных данных) близки к результату, выражаемому формулой (45). В частном случае фойгтовского профиля из результатов [11] следует, в согласии с (62), что $c(n)$ убывает как n^{-3}, однако коэффициент пропорциональности в [11] найден не был. Согласно [10], при доплеровском профиле $c(n) \approx b/n^2$, где b — некоторая постоянная, тогда как строгое выражение дается (56). Как и следовало ожидать, выявить присутствие медленно меняющегося множителя $(\ln n)^{1/2}$ по численным данным Дж. Финну не удалось.

Следует обратить внимание на существование тесной связи между асимптотиками при $n \to \infty$, найденными в настоящей работе, и асимптотическим поведением решений нестационарного уравнения переноса для частот линий при $t \to \infty$ [13, 14]. Общее правило соответствия асимптотик по n и t состоит в следующем: асимптотики по n переходят в асимптотики по t, если считать, что на одно рассеяние фотон тратит время, равное времени свободного пробега фотона центральной частоты линии. Это правило было установлено в [8] для частного случая монохроматического рассеяния, однако оно остается в силе и при произвольном ядре $K(\tau)$ вида (54).

В соответствии с этим правилом, полагая в (30) $n = t$, приходим к асимптотике резольвентной функции нестационарного уравнения переноса. В частном случае $\tau \gg 1$ она дает выражение, полученное ранее в [13] гораздо более сложным способом (формула (78) работы [13]).

Несколько слов об области применимости найденных нами асимптотик по n. Формально они получены для $\tau = \text{const}$ и $n \to \infty$. Практическая область применимости формулы (10) различна при разных τ. С ростом τ значение n, начиная с которого формула (10) работает, возрастает. Если $\tau \gg 1$, этим выражением можно пользоваться лишь для $n \gg \tau^{2\gamma}$. Впрочем, при больших τ особой нужды в получении $S_n(\tau)$ нет, поскольку, как хорошо известно (см., например [3]), асимптотику решения $S(\tau)$ при больших τ можно найти, не прибегая к разложению этого решения в ряд Неймана.

Ленинградский государственный университет
Тбилисский государственный университет

MULTIPLE LIGHT SCATTERING IN SEMI-INFINITE ATMOSPHERES

V. V. IVANOV, S. A. SABASHVILI

Radiative transfer in semi-infinite atmosphere is considered as a process of multiple scatterings of photons. It is assumed that the source function is determined by an integral equation with symmetric displacement kernel (isotropic monochromatic scattering, transfer of radiation in spectral lines etc.). Under rather mild assumptions on the kernel and the free term of the equation, the asymptotic form of the n-th term of the Neumann series expansion of its solution is found for $n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
2. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
3. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
4. *J. C. Stewart, I. Kuščer, N. J. McCormick*, Ann. Phys., 40, 321, 1966.
5. *A. L. Crosbie, R. Viskanta*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 10, 487, 1970.
6. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
7. *T. W. Mullikin*, J. Appl. Probabil., 5, 357, 1968.
8. *A. Uesugi, W. M. Irvine*, Ap. J., 159, 127, 1970.
9. *H. C. van de Hulst*, Astron. Astrophys., 9, 374, 1971.
10. *G. D. Finn*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 12, 35, 1972.
11. *G. D. Finn*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 12, 149, 1972.
12. *G. D. Finn*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 12, 1217, 1972.
13. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 5, 31, 1969.
14. *Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович*, Астрофизика, 4, 195, 1968.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

РАСЧЕТ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ. I. РЕЗОЛЬВЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 18 мая 1973

Предлагается способ нахождения резольвентных функций $\Phi(\tau, \tau_0)$ основного интегрального уравнения, описывающего монохроматическое изотропное рассеяние излучения в плоском слое конечной оптической толщины τ_0. Приводятся таблицы $\Phi(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 = 1$ и 2 и различных альбедо частицы, а также моментов этих функций для $\tau_0 = 0.5\,(0.5)\,3.0$.

Введение. Как известно [1, 2], задача о монохроматическом изотропном рассеянии излучения в плоском слое сводится к интегральному уравнению

$$S(\tau) = S_*(\tau) + \int\limits_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)\, S(\tau')\, d\tau', \tag{1}$$

где τ — оптическая глубина точек слоя, τ_0 — его оптическая толщина, $S(\tau)$ — искомая функция источников, а $S_*(\tau)$ — функция, характеризующая распределение первичных источников излучения в слое. Ядерная функция $K(\tau)$ для этого вида рассеяния

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} E_1(\tau), \tag{2}$$

где λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ — вероятность выживания кванта при однократном рассеянии, а $E_1(\tau)$ — интегральная показательная функция.

Уравнение вида (1) подробно изучено. В. В. Соболевым [1] было показано, что резольвента его $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ выражается через свое частное значение $\Gamma(\tau, 0, \tau_0) = \Gamma(\tau_0 - \tau, \tau_0, \tau_0) = \Phi(\tau, \tau_0)$:

$$\Gamma(\tau, \tau', \tau_0) = \Phi(|\tau - \tau'|, \tau_0) +$$
$$+ \int_0^{\min(\tau, \tau')} [\Phi(\tau - t, \tau_0)\Phi(\tau' - t, \tau_0) - \Phi(\tau_0 - \tau + t, \tau_0)\Phi(\tau_0 - \tau' + t, \tau_0)]\, dt. \quad (3)$$

Функция $\Phi(\tau, \tau_0)$ определяется уравнением

$$\Phi(\tau, \tau_0) = K(\tau) + \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)\Phi(\tau', \tau_0)\, d\tau'. \quad (4)$$

Таким образом, имея функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$, мы можем найти значения $S(\tau)$ при помощи двух последовательных интегрирований, а интенсивность излучения — трех. В частных случаях, например, при $S_*(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\eta}}$ (соответствующая функция источников обозначается $P(\tau, \eta, \tau_0)$) число необходимых интегрирований сокращается [1].

В настоящее время функции, характеризующие выходящее излучение, табулированы достаточно полно [4, 5]. Из таблиц же функций, определяющих поле излучения внутри слоя, в литературе имеются следующие. Это таблицы для большого набора значений λ и τ_0 функций источников в задаче о диффузном отражении и пропускании излучения плоским слоем — $P(\tau, \eta, \tau_0)$ — в работе [6]. Там же имеются краткие таблицы функций $\Phi(\tau, \tau_0)$. Функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 = 0.1$ (0.1) 0.5 и любых λ найдены В. В. Соболевым и И. Н. Мининым [7]. Для $\lambda = 0.5$ и 1 при $\tau_0 = 0.3$ в [7] сосчитаны также функции $P(\tau, \eta, \tau_0)$ и

$$\Psi(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \tau_0)\, d\tau'. \quad (5)$$

Функция $\Psi(\tau, \tau_0)$ играет важную роль в теории, так как через нее выражается величина $Q(\tau, \tau_0)$ — среднее число рассеяний кванта, возникшего в слое на глубине τ [8]. Та же величина $Q(\tau, \tau_0) = P(\tau, \infty, \tau_0)$ является функцией источников в задаче с равномерным распределением источников первичного излучения.

Отметим, что при $\tau_0 = \infty$ (полубесконечная среда) для $\Phi(\tau) = \Phi(\tau, \infty)$ получено явное выражение [9], по которому значения этой функции и вычислялись [9, 10]. Некоторые таблицы этой функции были получены и другим способом [11].

Имеющихся данных для количественного описания поля излучения внутри слоя, а также для нахождения выходящего излучения при произвольных источниках недостаточно. Поэтому желательно иметь подробные таблицы функций источников для разных случаев. При этом, как указывалось В. В. Соболевым [3], целесообразно начать с табулирования именно функций $\Phi(\tau, \tau_0)$, ибо все остальные характеристики поля излучения выражаются через них.

В настоящей работе функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 < \infty$ находятся непосредственно из интегрального уравнения (4), к изложению процедуры решения которого (или, для большей общности, уравнения (1)) мы и перейдем.

Метод решения уравнения (1). Уравнение (1) с ядром (2) фредгольмовское. Хотя при совпадении аргументов ядро обращается в бесконечность, но особенность эта слабая, так как при $\tau \to 0$

$$\frac{\lambda}{2} E_1(\tau) \sim \frac{\lambda}{2}(-\ln\tau - \gamma), \tag{6}$$

где γ — постоянная Эйлера. Ряд Неймана уравнения (1) сходится при $\lambda \leqslant 1$ и $\tau_0 \leqslant \infty$. Однако при λ, близких к единице, и больших τ_0 сходимость очень медленная. Уже при τ_0 порядка нескольких единиц необходимо сделать десятки итераций для достижения точности в 3—4 знака. Это объясняется тем, что при $\tau_0 = \infty$ значение $\lambda = 1$ является крайней точкой спектра рассматриваемого ядра.

Для решения уравнений вида (1) применялись различные численные методы, обзор которых применительно к резонансному рассеянию дан в работе [12]. Эти же методы могут быть использованы и при ядерной функции (2). Самым простым методом (не требующим предварительных вычислений) является метод последовательных приближений. Поэтому мы пошли по следующему пути: решать уравнение (1) итерациями с применением способов усиления их сходимости. Оказалось, что удобно применить различные способы при малых и больших τ_0. Рассмотрим отдельно оба случая.

а) Случай $\tau_0 \leqslant 1$. Для фредгольмовского ядра справедлива билинейная формула

$$K(|\tau - \tau'|) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_n(\tau, \tau_0)\, \omega_n(\tau', \tau_0)}{\lambda_n(\tau_0)}, \tag{7}$$

где $\omega_n(\tau, \tau_0)$ и $\lambda_n(\tau_0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — собственные функции и собственные значения ядра:

$$\omega_n(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda_n(\tau_0)}{\lambda} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)\, \omega_n(\tau', \tau_0)\, d\tau', \tag{8}$$

причем $\omega_n(\tau, \tau_0)$ нормированы. Аналогично и любая функция, представимая через ядро, может быть разложена по системе функций $\omega_n(\tau, \tau_0)$. В частности, пусть решение уравнения (1) представлено в виде ряда

$$S(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} S^{(m)}(\tau), \tag{9}$$

где $S^{(0)}(\tau) = S_*(\tau)$, а

$$S^{(m+1)}(\tau) = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)\, S^{(m)}(\tau')\, d\tau'. \tag{10}$$

Если

$$S^{(1)}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \omega_n(\tau, \tau_0), \tag{11}$$

то

$$S^{(m+1)}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\frac{\lambda}{\lambda_n(\tau_0)}\right]^m \omega_n(\tau, \tau_0). \tag{12}$$

Если собственные числа $\lambda_1(\tau_0) < \lambda_2(\tau_0) < \cdots$ (все они больше единицы) не очень близки к наименьшему $\lambda_0(\tau_0) > 1$, то при больших m основной вклад в (12) дает первое слагаемое

$$S^{(m+1)}(\tau) \sim A_0 \left[\frac{\lambda}{\lambda_0(\tau_0)}\right]^m \omega_0(\tau, \tau_0). \tag{13}$$

Так как $\lambda_0(\tau_0)$ и $\omega_0(\tau, \tau_0)$ нам не известны, то воспользуемся тем, что в этом случае

$$S^{(m+1)}(\tau) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0(\tau_0)} S^{(m)}(\tau), \tag{14}$$

то есть последовательные итерации ведут себя как члены геометрической прогрессии. Это позволяет свернуть ряд последовательных приближений:

$$S(\tau) \approx \sum_{m=0}^{p} S^{(m)}(\tau) + \frac{S^{(p)}(\tau)\, S^{(p+1)}(\tau)}{S^{(p+1)}(\tau) - S^{(p)}(\tau)}. \tag{15}$$

Вычисления показали, что такой способ усиления сходимости уменьшает необходимое число итераций примерно втрое.

б) Случай $\tau_0 > 1$. Здесь нами применялся вариационно-итерационный процесс. Такой процесс использовался ранее для нахождения интенсивности излучения [13]. Известно (см., например, [14]), что решение уравнения (1) сообщает минимум функционалу

$$\int_0^{\tau_0} S(\tau) \left| S(\tau) - \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' - 2S_*(\tau) \right| d\tau. \tag{16}$$

Исходя из некоторого приближения $S_0(\tau)$, находим последовательно его невязку

$$\Delta_1(\tau) = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S_0(\tau') d\tau' - S_0(\tau) + S_*(\tau) \tag{17}$$

и ее итерацию

$$\Delta_2(\tau) = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) \Delta_1(\tau') d\tau'. \tag{18}$$

Ясно, что функция $\Delta(\tau) = S(\tau) - S_0(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(\tau) = \Delta_1(\tau) + \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) \Delta(\tau') d\tau'. \tag{19}$$

Его решение ищем в виде

$$\Delta(\tau) = \alpha S_0(\tau) + \beta \Delta_1(\tau), \tag{20}$$

где α и β выбираем из условия минимума функционала вида (16). Легко видеть, что для их нахождения не нужно делать дополнительных итераций. Выбор $\Delta(\tau)$ в виде (20) позволяет решение $S(\tau)$ получить не в первом ($S(\tau) = (1 + \alpha) S_0(\tau) + \beta\Delta_1(\tau)$), а сразу в следующем приближении

$$S(\tau) = (1 + \alpha)[S_0(\tau) + \Delta_1(\tau)] - \alpha S_*(\tau) + \beta\Delta_2(\tau) \tag{21}$$

также без итераций.

Затем $S(\tau)$ можно принять за $S_0(\tau)$ и повторить приближение. Оказалось, что с каждым шагом такого процесса невязка уменьшается приблизительно на порядок. Теперь опишем, как изложенные методы использовались для нахождения функций $\Phi(\tau, \tau_0)$.

Вычисление функций $\Phi(\tau, \tau_0)$. При реализации этих методов были приняты меры для получения точности в 5 значащих цифр за возможно короткое время.

Некоторую трудность при вычислениях создает обращение в бесконечность ядерной $K(\tau)$ и резольвентной $\Phi(\tau, \tau_0)$ функций при $\tau = 0$, а также производной от $\Phi(\tau, \tau_0)$ при $\tau = \tau_0$. Для ослабления этой особенности вместо $\Phi(\tau, \tau_0)$ искалась функция

$$\chi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau, \tau_0) - K(\tau). \tag{22}$$

Она удовлетворяет уравнению вида (1) с

$$S_*(\tau) = K_2(\tau, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)\, K(\tau')\, d\tau'. \tag{23}$$

Функция $K_2(\tau, \tau_0)$ находилась численно и хранилась в памяти машины.

Кроме того, были сделаны замены переменных, так что $K(\tau)$, $\chi(\tau, \tau_0)$ и все промежуточные приближения вычислялись: при $\tau_0 \leqslant 1$ в точках $\tau = \frac{\tau_0}{2} e^{-x}$ и $\tau = \tau_0 - \frac{\tau_0}{2} e^{-x}$, где $x = 0\ (\Delta x)\, n \cdot \Delta x$, а при $\tau_0 > 1$ в точках $\tau = ae^{-x}$ и $\tau = \tau_0 - ae^{-x}$ с теми же x, а также $\tau = a\,(\Delta\tau)(\tau_0 - a)$. Значения Δx, a и $\Delta\tau$ выбирались из соображений удобства и достижения определенной точности.

Величина n выбиралась таким образом, чтобы при $\tau < (\tau_0/2)\, e^{-n\Delta x}$ (или $\tau < ae^{-n\Delta x}$) с точностью до пяти значащих цифр было справедливо равенство (6), а $K(\tau_0 - \tau)$, $\chi(\tau, \tau_0)$ и $\chi(\tau_0 - \tau, \tau_0)$ можно было бы с той же точностью заменить на $K(\tau_0)$, $\chi(0, \tau_0)$ и $\chi(\tau_0, \tau_0)$, соответственно.

Аналогичные замены переменной интегрирования были сделаны и при вычислении интегралов в (1). При этом обращалось внимание на то, чтобы при нахождении функций, входящих в подынтегральное выражение, количество обращений к вычислению экспоненциальных и логарифмических функций было сведено к минимуму.

Для нахождения значений функций в точках, отличных от точек указанного набора, применялась интерполяция по формуле Лагранжа с четырьмя узлами. Для того, чтобы не менять формулу при интерполировании вблизи краев таблиц с равноотстоящими узлами, все таблицы продолжались в обе стороны на один шаг.

Все интегралы вычислялись по квадратурным формулам Гаусса с числом узлов 10—14. Это обеспечивало желаемую точность.

В качестве исходного приближения были взяты $\chi(\tau, \tau_0) = K_2(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 \leqslant 1$, $\chi(\tau, \tau_0) = 1$ при $1 < \tau_0 \leqslant 2$. При $\tau_0 > 2$ использовалось приближенное решение, полученное в работе [15] для резонансного рассеяния, но пригодное и в нашем случае:

$$Z(\tau, \tau_0) = Z(\tau) \frac{\Psi(\tau_0 - \tau)}{\Psi(\tau_0)} + K(\tau) \left[\frac{\Psi(\tau_0 - \tau)}{\Psi(\tau_0)} - 1 \right], \quad (24)$$

где $Z(\tau) = Z(\tau, \infty) = \Phi(\tau) - K(\tau)$. Наконец, при $\lambda = 1$ и $\tau_0 > 3$ начальным приближением служило более точное (асимптотическое при $\tau_0 \to \infty$) выражение, найденное В. В. Соболевым именно для монохроматического изотропного рассеяния [16]

$$Z(\tau, \tau_0) = Z(\tau) - \sqrt{3}\, \frac{\Psi(\tau) - \Psi(\tau_0 - \tau) + \Psi(\tau_0) - \tau\sqrt{3}}{2\Psi(\tau_0) - \tau_0\sqrt{3}}. \quad (25)$$

Значения функций $Z(\tau)$ и $\Psi(\tau) = \Psi(\tau, \infty)$ были взяты из работы [10].

Соответственно сказанному были составлены две программы вычисления функций $\Phi(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 \leqslant 1$ и $\tau_0 > 1$. Программы написаны на языке машин группы М-20. Все вычисления производились на ЭВМ БЭСМ-3М и М-222 Вычислительного центра ЛГУ.

По этим программам вычисления можно производить для τ_0, не превосходящих 10. На вычисление таблицы одной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ (т. е. для данных λ и τ_0) при $\tau_0 \leqslant 1$ уходило примерно 6 минут машинного времени БЭСМ-3М, включая перфорацию и печать. Время, затрачиваемое на то же при $\tau_0 > 1$, составляло 10—15 минут, постепенно увеличиваясь с увеличением τ_0.

Результаты вычислений. Таким образом были составлены подробные таблицы функций $\Phi(\tau, \tau_0)$ для монохроматического изотропного рассеяния. Точность их—5 значащих цифр. Эти таблицы хранятся на перфокартах и в напечатанном виде. Для тех, что на перфокартах, значения аргумента такие же, какие указывались выше при описании вычислений, что дает возможность находить $\Phi(\tau, \tau_0)$ путем интерполирования по 4 точкам с той же точностью 5 знаков. Сетка значений λ и τ_0 та же, что и в таблицах Карлстедта и Малликина [4].

Точность полученных значений оценивалась несколькими способами. Например, проверялось, что при изменении параметров программ (a, Δx, n и др.) и числа узлов квадратурных формул результат не изменяется в пределах 5 значащих цифр. Кроме того, по таблицам $\Phi(\tau, \tau_0)$ были вычислены функции Амбарцумяна $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ (см. II часть работы [17]), значения которых совпали с полученными другим путем в [4] в пределах 5—6 значащих цифр.

Отметим, что значения $\Phi(\tau, \tau_0)$, имеющиеся в [6], в некоторых случаях отличаются от наших уже в третьем знаке.

Не имея возможности поместить здесь сколько-нибудь подробные таблицы $\Phi(\tau, \tau_0)$, сделаем извлечение из них для $\tau_0 = 1$ и $\tau_0 = 2$ (табл. 1 и 2).

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ $\Phi(\tau, \tau_0)$ ПРИ $\tau_0 = 1$

τ \ λ	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	1.00
0.01	1.125	1.671	1.979	2.319	2.506	2.706
0.02	0.9578	1.440	1.716	2.027	2.199	2.386
0.03	0.8609	1.306	1.566	1.860	2.025	2.204
0.04	0.7928	1.213	1.460	1.744	1.903	2.078
0.05	0.7404	1.141	1.379	1.654	1.810	1.981
0.06	0.6978	1.082	1.313	1.582	1.734	1.903
0.07	0.6620	1.033	1.258	1.521	1.671	1.838
0.08	0.6311	0.9905	1.210	1.468	1.617	1.781
0.09	0.6041	0.9532	1.168	1.422	1.569	1.732
0.10	0.5800	0.9199	1.131	1.381	1.526	1.688
0.12	0.5385	0.8626	1.066	1.310	1.452	1.612
0.14	0.5037	0.8142	1.012	1.250	1.390	1.548
0.16	0.4738	0.7725	0.9642	1.198	1.336	1.492
0.18	0.4476	0.7357	0.9225	1.152	1.288	1.443
0.20	0.4243	0.7028	0.8851	1.110	1.245	1.398
0.25	0.3755	0.6332	0.8054	1.022	1.152	1.302
0.30	0.3363	0.5762	0.7396	0.9473	1.074	1.220
0.35	0.3037	0.5280	0.6833	0.8830	1.006	1.148
0.40	0.2758	0.4861	0.6338	0.8256	0.9443	1.083
0.45	0.2517	0.4490	0.5894	0.7734	0.8881	1.023
0.50	0.2304	0.4156	0.5490	0.7253	0.8357	0.9659
0.55	0.2115	0.3853	0.5118	0.6802	0.7863	0.9118
0.60	0.1944	0.3575	0.4772	0.6376	0.7391	0.8596
0.65	0.1789	0.3317	0.4447	0.5969	0.6937	0.8088
0.70	0.1648	0.3075	0.4139	0.5578	0.6495	0.7590
0.75	0.1517	0.2848	0.3844	0.5197	0.6062	0.7096
0.80	0.1396	0.2631	0.3559	0.4824	0.5634	0.6604
0.85	0.1282	0.2422	0.3281	0.4454	0.5206	0.6106
0.90	0.1174	0.2218	0.3005	0.4080	0.4769	0.5596
0.95	0.1068	0.2012	0.2722	0.3690	0.4311	0.5054
1.00	0.0955	0.1778	0.2393	0.3226	0.3759	0.4395

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ $\Phi(\tau, \tau_0)$ ПРИ $\tau_0 = 2$

τ \ λ	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	1.00
0.01	1.129	1.685	2.007	2.378	2.593	2.840
0.02	0.9613	1.454	1.745	2.088	2.290	2.524
0.03	0.8645	1.321	1.595	1.922	2.117	2.346
0.04	0.7965	1.228	1.490	1.807	1.998	2.223
0.05	0.7441	1.156	1.410	1.719	1.907	2.129
0.06	0.7016	1.098	1.345	1.648	1.833	2.054
0.07	0.6659	1.049	1.290	1.589	1.772	1.992
0.08	0.6351	1.007	1.243	1.538	1.720	1.939
0.09	0.6081	0.9698	1.202	1.493	1.674	1.893
0.10	0.5841	0.9368	1.165	1.453	1.633	1.852
0.12	0.5428	0.8800	1.101	1.384	1.563	1.782
0.14	0.5081	0.8323	1.048	1.327	1.505	1.723
0.16	0.4783	0.7911	1.002	1.278	1.454	1.673
0.18	0.4523	0.7549	0.9615	1.234	1.410	1.629
0.20	0.4291	0.7226	0.9253	1.195	1.370	1.590
0.25	0.3808	0.6546	0.8486	1.112	1.287	1.507
0.30	0.3420	0.5992	0.7859	1.044	1.218	1.439
0.35	0.3098	0.5526	0.7328	0.9861	1.158	1.381
0.40	0.2824	0.5125	0.6865	0.9352	1.106	1.329
0.45	0.2588	0.4772	0.6456	0.8896	1.059	1.282
0.50	0.2381	0.4458	0.6088	0.8482	1.017	1.239
0.55	0.2197	0.4176	0.5754	0.8102	0.9769	1.199
0.60	0.2034	0.3920	0.5448	0.7749	0.9398	1.161
0.65	0.1886	0.3686	0.5166	0.7420	0.9049	1.124
0.70	0.1753	0.3471	0.4904	0.7110	0.8717	1.090
0.75	0.1632	0.3273	0.4659	0.6816	0.8400	1.056
0.80	0.1521	0.3089	0.4430	0.6538	0.8097	1.023
0.85	0.1420	0.2917	0.4215	0.6272	0.7804	0.9914
0.90	0.1327	0.2757	0.4012	0.6018	0.7522	0.9602
0.95	0.1241	0.2608	0.3819	0.5774	0.7248	0.9296
1.00	0.1162	0.2467	0.3637	0.5539	0.6982	0.8996
1.10	0.1020	0.2210	0.3297	0.5092	0.6469	0.8405
1.20	0.08968	0.1980	0.2988	0.4673	0.5978	0.7826
1.30	0.07896	0.1773	0.2702	0.4276	0.5505	0.7255
1.40	0.06954	0.1585	0.2438	0.3896	0.5044	0.6688
1.50	0.06121	0.1414	0.2191	0.3532	0.4594	0.6121
1.60	0.05378	0.1255	0.1957	0.3178	0.4149	0.5551
1.70	0.04709	0.1107	0.1734	0.2830	0.3705	0.4972
1.80	0.04098	0.09667	0.1518	0.2483	0.3256	0.4376
1.90	0.03524	0.08289	0.1300	0.2125	0.2785	0.3743
2.00	0.02924	0.06748	0.1048	0.1698	0.2215	0.2963

Таблица 3

ЗНАЧЕНИЯ МОМЕНТОВ $\Phi_n(\tau)$

τ \ λ	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	1.0
0.5	0.2151	0.3392	0.4140	0.4998	0.5475	0.5991
	0.03934	0.06387	0.07914	0.09702	0.1071	0.1182
	0.01152	0.01890	0.02354	0.02902	0.03213	0.03554
	0.004022	0.006628	0.008273	0.01022	0.01133	0.01255
	0.001537	0.002538	0.003172	0.003923	0.004352	0.004822
	0.0006203	0.001025	0.001282	0.001587	0.001761	0.001952
1.0	0.3020	0.5103	0.6514	0.8309	0.9404	1.067
	0.09714	0.1752	0.2310	0.3049	0.3513	0.4060
	0.05382	0.09887	0.1320	0.1764	0.2045	0.2380
	0.03625	0.06730	0.09036	0.1215	0.1413	0.1650
	0.02705	0.05051	0.06801	0.09173	0.1069	0.1250
	0.02147	0.04021	0.05423	0.07328	0.08545	0.1000
1.5	0.3490	0.6191	0.8193	1.098	1.283	1.515
	0.1510	0.2933	0.4084	0.5785	0.6955	0.8463
	0.1176	0.2373	0.3373	0.4880	0.5940	0.7314
	0.1146	0.2357	0.3383	0.4948	0.6055	0.7499
	0.1253	0.2602	0.3756	0.5526	0.6784	0.8427
	0.1467	0.3064	0.4438	0.6550	0.8056	1.003
2.0	0.3758	0.6900	0.9399	1.316	1.588	1.955
	0.1938	0.4015	0.5861	0.8865	1.115	1.436
	0.1892	0.4138	0.6227	0.9780	1.245	1.632
	0.2368	0.5325	0.8136	1.292	1.669	2.207
	0.3368	0.7690	1.185	1.900	2.465	3.277
	0.5166	1.191	1.844	2.974	3.870	5.160
2.5	0.3913	0.7366	1.026	1.494	1.858	2.391
	0.2261	0.4933	0.7504	1.207	1.588	2.172
	0.2588	0.6062	0.9604	1.616	2.177	3.054
	0.3890	0.9455	1.532	2.638	3.599	5.114
	0.6735	1.674	2.744	4.790	6.581	9.421
	1.2678	3.194	5.274	9.283	12.81	18.43
3.0	0.4005	0.7671	1.088	1.636	2.095	2.826
	0.2496	0.5675	0.8944	1.523	2.094	3.055
	0.3206	0.7965	1.322	2.386	3.385	5.108
	0.5543	1.446	2.469	4.598	6.633	10.19
	1.1194	3.006	5.219	9.897	14.42	22.37
	2.4790	6.777	11.89	22.81	33.44	52.21

Таблица 4

ЗНАЧЕНИЯ МОМЕНТОВ $\Phi_n^*(\tau_0)$

τ_0 \ λ	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	1.0
0.5	0.2151	0.3392	0.4140	0.4998	0.5475	0.5991
	0.06823	0.1058	0.1279	0.1529	0.1666	0.1814
	0.02597	0.03984	0.04791	0.05693	0.06188	0.06714
	0.01065	0.01623	0.01944	0.02301	0.02495	0.02702
	0.004553	0.006902	0.008244	0.009729	0.01053	0.01139
	0.001999	0.003018	0.003598	0.004236	0.004581	0.004946
1.0	0.3020	0.5103	0.6514	0.8309	0.9404	1.067
	0.2043	0.3350	0.4203	0.5260	0.5891	0.6614
	0.1605	0.2587	0.3213	0.3975	0.4424	0.4934
	0.1343	0.2139	0.2638	0.3238	0.3590	0.3985
	0.1164	0.1838	0.2256	0.2754	0.3043	0.3366
	0.1033	0.1620	0.1981	0.2407	0.2653	0.2928
1.5	0.3490	0.6191	0.8193	1.098	1.283	1.515
	0.3725	0.6353	0.8206	1.069	1.230	1.426
	0.4500	0.7503	0.9557	1.224	1.395	1.601
	0.5734	0.9418	1.188	1.505	1.704	1.942
	0.7539	1.224	1.534	1.928	2.171	2.461
	1.012	1.629	2.031	2.535	2.845	3.211
2.0	0.3758	0.6900	0.9399	1.316	1.588	1.955
	0.5577	0.9786	1.294	1.746	2.060	2.474
	0.9170	1.568	2.038	2.692	3.136	3.710
	1.579	2.653	3.408	4.437	5.123	5.999
	2.793	4.634	5.903	7.603	8.722	10.14
	5.034	8.268	10.46	1.337	15.26	17.62
2.5	0.3913	0.7366	1.026	1.494	1.857	2.391
	0.7522	1.348	1.815	2.526	3.056	3.807
	1.574	2.743	3.623	4.914	5.847	7.140
	3.426	5.860	7.637	10.18	11.98	14.43
	7.640	12.88	16.63	21.88	25.54	30.46
	17.32	28.89	37.00	48.22	55.92	66.17
3.0	0.4005	0.7671	1.088	1.636	2.095	2.826
	0.9519	1.734	2.369	3.386	4.191	5.424
	2.427	4.296	5.747	7.974	9.678	12.22
	6.405	11.11	14.65	19.93	23.87	29.22
	17.26	29.51	38.50	51.62	61.20	74.97
	47.22	79.77	103.2	136.8	161.0	195.3

В таблицах 3 и 4 приведены значения моментов функций $\Phi(\tau, \tau_0)$, входящих в некоторые формулы [2]:

$$\Phi_n(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \tau^n \Phi(\tau, \tau_0)\, d\tau,$$

$$\Phi_n^*(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} (\tau_0 - \tau)^n \Phi(\tau, \tau_0)\, d\tau \tag{26}$$

для различных τ_0 и λ и $n = 0\,(1)\,5$. Эти моменты были вычислены В. М. Лоскутовым.

Полученные таблицы можно применить для оценки точности приближенных решений. Откладывая подробную оценку точности асимптотик различных величин (см. часть III работы), скажем здесь лишь о точности формул (24) и (25). Сравнение начального приближения с окончательными значениями функции $\chi(\tau, \tau_0)$ показало, что формула (24) дает эту функцию с точностью 20% при $\tau_0 = 3.5$ и любых λ. В то же время при $\lambda = 1$ и $\tau_0 = 3.5$ по формуле (25) получаем $\chi(\tau, \tau_0)$ с относительной ошибкой порядка 10^{-3}. Точность формул для $\Phi(\tau, \tau_0)$ такая же.

В заключение заметим, что составленные программы годятся для решения уравнений (4) или (1) при $\tau_0 \leqslant 10$ не только при ядре вида (2), но и при произвольном ядре. Например, легко могут быть сосчитаны резольвентные функции $\Phi^0(\tau, \tau_0)$, $\Phi^1(\tau, \tau_0)$ и $\Phi^2(\tau, \tau_0)$ при трехчленной индикатрисе рассеяния. Они соответствуют последовательным трем составляющим поля излучения при разложении его характеристик по косинусам углов, кратных азимуту [2]. Небольшая таблица полученных таким образом значений этих функций помещена в книге [2].

Выражаю благодарность Т. М. Максимовой за помощь при проведении расчетов.

Ленинградский государственный
университет

THE CALCULATION OF RADIATION FIELD UNDER THE ASSUMPTION OF MONOCHROMATIC ISOTROPIC SCATTERING. I. THE GREEN FUNCTIONS

D. I. NAGIRNER

The method of computation of the Green function $\Phi(\tau, \tau_0)$ of the basic integral equation of the theory of monochromatic isotropic scattering of radiation in a slab of finite optical thickness τ_0 is given. The tables of $\Phi(\tau, \tau_0)$ for $\tau_0 = 1$ and 2 and of the moments of Φ for $\tau_0 = 0.5\,(0.5)\,3.0$ and various values of the particle albedo are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
2. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
3. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 120, 69, 1958.
4. *J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser., 12, No. 113, 1966.
5. *Y. Sobouti*, Ap. J., Suppl. ser., 7, No. 72, 1963.
6. *H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba*, Mem. RM—4958—PR, April 1966, The RAND Corporation.
7. *В. В. Соболев, И. Н. Минин*, Астрон. ж., 38, 1025, 1961.
8. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 3, 5, 1967.
9. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 120, 63, 1958.
10. *А. Б. Шнейвайс*, Вестн. ЛГУ, № 7, 144, 1973.
11. *H. Kagiwada, R. Kalaba*, Calcolo, 4, No. 1, 11, 1967.
12. *D. G. Hummer, G. Rybicki*, Comp. Phys., 7, Academ. Press, N.-Y., 1967.
13. *Т. А. Гермогенова*, ДАН СССР, 181, 519, 1968.
14. *С. Г. Михлин*, Вариационные методы в математической физике, Наука, М., 1970.
15. *Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович*, ИАЭ—1804, М., 1969.
16. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 155, 336, 1964.
17. *В. М. Лоскутов*, Астрофизика, 9, 344, 1973.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

РАСЧЕТ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ. II. ФУНКЦИИ $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ АМБАРЦУМЯНА И ИХ МОМЕНТЫ

В. М. ЛОСКУТОВ

Поступила 18 мая 1973

Интегрированием резольвентной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$, способ вычисления которой дан в первой части работы [1], находятся функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ Амбарцумяна и их моменты $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$. Приводятся таблицы первых шести моментов для $\tau_0 = 0.2, 0.5\ (0.5)\ 3.0$ и нескольких альбедо частицы. Путем сравнения точных значений рассматриваемых функций с даваемыми асимптотическими формулами сделана оценка точности последних.

Введение. В первой части настоящей работы [1] был описан алгоритм нахождения резольвентной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ в задаче о монохроматическом изотропном рассеянии излучения плоским слоем конечной оптической толщины τ_0 (τ — оптическая глубина точки в слое) и приведены некоторые результаты вычислений этой функции и ее моментов. Как известно [2], знание $\Phi(\tau, \tau_0)$ позволяет определить интенсивность излучения на любой оптической глубине при произвольных источниках излучения. В частности, могут быть найдены функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau)$, введенные В. А. Амбарцумяном [3, 4] при решении задачи о диффузном отражении и пропускании света плоским слоем. Согласно [2], функции Амбарцумяна выражаются через $\Phi(\tau, \tau_0)$ при помощи формул

$$\varphi(\eta, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Phi(\tau, \tau_0)\, d\tau, \tag{1}$$

$$\psi(\eta, \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)\, d\tau, \tag{2}$$

где η — косинус угла между направлением луча и нормалью к слою. Часто бывают нужны и моменты этих функций

$$\alpha_n(\tau_0) = \int_0^1 \eta^n \varphi(\eta, \tau_0)\, d\eta, \tag{3}$$

$$\beta_n(\tau_0) = \int_0^1 \eta^n \psi(\eta, \tau_0)\, d\eta. \tag{4}$$

Табулированию функций $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ и их моментов посвящено довольно много работ [5—11]. В большинстве из них значения функций находились путем решения систем интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют эти функции. Оценить точность вычислений довольно трудно. При решении системы интегральных уравнений методом итераций для вероятности выживания кванта близкой к единице и больших τ_0 сходимость итераций медленная. Когда же решается система интегро-дифференциальных уравнений, необходимо сделать большое число шагов, прежде чем дойдем до больших τ_0. При использовании формул (1) и (2) мы просто вычисляем интегралы, и если известна точность вычисления $\Phi(\tau, \tau_0)$, то легко оценить точность находимых значений $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$. К оценке точности и сравнению с результатами других авторов мы обратимся ниже.

Способ вычислений. Мы имели, найденные в [1], значения функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 < 1$ в точках $\tau = (\tau_0/2)\, e^{-x}$ и $\tau = \tau_0 - (\tau_0/2)\, e^{-x}$, а при $\tau_0 > 1$ в точках $\tau = ae^{-x}$, $\tau = \tau_0 - ae^{-x}$, во всех случаях $x = 0(\Delta x)(n \cdot \Delta x)$ и $\tau = a(\Delta\tau)\tau_0 - a$. В соответствии с этим интегралы в формулах (1) и (2) разбивались на два (при $\tau_0 \leqslant 1$) или три ($\tau_0 > 1$) интеграла и делались замены переменных, так что расчетные формулы принимали вид

$$\varphi(\eta, \tau_0) = 1 + a\int_0^\infty \Big[e^{-ae^{-x}\frac{1}{\eta}}\, \Phi(ae^{-x}, \tau_0) + e^{-(\tau_0 - ae^{-x})\frac{1}{\eta}}\, \Phi(\tau_0 - ae^{-x}, \tau_0) \Big| e^{-x}\, dx \tag{5}$$

и

$$\psi(\eta, \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + a\int_0^\infty \Big[e^{-ae^{-x}\frac{1}{\eta}} \Phi(\tau_0 - ae^{-x}, \tau_0) + \\ + e^{-(\tau_0 - ae^{-x})\frac{1}{\eta}} \Phi(ae^{-x}, \tau_0) \Big] e^{-x}\, dx, \tag{6}$$

где при $\tau_0 \leqslant 1$ величина a равна $\tau_0/2$. При $\tau_0 > 1$ в правые части формул (5) и (6) добавлялись члены

$$\int_a^{\tau_0 - a} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Phi(\tau, \tau_0)\, d\tau \text{ и } \int_a^{\tau_0 - a} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)\, d\tau, \text{ соответственно.}$$

Все интегралы в этих формулах вычислялись по правилу Симпсона, причем верхний предел в интегралах по x заменялся на $n\Delta x$. Оставшиеся части интегралов от $n\Delta x$ до ∞ вычислялись точно с учетом того, что с заданной точностью в 5 значащих цифр функция $\Phi(ae^{-x}, \tau_0) = c \cdot x + \lambda/2$ и $\Phi(\tau_0 - ae^{-x}, \tau_0) = \text{const} = \Phi(\tau_0 - ae^{-n\Delta x}, \tau_0)$, когда $x \gg 1$.

Для нахождения моментов $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$ в формулах (3) и (4) производилась замена переменной $\eta = e^{-y}$ и интегралы вычислялись по формуле Гаусса — Лагерра. Использовалась 32-точечная квадратурная формула, что обеспечивает 5—6 значащих цифр.

Оценка точности получаемых значений $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ у их моментов проводилась путем проверки различных соотношений, которым удовлетворяют рассматриваемые функции. Прежде всего проверялись равенства (см., например, [12])

$$\left[1 - \frac{\lambda}{2}(\alpha_0 - \beta_0)\right]\left[1 - \frac{\lambda}{2}(\alpha_0 + \beta_0)\right] = 1 - \lambda \tag{7}$$

и

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0\right)\alpha_2 + \frac{\lambda}{2}\beta_0\beta_2 + \frac{\lambda}{4}(\alpha_1^2 - \beta_1^2) = \frac{1}{3}. \tag{8}$$

Во всех случаях эти равенства выполнялись с относительной погрешностью, не превышающей 10^{-6}.

Кроме того, проверялись соотношения, связывающие моменты $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$ с моментами $\Phi_n(\tau_0)$ функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ (см. [13])

$$1 + \Phi_0 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}(\alpha_0 + \beta_0)} \tag{9}$$

и

$$\Phi_1 = \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1 - \beta_1 - \tau_0\beta_0}{1 - \lambda} \tag{10}$$

Эти соотношения выполнялись с относительной ошибкой меньше 10^{-5}. К сожалению, все эти формулы не обеспечивают полного контроля точности функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ раздельно.

Как показало сравнение с результатами вычислений других авторов, наибольшие расхождения встречаются в значениях функции $\psi(\eta, \tau_0)$. Поэтому весьма полезным было равенство

$$\int_0^1 \frac{\psi(\eta, \tau_0)}{\eta} d\eta = \Phi(\tau_0, \tau_0), \tag{11}$$

куда входит только функция $\psi(\eta, \tau_0)$. Это соотношение у нас выполнялось с ошибкой, не превышающей единицу пятой значащей цифры. На основании изложенного мы считаем, что вычисляемые нами значения функций $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ и их моментов имеют ошибку порядка 1—2 единиц пятой значащей цифры.

Проводилось также сравнение с имеющимися в литературе таблицами этих функций. Наиболее подробными являются таблицы Карлстедта и Малликина [9], в которых приводятся значения функций Амбарцумяна и их нулевых моментов с шестью значащими цифрами. При λ близких или равных 1 наши значения отличаются от значений этих авторов не более чем на 1 единицу пятой значащей цифры при $\eta \geqslant 0.03$. При меньших η различие возрастает с уменьшением η. Это обусловлено неточностью вычисления функции $\varphi(\eta)$ для полубесконечной атмосферы, используемой Карлстедтом и Малликином. С уменьшением λ возрастают различия в значениях функций $\psi(\eta, \tau_0)$ при всех значениях η, достигая нескольких единиц четвертого знака для $\lambda = 0.3$. Проверка соотношения (11) показала, что $\Phi(\tau_0, \tau_0)$, вычисленная по данным указанных авторов, отличается как от наших значений этой величины, так и значений, приведенных в работе Кагивада и Калаба [14], которые согласуются с нашими в пределах нескольких единиц пятой значащей цифры.

При малых λ мы сравнили наши результаты с даннными Беллмана и др. [8]. Оказалось, что отличие их значений функций от наших не превышает единицы пятого знака.

Таким образом, сравнение с таблицами других авторов подтверждает оценку точности вычисленных нами значений функций Амбарцумяна и их моментов, сделанную ранее.

Результаты вычислений. Описанным методом были вычислены функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ с шагом по η, равным 0.01, и моменты $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau)$ $(0 \leqslant n \leqslant 10)$ для большого набора значений λ и τ_0, близкого к набору Карлстедта и Малликина. Поскольку для большинства приложений таблицы функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ этих авторов вполне достаточны, то мы приводим в таблицах 1 и 2 лишь значения моментов $\alpha_n(\tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$.

Представляет интерес сравнить точные значения рассматриваемых величин с даваемыми асимптотическими (при больших τ_0) формулами, которые были получены В. В. Соболевым [15]. Мы приведем их в форме, предложенной МакКормиком [16]:

$$\varphi(\eta, \tau_0) = \frac{\varphi(\eta)}{1 - k\mu}\left[1 - \frac{k\mu}{\operatorname{th} \varkappa}\right], \tag{12}$$

$$\psi(\eta, \tau_0) = \frac{\varphi(\eta)}{1 - k\mu}\,\frac{k\mu}{\operatorname{sh} \varkappa}, \tag{13}$$

и

$$\alpha_n(\tau_0) = \alpha_n - u_n\,\frac{ke^{-\varkappa}}{\operatorname{sh} \varkappa}, \tag{14}$$

$$\beta_n(\tau_0) = \frac{u_n k}{\operatorname{sh} \varkappa}. \tag{15}$$

Здесь k — корень характеристического уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1 + k}{1 - k} = 1, \tag{16}$$

$\alpha_n = \alpha_n(\infty)$ — моменты функции $\varphi(\eta)$, а $\varkappa = k(\tau_0 + 2\tau_e)$, где τ_e — так называемая экстраполированная длина, которая выражается через $\varphi(\eta)$ по формуле

$$\tau_e = \frac{1}{2k} \ln \frac{2\varphi^2\left(\frac{1}{k}\right)(\lambda - 1 + k^2)}{1 - k^2}. \tag{17}$$

Величины u_n также выражаются через $\varphi(\eta)$:

$$u_n = \int_0^1 \frac{\eta^{n+1}\,\varphi(\eta)}{1 - k\eta}\,d\eta. \tag{18}$$

В табл. 3 приводится относительная погрешность асимптотических формул для функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ при $\eta = 1$, где наблю-

МОМЕНТЫ $\alpha_n(\tau_0)$ *Таблица 1*

τ_0	λ = 0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	1.0
1	2	3	4	5	6	7	8
				α_0			
0.2	1.0956	1.1418	1.1671	1.1941	1.2082	1.2199	1.2229
0.5	1.1390	1.2165	1.2625	1.3147	1.3436	1.3683	1.3747
1.0	1.1619	1.2640	1.3302	1.4119	1.4606	1.5045	1.5163
1.5	1.1684	1.2809	1.3581	1.4595	1.5241	1.5854	1.6024
2.0	1.1705	1.2876	1.3707	1.4852	1.5623	1.6394	1.6616
2.5	1.1712	1.2903	1.3765	1.4995	1.5865	1.6779	1.7051
3.0	1.1714	1.2914	1.3793	1.5078	1.6023	1.7064	1.7386
∞	1.1716	1.2922	1.3820	1.5195	1.6345	1.8182	2.0000
				α_1			
0.2	0.55306	0.57883	0.59295	0.60799	0.61598	0.62241	0.62407
0.5	0.58063	0.62604	0.65310	0.68391	0.70099	0.71588	0.71937
1.0	0.59638	0.65830	0.69884	0.74918	0.77935	0.80659	0.81390
1.5	0.60110	0.67035	0.71849	0.78236	0.82334	0.86243	0.87329
2.0	0.60266	0.67519	0.72753	0.80056	0.85027	0.90029	0.91471
2.5	0.60319	0.67719	0.73181	0.81090	0.86748	0.92745	0.94541
3.0	0.60338	0.67804	0.73337	0.81686	0.87874	0.94765	0.96911
∞	0.60348	0.67866	0.73582	0.82532	0.90188	1.02718	1.15470
				α_2			
0.2	0.36966	0.38732	0.39700	0.40731	0.41273	0.41720	0.41834
0.5	0.38956	0.42134	0.44031	0.46193	0.47392	0.48417	0.48683
1.0	0.40143	0.44553	0.47452	0.51090	0.53228	0.55187	0.55713
1.5	0.40511	0.45484	0.48961	0.53596	0.56580	0.59435	0.60226
2.0	0.40635	0.45864	0.49666	0.55005	0.58657	0.62343	0.63407
2.5	0.40678	0.46023	0.50004	0.55811	0.59992	0.64441	0.65777
3.0	0.40694	0.46091	0.50161	0.56279	0.60870	0.66008	0.67612
∞	0.40702	0.46142	0.50322	0.56945	0.62679	0.72195	0.82035
				α_3			
0.2	0.27755	0.29094	0.29829	0.30611	0.31022	0.31362	0.31448
0.5	0.29304	0.31741	0.33195	0.34856	0.35777	0.36565	0.36769
1.0	0.30252	0.33667	0.35917	0.38721	0.40407	0.41933	0.42343
1.5	0.30533	0.34423	0.37139	0.40768	0.43109	0.45349	0.45973
2.0	0.30655	0.34736	0.37716	0.41916	0.44796	0.47709	0.48551
2.5	0.30691	0.34868	0.37995	0.42577	0.45887	0.49418	0.50480
3.0	0.30704	0.34925	0.38130	0.42961	0.46606	0.50697	0.51978
∞	0.30712	0.34968	0.38258	0.43511	0.48094	0.55766	0.63782

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
				α_4			
0.2	0.22217	0.23295	0.23886	0.24516	0.24847	0.25120	0.25190
0.5	0.23483	0.25456	0.26636	0.27981	0.28728	0.29366	0.29532
1.0	0.24270	0.27053	0.28889	0.31180	0.32558	0.33806	0.34141
1.5	0.24524	0.27689	0.29914	0.32893	0.34817	0.36639	0.37172
2.0	0.24611	0.27954	0.30403	0.33861	0.36237	0.38642	0.39338
2.5	0.24642	0.28067	0.30640	0.34421	0.37158	0.40084	0.40964
3.0	0.24654	0.28116	0.30755	0.34747	0.37767	0.41165	0.42229
∞	0.24660	0.28153	0.30866	0.35216	0.39031	0.45488	0.52223
				α_5			
0.2	0.18521	0.19423	0.19917	0.20444	0.20721	0.20949	0.21007
0.5	0.19590	0.21248	0.22238	0.23368	0.23996	0.24533	0.24672
1.0	0.20262	0.22610	0,24160	0.26095	0.27259	0.28314	0.28597
1.5	0.20481	0.23158	0.25042	0.27567	0.29199	0.30762	0.31198
2.0	0.20558	0.23388	0.25465	0.28403	0.30424	0.32472	0.33064
2.5	0.20585	0.23487	0.25671	0.28888	0.31221	0.33717	0.34469
3.0	0.20595	0.23529	0.25772	0.29172	0.31749	0.34653	0.55563
∞	0.20601	0.23562	0.25869	0.29580	0.32846	0.38377	0.44230

Таблица 2

МОМЕНТЫ $\beta_n(\tau_0)$

τ_0	λ						
	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	1.0
1	2	3	4	5	6	7	8
				β_0			
0.2	0.66014	0.70237	0.72562	0.75048	0.76357	0.77438	0.77714
0.5	0.43080	0.49273	0.53051	0.57423	0.58975	0.61984	0.62534
1.0	0.23418	0.29866	0.34409	0.40344	0.44035	0.47444	0.48370
1.5	0.13358	0.18844	0.23225	0.29649	0.34082	0.38503	0.39762
2.0	0.07798	0.12098	0.15941	0.22236	0.27057	0.32277	0.33842
2.5	0.04615	0.07838	0.11032	0.16854	0.21797	0.27634	0.29486
3.0	0.02756	0.05106	0.07670	0.12850	0.17719	0.24013	0.26134

Таблица 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
				β_1			
0.2	0.40145	0.42573	0.43908	0.45335	0.46086	0.46709	0.46864
0.5	0.28656	0.32493	0.34827	0.37523	0.39034	0.40732	0.40640
1.0	0.16693	0.20944	0.23922	0.27798	0.30201	0.32418	0.33019
1.5	0.09881	0.13627	0.16493	0.20917	0.23889	0.26845	0.27686
2.0	0.05906	0.08910	0.11566	0.15884	0.19174	0.22725	0.23788
2.5	0.03553	0.05842	0.08081	0.12126	0.15539	0.19555	0.20826
3.0	0.02148	0.03838	0.05654	0.09286	0.12676	0.17039	0.18507
				β_2			
0.2	0.28375	0.30056	0.30980	0.31967	0.32487	0.32915	0.33025
0.5	0.21187	0.23934	0.25603	0.27529	0.28607	0.29533	0.29774
1.0	0.12871	0.16017	0.18215	0.21069	0.22836	0.24464	0.24906
1.5	0.07914	0.10644	0.12875	0.16118	0.18341	0.20550	0.21177
2.0	0.04751	0.07055	0.09079	0.12355	0.14844	0.17526	0.18328
2.5	0.02894	0.04669	0.06392	0.09487	0.12089	0.15143	0.16109
3.0	0.01766	0.03088	0.04495	0.07291	0.09890	0.13226	0.14347
				β_3			
0.2	0.21836	0.23117	0.23821	0.24573	0.24969	0.25296	0.25379
0.5	0.16719	0.18849	0.20143	0.21635	0.22470	0.23187	0.23374
1.0	0.10432	0.12921	0.14656	0.16907	0.18300	0.19583	0.19930
1.5	0.06446	0.08715	0.10499	0.13086	0.14858	0.16616	0.17116
2.0	0.03969	0.05835	0.07468	0.10103	0.12101	0.14251	0.14894
2.5	0.02442	0.03890	0.05289	0.07793	0.09893	0.12354	0.13132
3.0	0.01501	0.02586	0.03735	0.06007	0.08112	0.10811	0.11716
				β_4			
0.2	0.17716	0.18750	0.19318	0.19925	0.20244	0.20508	0.20575
0.5	0.13776	0.15513	0.16567	0.17783	0.18463	0.19047	0.19199
1.0	0.08752	0.10808	0.12239	0.14095	0.15242	0.16299	0.16585
1.5	0.05477	0.07369	0.08853	0.11002	0.12473	0.13932	0.14346
2.0	0.03405	0.04972	0.06338	0.08531	0.10208	0.12001	0.12537
2.5	0.02110	0.03333	0.04510	0.06611	0.08370	0.10430	0.11081
3.0	0.01306	0.02226	0.03196	0.05109	0.06878	0.09142	0.09901
				β_5			
0.2	0.14984	0.15760	0.16235	0.16744	0.17011	0.17232	0.17288
0.5	0.11702	0.13166	0.14056	0.15080	0.15654	0.16146	0.16275
1.0	0.07530	0.09279	0.10496	0.12073	0.13048	0.13945	0.14189
1.5	0.04757	0.06378	0.07648	0.09485	0.10741	0.11987	0.12340
2.0	0.02980	0.04329	0.05504	0.07394	0.08824	0.10360	0.10819
2.5	0.01858	0.02916	0.03931	0.05740	0.07253	0.09231	0.09582
3.0	0.01155	0.01954	0.02793	0.04444	0.05969	0.07919	0.08572

даются наибольшие отклонения от точных значений, и для моментов $\alpha_0(\tau_0)$ и $\beta_0(\tau_0)$. Для моментов других порядков ошибки имеют приблизительно такие же величины. Как и следовало ожидать, асимптотические формулы для $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\alpha_n(\tau_0)$ дают при одном и том же τ_0 более точные результаты, чем соответствующие формулы для $\psi(\eta, \tau_0)$ и $\beta_n(\tau_0)$.

Таблица 3

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ В ПРОЦЕНТАХ

	$\varphi(1, \tau_0)$			$\psi(1, \tau_0)$		
τ_0 \ λ	1	0.95	0.7	1	0.95	0.7
2	0.6	0.5	0.3	9	13	23
3	0.2	0.1	0.05	4	6	35
5	0.01	0.01	0.01	0.6	1.5	20
	$\alpha_0(\tau_0)$			$\beta_0(\tau_0)$		
τ_0 \ λ	1	0.95	0.7	1	0.95	0.7
2	0.05	0.06	0.06	0.3	0.7	8
3	0.01	<0.01	<0.01	0.03	0.3	6
5	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	0.04	3

Из табл. 3 также следует, что при $\lambda = 1$ асимптотическими формулами для функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ и их моментов можно пользоваться уже при небольших τ_0. С уменьшением λ оптическая толщина слоя, при которой работают асимптотические формулы, возрастает.

Ленинградский государственный
университет

THE CALCULATION OF RADIATION FIELD UNDER THE ASSUMPTION OF MONOCHROMATIC ISOTROPIC SCATTERING. II. AMBARTSUMIAN'S φ AND ψ FUNCTIONS AND THEIR MOMENTS

V. M. LOSKUTOV

The functions $\varphi(\eta, \tau_0)$ and $\psi(\eta, \tau_0)$ and their moments $\alpha_n(\tau_0)$ and $\beta_n(\tau_0)$ are found by numerical integration using the values of the Green function $\Phi(\tau, \tau_0)$. The method of computation of $\Phi(\tau, \tau_0)$, was given in part I. The Tables of the first six moments are presented for $\tau_0 = 0.2$, 0.5 (0.5) 3.0 and for some of the partical albedo. The results are used to estimate the accuracy of the well-known asymptotic expressions of the function under consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 9, 3, 347, 1973.
2. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 120, 69, 1958.
3. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
4. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
5. *S. Chandrasekhar, D. Elbert*, Ap. J., 115, 244, 1952.
6. *D. F. Mayers*, M. N., 123, 483, 1962.
7. *Y. Sobouti*, Ap. J., Suppl. ser., 7, No. 72, 411, 1963.
8. *R. Bellma, H. Kagiwada, R. Kalaba, S. Ueno*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 6, 251, 1966.
9. *J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser., No. 113, 1966.
10. *H. Cohen*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer., 9, 931, 1969.
11. *J. K. Shultis*, Astron. Astrophys., 14, 463, 1971.
12. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
13. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 2, 135, 239, 1966.
14. *H. Kagiwada, R. Kalaba*, RM 4958-PR, 1966, The RAND Corporation.
15. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 336, 1957.
16. *N. J. McCormik*, Ap. J., 147, 816, 1967.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

РЕНТГЕНОВСКОЕ ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, ОБРАЗОВАННОЕ НА КОСМИЧЕСКИХ ЧАСТИЦАХ

Г. Г. БАХШЯН, Г. М. ГАРИБЯН, ЯН ШИ

Поступила 5 июля 1973

Получены формулы для образования рентгеновского переходного излучения на частицах сферической формы в случаях центральных и нецентральных столкновений ультрарелятивистского заряда. С помощью этих формул вычислены спектры рождения и наблюдения рентгеновского переходного излучения, образованного электронами космических лучей как на частицах космической пыли, так и на молекулах межзвездного газа. Полученные численные оценки показывают, что при рассмотрении природы диффузного фона космического рентгеновского излучения вкладом переходного излучения не всегда следует пренебрегать.

1. *Введение.* В последнее время появились работы [1—5], в которых обсуждается вопрос о возможности реализации в астрономических объектах условий для образования рентгеновского переходного излучения. При этом речь идет о нахождении физического механизма, ответственного за образование диффузного фона космического рентгеновского излучения (см., например, [6—8]). В работах [1, 2] считается, что этот диффузный фон можно объяснить как результат образования переходного излучения электронами космических лучей на межзвездной пыли. С другой стороны, в [3—5] такая возможность ставится под сомнение.

Имея в виду как важность поднятого в этих работах вопроса, так и то, что при использовании теории переходного излучения в отмеченных статьях были допущены некоторые неточности, в предлагаемой работе этот вопрос мы рассмотрим заново. Кроме того, в отличие от вышеуказанных работ, мы рассматриваем также образование переходного излучения на межзвездном газе.

2. *Общие формулы для поля переходного излучения, образованного на сферической частице.* Выведем сначала общие формулы

для рентгеновского переходного излучения, образованного ультрарелятивистским электроном на частице пыли, имеющей сферическую форму. Для этого воспользуемся общим уравнением [9] определяющим фурье-компоненты рассеянного поля $\vec{E}_{\text{рас}}(\vec{k}, \omega)$, возникающего при взаимодействии прямолинейно и равномерно движущегося заряда с веществом. Для рассматриваемой задачи это уравнение имеет вид

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E^i_{\text{рас}}(\vec{k}, \omega) =$$

$$= - \frac{\omega_0^2}{(2\pi)^3 c^2} \int d\vec{k}' \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j c^2}{\omega^2} \right) [E^j_{\text{зар}}(\vec{k}', \omega) + E^j_{\text{рас}}(\vec{k}', \omega)] \times \tag{1}$$

$$\times \int d\vec{R}' \exp[i(\vec{k}' - \vec{k})(\vec{R}_0 - \vec{R}')],$$

где ω_0 — плазменная частота вещества частицы пыли, δ^{ij} — символ Кронекера, $\vec{R}_0$ — радиус-вектор центра рассеивающей частицы, $E^j_{\text{зар}}(\vec{k}, \omega)$ — фурье-компоненты поля заряда:

$$E^j_{\text{зар}}(\vec{k}, \omega) = 8\pi^2 ei \frac{\omega v^j - k^j c^2}{k^2 c^2 - \omega^2} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v}), \tag{2}$$

интегрирование по $d\vec{R}'$ производится по всему объему сферической частицы.

При написании уравнения (1) мы считали, что главным процессом в рассматриваемой области рентгеновских частот является томсоновское рассеяние на атомах, а фотоэффект приводит лишь к поглощению, которое можно учесть, формально считая величину ω_0 комплексной. При этом плотность вещества внутри рассеивающей частицы считается всегда постоянной.

Поскольку радиус r частицы космической пыли имеет порядок $\sim 10^{-5} \div 10^{-6}$ *см* (см. [10]), то для рентгеновской области частот (от десятых долей до сотен *кэв*) имеем

$$\frac{\omega_0^2 r}{\omega c} \ll 1. \tag{3}$$

При выполнении этого условия уравнение (1) можно решать методом теории возмущений, считая, что рассеянное поле много меньше поля заряда [9].

В результате для фурье-компоненты поперечной составляющей рассеянного поля имеем

$$\vec{E}^{\perp}_{\text{рас}}(\vec{k},\ \omega) = \frac{\omega_0^2 ei}{c^2 v\pi (k^2 - \omega^2/c^2)} \int \vec{W}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}') \times$$
$$\times \exp\left\{- i\vec{\varkappa}(\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}') + i\left(\frac{\omega}{v} - k_z\right)(z_0 + z')\right\} d\vec{\rho}' dz', \tag{4}$$

где $\vec{\rho}_0$, $\vec{\rho}'$ и z_0, z' — поперечные и продольные по направлению движения заряда компоненты векторов $\vec{R}_0$ и $\vec{R}'$, соответственно, $\vec{\varkappa}$ и k_z — поперечная и продольная компоненты волнового вектора $\vec{k}$,

$$\vec{W}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}') = \int \frac{\exp\{i\vec{\varkappa}'(\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}')\}\, \vec{\varkappa}' d\vec{\varkappa}'}{\varkappa'^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}. \tag{5}$$

Величину (5) нетрудно вычислить явно. После интегрирования имеем

$$\vec{W}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}') = 2\pi i \frac{\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}'}{|\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}'|} \cdot \frac{|\omega|}{v\gamma} K_1\left(\frac{|\omega(\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}')|}{v\gamma}\right), \tag{6}$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор заряда, $K_1(x)$ — модифицированная функция Ганкеля первого порядка.

Воспользовавшись известной „теоремой сложения" для цилиндрических функций (см., например, [11], стр. 993), формулу (6) можно записать в виде

$$\vec{W}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}') = 2\pi i \frac{\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}'}{|\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}'|} \cdot \frac{|\omega|}{v\gamma} \cdot \exp[i(\Phi - \Phi_0 - \pi + \xi)] \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{|\omega|}{v\gamma}\rho_0\right) K_{n+1}\left(\frac{|\omega|}{v\gamma}\rho'\right) \exp(in\xi) \tag{7}$$

если $\rho_0 < \rho'$, или

$$\vec{W}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}') = 2\pi i \frac{\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}'}{|\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}'|} \cdot \frac{|\omega|}{v\gamma} \cdot \exp[-i(\Phi - \Phi_0)] \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{|\omega|}{v\gamma}\rho'\right) K_{n+1}\left(\frac{|\omega|}{v\gamma}\rho_0\right) \exp(in\xi), \tag{8}$$

если $\rho_0 > \rho'$. Заметим, что если заряд пролетает через центр сферы, имеет место только формула (7), если же вне сферы, то только формула (8). В промежуточных случаях имеют место обе формулы. В приведенных формулах ξ — угол между векторами $\vec{\rho}'$ и $-\vec{\rho}_0$, Φ, Φ_0 — соответственно азимутальные углы векторов $\vec{\rho}_0 + \vec{\rho}'$ и $\vec{\rho}_0$, отсчитываемые от поперечной составляющей $\vec{\rho}$ радиуса-вектора $\vec{R}$ точки наблюдения (см. рис. 1). $J_n(x)$ и $K_n(x)$ — соответственно функция Бесселя и модифицированная функция Ганкеля n-го порядка.

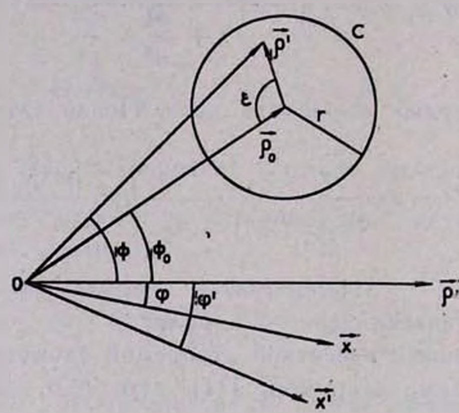

Рис. 1. Сечение, проведенное через центр рассеивающей сферы перпендикулярно траектории заряда. O — точка пересечения плоскости сечения с траекторией заряда. $\vec{\rho}$ — поперечная составляющая радиус-вектора точки наблюдения. $\vec{\rho}_0$ — поперечная составляющая радиус-вектора центра рассеивающей сферы. $\vec{\varkappa}$ — поперечная составляющая волнового вектора. $\vec{\rho}'$, $\vec{\varkappa}'$ — переменные интегрирования.

3. *Центральные и нецентральные столкновения.* Для получения $E^{\perp}_{\text{рас}}(\vec{k}, \omega)$ необходимо подставить (7) или (8) в (4) и проинтегрировать по всему объему рассеивающей частицы. Такое интегрирование произвести в общем случае весьма громоздко. Поэтому рассмотрим два предельных случая.

1) Заряд пролетает почти через центр рассеивающей сферы (центральное столкновение), т. е. $\rho_0 \ll r$.

Полагая в формулах (7) и (4) $\rho_0 = 0$, после интегрирования по азимутальному углу имеем

$$\vec{E}^{\perp}_{\text{рас}}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi\omega_0^2 ei\,|\omega|\,\vec{\varkappa}\exp\left[i(\omega/v - k_z)z_0\right]}{\omega c\varkappa v^2\gamma\,(k^2 - \omega^2/c^2)} \times$$

$$\times \int_0^r p(\rho', k_z)\,J_1(\varkappa\rho')\,K_1(|\omega|\rho'/v\gamma)\,\rho' d\rho', \tag{9}$$

где

$$p(\rho', k_z) = \frac{2\sin\left[(\omega/v - k_z)\sqrt{r^2 - \rho'^2}\right]}{\omega/v - k_z}\cdot\frac{\omega}{c}. \tag{10}$$

Согласно известной теореме вынесем величину $p(\rho', k_z)$ в формуле (9) за знак интеграла, заменив ее величиной $p(\rho^*, k_z)$, где $0 \leqslant \rho^* \leqslant r$. Тогда после интегрирования по ρ' получим

$$\vec{E}^{\perp}_{\text{рас}}(k, \omega) = \frac{4\pi\omega_0^2 ei\,|\omega|\,\vec{\varkappa}\exp\left[i(\omega/v - k_z)z_0\right]p(\rho^*, k_z)}{\omega c\varkappa v^2\gamma\,(k^2 - \omega^2/c^2)\,(\omega^2/v^2\gamma^2 + \varkappa^2)} \times$$

$$\times\left[\frac{v\varkappa\gamma}{|\omega|} - \varkappa r J_0(\varkappa r)\,K_1\left(\frac{|\omega|r}{v\gamma}\right) - \frac{r|\omega|}{v\gamma}\,J_1(\varkappa r)\,K_0\left(\frac{|\omega|r}{v\gamma}\right)\right]. \tag{11}$$

2) Заряд пролетает вдали от рассеивающей сферы (нецентральное столкновение), т. е. $\rho_0 \gg r$.

В этом случае можно пренебречь разностью $\Phi - \Phi_0$ в формуле (8). Тогда, подставляя (8) в (4) и имея в виду, что $\vec{\varkappa}\vec{\rho}' = \varkappa\rho'\cos(\Phi_0 - \varphi + \pi - \xi)$, после интегрирования по ξ от нуля до 2π получаем

$$\vec{E}^{\perp}_{\text{рас}}(\vec{k}, \omega) = -\frac{4\pi\omega_0^2 e\,|\omega|\,\vec{\rho}_0\exp\left[i(\omega/v - k_z)z_0\right]}{\omega c v^2\gamma\,(k^2 - \omega^2/c^2)\,\rho_0} \times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{n+1}\left(\frac{|\omega|\rho_0}{v\gamma}\right)\exp(-i\vec{\varkappa}\vec{\rho}_0)\exp\left[in(\Phi_0 - \varphi + \pi/2)\right] \times \tag{12}$$

$$\times\int_0^r J_n(\varkappa\rho')\,J_n\left(\frac{|\omega|\rho'}{v\gamma}\right)\rho' p(\rho', k_z)\,d\rho'.$$

Имея формулы для $\vec{E}^{\perp}_{\text{рас}}(\vec{k}, \omega)$ (формулы (11) и (12)), нетрудно написать явное выражение для спектрального распределения числа квантов рентгеновского переходного излучения, образуемого одним зарядом на одной частице космической пыли. Для достаточно далекой точки наблюдения получаем

$$\frac{dn^{c}(\gamma, r)}{d\omega} = \frac{\omega_0^4}{2\cdot 137\,\pi\gamma^2}\int \frac{[p(\rho^*, \lambda)]^2\,\vartheta}{(\gamma^{-2}+\vartheta^2)^2}\cdot\frac{d\vartheta}{\omega^3}\times$$
$$\times\left[\frac{v\vartheta\gamma}{c} - \frac{\omega r\vartheta}{c}J_0\left(\frac{\omega r\vartheta}{c}\right)K_1\left(\frac{\omega r}{v\gamma}\right) - \frac{r\omega}{v\gamma}J_1\left(\frac{\omega r\vartheta}{c}\right)K_0\left(\frac{\omega r}{v\gamma}\right)\right]^2 \tag{13}$$

для центральных столкновений и

$$\frac{dn^{nc}(\gamma, r, \rho_0)}{d\omega} = \frac{\omega_0^4}{2\cdot 137\,\pi c^4\gamma^2}\int\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[K_{n+1}\left(\frac{\omega\rho_0}{v\gamma}\right)p(\rho^*, \lambda)\right]^2\frac{\vartheta d\vartheta}{\omega}\times$$
$$\times\left[\int_0^r J_n\left(\frac{\omega\vartheta\rho'}{c}\right)J_n\left(\frac{\omega\rho'}{v\gamma}\right)\rho' d\rho'\right]^2 \tag{14}$$

для нецентральных столкновений. В последних формулах $\lambda = \omega/c\times$ $\times(1-\omega_0^2/2\omega^2-\vartheta^2/2)$, $\vartheta = \rho/R$ — угол излучения, $\omega > 0$.

4. *Число квантов переходного излучения.* Проанализируем теперь формулы (13) и (14). Прежде всего отметим, что при достаточно больших частотах, таких, что

$$\frac{\omega}{v\gamma} \gg \frac{1}{\rho_0}, \tag{15}$$

число квантов, обусловленных нецентральными столкновениями, как видно из (14), экспоненциально мало из-за асимптотического поведения модифицированной функции Ганкеля. Если же

$$\frac{\omega}{v\gamma} \gg \frac{1}{r}, \tag{16}$$

то можно увидеть, что формула (13) для центральных столкновений полностью совпадает с известной формулой для рентгеновского переходного излучения, образуемого в пластине [12].

Полученные результаты имеют наглядное физическое истолкование. Действительно, как известно, „радиус действия" поля ультрарелятивистского заряда, соответствующего частоте ω, равен $v\gamma/\omega$. Неравенство (15) означает, что указанный радиус много меньше прицельного параметра ρ_0, и поэтому в этом случае излучение от нецентральных столкновений мало. А неравенство (16) означает, что тот же радиус много меньше радиуса рассеивающей сферы, и поэтому при центральном столкновении излучение от сферы должно совпадать с излучением от пластины с толщиной, равной диаметру сферы.

В случае, когда неравенство (15) не выполняется, т. е. когда $\omega\rho_0/v\gamma$ порядка или меньше единицы, в формуле (14) можно считать $\omega r/v\gamma \ll 1$ из-за того, что для этой формулы $r \ll \rho_0$. Тогда имеем

$$\int\limits_0^r J_n\left(\frac{\omega\vartheta\rho'}{c}\right) J_n\left(\frac{\omega\rho'}{v\gamma}\right)\rho' d\rho' \approx \left(\frac{\omega}{v\gamma}\right)^n \frac{1}{2^n n!}\int\limits_0^r J_n\left(\frac{\omega\vartheta\rho'}{c}\right)\rho'^{n+1} d\rho' =$$

$$= \left(\frac{\omega r}{v\gamma}\right)^n \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{rc}{\omega\vartheta} J_{n+1}\left(\frac{\omega\vartheta r}{c}\right).$$

Если теперь ограничиться в бесконечной сумме формулы (14) главным членом $n = 0$, получаем

$$\frac{dn^{nc}(\gamma, r, \rho_0)}{d\omega} = \frac{\omega_0^4 r^2}{2\cdot 137\,\pi c^2\gamma^2}\left[K_1\left(\frac{\omega\rho_0}{v\gamma}\right)\right]^2 \int [p(\rho^*, \lambda)]^2 \times \left[J_1\left(\frac{\omega\vartheta r}{c}\right)\right]^2 \frac{d\vartheta}{\vartheta\omega^3}. \tag{17}$$

Оценим теперь интегралы по ϑ в формулах (13) и (17). Прежде всего заметим, что благодаря наличию функции

$$[p(\overset{*}{\rho}, \lambda)]^2 = \frac{16v^2 \sin^2[\omega(\gamma^{-2} + \vartheta^2)(r^2 - \overset{*}{\rho}{}^2)^{1/2}/2v]}{c^2(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^2} \tag{18}$$

при интегрировании в указанных формулах можно ограничиться верхним пределом ϑ_{max}, определяемым условием

$$\frac{\omega}{2v}(\gamma^{-2} + \vartheta_{max}^2)\, r \gg \pi. \tag{19}$$

Кроме того, для оценки порядка величин интегралов положим

$$[p(\overset{*}{\rho}, \lambda)]^2 \approx 4\omega^2 (r^2 - \overset{*}{\rho}{}^2)/c^2. \tag{20}$$

Таким образом, формулы (13) и (17) можно записать в виде

$$\frac{dn^c(\gamma, r)}{d\omega} \approx \frac{2\omega_0^4 (r^2 - \overset{*}{\rho}{}^2)}{137\,\pi c^2\omega^3} I_1, \tag{21}$$

$$\frac{dn^{nc}(\gamma, r, \rho_0)}{d\omega} \approx \frac{2\omega_0^4 (r^2 - \overset{*}{\rho}{}^2)}{137\,\pi c^2\omega^3}\frac{r^2}{\rho_0^2} I_2, \tag{22}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^{\varphi_{max}} \frac{\varphi^3}{(\alpha^2+\varphi^2)^2}\left[1 - a_1 J_0(\varphi) - \frac{a_2 J_1(\varphi)}{\varphi}\right]^2 d\varphi, \tag{23}$$

$$I_2 = \int\limits_0^{\varphi_{max}} \frac{[J_1(\varphi)]^2 d\varphi}{\varphi}. \tag{24}$$

В последних формулах были введены обозначения

$$\varphi_{max} \gg \sqrt{\frac{2\pi\omega r}{c} - \alpha^2}, \qquad \alpha = \frac{\omega r}{v\gamma}, \tag{25}$$

$$a_1 = \alpha K_1(\alpha), \quad a_2 = \alpha^2 K_0(\alpha).$$

Заметим, что по порядку величины $r^2 - \rho_i^{*2}$ можно считать равной r^2. Оценим интегралы I_1 и I_2. Интеграл I_2 следует рассматривать только при $\alpha \ll 1$, так как этот интеграл используется в формуле (17) (или (22)), справедливых при наличии указанного неравенства. При этом $\varphi_{max} \gg 1$ и значение I_2 порядка единицы почти независимо от φ_{max}. Оценки интеграла I_1 можно получить, если примем во внимание, что при $\alpha \gg 1$ имеем $a_1 \approx a_2 \approx 0$ и поэтому

$$I_1 \approx \frac{1}{2}\left\{\ln\frac{\varphi_{max}^2 + \alpha^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\varphi_{max}^2 + \alpha^2} - 1\right\}, \tag{26}$$

а при $\alpha \ll 1$ имеем $a_1 \approx 1$, $a_2 \approx 0$ и по порядку величины

$$I_1 \sim \ln\sqrt{\frac{2\pi\omega r}{c}}. \tag{27}$$

Как было отмечено, в промежуточных случаях $\rho_0 \sim r$ вычисление становится весьма громоздким. Однако желательно иметь возможность хотя бы оценить порядок величины числа рентгеновских переходных квантов и в этих случаях. Для этого экстраполируем формулу (14) до $\rho_0 = r$ и сравним ее с (13). При $\alpha \gg 1$ формула (14) дает экспоненциально малую величину, а формула (13), как видно из (26), стремится к нулю, по крайней мере, не медленнее чем α^{-4}. При $\alpha \ll 1$ из формулы (14) (или, что то же самое, из (22)) получаем

$$\frac{dn^{nc}(\gamma, r, r)}{d\omega} = \frac{2\omega_0^4 r^2 I_2}{137\,\pi v^2\omega^3}.$$

Формула (13) (или (23)) при этом дает такое же выражение, только вместо величины I_2 имеем I_1, которая, согласно (27), порядка $\ln \varphi_{max} < 6$ вплоть до частот в несколько сотен *кэв*.

Таким образом, по порядку величины формула (14), экстраполированная до $\rho_0 = r$, согласуется с (13). В дальнейшем для оценки числа рентгеновских переходных квантов, образуемых при разных прицельных параметрах ρ_0, будем использовать формулу (13) при $\rho_0 < r$ и формулу (14) (или 17)) при $\rho_0 > r$.

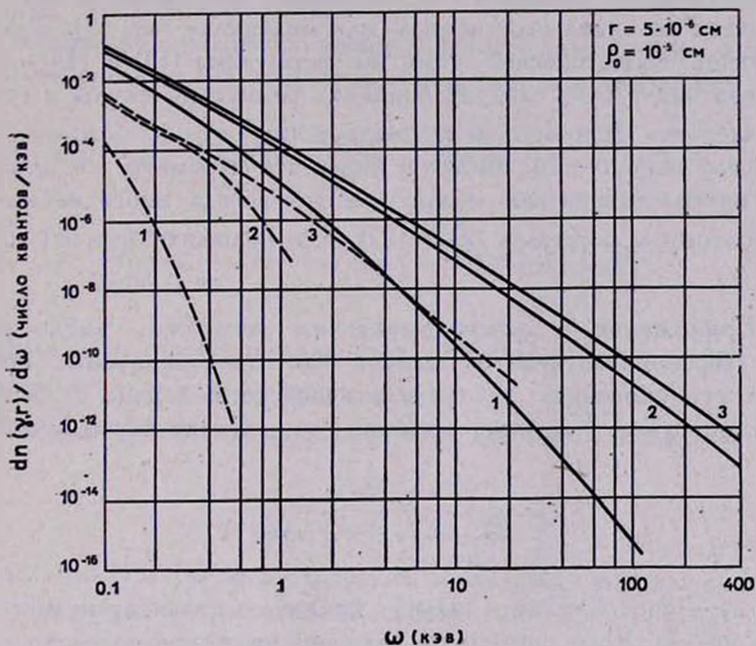

Рис. 2. Спектральное распределение числа квантов переходного излучения, образованных одним зарядом на одной сферической частице. Сплошные кривые соответствуют центральным столкновениям, пунктирные—нецентральным. Цифры 1, 2, 3 соответствуют $\gamma=20$, 200 и 2000, соответственно.

Для иллюстрации на рис. 2 приведены кривые спектрального распределения числа переходных квантов, образованных одним зарядом на одной сферической частице. Кривые получены в результате численного расчета по формулам (13) и (17) для центрального (сплошные кривые) и нецентрального (пунктирные кривые) столкновений, соответственно. При расчете были приняты значения: $\omega_0 = 20$ *эв*, $r = 5 \cdot 10^{-6}$ *см* и прицельный параметр для нецентрального столкновения $\rho_0 = 10^{-5}$ *см*. Цифры 1, 2, 3 около кривых означают $\gamma = 20$, 200 и 2000, соответственно. Следует указать, что если в качестве ρ_0

взять значение r, то ординаты пунктирных кривых значительно (на порядок или больше) увеличатся и в области малых ω приблизятся к сплошным кривым. Выбранное значение $\omega_0 = 20$ *эв* соответствует тому, что частицы пыли состоят из углерода.

Заметим, что если вместо значения $\omega_0 = 20$ *эв* взять $\omega_0 = 30$ *эв* [5, 10], то ввиду того, что спектры переходного излучения пропорциональны ω_0^4 (см. (13) и (17)), их значения возрастут в 5 раз.

В заключение укажем, что переходное излучение может также образоваться на отдельных атомах или молекулах газа [9]. Это излучение может быть описано теми же формулами (13) и (14), в которых теперь под r и ω_0 следует понимать радиус молекулы и ее плазменную частоту. Например, в случае водорода $r \sim 10^{-8}$ *см*, $\omega_0 \sim 40$ *эв*. Кроме того, необходимо иметь в виду, что параметр α в этом случае для интересующей нас области частот всегда много меньше единицы. Поэтому в формулах (21) и (22) надо положить $I_1 \sim \ln \sqrt{2\pi\omega r/c}$ и $I_3 \sim 1$.

5. *Приложение к астрономическим условиям.* Число рентгеновских переходных квантов данной частоты, образуемых при центральных столкновениях ультрарелятивистского заряда с частицами космической пыли за единицу времени при $\rho_0 < r$ по порядку величины равно

$$\int \frac{dn^c(\gamma, r)}{d\omega} c\pi r^2 q(r)\, dr,$$

где $q(r)\,dr$ — число частиц пыли с радиусами между r и $r + dr$ в единице объема. Если последнюю величину умножить на число ультрарелятивистских зарядов в единице объема $f(\gamma)\,d\gamma$ и проинтегрировать по γ, то получим число переходных квантов, образуемых в единице объема за единицу времени, или „спектр рождения“:

$$G^c(\omega) = \iint \frac{dn^c(\gamma, r)}{d\omega} c\pi r^2 q(r)\, dr f(\gamma)\, d\gamma. \tag{28}$$

Для того, чтобы получить наблюдаемый поток квантов (или „спектр наблюдения“) через единицу площади за единицу времени в единице телесного угла необходимо проинтегрировать спектр рождения по объему пространства внутри конуса с единичным телесным углом раствора, ось которого направлена вдоль луча зрения. При этом следует учитывать геометрический фактор ослабления потока квантов $1/4\pi R^2$, а также их поглощения в космическом пространстве. В результате имеем

$$\frac{d^2N^c}{d\omega\,d\Omega}=\frac{1}{4\pi}\int G^c(\omega)\exp\left[-\int_0^R\mu(x)\,dx\right]dR, \tag{29}$$

где $\mu(x)$ — некоторый усредненный линейный коэффициент поглощения рентгеновских квантов в той части космического пространства, которая отстоит от точки наблюдения (Земли) на расстоянии x, R — расстояние от частицы космической пыли, на которой образуется излучение, до точки наблюдения.

Совершенно аналогично можно написать выражение для потока квантов, обусловленных нецентральными столкновениями при $\rho_0>r$:

$$G^{nc}(\omega)=\iiint\frac{dn^{nc}(\gamma,\,r,\,\rho_0)}{d\omega}\,2\pi c\rho_0 d\rho_0 q(r)\,dr\,f(\gamma)\,d\gamma, \tag{30}$$

$$\frac{d^2N^{nc}}{d\omega d\Omega}=\frac{1}{4\pi}\int G^{nc}(\omega)\exp\left[-\int_0^R\mu(x)\,dx\right]dR. \tag{31}$$

В формуле (30) интегрирование по прицельному параметру ρ_0 производится от $\rho_0\approx r$ до $\sim v\gamma/\omega$.

Общий поток квантов определяется суммой величин (29) и (31)

$$\frac{d^2N}{d\omega d\Omega}=\frac{d^2N^c}{d\omega d\Omega}+\frac{d^2N^{nc}}{d\omega d\Omega}. \tag{32}$$

Согласно [13, 14] галактические электроны космических лучей имеют следующий энергетический спектр

$$f(\gamma)\,d\gamma=N_0\gamma^{-\eta}\,d\gamma, \tag{33}$$

где $N_0\approx 2.8\cdot 10^{-9}$ $см^{-3}$, $\eta\approx 1.8$.

При вычислении по формулам (29) и (31) нам необходимо знать функцию распределения $q(r)$ радиусов частиц космической пыли. Для простоты положим $q(r)=N_d\delta(r-\bar r)$, где N_d — средняя плотность числа частиц пыли, а $\bar r$ — их средний радиус. В качестве $\bar r$ мы возьмем значение $\bar r\approx 5\cdot 10^{-6}$ *см*, согласно [10].

Подставляя (33) в (28), получим спектр рождения

$$G^c(\omega)=N_d c\pi N_0\int\frac{dn^c(\gamma,\,\bar r)}{d\omega}\bar r^2\gamma^{-\eta}\,d\gamma. \tag{34}$$

На рис. 3 приведены значения $G_1^c(\omega)=G^c(\omega)/N_d$ после численного интегрирования по формулам (34) и (13). Из приведенной кривой видно, что спектр рождения с ростом частоты падает приблизительно как $\omega^{-3,4}$.

Заметим, что спектр рождения можно получить также аналитически, пользуясь следующим приближенным расчетом. Как видно из (26), интеграл I_1, а следовательно и $G_1^c(\omega)$, мал при $\alpha \gg \varphi_{max}$ или при $\gamma \ll (\omega r/c)^{1/2}$. Подставив (13) в (28) и проинтегрировав по γ от $(\omega r/c)^{1/2}$ до бесконечности, получим

$$G_1^c(\omega) \approx \frac{\omega_0^4 \overline{r}^4 \ln(2\pi\omega\overline{r}/c)\, N_0}{137\, c\omega^3\, (\gamma_1 - 1)} \left(\frac{c}{\omega\overline{r}}\right)^{(\gamma_1-1)/2}. \tag{35}$$

Значения, определяемые формулой (35), по порядку величины хорошо согласуются со значениями, полученными численным расчетом (см. рис. 3).

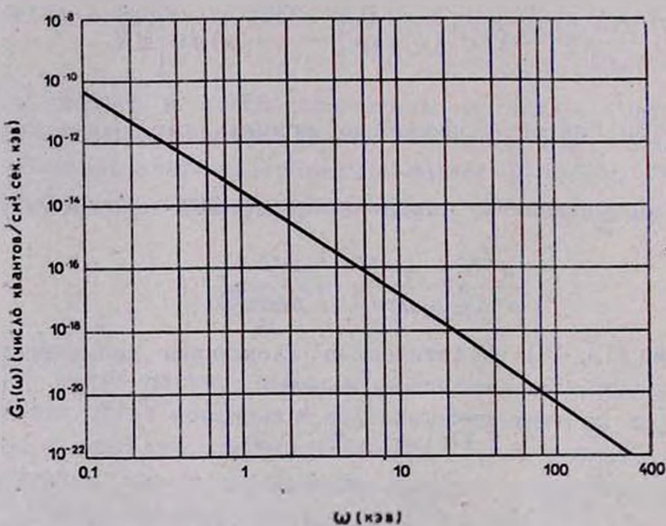

Рис. 3. Число переходных квантов, образуемых в единице объема космического пространства за единицу времени в результате центральных столкновений с пылинкой или „спектр рождения“ для того случая, когда $N_d = 1\ см^{-3}$.

Сделаем аналогичный приближенный расчет для нецентральных столкновений. Как было замечено в предыдущем разделе в связи с неравенством (15), при каждой частоте ω и каждом прицельном параметре ρ_0 имеется минимальное значение $\gamma \sim \omega\rho_0/v$ такое, что заряд с лоренц-фактором, меньшим этого значения, не будет вносить вклада в $G^{nc}(\omega)$. А поскольку $\rho_0 > \overline{r}$, то в (30) интегрирование по γ должно производиться при $\gamma > \gamma_0 \sim \omega\overline{r}/v$.

Подставим (22) в (30). Тогда по порядку величины имеем

$$G_1^{nc}(\omega) \equiv \frac{G^{nc}(\omega)}{N_d} \approx \frac{4\omega_0^4 \overline{r}^4 I_2}{137 c\omega^3} \int\limits_{\gamma_0}^{\infty} \ln \frac{v\gamma}{\omega r_0} f(\gamma)\, d\gamma. \tag{36}$$

Величина γ_0 в (36) имеет порядок $\omega\overline{r}/v$. После интегрирования по γ с учетом энергетического спектра (33) получим

$$G_1^{nc}(\omega) \approx \frac{4\omega_0^4 \overline{r}^4 I_2 N_0}{137\, c\omega^3 (\eta - 1)^2} \left(\frac{v}{\omega\overline{r}}\right)^{\eta-1}. \tag{37}$$

Из формул (35) и (37) следует, что

$$\frac{G^c(\omega)}{G^{nc}(\omega)} \approx \left(\frac{\omega\overline{r}}{c}\right)^{\frac{\eta-1}{2}}. \tag{38}$$

Поскольку в рассматриваемой области частот всегда $\omega\overline{r}/c > 1$, то из (38) видно, что $G^c(\omega)$ больше, чем $G^{nc}(\omega)$.

До сих пор мы рассматривали образование рентгеновского переходного излучения на частицах космической пыли. Однако известно, что в галактиках имеется еще межзвездный газ, общая масса которого примерно на два порядка превышает массу пылинок. Поскольку, как было указано выше, переходное излучение может образовываться также на отдельных атомах газа, то необходимо оценить интенсивность переходного излучения, образованного на межзвездном газе, согласно сказанному в конце раздела 4.

Спектр рождения для межзвездного газа $G_g^c(\omega)$ будет определяться формулой (34) с N_d, замененным на N_g, где N_g — число молекул газа в единице объема. Положим для простоты, что межзвездный газ состоит в основном из водорода. Принимая во внимание, что общая масса межзвездного газа на два порядка больше общей массы пылинок, а масса одной пылинки на $8 \div 9$ порядков больше массы одного атома газа, нетрудно получить, что $N_g/N_d \sim \sim 10^{10} \div 10^{11}$.

Поскольку спектр рождения переходного излучения, согласно (34) и (21), пропорционален плотности числа рассеивающих частиц и четвертой степени плазменной частоты и радиуса, то отношение спектров рождения переходного излучения на межзвездном газе и на пылинках с учетом приведенных численных данных оказывается равным $2 \div 20$. Это означает, что вклад переходного излучения, образованного на межзвездном газе, может даже превосходить переходное излучение, образованное на пылинках.

Сравним теперь спектры рождения в случае межзвездного газа для центральных и нецентральных столкновений. Из формулы (38) следует, что в отличие от случая пылинок, в рассматриваемом случае это отношение порядка или меньше единицы для квантов с энергиями в несколько *кэв*. То есть, в этом случае мы не можем пренебречь вкладом нецентральных столкновений.

При применении полученных формул для $G(\omega)$ к пылинкам или к межзвездному газу, мы будем эти спектры обозначать как $G_d(\omega)$ или $G_g(\omega)$, соответственно.

Рассмотрим, наконец, спектр наблюдения рентгеновского переходного излучения (32). Для этого мы должны сделать определенные предположения о величинах, входящих в спектры рождения (28) и (30) для пылинок и в соответствующие спектры рождения для межзвездного газа.

А именно, речь идет о величинах N_d, ω_0 $\bar{r}$ и аналогичных величинах для межзвездного газа, а также об энергетическом спектре космических электронов. Из-за неимения соответствующих данных и для расчетов оценочного характера мы возьмем их значения, известные для нашей Галактики, и распространим их на другие галактики. Это предположение является некоторой упрощающей модельной гипотезой, которая, по-видимому, приемлема и не противоречит существующим представлениям (см., например, [15, 16]).

Величина $\mu(x)$, входящая в (29) и (31), может быть записана в виде

$$\mu(x) = \mu_d(\omega) N_d m_d + \mu_g(\omega) N_g m_g = \mu, \tag{39}$$

где $\mu_d(\omega)$ и $\mu_g(\omega)$ — средние массовые коэффициенты поглощения рентгеновских квантов [17] в пылинках и межзвездном газе, m_d и m_g — средние массы пылинки и молекулы газа.

Величину N_d внутри нашей Галактики можно положить равной $10^{-12} - 10^{-13}$ *см*$^{-3}$, а среднюю массу пылинок $m_d \approx 10^{-15} \div 10^{-16}$ *г* и считать, что частицы пыли в основном состоят из легких элементов (см. [2, 10]). Тогда при энергиях рентгеновских квантов от 10 до 100 *кэв* величина μ в формуле (39) определяется в основном вторым слагаемым и по порядку величины равна 10^{-26} *см*$^{-1}$.

Вычислим спектр наблюдения переходного излучения, образованного внутри пространства с радиусом R. После соответствующего интегрирования в формуле (29) получим:

$$\frac{d^2N^c}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi} G^c(\omega) \frac{1 - \exp(-\mu R)}{\mu}, \tag{40}$$

где $G^c(\omega) = G_d^c(\omega) + G_g^c(\omega)$ — сумма вкладов от пылинок и газа.

Рассмотрим сначала переходное излучение, образованное внутри нашей Галактики. Для этого положим в формуле (40) величину R равной $R_G \sim 10^{22} \div 10^{23}$ *см*. Тогда вследствие того, что $\mu R_G \ll 1$, спектр наблюдения (40), например, при $\omega = 10$ *кэв*, приблизительно на 5 порядков меньше экспериментальных значений изотропного фона космического рентгеновского излучения [6—8], приведенных на рис. 4

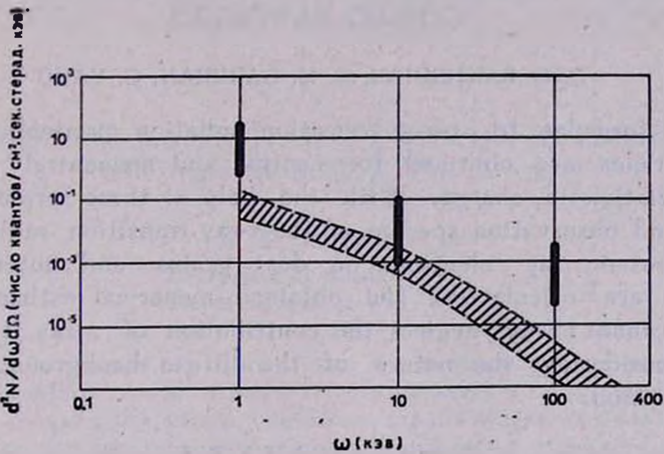

Рис. 4. Заштрихованная полоса — рассчитанный „спектр наблюдения" рентгеновского переходного излучения. Вертикальные полосы — экспериментальные данные, согласно работам [6—8].

(вертикальные полосы). Этот факт представляется вполне естественным, так как изотропный фон космического рентгеновского излучения очевидно имеет внегалактическое происхождение. В этой связи заметим, что если в формуле (40) положим величину R равной $10^{26} \div 10^{27}$ *см* и больше, то спектр наблюдения примет значения, представленные на рис. 4 в виде заштрихованной полосы. Из указанного рисунка видно, что полученные таким образом расчетные кривые и экспериментальные значения согласуются между собой по порядку величины в некоторой области частот. Хотя использованное выше значение R, возможно, и не достаточно оправдано, однако получающийся при этом результат сам по себе представляется нам интересным. Оценки, проведенные в настоящей работе, по-видимому, показывают, что при рассмотрении вопроса о фоне космического рентгеновского излучения переходный механизм не всегда следует игнорировать.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность В. А. Амбарцумяну за ценные советы и обсуждение полученных результатов и

Г. А. Гурзадяну за то, что обратил наше внимание на рассматриваемый вопрос и, в частности, на работу [2].

Ереванский физический институт
Институт радиофизики и электроники
АН Арм.ССР

X-RAY TRANSITION RADIATION PRODUCED ON COSMIC PARTICLES

G. G. BAKHSHIAN, G. M. GARIBIAN, C. YANG

The formulae for x-ray transition radiation production on spherical particles are obtained for central and noncentral collisions of an ultrarelativistic charge. With the help of these formulae the production and observation spectra of the x-ray transition radiation formed by the cosmic ray electrons on dust grains and intersteller gas molecules are calculated. The obtained numerical estimations show that one cannot always neglect the contribution of x-ray transition radiation considering the nature of the diffuse background of cosmic x-ray radiation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. A. E. Johansson*, Ap. J., Lett., 9, 143, 1971.
2. *I. Lerche*, Ap. J., 175, 373, 1972.
3. *R. Ramaty*, *R. D. Bleach*, Ap. Lett., 11, 35, 1972.
4. *G. B. Yodh*, *X. Artru*, *R. Ramaty*, Univ. of Maryland, Tech. Rep., 73—027, 1972.
5. *L. Durand*, Preprint, Univ. of Wisconsin, November, 1972.
6. *S. D. Verma*, 12-th International Conference on Cosmic Rays, 1971, Hobart, Tasmania, Australia, 1, 31.
7. *S. Hayakawa*, *D. Sugimoto*, Suppl. Progr. Theor. Phys., № 49, 148, 1971.
8. *G. Silk*, *S. L. Weinberg*, Ap. J., 175, L29, 1972.
9. *Г. М. Гарибян*, *Ян Ши*, ЖЭТФ, 51, 930, 1971.
10. *D. P. Gilra*, Nature, 229, 937, 1971.
11. *И. С. Градштейн*, *И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1971.
12. *Г. М. Гарибян*, ДАН Арм.ССР, 33, 105, 1961; Изв. АН СССР, сер. физ. 36, 754, 1962.
13. *D. Hovenstadt*, *P. Meyer*, *P. G. Schmidt*, Ap. Lett., 9, 165, 1971.
14. *M. L. Goldstein*, *R. Ramaty*, *L. A. Fisk*, Phys. Rev. Lett., 24, 1193, 1970.
15. *B. G. Nickerson*, *R. B. Partridge*, Ap. J., 169, 203, 1971.
16. Evolution of the Universe and Formation of Galaxies, Suppl. Progr. Theor. Phys., № 49, 1971.
17. *О. И. Лейпунский*, *Б. В. Новожилов*, *В. Н. Сахаров*, Распространение гамма-квантов в веществе, М., 1960.
18. *К. У. Аллен*, Астрофизические величины, М., 1960.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДИНАМИКУ ОБОЛОЧЕК ЗВЕЗД ТИПА Be

В. Н. МОРОЗОВ

Поступила 21 февраля 1973
Пересмотрена 29 мая 1973

Исследуется влияние магнитного поля на динамику оболочек звезд типа Be. Оболочка моделируется слоем плазмы, которая движется в гравитационном и магнитном полях вращающейся звезды в ее экваториальной плоскости. Движение плазмы в слое описывается стационарными уравнениями магнитной гидродинамики. В приближении холодной плазмы для значений параметров, соответствующих оболочкам звезд типа Be и ряда значений напряженности магнитного поля на поверхности звезды, произведено вычисление радиальной компоненты скорости движения плазмы в слое, угловой скорости вращения и плотности вещества в зависимости от расстояния. Показано, что при выполнении неравенства $|H_{\varphi}^0| \gg H_r^0$, где H_{φ}^0 — значение азимутальной составляющей магнитного поля на поверхности звезды, а H_r^0 — значение радиальной составляющей, в слое будет выполнено соотношение $v_{\varphi} \gg v_r$ ($v_r > 0$ — радиальная скорость движения плазмы в оболочке, v_{φ} — скорость вращения), что находится в согласии с наблюдательными данными для оболочек звезд типа Be.

1. *Постановка задачи.* Известно, что звезды типа Be — это быстро вращающиеся звезды спектрального класса B, окруженные оболочками. Как впервые предположил О. Струве [1], возможной причиной образования оболочки является быстрое вращение звезды. Дальнейшее исследование спектральных линий для этих звезд [2] показало, что образование оболочки должно происходить при выбросе вещества под действием иных механизмов. Быстрое вращение, по всей видимости, только способствует выбросам. Звезды типа Be имеют на экваторе скорость вращения большую, чем у обычных звезд того же спектрального класса [3]. Считается [4], что эти звезды находятся

вблизи предела ротационной неустойчивости, то есть на экваторе звезды для элемента массы m выполнено соотношение

$$\frac{mv_{\varphi}^{02}}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2}, \quad (1)$$

где r_0 — радиус звезды, M — масса звезды, v_{φ}^0 — скорость вращения звезды на экваторе.

С другой стороны, параболическая скорость равна

$$v_p^2 = \frac{2GM}{r_0}. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) вытекает, что $v_{\varphi}^{02} = 1/2\, v_p^{02}$. Отсюда ясно, что одного вращения звезды недостаточно для того, чтобы удалить элемент вещества от поверхности звезды на бесконечность: необходима дополнительная энергия. Кинетическая энергия вращения звезды сама является таким источником энергии, если существует фактор, который передает ее от звезды к оболочке. Таким фактором может быть магнитное поле звезды. С другой стороны, наблюдения показывают [7], что момент вращения на единицу массы в оболочке больше, чем в звездной атмосфере. Здесь магнитное поле также может играть определенную роль. Данных относительно существования магнитных полей у звезд типа Ве пока мало. В каталоге магнитных звезд Бэбкока [5] находится всего одна звезда типа Ве: HD 45667, в оболочке которой было обнаружено сильное поле. Оно было определено по зеемановскому расщеплению запрещенной эмиссионной линии $S\,\text{II}\ \lambda = 4068$ А и составляет 1600 *гс*.

В настоящей работе изучается динамика оболочки, находящейся в магнитном поле. При этом предполагается, что оболочка представляет собой слой плазмы, возникающий при истечении вещества из звезды вблизи ее экватора. При исследовании динамики такой оболочки возникает два вопроса:

1. Как влияет магнитное поле на распределение угловой скорости в оболочке?

2. Может ли магнитное поле передать от звезды в оболочку столько кинетической энергии вращения, чтобы плазма, образующая оболочку, смогла уйти от поверхности звезды на бесконечность?

Исследованию этих вопросов посвящены следующие два раздела.

2. *Основные уравнения и определение радиуса действия магнитного поля.* Рассмотрим стационарное изотермическое течение

плазмы в магнитном поле в слое вблизи экватора звезды. Уравнения, описывающие такое течение, имеют вид

$$\operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \tag{4}$$

$$(\vec{v}\,\operatorname{grad})\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi\rho}(\operatorname{rot}\vec{H} \times \vec{H}) + \operatorname{grad}\varphi_1, \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \rho\vec{v} = 0, \tag{6}$$

$$p = a_3^2\rho \tag{7}$$

где a_3 — изотермическая скорость звука, φ_1 — гравитационный потенциал.

Считая, что поле скоростей: $\vec{v} = (v_r,\ v_\varphi,\ v_z)$, а напряженность магнитного поля: $\vec{H} = (H_r,\ H_\varphi,\ H_z)$ и предполагая течение осесимметричным, напишем в цилиндрической системе координат с началом в центре звезды систему уравнений, полученную Местелом [6] и эквивалентную (3)—(7),

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 - \frac{GM}{r} + a_3^2 \ln\rho - \alpha\Omega r^2 = A, \tag{8}$$

$$\Omega = \frac{\alpha + \dfrac{\eta\beta}{\rho r^2}}{1 - \dfrac{4\pi\eta^2}{\rho}} \tag{9}$$

$$\rho\frac{v_1}{H_1} = \eta, \tag{10}$$

$$H_\varphi = \frac{4\pi\eta r\alpha + \dfrac{\beta}{r}}{1 - \dfrac{4\pi\eta^2}{\rho}}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \tag{12}$$

где $v_1 = (v_r + v_z)^{\frac{1}{2}}$, $H_1 = \sqrt{H_z^2 + H_r^2}$, Ω — угловая скорость вращения плазмы в оболочке; α, β, η, A — величины, определяемые граничными условиями на поверхности звезды и зависящие от z:

$$\alpha = \Omega_0 - \frac{v_1^0}{r_0}\frac{H_\varphi^0}{H_1^0} = \Omega - \frac{v_1}{r}\frac{H_\varphi}{H_1}, \tag{13}$$

$$\beta = H_\varphi^0 r_0 - 4\pi\rho_0 \frac{v_1^0}{H_1^0}\Omega_0 r_0^2 = H_\varphi r - 4\pi\rho\frac{v_1}{H_1}\Omega r^2, \tag{14}$$

$$\eta = \frac{\rho_0 v_1^0}{H_1^0}, \tag{15}$$

$$A = \frac{1}{2}v_1^{02} + \frac{1}{2}\Omega_0^2 r_0^2 - \frac{GM}{r_0} + a_3^2 \ln\rho_0 - \alpha\Omega_0 r_0^2. \tag{16}$$

Величины $\vec{v}_1$ и $\vec{H}_1$ связаны между собой следующим образом: $\vec{v}_1 = k(r)\vec{H}_1$, где $k(r)$ — функция, определяемая из решения (8)—(12). Уравнение (8) является уравнением Бернулли, содержащим дополнительный член $\alpha\Omega r^2$. Этот член представляет работу, совершаемую магнитным полем над плазмой.

Упростим систему уравнений (8)—(12). Положим $v_r \gg v_z$ и $H_r \gg H_z$ и будем считать, что в пределах слоя $\partial H_z/\partial z = 0$, тогда вместо (8)—(12) получим

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 - \frac{GM}{r} + a_3^2 \ln\rho - \alpha\Omega r^2 = A, \tag{17}$$

$$\Omega = \frac{\alpha + \dfrac{\eta\beta}{\rho r^2}}{1 - \dfrac{4\pi\eta^2}{\rho}}, \tag{18}$$

$$\rho\frac{v_r}{H_r} = \eta, \tag{19}$$

$$H_\varphi = \frac{4\pi\eta r\alpha + \dfrac{\beta}{r}}{1 - \dfrac{4\pi\eta^2}{\rho}}, \tag{20}$$

$$H_r = H_r^0\left(\frac{r_0}{r}\right). \tag{21}$$

В (13)—(16) v_1 заменяется на v_r, а H_1 на H_r. При этом α, β, η, A от z уже не зависят.

Обсудим выбранную геометрию магнитного поля в оболочке. Тороидальная составляющая напряженности магнитного поля определяется из решения системы (17)—(21), (а H_r задается). Закон изменения H_r (21) может реализоваться, например, при наличии локальных магнитных полей вокруг звезды вблизи ее экваториальной плоскости. При этом чем меньше толщина слоя и его размер по радиусу, в пределах которого магнитное поле определяет динамику вещества оболочки (определение этого радиуса приведено ниже), тем лучше рассматриваемое приближение. Второй возможностью является возникновение составляющей H_r в результате начального нестационарного истечения плазмы из звезды, происходящего в ее общем магнитном поле вблизи экватора. Для того, чтобы показать это, рассмотрим уравнение (3) с членом $\partial \overline{H}/\partial t$ в правой части и (4). Предполагая, что течение плазмы происходит с постоянной скоростью v_0 и не зависит от φ, напишем в цилиндрической системе координат уравнение (3) для H_r, используя (4):

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} + v_0 \frac{\partial H_r}{\partial r} = -\frac{v_0 H_r}{r} \tag{22}$$

при граничном условии

$$H_r(r_0, t) = H_0(t) \qquad t > 0. \tag{23}$$

Решение (22) имеет вид

$$H_r = \left(\frac{r_0}{r}\right) H_0\left(\frac{r_0 - r + v_0 t}{v_0}\right). \tag{24}$$

В формуле (24) $t > (r - r_0)/v_0$. При $t \to \infty$ вместо (24) получаем

$$H_r = \left(\frac{r_0}{r}\right) H_r(r_0, \infty). \tag{25}$$

В настоящее время трудно сказать, какая из этих двух возможностей реализуется в оболочках звезд типа Be. По всей видимости, наиболее реален второй вариант.

Обратимся к рассмотрению свойств системы (17)—(21). Из интеграла (14) видно, что если перенос момента количества движения при помощи магнитного поля происходит от звезды к оболочке, то при $H_r > 0$, $H_\varphi < 0$, а при $H_r < 0$, $H_\varphi > 0$. В работе рассматривается случай: $H_r > 0$, $H_\varphi < 0$. Противоположная ситуация исследуется аналогично.

Определяющим параметром задачи является выражение

$$\frac{4\pi\eta_l^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{v_{Ar}^2}, \tag{26}$$

где v_{Ar} — альвеновская скорость. Будем считать, что на поверхности звезды $v_r^2 \ll v_{Ar}^2$. Так как плотность вещества в оболочке убывает с расстоянием, существует такое значение r в течении, при котором выполнено равенство $\rho_s = 4\pi\eta_l^2$. Величины Ω и H_φ, определяемые выражениями (18) и (20), сохраняют в этой точке определенные значения, поэтому необходимо, чтобы числители в (18) и (20) обращались в нуль, т. е. выполнялись равенства

$$\beta = 4\pi\eta_l r_s^2 \alpha = -\frac{\rho_s r_s^2 \alpha}{\eta_l}. \tag{27}$$

Отсюда получаем для r_s^2:

$$r_s^2 = -\frac{\beta}{4\pi\eta\alpha} = -\frac{\left(H_\varphi^0 r_0 - 4\pi\rho_0 \frac{v_r^0}{H_r^0}\Omega_0 r_0^2\right)H_r^0}{4\pi\rho_0 v_r^0\left(\Omega - \frac{v_r^0}{r_0}\frac{H_\varphi^0}{H_r^0}\right)}. \tag{28}$$

Введем следующие обозначения:

$$h = 4\pi\rho_0 \frac{v_r^0}{H_r^0}\Omega_0 r_0, \qquad m\Omega_0 = -\frac{v_r^0}{H_r^0}\frac{H_\varphi^0}{r_0}. \tag{29}$$

С учетом (29), (28) принимает вид:

$$r_s^2 = -\frac{(H_\varphi^0 r_0 - h r_0)\, H_r^0}{4\pi\rho_0 v_r^0 \Omega_0 (m+1)}. \tag{30}$$

В настоящей работе будет рассмотрен случай, когда $|H_\varphi^0| \gg h$, что означает ведущую роль магнитного поля в передаче момента количества движения от звезды к оболочке. При этом предположении m лежит в пределах: $0 \leqslant m < 10$. Тогда для r_s^2 получим выражение

$$r_s^2 = -\frac{H_\varphi^0 H_r^0 r_0}{4\pi\rho_0 v_r^0 \Omega_0 (m+1)}. \tag{31}$$

В области $r_0 < r < r_s$ происходит перераспределение угловой скорости вращения плазмы за счет магнитного поля и передача кинетической энергии вращения звезды веществу оболочки.

3. *Поле скоростей в слое.* Дифференцируя уравнение (17) по r и пользуясь соотношением $a = \Omega_0(m+1)$, перепишем систему уравнений (17)—(21) в следующем, удобном для нашей задачи виде:

$$v_r \frac{dv_r}{dr} = -a_3^2 \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} - \frac{GM}{r^2} + [\Omega_0(m+1) - \Omega]\, r^2 \frac{d\Omega}{dr} +$$
$$+ [2(m+1)\Omega_0 - \Omega]\, r\Omega, \tag{32}$$

$$\Omega = \frac{(m+1)\Omega_0 + \dfrac{\beta}{z}\dfrac{v_r}{r}}{1 - \dfrac{v_r^2}{v_{Ar}^2}}, \tag{33}$$

$$\rho v_r r = \eta z, \tag{34}$$

$$H_\varphi = -\frac{4\pi\eta a r_s^2\left(1 - \dfrac{r^2}{r_s^2}\right)}{1 - \dfrac{v_r^2}{v_{Ar}^2}}, \tag{35}$$

$$H_r = H_r^0\left(\frac{r_0}{r}\right), \tag{36}$$

где $z = H_r^0 r_0$.

Рассмотрим более подробно уравнение (32) в области $v_r^2 \ll v_{Ar}^2$. Пользуясь выражениями (33) и (34), можно преобразовать уравнение (32) к следующему виду:

$$\frac{1}{v_r}\left\{\left[1 + \left(\frac{\beta}{z}\right)^2\right] v_r^2 - a_3^2\right\}\frac{dv_r}{dr} = \frac{a_3^2}{r} + \Omega_0^2 (m+1)^2 r - \frac{GM}{r^2}. \tag{37}$$

Если член, соответствующий силе газового давления в правой части уравнения (32), мал по сравнению с остальными членами, то, отбрасывая его, получим

$$\left[1 + \left(\frac{\beta}{z}\right)^2\right] v_r \frac{dv_r}{dr} = \Omega_0^2 (m+1)^2 r - \frac{GM}{r^2}. \tag{38}$$

Изучая поле скоростей в слое, будем пользоваться уравнением (38). Из него следует, что течение плазмы осуществляется, даже если на поверхности звезды, вблизи экватора, гравитационная сила больше центробежной, но при этом должно выполняться равенство

$$\Omega_0^2 (m+1)^2 r_0 = \frac{GM}{r_0^2}. \tag{39}$$

Определим теперь поле скоростей в области $r_0 < r \leqslant r_s$. Интегрируя (38) и используя (16), получим для v_r соотношение

$$v_r = \frac{v_r^0 \left\{1 + \frac{2\Omega_0^2 r_0^2}{v_r^{02}}\left[0.5\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 (m+1)^2 - (m+0.5)\right] - \frac{2GM}{r_0 v_2^{02}}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\right\}^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{\beta}{z}\right)^2\right]^{1/2}}. \tag{40}$$

Величины Ω и v_φ определяются выражениями

$$\Omega = (m+1)\,\Omega_0 + \left(\frac{\beta}{z}\right)\frac{v_r}{r}, \tag{41}$$

$$v_\varphi = (m+1)\,\Omega_0 r + \left(\frac{\beta}{z}\right)v_r. \tag{42}$$

Для плотности имеем

$$\rho = \frac{\eta z}{v_r\, r}. \tag{43}$$

В области, где v_r сравнима с v_{Ar}, подстановкой выражений (33)—(34) и $\alpha = \Omega_0(m+1)$ в (32) получим после несложных преобразований следующее алгебраическое уравнение для определения v_r:

$$B(y)\,u^4 + C(y)\,u^3 + D(y)\,u^2 + E(y)\,u + N(y) = 0, \tag{44}$$

где $y = r/r_0$, и $u = v_r/v_r^0$; $B(y)$, $C(y)$, $D(y)$, $E(y)$, $N(y)$ — функции, определяемые выражениями

$$B(y) = \frac{8\pi^2\eta^2 r_0^2 v_r^{04}}{z^2}\, y^2, \tag{45}$$

$$C(y) = -\frac{4\pi\eta r_0 v_r^{03}}{z}\, y, \tag{46}$$

$$D(y) = \left\{0.5\left[1 + \left(\frac{\beta}{z}\right)^2\right] - \frac{16\pi^2\eta^2 r_0^2}{z^2}\, y^2\left(\frac{GM}{y r_0} + A\right) - \frac{4\pi^2\eta\,(m+1)\,\Omega_0 r_0^2}{z}\left(\frac{\beta}{z}\right) y\right\} v_r^{02}, \tag{47}$$

$$E(y) = \left\{\frac{8\pi\eta r_0}{z}\, y\left(\frac{GM}{y r_0} + A\right) + \frac{4\pi\eta r_0^3 \Omega_0^2 (m+1)}{z}\, y^3\right\} v_r^{02}, \tag{48}$$

$$N(y) = -0.5\,\Omega_0^2 (m+1)^2 r_0^2 y^2 - \left(\frac{GM}{y r_0} + A\right). \tag{49}$$

Распределение угловой скорости вращения определяется формулой (33).

Рассмотрим уравнение (17) в точке r_s. Отбрасывая член, соответствующий тепловой энергии, получим следующее выражение:

$$\frac{1}{2} v_{rs}^2 + \frac{1}{2} \Omega_s^2 r_s^2 - \frac{GM}{r_s} - \alpha\Omega_s r_s^2 = A. \tag{50}$$

Радиальная скорость движения в этой точке определяется из следующего равенства:

$$v_{rs} = v_{Ars} = \frac{H_{rs}}{4\pi\eta} = \frac{z}{4\pi\eta r_s}. \tag{51}$$

Решая уравнение (50) относительно Ω_s, получим для этой величины

$$\Omega_s = \frac{\alpha r_s^2 - \sqrt{\alpha^2 r_s^4 - \left(v_{rs}^2 - \frac{2GM}{r_s} - 2A\right) r_s^2}}{r_s^2}. \tag{52}$$

Выражение (48) является вещественным, если выполняется неравенство

$$\alpha^2 r_s^2 > v_{rs}^2 - \frac{2GM}{r_s} - 2A. \tag{53}$$

При $\alpha \cong \Omega_0$ в неравенстве (53) допускается знак равенства.

Пользуясь этим неравенством и выражениями (51) и (31), можно показать, что для рассматриваемой модели $|H_\varphi^0| > H_r^0$.

Сделаем несколько замечаний относительно значений параметров m и β/z, которые они могут принимать. Будем рассчитывать поле скоростей для случая, когда $|H_\varphi^0| \gg h$. Тогда $\beta = -|H_\varphi^0| r_0$ и $\beta/z = -(|H_\varphi^0|/H_r^0)$.

Из второго соотношения в (29) следует, что $\beta/z = m\Omega_0 r_0/v_r^0$.

При расчете поля скоростей нами принимались следующие значения для m и β/z: $m = 0.03$, $\beta/z = -1.11$; $m = 1$, $\beta/z = -45$.

Пользуясь формулами для v_r, v_φ, ρ, нетрудно рассчитать эти величины в различных точках течения плазмы.

В табл. 1 приведены значения v_r, Ω, ρ, полученные для следующего набора параметров, соответствующих оболочке звезды типа Be при $r_0 = 7 \cdot 10^{11}$ *см*, за исключением значений компонентов магнитного поля на поверхности звезды, которые выбирались произвольно, в соответствии с неравенством $|H_\varphi^0| > H_r^0$

$$v_r^0 = 10^6\ см/сек; \qquad 10^{-3} H_r^r = 0.9;\ 0.1;$$

$$v_\varphi^0 = 4.5 \cdot 10^7\ см/сек; \qquad 10^{-3}\,|H_\varphi^0| = 1;\ 4.5;$$

$$\Omega_0 = 6.4 \cdot 10^{-5}\ сек^{-1}; \qquad 10^9\,\eta = 1.11;\ 10;$$

$$\rho_0 = 10^{-12}\ г/см^3; \qquad 10^{-15}\,\beta = -0.7;\ -3.15;$$

$$10^{-14} z = 6.3;\ 7;$$

$$10^{-34} M = 2.0;\ 4.0; \qquad m = 0.03;\ 1.$$

Из условий на поверхности находим значения для r_s:

$$r_s = 39\,r_0;\ 20\,r_0.$$

В первом варианте расчета предполагалось, что на поверхности звезды выполнено условие: $\Omega_0^2 r_0^3 = GM$, во втором: $\Omega_0^2 r_0^2 < GM$.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН v_r, Ω, ρ

$\lvert H_\varphi^0\rvert=10^3$ гс, $H_r^0=9\cdot10^2$ гс, $M=2\cdot10^{34}$ г							$\lvert H_\varphi^0\rvert=4.5\cdot10^3$ гс, $H_r^0=10^3$ гс, $M=4\cdot10^{34}$ г				
r/r_0	2	3.0	4	6	8	10	2	4	6	8	10
$10^{-8}\,V_r\,см/сек$	0.43	0.78	1.12	1.75	2.4	3.04	0.033	0.076	0.117	0.158	0.198
$10^{-5}\Omega\ сек^{-1}$	3.1	2.4	2.1	1.9	1.8	1.8	2.2	0.6	0.3	0.2	0.1
$10^{15}\rho\ г/см^3$	11	4.4	2.2	0.92	0.53	0.32	150	32	14	8	6

Из данных, приведенных в табл. 1, видно, что в первом случае плазма в слое приобретает энергию, достаточную для того, чтобы преодолеть притяжение звезды при $r = 2\,r_0$, а во втором — при $r = 10 r_0$. В табл. 2 приведены результаты расчета угловой скорости вращения при $r_s = 39\,r_0$ для случая, когда v_r сравнима с v_{A_r}. При расчете использовались соотношения (33) и (44). Графики I и II, приведенные на рис. 1, указывают на то, что в слое происходит передача момента количества движения, так как распределение Ω отлично от закона $\Omega = \Omega_0\,(r_0/r)^2$.

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН Ω ПРИ $|H_\varphi^0| = 10^3$ гс, $H_r^0 = 9\cdot10^2$ гс, $M = 2\cdot10^{-34}$ г

r/r_0	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
$10^5\cdot\Omega\ сек^{-1}$	1.8	1.92	1.93	1.95	2.1	2.4	2.7	3.1	3.9	5.1

Выше предполагалось, что в точке r_s выполнено неравенство $v_{rs}^2 \gg 2GM/r_s$. Рассмотрим теперь случай, когда в точке r_s выполнено равенство:

$$v_{rs}^2 = \frac{2GM}{r_s}. \tag{54}$$

При $\alpha = \Omega_0$, неравенство (53) принимает вид

$$\Omega_0^2 r_s^2 > -2A. \tag{55}$$

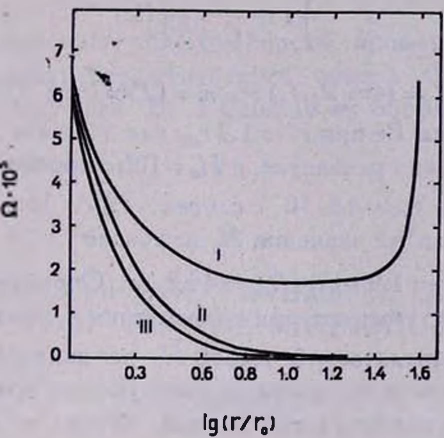

Рис. 1. Зависимость угловой скорости вращения вещества в оболочке от расстояния. I — по табл. 1 и 2 при $|H_\varphi^0| = 10^3$ гс, $H_\varphi^0=9\cdot10^2$ гс, $M=2\cdot10^{34}$ г. II — по табл. 1 при $|H_\varphi^0| = 4.5\cdot10^3$ гс, $H_r^0 = 10^2$ гс, $M = 4\cdot10^{34}$ г. III — по закону $\Omega = \Omega_0 (r_0/r)^2$.

До сих пор предполагалось, что радиальная компонента скорости движения на поверхности задана. Откажемся от этого предположения и будем считать, что она произвольна. Пользуясь выражением (31) и выражением (54), которое преобразуем с помощью (31) и (51), получим следующую систему алгебраических уравнений для определения величин v_r^0, H_r^0, H_φ^0:

$$-\frac{H_\varphi^0 H_r^0}{v_r^0} = \frac{4\pi\rho_0\Omega_0}{r_0} r_s^2, \tag{56}$$

$$\frac{H_r^{07}}{H_\varphi^0 v_r^{03}} = \frac{256\, G^2 M^2 \pi^3 \rho_0^3}{\Omega_0 r_0^3}, \tag{57}$$

$$H_\varphi^{02} + H_r^{02} + H_0^2. \tag{58}$$

Уравнения (56)—(58) имеют решение:

$$b = \frac{l}{(ln)^{1/4}}, \tag{59}$$

$$H_r^{02} = \frac{H_0^2}{\left[1 + \frac{l^2}{(ln)^{1/2}}\right]}, \tag{60}$$

$$v_r^0 = \frac{H_0^2}{\left[1 + \frac{l^2}{(ln)^{1/2}}\right](l_n)^{1/4}}; \tag{61}$$

где $b = -H_\varphi^0/H_r^0$; $l = (4\pi\rho_0\Omega_0/r_0)\, r_s^2$; $n = (256G^2M^2\pi^3\rho_0^3)/\Omega_0 r_0^3$.

Для звезд типа Be при $r_s = 1.7\, r_0$, где r_s вычисляется из выражения (53) в случае знака равенства, и $H_0 = 10^3 гс$ простые вычисления дают: $v_r^0 = 2.6 \cdot 10^5$ *см/сек*, $v_{rs} = 4.9 \cdot 10^{-7}$ *см/сек*, $H_r^0 = 16.5$ *гс*, $|H_\varphi^0| = 26.8$ *гс*, а при $r_s = 10\, r_0$ и том же значении H_0 получаем: $v_r^0 = 8 \cdot 10^2$ *см/сек*; $v_{rs} = 2 \cdot 10^7$ *см/сек*, $H_r^0 = 1.9$ *гс*, $|H_\varphi^0| = 44.2$ *гс*. Очевидно, что при данном значении H_0, v_{rs} и v_r^0 убывают при возрастании r_s, при этом b возрастает. Вообще можно утверждать, что выбор H_0 не является принципиальным вопросом. Важно, чтобы сохранилась связь между вращающейся звездой и истекающей с ее поверхности плазмой, то есть в области $r_0 < r < r_s$ должно быть выполнено соотношение $\xi_0^2 < 1$. Энергия, необходимая для того, чтобы плазма, выбрасываемая с поверхности звезды, удалялась от нее на бесконечность, сообщается при прохождении области сильного поля. При этом возрастает кинетическая энергия радиального движения.

4. *Обсуждение результатов.* Физический смысл результатов, полученных в третьем разделе, состоит в следующем. Основным источником кинетической энергии плазмы в слое является кинетическая энергия вращения звезды, которая передается веществу при помощи магнитного поля. Радиальная компонента силы магнитного поля равна $-(H_\varphi/4\pi\rho)\cdot(\partial/\partial r\,(rH_\varphi))$, а азимутальная $(H_r/4\pi\rho)\cdot(\partial/\partial r\,(rH_\varphi))$. Их отношение равно $-H_\varphi/H_r$. Если $-H_\varphi/H_r > 1$, то в оболочке при увеличении расстояния от поверхности звезды возрастает радиальная составляющая скорости движения плазмы, а угловая скорость вращения падает; при выполнении обратного неравенства имеет место противоположная ситуация.

В расчете, который производился для $|H_{\varphi}^{0}| = 10^{3}$ *гс* и $H_{r}^{0} = 900$ *гс*, проявились оба эти случая. Это также иллюстрируется графиком I.

Результаты вычислений для случая $|H_{\varphi}^{0}| = 4 \cdot 5 \cdot 10^{3}$ *гс* и $H_{r}^{0} = 10^{2}$ *гс*, приведенные в табл. 1, показывают, что при $|H_{\varphi}^{0}| \gg H_{r}^{0}$ имеет место быстрое падение с расстоянием угловой скорости вращения и относительно медленное возрастание радиальной составляющей скорости движения плазмы в слое. Поэтому в той части оболочки, которая дает основной вклад в излучение, приходящее к наблюдателю от звезды, выполняется соотношение $v_{r} \ll v_{\varphi}$, что находится в согласии с наблюдательными данными.

В заключение приношу благодарность профессору С. И. Сыроватскому и сотруднику теоретического отдела Физического института имени П. Н. Лебедева Б. В Сомову за обсуждение работы.

Ленинградский государственный
университет

THE DYNAMICS OF THE ENVELOPES OF Be-STARS. THE EFFECT OF THE MAGNETIC FIELD

V. N. MOROZOV

The influence of the magnetic field on the dynamics of the envelopes of Be-stars is considered. The envelope is assumed to be a layer of plasma, moving in the gravitational and magnetic fields of a rotating star near its equatorial plane. The plasma motion is described by the stationary equations of magnetohydrodynamics. The radial velocity of the plasma, its angular velocity of rotation and the density of matter are calculated as functions of distance from the star surface for several values of the strength of the magnetic field in the approximation of the cold plasma. It is found that if $|H_{\varphi}^{0}| \gg H_{r}^{0}$, where H_{φ}^{0} is the azimuthal component of the magnetic field and H_{r}^{0} is its radial component, then in the envelope $v_{r} \ll v_{\varphi}$, with v_{r} being the radial velocity of the plasma ($v_{r} > 0$) and v_{φ} being the rotational velocity. This result seems to agree with observations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. Струве*, Эволюция звезд, ИЛ, М., 1954.
2. *В. Г. Горбацкий*, *И. Н. Минин*, Нестационарные звезды, М., 1963.
3. *В. В. Соболев*, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1967.
4. *D. N. Limber*, *J. M. Marlborough*, Ap. J., 152, 181, 1968.
5. *H. W. Babcock*, Ap. J., Suppl. ser., 30, 3, 141, 1958.
6. *L. Mestel*, M. N., 138, 359, 1968.
7. *Su-Shu-Huang*, Ap. J., 171, 549, 1972.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕНЗОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВИРИАЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМОЖНЫХ ФИГУР САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ МАТЕРИИ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р. С. ОГАНЕСЯН, М. Г. АБРАМЯН

Поступила 4 мая 1973
Пересмотрена 27 июня 1973

Рассмотрен вопрос определения возможных форм эллипсоидальных фигур равновесия самогравитирующей вращающейся замагниченной несжимаемой массы, с использованием тензорного уравнения вириала. Получен ряд новых серий сфероидальных и эллипсоидальных фигур равновесия в зависимости от структур магнитных полей.

Существование магнитных полей в космическом пространстве вообще и у отдельных космических объектов в частности заставляет учесть влияние магнитных сил на динамику космической плазмы, на равновесие и устойчивость самогравитирующих и вращающихся фигур. Действительно, существование космических образований в виде вытянутых туманностей, волокон, рукавов и т. д. наводит на мысль, что для объяснения их равновесных форм необходимо учесть также магнитные силы. В связи с этим часто рассматриваются силовые магнитные поля той или иной геометрии, могущей играть существенную роль при формировании разных конфигураций самогравитирующей плазмы.

Пусть имеем самогравитирующую, однородно вращающуюся несжимаемую массу бесконечной электропроводности, внутри которой существует магнитное поле $\vec{B}(\vec{x})$. Вопросы равновесия и устойчивости рассматриваемой системы в рамках физики сплошных сред определяются следующей системой уравнений:

$$\rho \frac{du_j}{dt} + 2\rho\varepsilon_{jkl}\omega_k u_l = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p + \frac{|\vec{B}|^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_k} B_j B_k + \rho \frac{\partial}{\partial x_j}\left(V + \frac{1}{2}[\vec{\omega}\vec{x}]^2\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} = -4\pi G\rho, \tag{2}$$

$$p = p(\rho). \tag{3}$$

Умножая уравнение (1) на x_i и интегрируя по объему системы, после некоторых преобразований получим тензорное уравнение вириала в виде [1]

$$\frac{dN_{ij}}{dt} + 2\varepsilon_{jkl}\omega_k N_{il} = 2T_{ij} - 2M_{ij} + W_{ij} + \delta_{ij}\{(\gamma-1)U + M\} + \omega^2 I_{ij} - \omega_j\omega_k I_{ik} + \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\Sigma} x_i\left(2B_j B_k d\Sigma_k - |\vec{B}|^2 d\Sigma_j\right) - \int\limits_{\Sigma} p x_i d\Sigma_j, \tag{4}$$

где введены следующие тензорные обозначения:

$$N_{ij} = \int\limits_{\tau} \rho x_i u_j d\vec{x} \text{—тензор вириала,}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau} \rho u_i u_j d\vec{x} \text{—тензор кинетической энергии,}$$

$$W_{ij} = \int\limits_{\tau} \rho x_i \frac{\partial V}{\partial x_j} d\vec{x} \text{—тензор гравитационной энергии,} \tag{5}$$

$$M_{ij} = \int\limits_{\tau} \frac{B_i B_j}{8\pi} d\vec{x} \text{—тензор магнитной энергии,}$$

$$I_{ij} = \int\limits_{\tau} \rho x_i x_j d\vec{x} \text{—тензор момента инерции,} \tag{6}$$

$$U = \int\limits_{\tau} \frac{p}{\gamma - 1} d\vec{x} \text{—внутренняя тепловая энергия.}$$

В уравнении (4) через Σ обозначена поверхность системы. Поскольку на поверхности гидростатическое давление обращается в нуль, то имеем:

$$\int_{\Sigma} p\, x_i d\Sigma_j = 0. \tag{7}$$

В этой работе рассматривается случай, когда магнитное поле не обращается в нуль на поверхности конфигурации, так что магнитные члены в уравнении (4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \delta_{ij} M - 2M_{ij} + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} x_i \left(B_j B_k d\Sigma_k - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 d\Sigma_j \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi}\int x_i B_k \left(\frac{\partial B_j}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right) d\vec{x}. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда с учетом (7) и (8) уравнение (4) примет вид

$$\frac{dN_{ij}}{dt} + 2\varepsilon_{jkl}\omega_k N_{il} = 2T_{ij} + M_{ij} + W_{ij} + \delta_{ij}(\gamma - 1) U + \omega^2 I_{ij} - \omega_j \omega_k I_{ik}. \tag{9}$$

Уравнение (9) представляет тензорное уравнение вириала второго порядка для вращающихся самогравитирующих несжимаемых масс при наличии магнитных полей, не обращающихся в нуль на поверхности системы.

Для конфигураций, находящихся в магнитостатическом равновесии, $u_i = 0$, уравнения (1) и (9) примут вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(V + \frac{1}{2}[\vec{\omega}\vec{x}]^2\right) + \frac{1}{4\pi\rho} B_k \left(\frac{\partial B_j}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right), \tag{10}$$

$$\delta_{ij}(\gamma - 1) U + W_{ij} + M_{ij} + \omega^2 I_{ij} - \omega_j \omega_k I_{ik} = 0. \tag{11}$$

Действуя оператором $\varepsilon_{ijn}(\partial/\partial x_n)$ на обе стороны уравнения (10), с учетом уравнения состояния (3), получим

$$\varepsilon_{ijn}\frac{\partial}{\partial x_n}\left\{\frac{B_k}{\rho}\left(\frac{\partial B_j}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right)\right\} = 0. \tag{12}$$

Решения этого уравнения образуют класс силовых магнитных полей, могущих повлиять на равновесное состояние рассматриваемой системы (в дальнейшем имеются в виду именно такие поля). Их присутствие особенно ярко сказывается при рассмотрении вопросов фигур равновесия несжимаемых конфигураций. В частности, легко убедиться, что тороидальные магнитные поля типа

$$B_i = x_j P_{ij}(\vec{x}),$$
$$P_{ij}(\vec{x}) = \rho F(z)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

(где $z \equiv \rho(x_1^2 + x_2^2)$, а $F(z)$ — произвольная функция своего аргумента) удовлетворяют уравнению (12). В сферической системе координат решение (13) имеет следующий вид [2]:

$$\vec{B} = \hat{e}_\varphi \frac{F(\rho r^2 \sin^2 \vartheta)}{r \sin \vartheta}.$$

Отметим, что решение (13) справедливо как для однородного, так и для неоднородного распределения массы.

Теперь рассмотрим влияние этих полей на форму эллипсоидальных фигур равновесия жидких несжимаемых масс.

Представим поверхность однородно вращающейся массы в виде трехосного эллипсоида:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1. \tag{14}$$

Внутри такой фигуры гравитационный потенциал имеет вид [3]

$$V(\vec{x}) = -c_j x_j^2, \tag{15}$$

где коэффициенты c_j выражаются через

$$c_j = \frac{3}{4} Gm \int_0^\infty \frac{1}{a_j^2 + s} \frac{ds}{\Delta(s)},$$
$$\Delta(s) \equiv [(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)]^{1/2}. \tag{16}$$

Здесь m есть масса однородного эллипсоида;

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho a_1 a_2 a_3. \tag{17}$$

При этом тензор гравитационной энергии (5) с учетом (15) примет вид

$$W_{ij} = -2c_i I_{ij}, \tag{18}$$

где тензор момента инерции трехосного эллипсоида I_{ij} имеет вид

$$I_{ij} = \frac{m}{5} a_i^2 \delta_{ij}. \tag{19}$$

Так как тензор гравитационной энергии и тензор момента инерции диагональны, то из тензорного уравнения вириала (11) заключаем, что фигура может иметь вид эллипсоида, если тензор магнитного поля (8) имеет диагональную форму:

$$M_{ij} = 0, \quad \text{если } i \neq j. \tag{20}$$

Очевидно, что тороидальные магнитные поля (13) удовлетворяют этому требованию.

Теперь, свертывая уравнение (11), получим

$$W + M + 3(\gamma - 1)U + \omega^2 I = 0. \tag{21}$$

Здесь мы предполагаем, что вращение происходит вокруг оси x_3: $\omega_j = \omega\delta_{3j}$, а

$$I = I_{11} + I_{22} = \int \rho (x_1^2 + x_2^2) d\vec{x},$$
$$M = M_{ii}, \quad W = W_{ii}. \tag{22}$$

(21) дает соотношение между различными энергиями конфигурации, находящейся в магнитостатическом равновесии. Так как $(\gamma - 1)U$ есть величина всегда положительная, то отсюда получается важный результат — в магнитостатическом равновесии должно удовлетворяться следующее неравенство:

$$M + \omega^2 I < |W|. \tag{23}$$

Это условие ограничивает величину магнитного поля (для данной угловой скорости) сверху.

Запишем теперь уравнение (11) для диагональных элементов

$$(\gamma - 1)U = (2c_1 - \omega^2) I_{11} - M_{11},$$
$$(\gamma - 1)U = (2c_2 - \omega^2) I_{22} - M_{22}, \tag{24}$$
$$(\gamma - 1)U = 2c_3 I_{33} - M_{33}.$$

Приравнивая правые части (24), с учетом (19) получим

$$(2c_1 - \omega^2) a_1^2 - \frac{5}{m} M_{11} = (2c_2 - \omega^2) a_2^2 - \frac{5}{m} M_{22} = 2c_3 a_3^2 - \frac{5}{m} M_{33}. \tag{25}$$

Исключая из (24) угловую скорость ω, с учетом (16) получим:

$$
(a_2^2 - a_1^2)\left\{\int_{\tau}\left[\frac{a_1^2 a_2^2}{(a_1^2+s)(a_2^2+s)} - \frac{a_3^2}{a_3^2+s}\right]\frac{ds}{\Delta(s)} + \frac{M_{33}}{\frac{3}{10}Gm^2}\right\} -
$$

$$
- \frac{a_2^2 M_{11} - a_1^2 M_{11}}{\frac{3}{10}Gm^2} = 0. \tag{26}
$$

Уравнение (26) есть необходимое условие, при котором эллипсоиды (14) являются фигурой равновесия рассматриваемой системы. При этом связь между физическими параметрами конфигурации (магнитное поле, угловая скорость) и формой эллипсоида выражается следующими соотношениями:

$$
\Omega_1 \equiv \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{a_3^2}{a_1^2}(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_3) = \frac{1}{\pi G\rho}\left[c_1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}c_3\right], \tag{27}
$$

$$
\Omega_2 \equiv \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{a_3^2}{a_2^2}(\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3) = \frac{1}{\pi G\rho}\left[c_2 - \frac{a_3^2}{a_2^2}c_3\right], \tag{28}
$$

которые легко получаются из уравнений (25) с учетом безразмерного обозначения:

$$
\mathfrak{M}_i = -\frac{M_{ii}}{\frac{2}{5}\pi G\rho m a_3^2}. \tag{29}
$$

Теперь рассмотрим возможные фигуры равновесия замагниченной самогравитирующей жидкой массы, равномерно вращающейся вокруг оси x_3.

1. *Сфероиды*: $a_1 = a_2 \equiv a \neq a_3$. При этом, как видно из (16), $c_1 = c_2 \equiv c \neq c_3$, а из условия (26) следует, что сфероиды станут фигурами равновесия, если только имеет место соотношение

$$
\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \equiv \mathfrak{M}. \tag{30}
$$

Тогда с учетом вышеуказанного, из (27) и (28) получим, что для сфероидальных фигур

$$
\Omega \equiv \Omega_1 = \Omega_2 = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{a_3^2}{a^2}(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_3) = \frac{1}{\pi G\rho}\left[c - \frac{a_3^2}{a^2}c_3\right]. \tag{31}
$$

Полученное соотношение связывает физические параметры системы с формой сфероидальной фигуры. Отметим, что (31) при отсутствии магнитного поля дает соотношение для сфероидов Маклорена [3]. Так что наличие магнитных полей может оказать существенное влияние на форму сфероидальных фигур равновесия. Рассмотрим подробнее этот вопрос при наличии тороидальных магнитных полей типа (13). При этом условие (30) дает

$$\int_{\tau} (x_1^2 - x_2^2) \left| F_{(z)}^2 + z F(z) \frac{dF}{dz} \right| d\vec{x} = 0. \tag{32}$$

Так как здесь интегрирование производится по объему сфероида, то из аксиальной симметрии конфигурации следует, что (32) удовлетворяется для всякой функции $F(z)$, конечной в центре сфероида. Для иллюстрации положим:

$$F_{(z)} = \lambda (x_1^2 + x_2^2)^n, \qquad (\lambda = \mathrm{const}). \tag{33}$$

Тогда с учетом (33), (13), (8) из (29) получим:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{5\rho(n+1)\lambda^2}{4\pi G m a_3^2} \int_{\tau} x_1^2 (x_1^2 + x_2^2)^{2n} d\vec{x}, \tag{34}$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{5\rho(n+1)\lambda^2}{4\pi G m a_3^2} \int_{\tau} x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)^{2n} d\vec{x}, \tag{35}$$

$$\mathfrak{M}_3 = 0. \tag{36}$$

Комбинация (33) и (13) приводит к магнитному полю тороидального типа более общего характера, чем рассмотренное поле в работах [3, 5]. В частности, при $n = 0$, когда магнитное поле дается в виде

$$B_1 = -\lambda\rho x_2, \quad B_2 = \lambda\rho x_1, \quad B_3 = 0 \tag{37}$$

(в сферической системе координат — $\vec{B} = \hat{e}_\varphi \lambda\rho\, r \sin\vartheta$), интегрирование в (34) и (35) по объему сфероида дает

$$\mathfrak{M} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 G} \frac{a^2}{a_3^2} = \frac{B_0^2}{8\pi^2 G\rho^2 a^2} \frac{a^2}{a_3^2}.$$

Так что соотношение (31) для рассматриваемого поля дает

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{B_0^2}{8\pi^2 G\rho^2 a^2} = \frac{1}{\pi G\rho}\left[c - \frac{a_3^2}{a^2} c_3\right], \tag{38}$$

где $B_0 = \lambda\rho a$ — есть индукция магнитного поля на экваторе сфероида. Здесь можно различить два случая:

а) *Сплюснутые сфероиды:* $a > a_3$. Для этих фигур последний член в (38) — величина положительная, откуда следует, что $\Omega > 0$, т. е.

$$\rho\omega^2 a > \frac{B_0^2}{2\pi\rho a}, \tag{39}$$

когда на экваторе фигуры центробежная сила больше магнитной силы, тогда фигура равновесия примет вид сплющенного сфероида [4]. При этом, обозначая $a_3^2 = a^2(1 - e^2)$ и производя интегрирование в (16), получим:

$$\begin{aligned} c &= \pi G\rho \left[\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1-e^2}{e} \right], \\ c_3 &= 2\pi G\rho \left[\frac{1}{e^2} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3} \arcsin e \right]. \end{aligned} \tag{40}$$

Отметим, что при $e \to 0$, $c_i \to (2/3)\pi G\rho$. Теперь с учетом (40) соотношение (38) примет вид

$$\Omega \equiv \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{B_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3} \left[(3-2e^2) \arcsin e - 3e(1-e^2)^{1/2}\right]. \tag{41}$$

График функции $\Omega(e)$ приведен на рис. 1, откуда, в частности, видно, что она имеет максимум в точке $e_0 = 0.9299...$, равный

$$\Omega_0 \equiv \Omega(e_0) = 0.22467... .$$

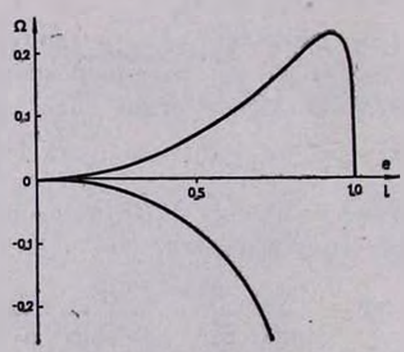

Рис. 1.

При отсутствии магнитного поля из (41) и (42) следует предельное значение угловой скорости для сфероидов Маклорена [5]:

$$\omega_{пр}^2 = 2\pi G\rho\Omega_0.$$

Так что магнитное поле увеличивает этот предел у сплющенных сфероидов:

$$\omega^2_{\text{пр}} = 2\pi G\rho \left\{ \Omega_0 + \frac{B_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} \right\}.$$

Условие (23) для рассматриваемых эллипсоидов дает

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{B_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} < \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} \arcsin e, \tag{43}$$

что тоже указывает на ограниченность величин Ω у сплющенных сфероидов. Неравенство нарушается только в окрестностях точки $e = 1$, вблизи которой эти фигуры неустойчивы [3].

В общем случае сплющенные сфероиды являются возможными фигурами равновесия, если

$$\Omega_0 > \Omega \equiv \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - (1-e^2)(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_3) > 0. \tag{44}$$

б) *Вытянутые сфероиды*: $a_3 > a$. Когда на экваторе сфероида магнитные силы превосходят центробежные, сфероидальные фигуры равновесия вытягиваются вдоль оси вращения [4].

Интегрируя (16) с учетом обозначения $a^2 = a_3^2(1-l^2)$ получим

$$c = \pi G\rho \frac{1-l^2}{2} \left[\frac{2l}{1-l^2} - \ln\frac{1+l}{1-l} \right],$$

$$c_3 = \pi G\rho (1-l^2) \left[\ln\frac{1+l}{1-l} - 2l \right].$$

Здесь тоже при $l \to 0$: $c_j \to (2/3)\pi G\rho$. По аналогии с (41) для этих фигур получаем

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{B_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} = \frac{3}{l^2} - \frac{3-l^2}{2l^3} \ln\frac{1+l}{1-l}. \tag{45}$$

При $l \to 0$, $\Omega \to 0$; а при $l \to 1$ функция $\Omega(l)$ стремится к минус бесконечности (см. на рис. 1), т. е. с ростом магнитных полей вытянутость фигуры вдоль оси вращения увеличивается. Очевидно, что при отсутствии вращения ($\omega = 0$) и при наличии тороидального магнитного поля типа (13) фигура равновесия также является вытянутым сфероидом.

Для вытянутых сфероидов гравитационная потенциальная энергия имеет вид

$$W = -\frac{3}{5} G \frac{m}{a_3} \frac{l}{2} \ln\frac{1+l}{1-l}.$$

Так что условие (23) дает тот же результат.

В общем случае, когда магнитные поля удовлетворяют условию

$$0>\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}-\frac{\mathfrak{M}-\mathfrak{M}_3}{1-l^2}>-\infty, \tag{46}$$

вытянутые вдоль оси вращения сфероиды являются возможными фигурами равновесия.

2. Если наряду с условием (30) удовлетворяется также условие

$$\Omega=\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}-\mathfrak{M}+\mathfrak{M}_3=0, \tag{47}$$

то, как следует из (38), (27) и (28), возможной фигурой равновесия является однородно-вращающаяся замагниченная *сфера* $a_1=a_2=a_3\equiv R$. В частности, при наличии тороидального магнитного поля (36) условие (47) дает [4]

$$B_0=\omega R\sqrt{2\pi\rho}\,. \tag{48}$$

Итак, в зависимости от величины магнитного поля, удовлетворяющего условию (31), фигуры равновесия могут иметь вид либо сплющенных и вытянутых сфероидов, либо сферы. При этом возможные значения параметра Ω заключены в интервале

$$\Omega_0\geqslant\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}-\frac{a_3^2}{a^2}(\mathfrak{M}-\mathfrak{M}_3)>-\infty. \tag{49}$$

Вне этого интервала существование сфероидальных фигур равновесия исключается.

3. *Трехосные эллипсоиды:* $a_1\neq a_2\neq a_3$.

С помощью обозначений

$$u=a_3^2/a_1^2,\quad v=a_3^2/a_2^2,\quad x=s/a_3^2,$$
$$D^2=(1+x)(1+ux)(1+vx), \tag{50}$$

условие (26) и соотношения (27), (28) с учетом (16) запишутся в видах, удобных для исследований:

$$\mathfrak{M}_3+\frac{v\mathfrak{M}_2-u\mathfrak{M}_1}{u-v}=\int_0^\infty(1-u-v-uvx)\frac{x\,dx}{D^3}, \tag{51}$$

$$\Omega_1=\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}-v(\mathfrak{M}_2-\mathfrak{M}_3)=\int_0^\infty\frac{v(1-v)\,x\,dx}{(1+x)(1+vx)D}, \tag{52}$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - u(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_3) = \int\limits_0^\infty \frac{u(1-u)\,x\,dx}{(1+x)(1+vx)\,D}. \tag{53}$$

Пользуясь тем, что рассматриваемому случаю соответствует $u \neq v$, составим следующую комбинацию:

$$\Omega_3 = \frac{u\Omega_1 - v\Omega_2}{u - v}.$$

С учетом (52) и (53) получаем

$$\Omega_3 = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - uv\,\frac{\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1}{u - v} = uv\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+ux)(1+vx)D}. \tag{54}$$

Это дает соотношение между физическими параметрами системы с формой трехосного эллипсоида. Как видно, последний член в (54) симметричен по отношению u и v, откуда следует, что той же симметрией обладает и магнитный член (в частности, это следует также из (32))

$$\frac{\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1}{u - v} = \frac{\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1}{v - u}.$$

Теперь исследуем условие (51). Сначала отметим, что оно дает геометрию возможных трехосных эллипсоидальных фигур в зависимости от магнитного поля. В частности, когда магнитное поле отсутствует, оно дает геометрию эллипсоидов Якоби. При этом для каждого u из интервала $1 > u > 0$ существует определенное значение v из интервала $1 - u > v > 0$, для которых удовлетворяется (51). Оказывается, что для этих эллипсоидов [5]

$$0 < \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} \leqslant \Omega_{30} = 0.1871..., \tag{55}$$

откуда следует, что существует предельная угловая скорость, выше которой эллипсоиды Якоби не смогут стать фигурами равновесия.

В общем случае, как видно из (51), магнитное поле изменяет геометрию эллипсоидов Якоби. Притом для этого необходимо, чтобы

$$\alpha \equiv \mathfrak{M}_3 + \frac{v\mathfrak{M}_2 - u\mathfrak{M}_1}{u - v} \neq 0.$$

При этом величина угловой скорости этих эллипсоидов определяется из (54).

Магнитное поля по своим действиям на форму фигуры равновесия трехосных эллипсоидов можно разделить на три класса.

а) *Магнитные поля, не влияющие на форму эллипсоидов Якоби.* Этот класс составляют магнитные поля, обращающие параметр α в нуль, тем самым сохраняя геометрию эллипсоидов Якоби. Но, как видно из (54), они могут изменять предельную скорость вращения фигуры:

$$\omega^2_{\text{пр}} = 2\pi G\rho\left\{\Omega_{30} + u_0 v_0 \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{v_0 - u_0}\right\}, \tag{56}$$

где u_0 и v_0 — параметры предельной фигуры серии Якоби.

В частности, при наличии тороидальных магнитных полей типа (13), с учетом (33)—(36) (для трехосных эллипсоидов уже $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$) α примет вид

$$\alpha = \frac{v\mathfrak{M}_2 - u\mathfrak{M}_1}{u - v} = \frac{15}{32}\,\frac{\lambda^2(n+1)}{\pi G\rho\, a_1 a_2 a_3^3}\int\limits_{\tau} \frac{vx_2^2 - ux_1^2}{u - v}\,(x_1^2 + x_2^2)^{2n}\, d\vec{x}. \tag{57}$$

Отсюда видно, что тороидальное магнитное поле, соответствующее значению $n = 0$ (его вид дается через (37)), входит в рассматриваемый класс силовых магнитных полей, так как при этом

$$\alpha \sim \int\limits_{\tau} (vx_2^2 - ux_1^2)\, d\vec{x} \sim ua_1^2 - va_2^2 \equiv 0.$$

Далее, для магнитного члена, входящего в (54), получаем

$$u_0 v_0 \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{v_0 - u_0} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 G} > 0.$$

Так что эти поля увеличивают предельную скорость вращения эллипсоидов Якоби [4]

$$\omega^2_{\text{пр}} = 2\pi G\rho\left(\Omega_{30} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 G}\right). \tag{58}$$

б) *Сплющивающие магнитные поля.* Этот класс образуется магнитными полями, придающими α значения больше нуля ($\alpha > 0$). При этом, условие (51) удовлетворяется уже при иных значениях u и v по отношению к параметрам серии эллипсоидов Якоби. Так что получаются новые серии трехосных эллипсоидальных фигур, в которых каждому значению параметра $1 > u > 0$ соответствует значение v_1, из интервала $1 - u > v_1 > 0$, где v_1 уже меньше по величине, чем v, у соответствующего эллипсоида Якоби (т. е. $v_я > v_1$, для одного и того же значения u). Притом с увеличением величины α, значения v, соответствующие данному u, все больше уменьшаются. Так, например, если $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, то для данного значения u из интервала (0.1) имеем (см. рис. 2)

$$v_я > v_{\alpha_1} > v_{\alpha_2} \tag{59}$$

или

$$\begin{aligned} (a_1)_я &> (a_1)_{\alpha_1} > (a_1)_{\alpha_2}, \\ (a_2)_я &< (a_2)_{\alpha_1} < (a_2)_{\alpha_2}, \\ (a_3)_я &> (a_3)_{\alpha_1} > (a_3)_{\alpha_2}, \end{aligned} \tag{60}$$

где вторые индексы указывают на значения параметров эллипсоидов различных серий с $\alpha = 0$; α_1; α_2. При выводе этих соотношений мы пользовались постоянством объема фигуры: $a_1 a_2 a_3 = \text{constant}$. Из (60) видно, что с увеличением α ось, вокруг которой происходит вращение фигуры, все больше уменьшается. С этой точки зрения класс магнитных полей $\alpha > 0$ мы называем сплющивающим. Следует отметить также, что с увеличением α уменьшаются пределы изменения u и v, удовлетворяющие условию (51). Например, для $\alpha > 0.71\ldots$ возможные значения u и v следующие: $u, v > 0.4$, а для $\alpha > 1.79\ldots$ получим $u, v < 0.2$ и т. д. Все эти факты говорят, о том, что с увеличением α соответствующие серии трехосных эллипсоидов все больше сжимаются по оси вращения и вытягиваются вдоль одной из осей x_1 или x_2.

Важно также отметить, что полученные серии трехосных эллипсоидов симметричны по отношению параметров u, v, то есть если в какой-то серии существует фигура с u_1, v_1, то существует и фигура с $u = v_1$, $v = u_1$ (в той же серии).

Информацию о величине угловой скорости этих серий фигур дает нам соотношение (54), откуда, в частности, видно, что существует предельная скорость вращения для данной серии

$$\omega^2_{пр} = 2\pi G \rho \left\{ uv \left[\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{v - u} + \int_0^\infty \frac{x(1+x)\,dx}{D^3} \right] \right\}_{\max - \text{для данной серии.}} \tag{61}$$

В частности, при наличии тороидальных магнитных полей типа (13) с учетом (33), когда параметр α дается через (57), получим, что тороидальные магнитные поля, соответствующие значениям $n > 0$, являются сплющивающими в вышеуказанном смысле слова. В частности, при $n = 1/2$ имеем

$$\alpha = \frac{3\lambda^2}{56\pi^2 G}\frac{a_1^2 a_2^2}{a_3^2} > 0, \tag{62}$$

$$uv\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{v-u} = \frac{9\lambda^2}{56\pi^2 G}(a_1^2 + a_3^2) = 3\alpha(u+v) > 0.$$

Из (62) следует, что $\alpha \sim a_3^{-4}$ (с учетом постоянства объема системы), так что этот результат согласуется с полученным, т. е. с увеличением α „сплющенность" трехосных эллипсоидальных фигур увеличивается.

в) *Вытягивающие магнитные поля,* при которых α обращается в отрицательное число. Очевидно, что при этом получившиеся новые серии трехосных эллипсоидов характеризуются тем свойством, что каждому значению параметра α из интервала $1 > u > 0$ соответствует значение v уже большее по величине, чем у соответствующих эллипсоидов серии Якоби (рис. 2): $v > v_{я}$. Тем более, в этих сериях существуют эллипсоиды с параметрами $u > 1$, $v > 1$, то есть вытянутые вдоль оси вращения трехосные эллипсоиды.

Приближенные расчеты показывают, что параметр α ограничен снизу:

$$|\alpha| \leqslant |\alpha_0| = 0.342\ldots \tag{63}$$

Если магнитные поля таковы, что соответствующий им параметр $|\alpha|$ больше, чем $|\alpha_0|$, то фигуры равновесия в виде трехосных эллипсоидов невозможны.

На рис. 2 приведено несколько кривых, представляющих связь параметра α с формой эллипсоидальной фигуры, где в качестве параметра взята величина u. Точки пересечения этих кривых с осью абсцисс соответствуют эллипсоидам серии Якоби. Кривые, соответствующие значениям параметра $\alpha > 0$, образуют серии „сплющенных" трехосных эллипсоидов (по отношению к эллипсоидам Якоби). И, наконец, кривые, расположенные ниже оси абсцисс, представляют рассматриваемые серии вытянутых трехосных эллипсоидальных фигур.

Теперь о нескольких свойствах серий вытянутых эллипсоидальных фигур.

При $\alpha_0 < \alpha < 0$ каждому значению параметра u, взятому из интервала $0 \leqslant u \leqslant 1$, соответствуют два значения v: v_1, v_2 $(v_2 > v_1)$. Отметим, что все кривые, расположенные ниже оси абсцисс, пересекаются ею при $v \gg 1$. Так что при этом имеем две серии вытянутых эллипсоидов, между полуосями которых существуют следующие соотношения:

$$(a_1)_* < (a_1)_1 < (a_1)_2,$$
$$(a_2)_* > (a_2)_1 > (a_2)_2,$$
$$(a_3)_* < (a_3)_1 < (a_3)_2.$$

При стремлении α к нулю одна из этих серий превращается в серию Якоби, а другая — приблизительно в серию дискообразных фигур с параметрами $1 \geqslant u \geqslant 0$; $v \gg 1$ $(a_1 > a_3 \gg 1,\ a_2 \ll 1)$, вращающихся вокруг полуоси a_3.

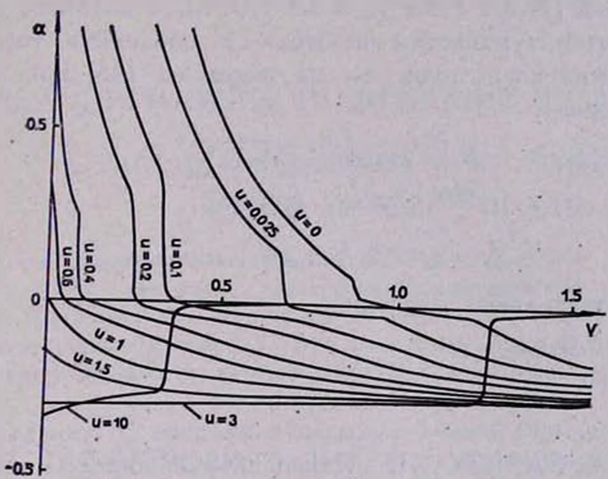

Рис. 2.

При $1 < u < 2{,}8\ldots$ каждому значению u соответствует одно или два значения v (в зависимости от величины α). Эти серии эллипсоидов при $\alpha \to 0$ стремятся к бесконечным дискам с параметрами

$$a_3 > a_1 \gg 1, \quad a_2 \ll 1. \tag{64}$$

Так как все эти серии симметричны относительно u и v, то возможны и фигуры с параметрами

$$a_3 \lesseqgtr a_2 \gg 1, \qquad a_1 \ll 1. \tag{65}$$

Наконец, при $u > 2.8$ каждому значению u соответствует только одно значение v. Эти серии эллипсоидальных фигур при $\alpha \to 0$ стремятся к фигурам (64) или приблизительно к бесконечному эллиптическому цилиндру: $u, v \gg 1$ $(a_3 \gg 1,\ a_1 \gtreqless a_2 \ll 1)$.

Итак, трехосные эллипсоидальные фигуры получаются, когда

$$\infty > \alpha \geqslant \alpha_0.$$

При стремлении α к нулю получаем фигуры трех измерений: эллипсоиды серии Якоби, дискообразные серии фигур и иглообразно вытянутые трехосные фигуры.

Значения угловых скоростей полученных серий даются соотношением (61).

Полученные результаты качественно не противоречат наблюдаемым вытянутым формам некоторых образований. Известно [6], что планетарные туманности долго сохраняют свои более или менее правильные формы. Пренебрегая лучистой энергией, качественно оценим величину магнитного поля на поверхности туманности A21. Установлено, что эта туманность имеет форму вытянутого сфероида с отношением полуосей [7] 0.4 ± 0.2 ($e = 0.8 \div 0.98$), у которого $a \approx 0.3$ *пс*. Если форму этой туманности попытаться объяснить тороидальным характером магнитного поля, то из формулы (45) при отсутствии вращения находим

$$B_0 = 2\pi\rho a \sqrt{-G\Omega(e)}\,.$$

Полагая, что $\rho = 1.6 \cdot 10^{-20}$ *г/см*^{3} [6], получим

$$B_0 = 4.4 \cdot 10^{-6} \div 10^{-5} \text{ гаусс},$$

т. е. удовлетворительные значения.

Ереванский государственный
университет

ON THE APPLICATION OF THE TENSOR VIRIAL EQUATION FOR THE DETERMINATION OF THE POSSIBLE FIGURES OF THE SELF-GRAVITATING MATTER IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

R. S. OGANESSIAN, M. G. ABRAHAMIAN

The question of the determination of the possible forms of the ellipsoidal figures of the equilibrium of the self-gravitating rotating magnetized incompressible mass are considered by means of the tensor virial equation. Som new series of spheroidal and ellipsoidal equilibrium figures are obtained, depending on the structure of the magnetic fields.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. P. S. Anand, R. S.Kushwaha*, Ann. Astrophys., 25, 310, 1962.
2. *I. W. Roxburgh, B. R. Durney*, M. N., 135, 329, 1967.
3. *N. R. Lebovitz*, Ap. J., 134, 500, 1961.
4. *Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян*, Астрон. ж. (в печати).
5. *М. Ф. Субботин*, Курс небесной механики, т. 3, Гостехиздат, М., 1949.
6. *Г. А. Гурзадян*, Планетарные туманности, Физматгиз, М., 1962.
7. *Т. А. Лозинская*, Астрон. ж., 49, 1158, 1972.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

ОБ АННИГИЛЯЦИИ ПОЗИТРОНИЯ В ПЛАЗМЕ

С. А. КАПЛАН, Е. Б. КЛЕЙМАН, И. М. ОЙРИНГЕЛЬ

Поступила 26 июля 1973

Вычислена вероятность индуцированного двухквантового фотон-плазменного перехода $2^3S_1 - 1^3S_1$ для атома позитрония, находящегося в турбулентной плазменной среде. Показано, что этот переход может быть более вероятен, чем трехфотонная аннигиляция с уровня 2^3S_1. Это может быть использовано для диагностики плазменной турбулентности по времени жизни 2^3S_1 состояния.

1. *Введение.* В астрофизических условиях процессы рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар происходят довольно часто и обуславливают некоторые наблюдаемые явления.

Следует отметить, что электрон-позитронная аннигиляция в плазме проходит чаще всего через стадию образования атомов позитрония [1]. Так, только 25% позитронов с начальной энергией 100 *Мэв* аннигилируют в „свободном“ состоянии. Остальные затормаживаются до тепловых энергий и образуют с электронами плазмы атомы позитрония, из которых 75% оказываются в ортосостоянии и 25% — в парасостоянии. Более 50% атомов позитрония образуются в возбужденном состоянии и потом каскадно переходят в основное состояние, где и аннигилируют.

Позитроний является структурным аналогом водородоподобного атома, правда, между ними имеются и существенные различия. Во-первых, приведенная масса позитрония равна $(1/2)\,m_e$, поэтому энергия его нерелятивистских уровней становится равной половине таковой для атома водорода, а характерные атомные расстояния удваиваются. Равенство масс электрона и позитрона влияет также на тонкую структуру уровней позитрония [2]. Во-вторых, электрон и позитрон могут аннигилировать с испусканием фотонов. Для состояния с отличным от нуля орбитальным моментом вероятность этого процесса мала. Но в s-состоянии она может превзойти вероятность обычных радиационных переходов.

Свойства излучения, возникающего при аннигиляции электрон-позитронной пары, в большой степени зависят от спиновых состояний сталкивающихся частиц [3—5]. Существуют два типа состояний позитрония: синглетные и триплетные. По условиям симметрии аннигиляция из синглетного состояния возможна лишь с испусканием четного (два и более) числа фотонов [6], а из триплетного — только с испусканием нечетного (по крайней мере трех) их числа [7, 8].

Как указывалось выше, сечение и характер аннигиляции сильно зависят от взаимной ориентации спинов аннигилирующих частиц; соответственно различаются и времена жизни. Двухфотонная аннигиляция из синглетного состояния позитрония характеризуется временем жизни:

$$\tau_{2\gamma} = 1.25 \cdot 10^{-10} \cdot n^3 \textit{ сек},$$

а трехфотонная аннигиляция из триплетного состояния —

$$\tau_{3\gamma} = 1.4 \cdot 10^{-7} \cdot n^3 \textit{ сек},$$

где n — главное квантовое число.

Как правило, вероятности каскадных радиационных переходов больше, чем вероятность аннигиляции, но у атома ортопозитрония имеется метастабильное состояние 2^3S_1. Вероятность двухфотонного радиационного перехода в состояние 1^3S_1 равна $1.8 \cdot 10^{-3}$ $сек^{-1}$ и гораздо меньше вероятности трехфотонной аннигиляции непосредственно с этого уровня, равной $8.9 \cdot 10^5$ $сек^{-1}$. Поэтому обычно считается, что ортопозитроний аннигилирует преимущественно из состояния 2^3S_1.

Ниже показано, что в турбулентной электрон-позитронной плазме двухквантовый индуцированный фотон-плазмонный переход $2^3S_1—1^3S_1$ оказывается более вероятным, чем трехфотонная аннигиляция с уровня 2^3S_1, и атомы ортопозитрония успевают перейти на уровень 1^3S_1, где они и аннигилируют с вероятностью $\tau_{3\gamma}^{-1}$.

1. Рассмотрим двухквантовый, индуцированный (по числу плазмонов) фотон-плазмонный переход $2^3S_1 — 1^3S_1$, идущий с излучением:

а) фотона (t) и ленгмюровского кванта (l);

б) фотона (t) и ионноплазменного кванта (i).

Пользуясь [9], нетрудно получить выражение для полной вероятности (в единицу времени) перехода $2^3S_1 — 1^3S_1$, с учетом только виртуальных переходов через уровни тонкой структуры $2^3P_{0,1,2}$:

$$A_{tl}^{\text{pz.}} = \sum_{i=0}^{2} \frac{24\pi c r_0^2 \omega_{21}^2 g_i f_i f_i'}{(\omega_i - \omega_l)^2 + 1/4\Gamma_i^2} \cdot \frac{W^l}{\hbar\omega_l}. \tag{1}$$

Здесь $g_i = (2I_i + 1)/2(2I + 1)$, I и I_i — моменты состояния 2^3S_1 и состояний $2^3P_{0,1,2}$, соответственно, ω_{21} — частота перехода $2^3S_1 - 1^3S_1$, ω_i — частоты переходов $2^3S_1 - 2^3P_{0,1,2}$, соответственно, $\omega_l \approx \omega_{pe}$ — частота ленгмюровского плазмона, f_i и f_i — силы осцилляторов переходов $2^3P_{0,1,2} - 1^3S_1$ и $2^3S_1 - 2^3P_{0,1,2}$, Γ_i — суммы ширин уровня 2^3S_1 и уровней $2^3P_{0,1,2}$, соответственно, а W^l — плотность энергии ленгмюровских волн.

Приведем численные значения величин, входящих в (1):

$$\omega_{21} \approx 0.75 \cdot 10^{16}\ сек^{-1}, \quad \omega_0 \approx 4 \cdot 10^{11}\ сек^{-1}, \quad \omega_1 \approx 3 \cdot 10^{11}\ сек^{-1},$$

$$\omega_2 \approx 2 \cdot 10^{11}\ сек^{-1}.$$

Далее, необходимо также найти силы осцилляторов f_i и f_i, для вычисления которых воспользуемся волновыми функциями различных ортосостояний позитрония [10]:

I) $$\Psi_а = N^а_{l,m} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -Y_l^{m-1} & Y_l^m \\ Y_l^m & -Y_l^{m+1} \end{pmatrix} R_{nl}$$

$$j = l - 1; \quad s = 1, \quad m = -(l-1) \ldots (l-1); \tag{2}$$

II) $$\Psi_б = N^б_{l,m} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -(l+m)\,Y_l^{m-1} & mY_l^m \\ mY_l^m & (l-m)\,Y_l^{m+1} \end{pmatrix} R_{nl}$$

$$j = l; \quad s = 1, \quad m = -l \ldots l,$$

III) $$\Psi_в = N^в_{l,m} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (l+m)(l+m+1)\,Y_l^{m-1} & (l+m+1)(l-m+1)\,Y_l^m \\ (l+m+1)(l-m+1)\,Y_l^m & (l-m)(l-m+1)\,Y_l^{m+1} \end{pmatrix} R_{nl}$$

$$j = l + 1; \quad s = 1, \quad m = -(l+1) \ldots (l+1),$$

где

$$N_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi\,(j+m)!\,(j-m)!}} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(2l+1)\,l}} \to (а) \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{(l+1)\,l}} \to (б) \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\,(l+1)\,(l+1)}} \to (в) \end{cases}$$

В (2) Y_l^m — шаровые функции, нормированные условием:

$$\int Y_{l'}^{*m'} Y_l^m d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1}(l+m)!\,(l-m)!\,\delta_{l'l}\delta_{m'm},$$

а R_{nl} выражаются через обобщенные полиномы Лагерра:

$$R_{nl} = \sqrt{\frac{4(n-l-1)!}{a^3 n^4 [(n+l)!]^3}} \cdot e^{-\frac{r}{an}} \left(\frac{2r}{an}\right) L_{n+1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{an}\right),$$

где

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \frac{d^{2l+1}}{d\rho^{2l+1}}\left\{e^{\rho}\frac{d^{n+l}}{d\rho^{n+l}}(e^{-\rho}\cdot\rho^{n+l})\right\} \text{ и } a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}.$$

Вычисляя далее матричный элемент дипольного момента

$$\overline{d}_{12} = \int \overline{d}\,\mathrm{Spur}\,(\Psi_2^*\Psi_1)\,dv,$$

где Ψ_2 и Ψ_1 — волновые функции (2), с использованием рекуррентных соотношений для шаровых функций:

$$\cos\theta\, Y_l^m = \frac{1}{2l+1} Y_{l+1}^m + \frac{(l-m)(l+m)}{2l+1} Y_{l-1}^m,$$

$$\sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi} = \mp\frac{1}{2l+1} Y_{l+1}^{m\pm1} \pm \frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{2l+1} Y_{l-1}^{m\pm1},$$

получим общие выражения для сил линий различных переходов. Они имеют вид:

$$S(n,\, l,\; j=l+1;\; n',\, l'=l+1,\; j'=l'-1) = \frac{(R_{nl}^{n'l+1})^2}{(2l+1)(2l+3)(l+1)},$$

$$S(n,\, l,\, j=l+1;\; n',\, l'=l+1,\, j'=l') = \frac{(R_{nl}^{n'l+1})^2}{(l+1)}, \qquad (3)$$

$$S(n,\, l,\, j=l+1;\; n',\, l'=l+1,\, j'=l'+1) = \frac{(l+1)(2l+s)(R_{nl}^{nl+1})^2}{(2l+3)},$$

где

$$R_{nl}^{n'l+1} = \int_0^\infty R_{nl}R_{n'l+1}\,r^3dr.$$

Выражения (3) позволяют найти силы осцилляторов переходов. Согласно [11], имеем: $f_l \approx 0.1$; $f_1' \approx f_2 \approx 5\cdot10^{-5}$; $f_0' \approx 2\cdot10^{-5}$.

2. Проанализируем формулу (1) в различных предельных случаях. Например, в условиях, когда $\omega_l \gg \omega_{pe}$, получим

$$A_{tl}^{ps} \approx 6 \cdot 10^6 \cdot W^l \ сек^{-1}. \tag{4}$$

В обратном случае — $\omega_l \ll \omega_{pe}$ имеем

$$A_{tl}^{ps} \approx 8 \cdot 10^6 \left(\frac{\omega_2}{\omega_{pe}}\right)^2 W^l \ сек^{-1}. \tag{5}$$

Из (4) видно, что в первом предельном случае вероятность A_{tl}^{ps} не зависит от плазменной частоты, в отличие от случая (5).

Если имеет место неравенство $|\omega_{l'} - \omega_l| \ll 1/2\,\Gamma_{l'}$, т. е. когда одна из частот ω_l попадает внутрь спектрального интервала ленгмюровских волн (или окажется вблизи него), то

$$A_{tl}^{ps} = \frac{48\,\pi c r_0^2 \omega_{21}^2 f_{l'} f_{l'}}{\Gamma_{l'}} \cdot \frac{W^l}{\hbar\omega_{l'}}. \tag{6}$$

Здесь вклад в вероятность излучения вносит лишь область частот плазменных волн шириной $1/2\,\Gamma_{l'}$. Например, при $\omega_{l'} = \omega_2$ из (6) следует:

$$A_{tl}^{ps} \approx 10^{10} \cdot W^l \ сек^{-1}. \tag{7}$$

В (7) учтено, что $A_{tl}^{ps} < \Gamma_2^r$ (здесь $\Gamma_2^r \approx 3 \cdot 10^8$ $сек^{-1}$ — радиационная ширина уровня 2^3P_2).

Отметим, что выражение для вероятности перехода с излучением фотона и ионноплазменного кванта легко получить из (1) заменой $\omega_{pe} \to \omega_{pi}$, $W^l \to W^i$.

3. Найдем условия, при которых фотон-плазмонный переход $2^3S_1 - 1^3S_1$ будет более вероятен, чем трехфотонная аннигиляция.

Считаем, что выполняется неравенство $A_{tl}^{ps} \gg 1/\tau_{3\gamma}$, при этом в случае $\omega_l \gg \omega_{pe}$ имеем

$$W^l \gg 0.1 \ эрг/см^3. \tag{8}$$

В обратном случае $\omega_{pe} \gg \omega_l$ получим

$$W^l \gg 0.1 \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_2}\right)^2 \frac{эрг}{см^3}. \tag{9}$$

Необходимо отметить, что общая формула (1) была получена в рамках теории возмущений, которая работает для исследуемого процесса при условии (см. [12]):

$$W^l \ll \frac{m_e \omega_{pe}^2 I}{\pi e^2}, \tag{10}$$

где e и m_e — заряд электрона и его масса, а I — потенциал ионизации позитрония.

Подстановка численных значений величин в (10) показывает, что условие (8) может выполняться, если

$$\omega_{pe} \gg 3 \cdot 10^8 \ сек^{-1}, \tag{11}$$

а условие (9) справедливо при любых $\omega_{pe} \gg \omega_i$.

Таким образом, из проведенного рассмотрения видно, что в турбулентной плазменной среде фотон-плазмонный переход $2^3S_1 - 1^3S_1$ может быть более эффективным, чем трехфотонная аннигиляция.

В этой связи поиски наиболее долгоживущего состояния позитрония могут быть использованы для диагностики плазмы (по времени 2^3S_1-состояния можно судить о величине W^l).

В заключение благодарим В. Н. Цытовича за обсуждение.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
Сибирский институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
СО АН СССР

ON THE POSITRONIUM ANNIHILATION IN THE PLASMA

S. A. KAPLAN, E. B. KLEIMAN, I. M. OJRINGEL

The probabilities of induced two-quantum photon-plasmon transition $2^3S_1 - 1^3S_1$ for the positronium atom located in the turbulent plasma medium are calculated. It is shown that this transition may be more probable than three-quantum annihilation with the level 2^3S_1. It may be used for the diagnosis of the plasma turbulence on the survival time of the state 2^3S_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Гольданский*, Физическая химия позитрона и позитрония, Наука, М., 1968.
2. *Г. Бете, Э. Солпитер*, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, Физматгиз, М., 1960.
3. *M. Deutsch*, Progr. Nucl. Phys., 3, 131, 1953.
4. *S. De Benedetti, H. Corben*, Ann. Rev. Nucl. Phys., 4, 191, 1954.
5. *S. De Benedetti*, Nuovo cimento, 4, Suppl. ser., 3, 1209, 1956.

6. *C. N. Yang*, Phys. Rev., 77, 242, 1950.
7. *Е. М. Лифшиц*, ДАН СССР, 60, 211, 1948.
8. *A. Ore, J. L. Powell*, Phys. Rev., 75, 1696, 1949.
9. *Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель*, Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, 19, 175, 1971.
10. *А. А. Соколов, В. Н. Цытович*, ЖЭТФ, 24, 253, 1953.
11. *И. И. Собельман*, Введение в теорию атомных спектров, Физматгиз, М., 1963.
12. *Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель*, Известия ВУЗов СССР, Радиофизика, 1973 (в печати).

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

ЭВОЛЮЦИОННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ: КРАСНЫЙ ГИГАНТ — ПЛАНЕТАРНАЯ ТУМАННОСТЬ — БЕЛЫЙ КАРЛИК

О. Х. ГУСЕЙНОВ

Поступила 19 февраля 1973
Пересмотрена 16 мая 1973

Приводятся аргументы в пользу эволюционной последовательности: красный гигант — планетарная туманность — белый карлик. Образование планетарной туманности объясняется магнитной накачкой между сжимающимся ядром и расширяющейся оболочкой красного гиганта.

В настоящее время пути эволюции звезд разных масс, хотя и грубо, известны. Особенно удовлетворительно теория звездной эволюции объясняет пути звезд от главной последовательности до красных гигантов. Однако образование белых карликов из красных гигантов, как указывается, например, в [1], считают связанным с двумя основными трудностями: 1) Родительская звезда (красный гигант) должна терять массу $\sim 1 M_{\odot}$; 2) Полная энергия белого карлика около $\sim 3 \cdot 10^{50}$ *эрг*. Эта энергия слишком велика для того, чтобы быть выделенной за счет только фотонной светимости в процессе сжатия звезды. Выделение этой энергии не удается объяснить также вспышками Новых и Сверхновых.

С другой стороны, проблема происхождения планетарных туманностей (далее ПТ) в настоящее время еще далека от разрешения. Отделение оболочки от звезды с малой скоростью трудно объяснить причинами взрывного характера. Предлагались модели происхождения ПТ, связанные с тепловой неустойчивостью красного гиганта [2], динамической нестабильностью оболочки [3], гелиевой [4] или углеродной вспышкой [5] и т. д. Дальнейшее расширение ПТ объясняется газовым давлением в туманности и лучевым давлением ядра [6]. Для объяснения форм туманности привлекаются магнитные поля ядра [7] или самой туманности [8]. Кстати, объяснение форм планетарных туманностей является очень трудной задачей [6, 8].

И. С. Шкловский в 1956 г. предложил гипотезу [9], согласно которой предшественником ПТ является красный гигант [2—6]. Однако следует напомнить, что Г. А. Гурзадян до сих пор считает ПТ начальной фазой эволюции звезд промежуточного составляющего Галактики [8].

Известно, что звезды с первоначальной массой $\sim 1.3\, M_{\odot}$ за время жизни Галактики ($\sim 5 \cdot 10^9$ *лет*) успели проэволюционировать до стадии красного гиганта. Поэтому, а также вследствие других аргументов [10], красные гиганты, в основном, имеют массы $\sim 1.3\, M_{\odot}$. По нашему мнению, красные гиганты с массой $> 1.5\, M_{\odot}$ расположены в плоскости Галактики и, вспыхивая как Сверхновые, дают релятивистские звезды. Следует отметить, что в стадии красного гиганта звезда может потерять до 20% своей массы [12]. Кроме того, если белый карлик образуется через планетарную туманность, то образование туманности уносит еще до $0.3\, M_{\odot}$ [6]. Поэтому оставшаяся масса уже вполне достаточна для образования белого карлика средней массы $\sim 0.8 - 1.0\, M_{\odot}$. Первая трудность — сброс большой массы таким образом снимается.

Красный гигант малой массы живет $\sim 10^9$ *лет* и излучает примерно в 50 раз больше Солнца [13]. Тогда может высветиться энергия $\sim 10^{51}$ *эрг*, что достаточно для снятия второго противоречия. Ведь ни откуда не следует, что ядро красного гиганта (будущий белый карлик) должно потерять энергию $\sim 3 \cdot 10^{50}$ *эрг* уже после потери оболочки. Ядро планетарной туманности имеет радиус в несколько раз больше радиуса белого карлика, но гравитационная энергия может быть равна или порядка $\sim 10^{51}$ *эрг* из-за наличия разряженной оболочки и компактного ядра с радиусом белого карлика.

Известно, что хотя вращательная энергия обычных звезд мала по сравнению с ее внутренней и гравитационной энергиями, она быстро растет при сжатии звезды. Достаточно звезде с массой $\sim 1 M_{\odot}$ уменьшить свой радиус до радиуса белого карлика, чтобы ее вращательная энергия возросла до $\sim 10^{48}$ *эрг*. Ядро красного гиганта, превращаясь в белый карлик, передает свою вращательную энергию оболочке, которая превратится в планетарную туманность.

Напомним, что ежегодно в Галактике образуется в среднем один белый карлик и одна планетарная туманность [6, 8]. Ядро планетарной туманности является звездой очень горячей, но пониженной светимости из-за малого радиуса. Средняя масса ядра планетарной туманности $\leqslant 1\,M_\odot$. Среднее расстояние планетарных туманностей от галактической плоскости больше 250 *пс* [6]. Учитывая также и то, что на диаграмме Герцшпрунга — Рессела нет других объектов, которые могли бы быть переходными между красными гигантами и белыми карликами, мы высказываемся в пользу эволюционной последовательности: красный гигант — планетарная туманность — белый карлик.

Отделение оболочки красного гиганта от центральной части, нам кажется, можно объяснить механизмом магнитной накачки, который был применен в [11] к образованию Сверхновых.

Первоначальное магнитное поле H_0 усиливается при дифференциальном вращении как $H = H_0 \cdot n$, где n — число оборотов ядра относительно оболочки [11, 14]. Магнитное поле H, пронизывающее оболочку, должно быть близко к однородному в силу однородности внутреннего дипольного поля звезды. Можно принять, что магнитное поле в оболочке зависит от расстояния как $H \sim r^{-k}$, причем k меньше 3 и близко к 2.

Согласно оценкам Г. А. Гурзадяна [8], среднее магнитное поле в туманности может достигать $\sim 10^{-3}$ *гаусс*. Наличие такого поля также свидетельствует в пользу усиления поля накачкой. Действительно, при однородном расширении туманности поле меняется как r^{-2}. Тогда первоначальное поле при $R \sim 10^{12}$ *см* (начальный радиус звезды) должно быть $\sim 10^6 - 10^7$ *гаусс*, что вряд ли возможно без предварительного усиления. На возможность сильных магнитных полей в звезде при отделении оболочки указывалось в [8].

Прежде чем перейти к конкретным оценкам, нужно отметить, что требование наличия сильного магнитного поля обусловлено также и тем, что интенсивная намотка силовых линий может в первое время после начала сжатия ядра просто не начаться, если велико конвективное движение в оболочке звезды. Для того, чтобы магнитная намотка могла начаться сразу после возникновения нетвердотельности, необходимо выполнение условия

$$H_0^2 > \frac{3Mu_k^2}{2R^3}, \tag{1}$$

где u_k — скорость конвективных потоков в звезде, M, R и H_0 — соответственно масса, радиус и магнитное поле. Для звезды с $M = 1.5M_\odot$, $R = 10^{12}$ *см* получаем условие начала намотки: $u_k \leqslant 18\,H_0$. При средней скорости конвективных потоков $\sim 10^5$ *см/сек* начальная напряженность магнитного поля в звезде должна быть не меньше $\sim 10^3$ *гаусс*.

Без учета расширения оболочки и сжатия ядра магнитное поле способно уравновесить тяготение за время

$$t_0 \approx \frac{8\pi^2 \sqrt{2GM_1M_2}}{\Phi_0 \overline{\Delta\omega}} \left(\frac{r}{R_*}\right)^{k-2}, \tag{2}$$

где M_1 и M_2 — массы ядра и оболочки, Φ_0 — начальный магнитный поток, $\Delta\omega$ — средняя за время накачки разность угловых скоростей ядра и оболочки, R_* и r — радиусы ядра и оболочки, G — гравитационная постоянная. При $k = 2$ и $\Phi_0 = 10^3\Phi_{\odot}$, $\overline{\omega\Delta} \approx 10^{-3}$ *гц*, $M_1 = 2M_{\odot}$, $M_2 = 0.2\ M_{\odot}$, время накачки около 20 *лет* и не зависит от радиуса оболочки. При менее вероятном значении $k = 3$, тех же Φ_0, $\Delta\omega$, M_1 и M_2, а также $R_* \sim 10^9$ *см* и $R \sim 10^{12}$ *см* получим время накачки около $2 \cdot 10^4$ *лет*, что очень много.

Магнитное ускорение оболочки

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\Phi_0^2 n^2 R_*^{2(k-2)}}{32\pi^2 M_2 r^{2(k-1)}}. \tag{3}$$

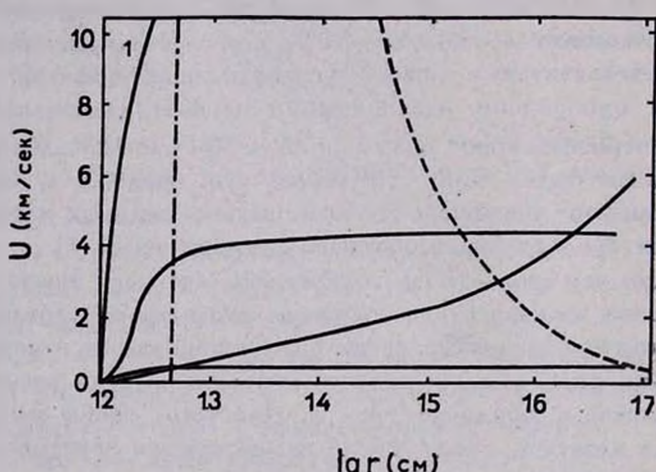

Рис. 1. Изменение скорости расширения оболочки планетарной туманности в зависимости от ее радиуса. 1) $\Phi_0 = 10^3\ \Phi_{\odot}$, $k=2$; 2) $\Phi_0 = 10^3\ \Phi_{\odot}$, $k=2.5$; 3) $\Phi_0 = 10^3\ \Phi_{\odot}$, $k=3$; 4) $\Phi_0 = \Phi_{\odot}$, $k=2$. Пунктирная линия—скорость убегания в оболочке; штрих-пунктирная линия—световой конус $r = \omega_0 c$, где ω_0—угловая скорость ядра планетарной туманности.

Для $k = 2$; 2.5; 3 получим при $\Phi_0 = 10^3\ \Phi_{\odot}$ зависимость скорости расширения оболочки от времени t, показанную на рис. 1. За начало отсчета времени принято время накачки t_0. Оценки показывают, что магнитное поле звезды при k, близких к 2, может сообщить оболочке скорости порядка наблюдаемых в планетарных туманностях.

Отметим, что как только кинетическая энергия расширения ПТ станет равной ее гравитационной энергии в поле ядра и начнется почти свободное расширение туманности, произойдет быстрое падение магнитного поля между ядром и оболочкой ПТ.

То, что массы остатков Сверхновых 1-го типа малы, по-видимому, говорит о том, что этот механизм в случае красных гигантов больших масс не срабатывает. Это может быть связано также с малым временем жизни массивных красных гигантов, что важно в случае усиления магнитного поля в звезде динамо-механизмом.

Из изложенного следует также, что отношение массы оболочки к массе ядра у красных гигантов малой массы больше, чем у массивных.

В заключение благодарю В. А. Амбарцумяна за стимулирующие обсуждения.

Шемахинская астрофизическая
обсерватория

EVOLUTION SEQUENCE: RED GIANT—PLANETARY NEBULAE — WHITE DWARF

O. H. GUSEINOV

Arguments in favour of the evolution sequence: red giant— planetary nebulae — white dwarf are given. The origin of a planetary nebulae is explained by the magnetic pumping between contracting nucleus and ding envelope of the red giant.

ЛИТЕРАТУРА

1. *З. Ф. Сеидов, Т. А. Эминзаде*, Цирк. ШАО, № 7, 1972.
2. *W. K. Rosa*, Planetary Nebulae, 1968, p. 390.
3. *B. Paczinsky, J. Ziolkowski*, Planetary Nebulae, 1968, p. 396.
4. *S. Sakachita, V. Tanaka*, Progr. Theor. Phys., Kyoto, 27, 127, 1962.
5. *C. Hayashi, R. Hashi, D. Sugimoto*, Suppl. Progr. Theor. Phys., 22, 183, 1962.
6. *Л. Аллер, У. Лиллер*, Планетарные туманности, Мир, М., 1971.
7. *E. Woyke*, Planetary Nebulae, 1968, p. 275.
8. *Г. А. Гурзадян*, Планетарные туманности, Наука, М., 1962.
9. *И. С. Шкловский*, Астрон. ж., 33, 315, 1956,
19. *О. Х. Гусейнов*, Цирк. ШАО, № 4, 1972.
11, *П. Р. Амнуэль, О. Х. Гусейнов, Ф. К. Касумов*, Астрон. ж., 49, 1139, 1972.
12. Mass Loss from Stars, Ed. M. Hack, D. Reidil Publishinh Company, Dordrecht, 1968.
13. *Д. Я. Мартынов*, Курс общей астрофизики, Наука, М., 1971.
14. *Н. С. Кардашев*, Астрон. ж., 47, 465, 1970.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

МОДЕЛЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЕТВИ И ВОЗРАСТ ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ

А. М. ЭЙГЕНСОН

Поступила 24 июля 1973

Уточняются характеристики модели, предложенной в предыдущей работе автора для интерпретации строения горизонтальной ветви шаровых скоплений. Подтверждается, что основным фактором, определяющим это строение, является возраст скоплений. В рамках модели введение второго параметра не является необходимым.

Введение. Известно, что распределение звезд вдоль горизонтальной ветви шаровых скоплений коррелирует с содержанием металлов: чем выше металличность скопления, тем больше, в среднем, относительная населенность красной части горизонтальной ветви. Существование корреляции расценивается обычно как показатель того, что металличность и является основным фактором, определяющим строение горизонтальной ветви. В то же время имеются значительные отклонения в соотношении между этими характеристиками. Отсюда делается вывод о существовании второго параметра, контролирующего распределение звезд вдоль горизонтальной ветви [1]. В качестве возможных кандидатов на роль второго параметра назывались такие величины, как содержание гелия, масса звезд, возраст и, наконец, содержание азота [2].

Между тем, в работе автора [3] были приведены аргументы в пользу того, что строение горизонтальной ветви больше зависит от возраста, чем от химического состава, в соответствии с предположениями Тиффта [4] и ван-Агта [5] и в отличие от мнения, например, Кинга [6]. Настоящая статья посвящена дальнейшему развитию этих аргументов.

1. В [7, 8] для количественного описания распределения звезд вдоль горизонтальной ветви использован параметр $\alpha = B/(B+R)$, где

B и R — числа звезд, соответственно, с голубой и красной стороны пробела переменных типа RR Лиры. В [3] было показано, что характерной чертой строения горизонтальных ветвей является преимущественная населенность голубого или красного участков; скоплений с примерно равной населенностью обоих этих участков мало, и максимумы частотного распределения α приходятся на крайние значения $\alpha < 0.1$ и $\alpha > 0.9$. Этот вывод получен по 32 скоплениям.

Сейчас число скоплений с известным α можно увеличить еще на 12. Для трех из них дополнительные значения α найдены в [9], для девяти остальных — в настоящей работе. Именно, $\alpha \simeq 0.5$ для NGC 3201 (найдено приближенно, непосредственно по псевдодиаграмме

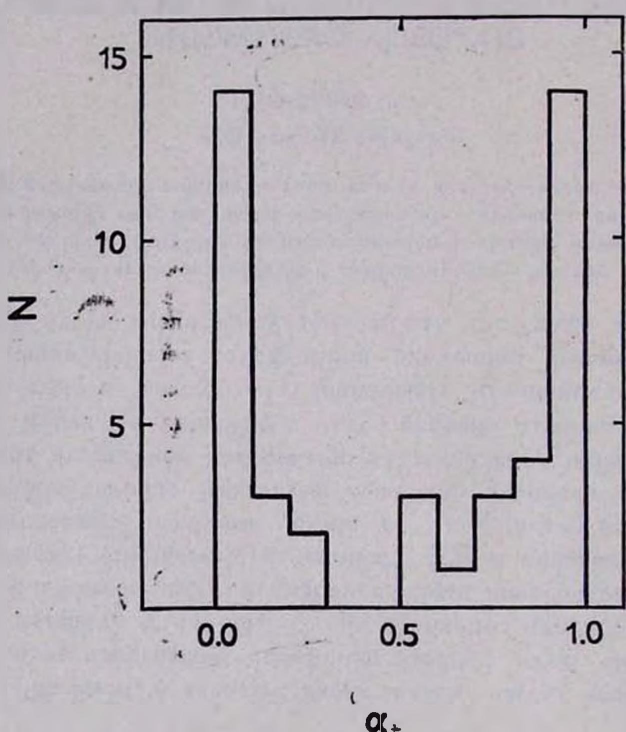

Рис. 1. Частотное распределение α для 44 скоплений.

цвет — величина) и $\alpha = 0.87$ для NGC 2257 в Магеллановых Облаках [10, 11]. У скоплений NGC 5927, 6388, 6352, межгалактических скоплений Pal 3 и Pal 4, а также NGC 121 и Kron 3 в Магеллановых Облаках, согласно данным [4, 10, 12—14], горизонтальная ветвь сильно концентрирована в красную сторону и $\alpha = 0$.

Частотное распределение α для всех 44 скоплений показано на рис. 1. При построении рисунка мы приняли несколько отличные от [8] и [9] значения α для NGC 6341 и NGC 6356, а именно $\alpha=1.00$ и 0.00, в соответствии с указаниями [15] и [16]. Принято также $\alpha=0.15$ для NGC 1261 [17].

Из сравнения рис. 1 с соответствующим рисунком в [3] видно, что отмеченная выше особенность — U-образная форма распределения — стала еще более отчетливой. Проверка по критерию χ^2 показывает, что гипотеза о равномерном распределении α противоречит наблюдательным данным (вероятность гипотезы равнораспределения настолько мала, что ее значение выходит за пределы таблицы [18], и во всяком случае меньше 0.001).

2. Отдельные детали распределения будут, естественно, меняться по мере увеличения числа скоплений с известным α. Так, можно ожидать и частичного заполнения пробела в центральной области рис. 1. В [8, 9] было показано, что α коррелирует с содержанием металлов, представленным индексами металличности IM по [19] (рис. 2). Если построить частотное распределение IM для всех 98 шаровых скоплений списка [20] и наряду с этим для 40 скоплений с известным α (см. рис. 3), то оказывается, что распределения похожи. Нетрудно убедиться, что расхождения между нормированными распределениями не имеют статистической значимости. Таким образом, распределение IM для 40 скоплений можно считать представительным.

3. В [3] для интерпретации частотного распределения α предложена вероятностная модель: на отрезок MN, разделенный на три части, мы многократно бросаем меньший отрезок PS так, чтобы границы этого меньшего отрезка не выходили за пределы MN (рис. 4а). При этом предполагалось, что распределение точек на отрезке PS равномерное. Это является, однако, лишь первым приближением, так как в действительности звезды распределены вдоль горизонтальной ветви неравномерно.

Рассмотрим некоторое „условное“ скопление, у которого в каждый данный момент времени звезды распределены вдоль горизонтальной ветви по нормальному закону. Предположим, что центр этого распределения перемещается со временем более или менее равномерно по отношению к центру участка, занятого переменными типа RR Лиры. В [3] были получены указания на то, что на C—M диаграмме это перемещение происходит справа налево, т. е. из красной стороны в голубую. Таким образом, мы рассматриваем одно и то же скопление в разные моменты времени. Если скопления эволюционируют примерно одинаково, то это эквивалентно рассмотрению совокупности скоплений разного возраста в данный момент.

Зададим на PS нормальное распределение и перейдем от бросания к скольжению: отрезок PS равномерно скользит вдоль MN, делая остановки на каждом шагу. Площадь под кривой нормального распределения, проектирующуюся при данном положении на участок MK, обозначим через B; на участок KL—через RR; на LN — через R. Тогда для каждого шага можно найти величину $\alpha = B/(B + R)$.

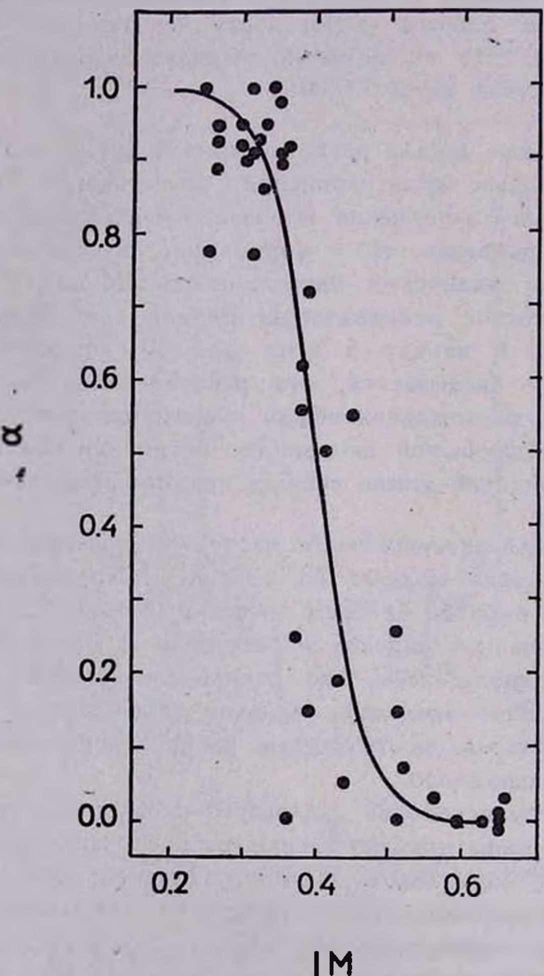

Рис. 2. Диаграмма α—IM для 40 скоплений. Кривая аппроксимирует связь α с IM (см. раздел 5).

Из диаграмм цвет — величина следует, что для соотношения длин на отрезке MN в качестве первого приближения можно взять примерно следующее: $MK:KL:LN \approx 35:25:35$. Эти числа приблизительно соответствуют реальным средним протяженностям по цвету B—V участков, занятых голубыми, переменными и красными звездами горизонтальной ветви (0.35: 0.25: 0.35). Для отрезка PS примем $PS = 60$ и $\sigma = 10$. Тогда практически вся площадь под кривой нормального распределения сосредоточена на PS. Число шагов выберем

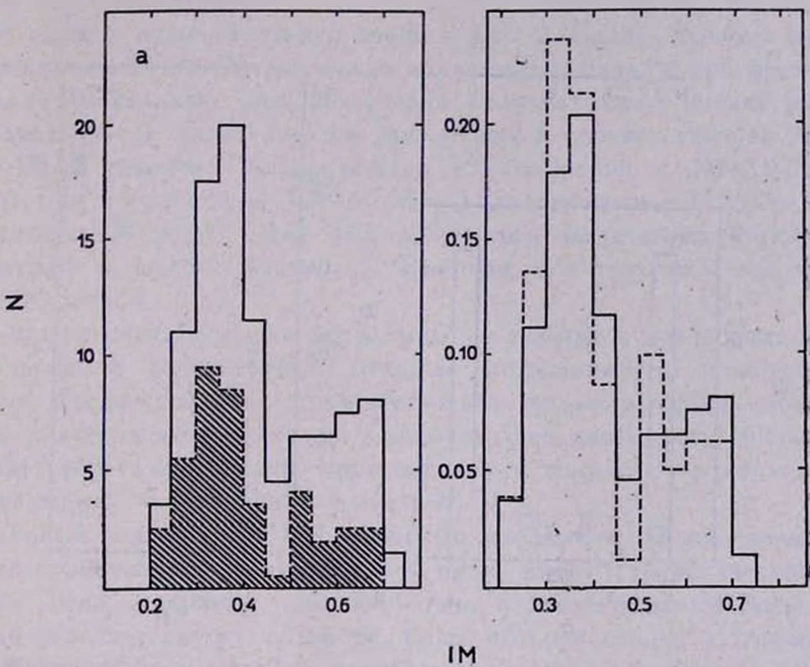

Рис. 3. а) Сплошной линией показано частотное распределение IM для 98 скоплений списка [20], пунктиром—то же для 40 скоплений с известным α. b) Здесь оба распределения нормированы, т. е. приведены гистограммы. Обозначения те же, что на рис. 3а,

равным числу скоплений на рис. 1 (44 шага, включая нулевой, когда точка S проектируется в точку N). Определим α для каждого шага и отложим α как функцию числа шагов n (рис. 4b). Если теперь спроектировать все точки на ось ординат, можно построить модельное распределение α для нашего условного скопления (рис. 4c). Согласно сказанному выше, таким же будет, при сделанных предположениях, распределение α для 44 скоплений разного возраста в данный момент времени.

Сравнение рис. 1 и рис. 4c показывает хорошее согласие. Отметим попутно, что на рис. 4c уже нет пробела в центральной области (между $\alpha = 0.3$ и $\alpha = 0.5$).

Согласно [3], переменных типа RR Лиры больше всего в тех скоплениях, в которых $\alpha \sim 0.5$; то же относится к численности переменных, нормированной на единицу светимости скопления: по мере увеличения α эта величина возрастает, достигает максимума при $\alpha \sim 0.5$ и затем убывает [21, 22].

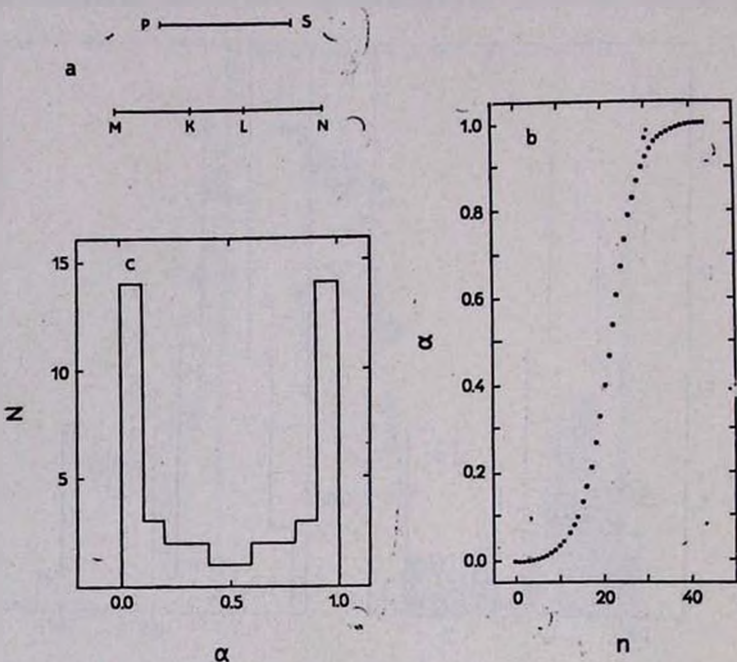

Рис. 4. b) Зависимость α от числа шагов n. c) Частотное распределение α для 44 „скоплений“, следующее из модели.

Если вернуться теперь к модели, то очевидно, что величина RR будет наибольшей при $\alpha = 0.5$ и наименьшей при крайних значениях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Построение соответствующей модельной диаграммы приводит к воссозданию принципиальных черт наблюдаемых диаграмм, связывающих α с числом переменных и с числом переменных, нормированным на светимость скопления [3, 21, 22].

4. Остановимся на одной детали рассматриваемой модели. При $\alpha \sim 0.5$ основная часть площади под кривой нормального распределения проектируется на участок KL. Обе величины B и R малы, и достаточно нескольких шагов, чтобы параметр α существенно изменился

(см. рис. 4b). Если разделить весь диапазон изменения n на три примерно равных участка, то оказывается, что на крайних участках дисперсия параметра α мала, а на промежуточном значительна.

Очевидно, что область малых и больших значений n на рис. 4b можно уподобить области скоплений малого и большого возраста, а промежуточных n — области промежуточного возраста. Получается, что для скоплений промежуточного возраста дисперсия параметра α должна быть наибольшей.

В связи с этим обратимся вновь к рис. 2. Видно, что при малых и больших значениях IM дисперсия параметра α мала, а при промежуточных — значительна. Для получения количественной оценки разделим совокупность скоплений на три группы в соответствии со значениями IM. В первую группу войдут 15 скоплений с $\mathrm{IM} < 0.35$, во вторую — 14 скоплений с $0.35 \leqslant \mathrm{IM} \leqslant 0.45$, в третью — 11 скоплений, для которых $\mathrm{IM} > 0.45$. Для каждой группы подсчитаем дисперсию параметра α и, соответственно, σ_α. Значения σ_α в группах I—III равны 0.07, 0.33 и 0.08.

Обычно считается, что металличность связана с возрастом: бóльшему возрасту соответствует меньшая металличность, меньшему — бóльшая. Тогда скопления промежуточного возраста имеют промежуточные значения металличности. Следовательно, наибольшая дисперсия α соответствует скоплениям промежуточного возраста — в согласии с предсказанием, вытекающим из модели.

Точный вид связи IM с возрастом неизвестен. Можно полагать, что для совокупности скоплений эта связь имеет статистический характер. Тогда, например, два скопления с одинаковым IM могут несколько различаться по возрасту. Если оба они входят в „промежуточную“ возрастную группу, то этого сравнительно небольшого различия может оказаться достаточным, чтобы значения α отличались весьма существенно (у скоплений промежуточного возраста α быстро меняется с возрастом — см. выше). Кроме того, при рассмотрении диаграммы α — IM необходимо учитывать ошибки в определении обоих параметров, α и IM.

Приведенных в этом разделе аргументов, по-видимому, достаточно, чтобы объяснить характер дисперсии диаграммы α — IM.

5. Попытаемся предсказать, каким должно быть частотное распределение α после построения C—M диаграмм для всех известных скоплений. Для этого существуют две возможности. Первая заключается в том, чтобы сделать бóльшее число шагов в модели, т. е. взять бóльшее число различных положений одного и того же условного

скопления. Распределение α, полученное таким образом для 101 шага показано на рис. 5.

Другая возможность предполагает использование диаграммы α—IM (рис. 2). Действительно, как уже упоминалось, значения IM известны для 98 скоплений. Если бы удалось провести на рис. 2 кривую, более или менее удовлетворительно представляющую связь α с IM, то с этой кривой можно было бы снять значения α для всех скоплений с заданным IM.

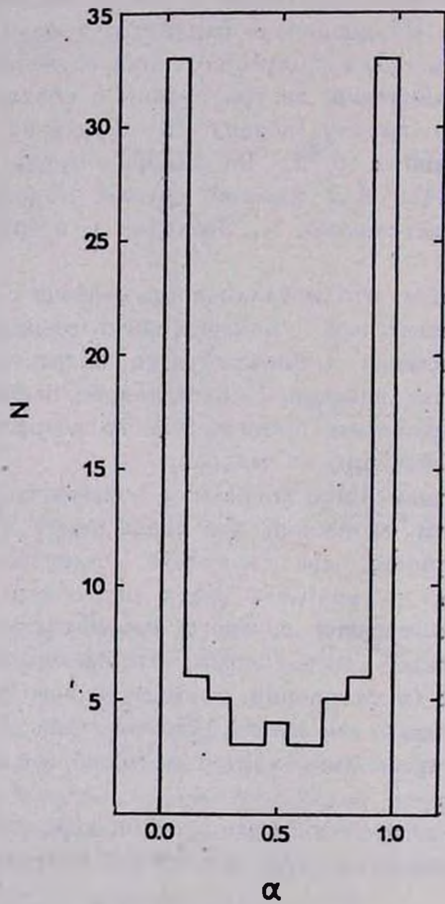

Рис. 5. Частотное распределение α для 101 „скопления".

В качестве такой кривой используем зеркальное отображение графика α—n (рис. 4b) и проведем ее так, как показано на рис. 2. Видно, что проведенная кривая в общих чертах представляет данные о скоплениях, нанесенные на диаграмму. Чтобы проверить пригодность этой кривой, посмотрим, насколько хорошо, пользуясь ею, можно воспроизвести частотное распределение α. Для этого снимем с нее значения α для 40 скоплений диаграммы α — IM, считая IM заданными. Получившееся частотное распределение α показано на рис. 6а. Сравнение рис. 6а и 1 показывает удовлетворительное согласие (заметим, что в диаграмму α — IM и, соответственно, в рис. 6а не вошли 4 скопления из рис. 1, у которых IM неизвестно, а значения α равны

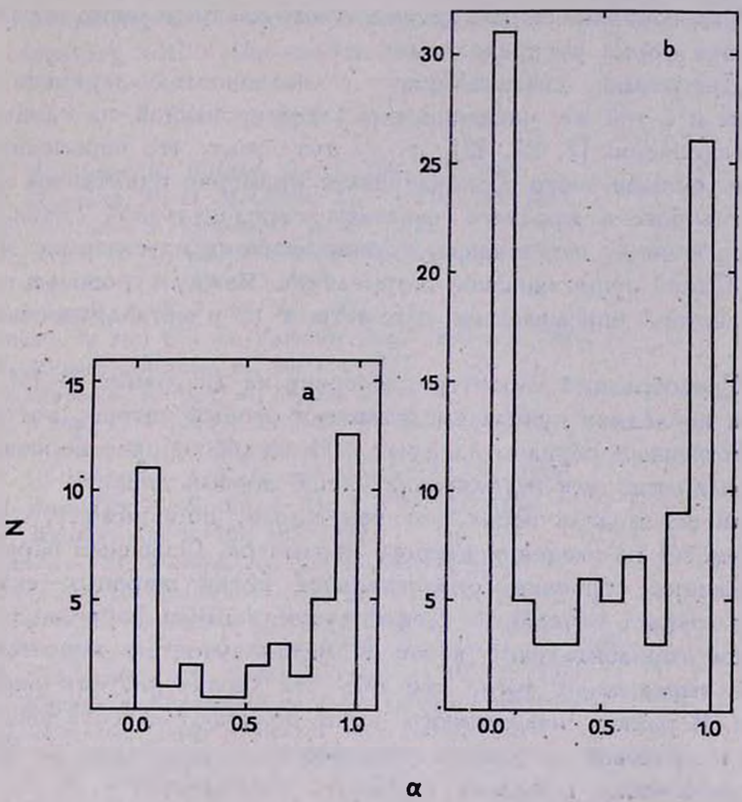

Рис. 6. а) Частотное распределение α для 40 скоплений, полученное по кривой рисунка 2 (см. текст). b) То же, что на рис. 6а, для 98 скоплений с известными IM.

0.87, 0.00, 0.00 и 0.00). Следовательно, можно полагать, что кривая проведена более или менее правильно. Сняв с нее значения α для остающихся скоплений списка [20], построим распределение α для всех 98 скоплений с известным IM (рис. 6b).

Видно, что принципиальные черты рис. 5 и 6b совпадают (на рис. 5 взято 101 „скопление“ вместо 98 для удобства расчетов). Можно ожидать, что действительное распределение α окажется примерно промежуточным между распределениями рис. 5 и 6b.

Заключение. Согласно результатам предыдущей [3] и настоящей работ, в рамках предложенной модели можно интерпретировать следующие наблюдательные данные:

1) Своеобразный характер частотного распределения параметра α (U-образная форма распределения).

2) Диаграммы, связывающие α с численностью переменных типа RR Лиры и с той же численностью, нормированной на единицу светимости скопления [3, 21, 22], т. е. тот факт, что переменных типа RR Лиры больше всего в скоплениях с примерно одинаковой населенностью голубого и красного участков горизонтальной ветви (то же относится к числу переменных, нормированному на светимость).

3). Самоё существование корреляции между строением горизонтальной ветви, описываемым параметром α, и металличностью скопления.

4) Своеобразный характер дисперсии на диаграмме α—IM.

Два последних пункта представляют особый интерес потому, что они естественным образом следуют из модели, которая первоначально была предложена для истолкования лишь первых двух.

Если эта модель верна, то тем самым, по-видимому, снимается необходимость во введении второго параметра. Основным параметром, определяющим строение горизонтальной ветви шаровых скоплений, является возраст скоплений. Самоё существование корреляции между строением горизонтальной ветви и металличностью является лишь внешним выражением того, что обе эти характеристики зависят от возраста. В рамках изложенного выше получают естественное объяснение и отклонения от единой зависимости на диаграмме α—IM.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. А. Амбарцумяну за руководство работой. Благодарю также Б. В. Кукаркина за предоставление материалов до публикации, Н. Н. Самуся, привлекшего наше внимание к вопросу о представительности выборки, и В. Ю. Теребижа за полезное обсуждение.

Астрономическая обсерватория
Львовского университета

HORIZONTAL BRANCH MODEL AND AGE OF GLOBULAR CLUSTERS

A. M. EIGENSON

Characteristics of the model proposed in the author's previous paper to interpret the structure of the horizontal branch of the globular clusters are specified. It is confirmed that the age of the clusters is the main factor determining this structure. Introduction of the second parameter is not necessary within the model.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. R. Sandage, R. Wildey*, Ap. J., 150, 469, 1967.
2. *F. D. Hartwick, R. D. McClure*, Ap. J., 176, L57, 1972.
3. *A. M. Эйгенсон*, Астрофизика, 9, 107, 1973.
4. *W. G. Tifft*, M. N., 125, 199, 1963; 126, 209, 1963.
5. *S. L. Agt*, B. A. N., 19, 275, 1967.
6. *I. R. King*, P. A. S. P., 83, 377, 1971.
7. *L. Rosino*, in 3-rd Col. on Variable Stars, Bamberg, 1965.
8. *A. B. Миронов*, Астрон. ж., 49, 134, 1972.
9. *A. B. Миронов*, Астрон. ж., 50, 27, 1973.
10. *R. E. White, T. T. Kraft*, P. A. S. P., 84, 298, 1972.
11. *M. F. Walker*, M. N., 156, 459, 1972.
12. *F. D. A. Hartwick, J. E. Hesser*, Ap. J., 175, 77, 1972.
13. *E. M. Burbidge, A. Sandage*, Ap. J., 127, 527, 1958.
14. *M. F. Walker*, Ap. J., 161, 835, 1970.
15. *A. Sandage, M. Walker*, Ap. J., 143, 313, 1966.
16. *A. Sandage, G. Wallerstein*, Ap. J., 131, 598, 1960.
17. *G. Alcaino, C. Contreras*, Astron. Astrophys., 11, 14, 1971.
18. *E. K. Вентцель*, Теория вероятностей, Физматгиз, М., 1969.
19. *Б. В. Кукаркин, Р. М. Русев*, Астрон. ж., 49, 121, 1972.
20. *Б. В. Кукаркин*, Карточный каталог (частное сообщение).
21. *A. M. Эйгенсон*, Цирк. Львовской обс., № 48, 1973.
22. *A. M. Эйгенсон*, Астрофизика (в печати).

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЦВЕТ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЕТВИ ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ

В [1, 2] было показано, что на диаграммах цвет — величина большинства шаровых скоплений звезды горизонтальной ветви сильно сконцентрированы или к голубому, или к красному ее концу. Скоплений с примерно одинаковой населенностью обеих частей горизонтальной ветви мало; это находит отражение в весьма своеобразном частотном распределении параметра $\alpha = B/(B+R)$, где B и R — числа звезд, соответственно, с голубой и красной сторон пробела переменных типа RR Лиры. Действительно, согласно [3], приблизительно 2/3 всех скоплений имеют $\alpha < 0.1$ и $\alpha > 0.9$.

Если бы цветовые границы области пробела были одинаковыми у всех скоплений, то практически так же, как α, должен был бы быть распределен и другой параметр. Это средний цвет непеременных звезд горизонтальной ветви. Хотя в действительности цветовые границы пробела меняются от скопления к скоплению, это изменение сравнительно невелико. Поэтому можно ожидать, что упомянутый эффект все же проявится. Для проверки этого обстоятельства, а также для получения дополнительной характеристики шаровых скоплений мы подсчитали средний цвет непеременных звезд горизонтальной ветви 26 шаровых скоплений.

По таблицам фотометрии [4—30] были воспроизведены диаграммы цвет — величина, выделена горизонтальная ветвь и вычислен средний цвет составляющих ее непеременных звезд. Возникающая при этом ошибка имеет тот же характер, что и ошибка в определении

α [2], и вызывается отсутствием четких границ последовательностей на диаграммах цвет — величина. Так, для NGC 6356 Сандейдж и Валлерстейн [18] указывают на отсутствие звезд с голубой стороны пробела; между тем, А. В. Миронов [31] дает $\alpha = 0.10$. По оценке Мензиса [7] число непеременных звезд горизонтальной ветви в NGC 4833 равно 124; в настоящей работе принято $N_{нв} = 131$, и расхождение вызывается, видимо, звездами, несколько отклоняющимися от основной последовательности.

Таблица 1

Скопление	$N_{нв}$	<B—V>	E_{B-V}	$<B-V>_0$	Литература
104 47 Tuc	30	0.70	0.09	0.61	[4]
1261	100	0.49	0.06	0.43	[5]
4147	48	0.10	0.07	0.03	[6]
4833	131	0.25	0.30	—0.05	[7]
5024 M 53	113	—0.03	0.03	—0.06	[8]
5139 ωCen	34÷35	0.13÷0.11	0.14	—0.01÷—0.03	[9]
	213*:	0.12:	0.14	—0.02	[10]
5466	65	0.06	0.06	0.00	[11]
5897	83	0.17	0.15	0.02	[12]
5904	100	0.14	0.05	0.09	[13]
6171 M 107	90	0.86	0.31	0.55	[14]
6205 M 13	128	0.00	0.03	—0.03	[15]
6341 M 92	74	0.03	0.03	0.00	[16]
6352	43	1.09	0.31	0.78	[17]
6356	19	0.93	0.33	0.60	[18]
6397	146	0.12	0.17	—0.05	[19]
6522	6	0.97:	0.46	0.51:	[20]
6541	83	0.13	0.18	—0.05	[21]
6637	76	0.86	0.21	0.65	[22]
6656 M 22	92	0.44	0.33	0.11	[23]
6712	107	1.05	0.41	0.64	[24]
6752	15	—0.05	0.06	—0.11	[25]
6838 M 71	42÷44	0.99÷0.97	0.32	0 67÷0.65	[26]
6981	34	0.32	0.08	0.24	[27]
7006	58	0.46	0.12	0.34	[28]
7099	58	0.05	0.06	—0.01	[29]
7492	44	0.04	0.05	—0.01	[30]

* Примечание: приведенные в этой строке значения получены приближенно, непосредственно по диаграмме, приведенной в [10].

Расчет различных вариантов возможного причисления звезд к горизонтальной ветви показывает, что в большинстве случаев расхождения в получающемся среднем цвете $\langle B-V \rangle$ составляют несколько сотых и не превосходят 0.05. Иногда возможна, однако, и бо́льшая неопределенность в классификации различных последовательностей диаграммы цвет—величина. Так, Алцаино и Контрерас [5], построившие С—М диаграмму шарового скопления NGC 1261, указывают, что горизонтальная ветвь простирается в красную сторону до $B-V = 0.80$. В [32] на основании той же диаграммы принято, что цвет красной границы горизонтальной ветви равен 0.55. В первом случае $\langle B-V \rangle = 0.50$, во втором 0.28. По-видимому, однозначно решить подобные вопросы нельзя, и с процедурой выделения звезд горизонтальной ветви неизбежно связана некоторая субъективность.

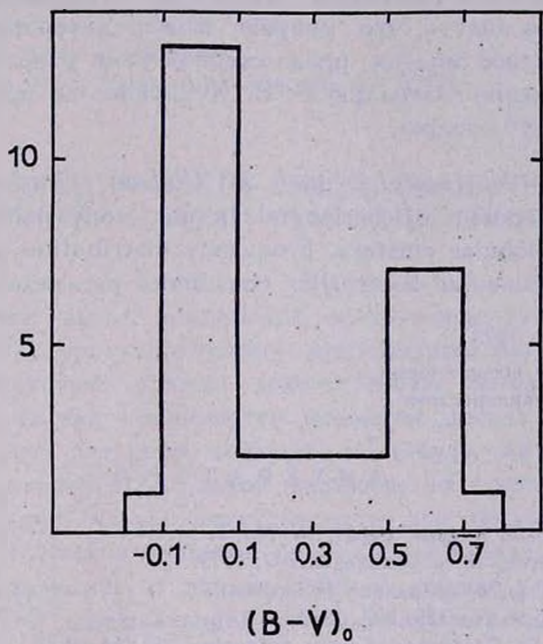

Рис. 1.

Для получения истинного среднего цвета $\langle B-V \rangle_0$ из наблюдаемого мы воспользовались значениями E_{B-V} из карточного каталога Б. В. Кукаркина [33]. Вся совокупность результатов отражена в табл. 1, в которой $N_{нв}$ означает принятое число непеременных звезд горизонтальной ветви.

Из приведенных данных видно, что параметр $\langle B-V \rangle_0$ принимает значения от -0.11 до 0.78. Частотное распределение $\langle B-V \rangle_0$ показано на рис. 1. Видно, что у большинства скоплений средний цвет горизонтальной ветви или голубой ($\leqslant 0.1$), или красный ($\geqslant 0.5$); скоплений с промежуточным цветом мало. Этот эффект является прямым следствием подобного же эффекта в частотном распределении α. Действительно, у скоплений с примерно одинаковой населенностью красной и голубой частей горизонтальной ветви значение среднего цвета непеременных звезд лежит внутри области пробела. Вопрос о представительности выборки рассматривается в другой статье [3].

Параметр $\langle B-V \rangle_0$ коррелирует с содержанием металлов, которое можно представить индексами металличности IM по [34], и сам может являться некоторой характеристикой шаровых скоплений.

Нетрудно видеть, что рисунок можно интерпретировать в рамках вероятностной модели, предложенной нами ранее [2, 3].

В заключение благодарю Б. В. Кукаркина за предоставление материалов до публикации.

Colour of Horizontal Branch of Globular Clusters. On published data the mean colour of horizontal branch nonvariable stars is calculated for 26 globular clusters. Frequency distribution of this parameter resembles the one for the earlier considered parameter α.

24 июля 1973

Астрономическая обсерватория
Львовского университета

А. М. ЭЙГЕНСОН

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Эйгенсон*, Астрон. цирк., № 743, 1, 1973.
2. *А. М. Эйгенсон*, Астрофизика, 9, 107, 1973.
3. *А. М. Эйгенсон*, Астрофизика (в печати).
4. *W. G. Tifft*, M. N., 126, 209, 1963.
5. *G. Alcaino, C. Contreras*, Astron. astrophys., 11, 14, 1971.
6. *A. Sandage, M. Walker*, A. J., 60, 230, 1955.
7. *J. Menzies*, M. N., 156, 207, 1972.
8. *J. Cuffey*, A. J., 70, 732, 1965.
9. *E. Belserene*, A. J., 64, 58, 1959.
10. *R. Dickens, R. Woolley*, R. Obs. Bull., No. 128, E 255, 1967.
11. *J. Cuffey*, A. J., 66, 71, 1961.
12. *A. Sandage, B. Katem*, Ap. J., 153, 569, 1968.
13. *H. C. Arp*, Ap. J., 135, 311, 1962.
14. *A. Sandage, B. Katem*, Ap. J., 139, 1088, 1964.
15. *З. И. Кадла*, Известия ГАО, 24, 93, 1966.

16. *A. Sandage, M. Walker*, Ap. J., 143, 313, 1966.
17. *F. D. Hartwick, J. E. Hesser*, Ap. J., 175, 77, 1972.
18. *A. Sandage, G. Wallerstein*, Ap. J., 131, 598, 1960.
19. *R. v. d. R. Woolley, J. B. Alexander, L. Mather, E. Eps*, R. Obs. Bull., No. 43, E 303, 1961.
20. *H. C. Arp*, Ap. J., 141, 43, 1965.
21. *G. Alcaino*, Astron. Astrophys., 13, 399, 1971.
22. *F, Hartwick. A. Sandage*, Ap. J., 153, 715, 1968.
23. *H. C. Arp, W. G. Melbourne*, A. J., 64, 28, 1959.
24. *A. Sandage, L. Smith*, Ap. J., 144, 886, 1966.
25. *R. D. Cannon, R. S. Stobie*, M. N., 162, 207, 1973.
26. *H. C. Arp, F. D. Hartwick*, Ap. J., 167, 499, 1971.
27. *R. Dickens*, M. N., 157, 281, 1972.
28. *A. Sandage, R. Wildey*, Ap. J., 150, 469, 1967.
29. *R. J. Diskens*, M. N., 157, 299, 1972.
30. *S. A. Barnes*, A. J., 73, 579, 1968.
31. *А. В. Миронов*, Астрон. ж., 49, 134, 1972.
32. *А. В. Миронов*, Астрон. ж., 50, 27, 1973.
33. *Б. В. Кукаркин*, Частное сообщение.
34. *Б. В. Кукаркин, Р. М. Русев*, Астрон. ж., 49, 121, 1972.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА ЗВЕЗД, СВЯЗАННЫХ С ВОЛОКНИСТЫМИ ТУМАННОСТЯМИ

В настоящее время считается общепринятым, что межзвездная поляризация света звезд вызывается ослаблением излучения на вытянутых частицах, ориентированных межзвездным магнитным полем. Несмотря на отсутствие прямых доказательств, вероятным механизмом ориентации частиц принимается механизм Девиса и Гринстейна.

В связи с этим интересно выяснить, вытянуты ли частицы в отражательных туманностях и каков механизм их ориентации. Упорядоченную ориентацию частиц могут вызвать две регулярные силы — магнитное поле и лучевое давление освещающей звезды.

Можно ожидать, что в туманностях с хорошо развитой волокнистой структурой определяющей силой возникновения волокон является магнитное поле. Следовательно, наблюдая поляризацию света звезд, прошедшего через волокна туманности, можно узнать, как частицы ориентированы относительно магнитных силовых линий.

Попутно отметим, что наблюдение поляризации света самой туманности для этой цели менее пригодно. Как показано в работе [1], в большинстве реальных ситуаций свет от туманности будет радиально поляризован относительно освещающей звезды. Поэтому существующее мнение о том, что плоскость поляризации при отражении (поляризация света туманности) и экстинкции (поляризация света, прошедшего через туманность) перпендикулярны, в общем случае неверно.

Для наблюдений мы выбрали 14 туманностей с заметной на картах Паломарского атласа волокнистой структурой. Наблюдения проводились на телескопе АЗТ-8 с электрофотометром в режиме счета фотонов. Измерения делались при восьми положениях (через 45°) поляроида в цветовой системе B.

Данные наблюдений приведены в табл. 1. Содержание первых 6-ти столбцов понятно из обозначений. В седьмом столбце приводится $\theta_в^0$ — позиционный угол волокон, проходящих через наблюдаемую звезду. Точность определения p составляет $\pm 0.2\,\%$.

Таблица 1

№	HD, BD	α	δ	p %	θ^0	$\theta_в^0$
1	—	$20^h22^m.9$	42°20′	3.7	6	174
2	41°3737	20 22.9	42 13	0.8	65	40
3	203467	21 18.3	64 40	0.8	122	130
4	210806	22 08.6	73 09	1.6	48	55
5	281159	3 41.5	32 00	1.6	125	140
6	—	5 15.5	13 15	1.3	90	90
7	38087	5 40.5	—2 20	2.5	115	125
8	42050	6 06.1	—5 21	1.2	165	180
9	42004	6 05.7	—6 13	1.9	0	15
10	206135	21 37.2	67 58	1.3	68	—
11	65°1637	21 42.0	65 52	3.4	103	50
12	57°22 57°18 57°19	0 08.0	58 29	1.0 1.1 1.5	65 57 55	135 90 90
13	31293	4 52.0	30 28	0.9	42	—
14	—6°1418	6 05.7	—6 21	0.8	128	—

Анализ полученных данных позволяет сделать ряд выводов.

В тех случаях, когда волокнистая структура туманности носит регулярный характер, т. е. длина волокна сравнима с размером туманности, волокна параллельны и не запутаны, имеется четкая связь между плоскостью поляризации света звезд и направлением волокон. Первые девять объектов таблицы представляют собой именно такие туманности. Как видно из табл. 1, плоскость поляризации света совпадает с направлением волокон, исключение составляет туманность 12. Если исходить из модели вытянутых частиц, то это прямое доказательство того, что частицы ориентированы большими осями перпендикулярно волокнам. Несколько более сложная картина наблюдается для других объектов таблицы. Для туманностей № 10—14 характерна сложная система волокон, ободков. Для туманности № 10 к югу от звезды видны волокна с $\theta_{\text{в}}^{0} = 90-135°$. В то же время к северу можно заметить волокно с $\theta_{\text{в}}^{0} = 0°$. Сама туманность расположена несколько западнее звезды. Создается впечатление, что звезда входит в туманность и разгоняет ее на две части.

В туманности № 11 — кольцевая структура волокон. Плоскость поляризации не совпадает с направлением волокна, проходящего через звезду. В рамках теории вытянутых частиц такой результат можно объяснить, если считать, что сила, способствующая образованию волокна, действует из центра туманности и перпендикулярна волокнам.

По-видимому, механизм образования волокон в туманности № 11 отличен от того, что мы имеем в случае туманностей № 1—9.

Для туманности № 12 плоскость поляризации света звезд перпендикулярна волокнам. Так как это единственный такой достоверный случай, то необходимо найти ему и соответствующее объяснение. Количественно обоснованную интерпретацию этого случая мы предложить не можем.

В туманности № 13 волокна от звезды выходят в различных направлениях, и поэтому плоскость поляризации сопоставить с направлением волокон не представляется возможным.

В туманности № 14 к югу и северу от звезды четко видны волокна с $\theta_{\text{в}}^{0} = 45°$, однако сама звезда окутана компактной сферической туманностью. Возможно, что волокна не имеют отношения к звезде.

Polarization of the Light of Stars, Connected with Filamentary Nebulae. Data of the polarization for 16 stars connected with filamentary nebulae are given. If the nebula consists of long parallel filaments then the electric vector lies parallel to the direction of the nebular filaments. The only exception is nebula No. 12 (see list). In the case of a circular filamentary structure the plane of vibration is perpendicular to the filaments.

7 мая 1973
Астрофизический институт
АН Каз.ССР

А. В. КУРЧАКОВ

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Курчаков*, Труды Астрофизического ин-та АН Каз.ССР, 5, 1967.

НАБЛЮДЕНИЯ СВЕРХНОВОЙ В ПЕКУЛЯРНОЙ ГАЛАКТИКЕ NGC 3656

4 марта 1973 г. на желтом снимке, полученном на метровом телескопе системы Шмидта, на расстоянии 12″ к юго-западу от центра, в галактике NGC 3656 была обнаружена Сверхновая звезда. Впоследствии выяснилось, что эта Сверхновая уже была открыта Ковалом 11 января сего года и видимая звездная величина её к тому времени в желтых лучах была равна 17-ти [1].

Наши наблюдения сверхновой проводились частично на метровом телескопе вместе с А. Т. Каллогляном, параллельно с выполнением совместной программы исследования соответствующей области неба, частично автором на 21″—21″ телескопе Шмидта вплоть до первого мая, когда вследствие ослабления Сверхновой очень яркий фон галактики в ее участке стал мешать выявлению последней.

Таблица 1

Дата наблюдения	B	V	U	Эмульсия	Светофильтр	Телескоп
4 марта 1973	—	$17^{m}.2$	—	Kodak IIaD	GG-11	40″
6 „ „	—	17.0	—	„	„	„
7 „ „	—	17.0	—	„	„	„
8 „ „	—	17.1	—	„	GG-13	„
8 „ „	18.2	—	—	Kodak 103aO	UG-2	„
9 „ „	—	—	18.9	„	GG-11	„
10 „ „	—	16.9	—	Kodak IIaD	„	„
11 „ „	—	16.9	—	„	„	„
22 „ „	—	17.6	—	„	„	21—21
29 „ „	—	17.7	—	„	„	„
6 апреля „	—	17.7	—	„	„	„
1 мая „	—	>18.0	—	„	„	„

8 и 9 марта нам удалось получить снимки Сверхновой в U, B и V лучах. Параллельно были получены фокальные снимки шарового Скопления М3. Ввиду наличия сильного фона галактики в участке Сверхновой мы сочли целесообразным произвести оценки блеска сверхновой глазомерно с помощью лупы, путем сравнения блеска сверхновой с блеском звезд, находящихся в окрестности галактики. При этом яркости звезд сравнения определялись на микрофотометре с помощью характеристических кривых, построенных по соответствующим снимкам стандартных звезд [2].

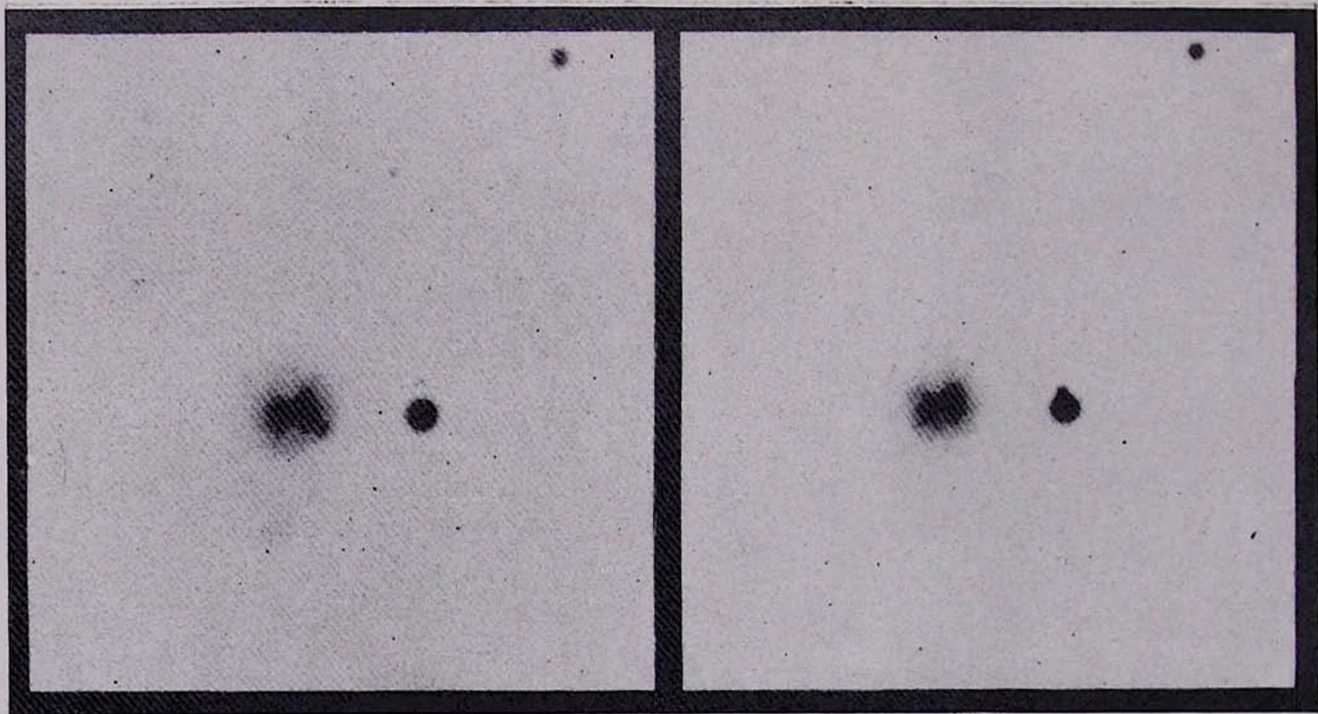

Рис. 1. Галактика NGC 3656. Слева — снимок 25 марта 1968 г.
Справа — снимок 4 марта 1973 г. Масштаб—1 *мм* = 2″.7.

К ст. Р. К. Шахбазян

Из табл. 1 видно, что 8—9 марта B—V показатель цвета сверхновой был равен $+1^m1$. Значение $U-B=+0^m7$ менее уверенно, так как на фотографии, полученной на метровом телескопе с выдержкой в 1 *час* 45 *мин* изображение Сверхновой в ультрафиолете очень слабое.

Заметим, что в 1963 г. Берто была обнаружена первая Сверхновая в этой галактике [3]. Она была расположена на расстоянии 22" к юго-востоку от центра галактики и имела видимую величину равную 15.

Автор признателен А. Т. Каллогляну за совместные наблюдения при получении снимков на метровом телескопе.

Observations of the Supernova in NGC 3656. The Supernova in NGC 3656 discovered by Kowal and independently found in Byurakan Observatory (March 4, 1973) was visible on ten plates obtained from March 4 to May 1. The yellow magnitudes and B — V, U — B colours of Supernova are given.

13 июля 1973
Бюраканская астрофизическая обсерватория

Р. К. ШАХБАЗЯН

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. T. Kowal*, IAU Circ., No. 2491, 1973.
2. *H. L. Johnson, A. R. Sandage*, Ap, J., 124, 379, 1956.
3. *C. Bertaud*, IAU Circ., No. 1831, 1963.

О ХАРАКТЕРЕ ВЫБРОСОВ В ЯДРАХ ГАЛАКТИК МАРКАРЯНА СЕЙФЕРТОВСКОГО ТИПА

В 1967—1972 гг. Б. Е. Маркарян опубликовал список свыше 500 галактик, имеющих в спектре избыток ультрафиолетового излучения [1—5]. Согласно Б. Е. Маркаряну эти галактики различаются по степени их конденсированности. В тех из них, которые характеризуются наибольшей конденсированностью, обнаруживаются иногда широкие эмиссионные линии водорода, свидетельствующие о взрывной активности их ядер. Несомненно, что в галактиках Маркаряна имеет место проявление той или иной степени активности галактических ядер, на которую обратил внимание В. А. Амбарцумян [6]. В ряде случае активность галактических ядер проявляется в направленном выбросе газа или облаков релятивистских частиц (например, М 82). В настоящей заметке приводятся данные, свидетельствующие, по-видимому, в пользу того, что выбросы в ядрах галактик Маркаряна также являются, направленными.

Имеющиеся наблюдательные данные дают основание думать, что галактики Маркаряна, за редкими исключениями, имеют форму эллипсоидов вращения. В проекции на небесную сферу они приближенно представляются эллипсами, или, в частном случае, кругами. Соотношение между полуосями этих эллипсов дает информацию относительно ориентации оси вращения эллипсоида. А именно, чем больше отношение осей, тем больше, в среднем, угол между осью вращения эллипсоида и лучом зрения. Это обстоятельство дает возможность исследовать степень изотропии наблюдаемого в эмиссии выброса из ядра.

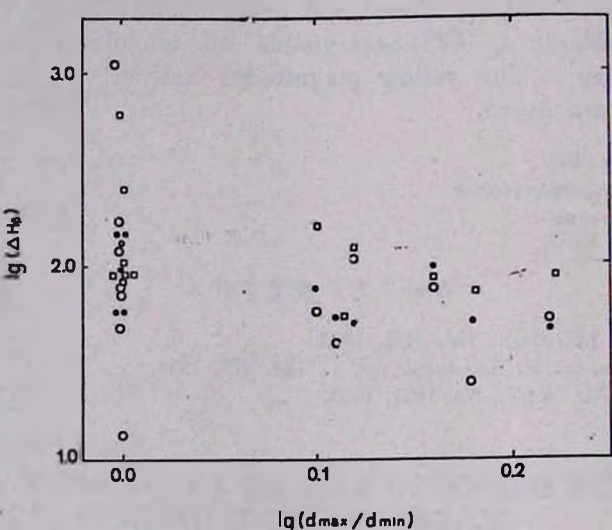

Рис. 1. По оси абсцисс отложены логарифмы отношений большой оси эллипса к малой $\lg (d_{max}/d_{min})$. По оси ординат отложены логарифмы ширины линии $H_\beta(\Delta H_\beta)$. Точки соответствуют ширине линии H_β, кружки—поверхностной яркости в линии H_β, квадраты — поверхностной яркости в непрерывном спектре. В двух последних случаях масштаб тот же, что и в первом, но начало оси ординат смещено так, что при $\lg(d_{max}/d_{min})=0$ выполняются условия $\overline{\lg \sigma H_\beta}=\overline{\lg \Delta H_\beta}$ (для кружков), и $\overline{\lg \sigma_\lambda} = \overline{\lg \Delta H_\beta}$ (для квадратов).

С этой целью на рис. 1 сопоставлены значения таких параметров, как ширина линии H_β, поверхностная яркость в фотографической области непрерывного спектра для 15 галактик Маркаряна, в ядрах которых обнаружена и измерена линия H_β [7—10], со значениями $\lg (d_{max}/d_{min})$.

На этом графике, несмотря на ограниченность наблюдательного материала, видно, что чем меньше отношение осей, тем больше может быть ширина линии H_β и поверхностная яркость в линии H_β или в непрерывном спектре. Это означает, что выброс как газа, ответственного за эмиссию, так и релятивистских частиц, ответственных, по-видимому, за нетепловое излучение, происходит не сферически симметрично, а преимущественно в направлении оси вращения эллипсоида. В результате этого при наблюдении вдоль этой оси измеряются наибольшие скорости выброса, характеризуемые шириной линии H_β. При наблюдении вдоль оси вращения эллипсоида, то есть вдоль выброса, наблюдается наибольшая поверхностная яркость как в H_β, так и в непрерывном спектре.

Достоверность сделанного вывода подтверждается вычислением коэффициента ранговой корреляции по Спирмену [11]. Для этого весь рассмотренный диапазон значений $\lg(d_{max}/d_{min})$ разделен на 5 интервалов: 0.00—0.05; 0.05—0.10; 0.10—0.15; 0.15—0.20; 0.20—0.25. Эти интервалы пронумерованы в порядке уменьшения наибольшего для данного интервала значения каждого из следующих параметров: ширины линии H_β (ΔH_β), поверхностной яркости в H_β (σH_β) и поверхностной яркости в непрерывном спектре (σ_λ). Эти номера представлены в табл. 1, соответственно в третьем, четвертом и пятом столбцах.

Таблица 1

№	Интервалы $\lg(d_{max}/d_{min})$	Номера интервалов		
		ΔH_β	σH_β	σ_λ
1	0—0.5	1	1	1
2	0.10—0.15	3	2	2
3	0.15—0.20	2	3	4
4	0.20—0.25	4	4	3

По данным, представленным в табл. 1, с помощью [11] находим, что достоверность корреляции составляет для ширины линии H_β—83 %, для поверхностной яркости в H_β—96 %, а для поверхностной яркости в непрерывном спектре — 83 %. Коэффициенты ранговой корреляции соответственно равны 0.8, 1.0 и 0.8.

В заключение приносим благодарность доктору физико-математических наук Г. М. Товмасяну за обсуждение.

On the Character of Ejections in the Nuclei of Markarian's Galaxies of the Seyfert Type. The question of correlation of some phy-

sical parameters of the ellipsoidal Markarian galaxies of the Seyfert type with their orientation concerning the ray of vision has been considered. The character of the reveiled correlation renders the foundation to suppose that the ejection of gas from the nuclei of these galaxies takes place in the direction of the rotation axis.

12 июля 1973
Бюраканская астрофизическая обсерватория

Р. А. ВАРДАНЯН,
Ю. К. МЕЛИК-АЛАВЕРДЯН

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Е. Маркарян*, Астрофизика, 3, 55, 1967.
2. *Б. Е. Маркарян*, Астрофизика, 5, 443, 1969.
3. *Б. Е. Маркарян*, Астрофизика, 5, 581, 1969.
4. *Б. Е. Маркарян, В. А. Липовецкий*, Астрофизика, 7, 511, 1971.
5. *Б. Е. Маркарян, В. А. Липовецкий*, Астрофизика, 8, 155, 1972.
6. *В. А. Амбарцумян*, Проблемы эволюции Вселенной, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1968.
7. *М. А. Аракелян, Э. А. Дибай, В. Ф. Есипов*, Астрофизика, 6, 39, 1970.
8. *М. А. Аракелян, Э. А. Дибай, В. Ф. Есипов, Б. Е. Маркарян*, Астрофизика, 6, 357, 1970.
9. *М. А. Аракелян, Э. А. Дибай, В. Ф. Есипов, Б. Е. Маркарян*, Астрофизика, 7, 177, 1971,
10. *М. А. Аракелян, Э. А. Дибай, В. Ф. Есипов*, Астрофизика, 8, 33, 1972.
11. *Л. Н. Большов, Н. В. Смирнов*, Таблицы математической статистики, М., 1965.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЦВЕТОМ I—K И СОБСТВЕННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ СВЕТА ЗВЕЗД ПОЗДНИХ ТИПОВ

Известно [1, 2], что собственная поляризация света звезд поздних типов зависит от спектрального типа и меняется с изменением блеска звезды.

Наблюдения показывают, что для данного спектрального подкласса звезд степени собственной поляризации сильно различаются.

В настоящей заметке поставлена задача выяснить причину этого явления.

С этой целью использованы поляриметрические данные, приведенные в работе Серковского [3] и данные о цветах I—K из двухмикронного обозрения-каталога CIT [4], где I—звездная величина в области 0.9 μ. Для каждого спектрального подкласса (M0—M8) были выбраны те звезды, степень собственной поляризации которых в максимуме блеска превышает среднее значение поляризации для данной группы звезд ($P > \bar{P}$).

На рис. 1 построенная нами кривая зависимости между спектральным подклассом звезд, обладающих высокой степенью собственной поляризации и цвета I—K (точки), сопоставлена с кривой той же зависимости, полученной для остальных звезд (крестики).

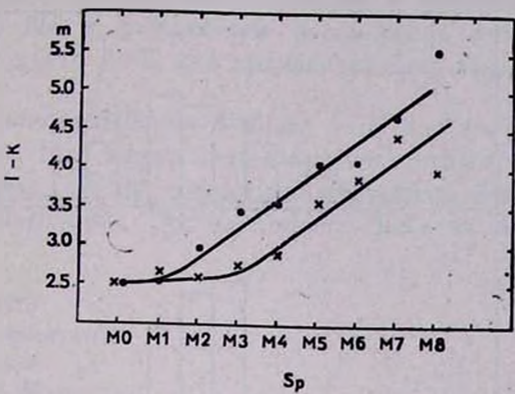

Рис. 1.

Как видно из рис. 1, начиная со спектрального подкласса M2 среднее значение I—K для звезд, имеющих собственную поляризацию, систематически превосходит среднее значение I—K для остальных звезд того же спектрального подкласса. Отметим, что для звезд, собственная поляризация которых меньше соответствующего среднего значения, величины I—K находятся в основном между кривыми, представленными на рис. 1.

Эти данные указывают на то, что звезды с собственной поляризацией обладают избыточным цветом I—K относительно других звезд того же спектрального подкласса.

Используя данные, приведенные в работах [3, 4], мы получили следующую зависимость между значением $\overline{I-K}$ и $\lg \overline{P}$:

$$\overline{I-K} = 4.65 + 2.58 \lg \overline{P}. \qquad (1)$$

В связи с этим можно сделать и следующий количественный анализ.

В каталоге CIT указываются звезды, блеск которых меняется в I, K или в обеих областях спектра (IK) вместе. Эти переменные в дальнейшем мы назовем переменными типа I, K и IK.

Рассмотрим частоту распределения переменных звезд типа I, K и IK (в процентах) в зависимости от значения I—K.

Это распределение в форме гистограмм представлено на рис. 2. Как видно из этого рисунка, максимум частоты распределения переменных звезд типов K и IK смещен в сторону больших значений I—K относительно максимума частоты для переменных типа I.

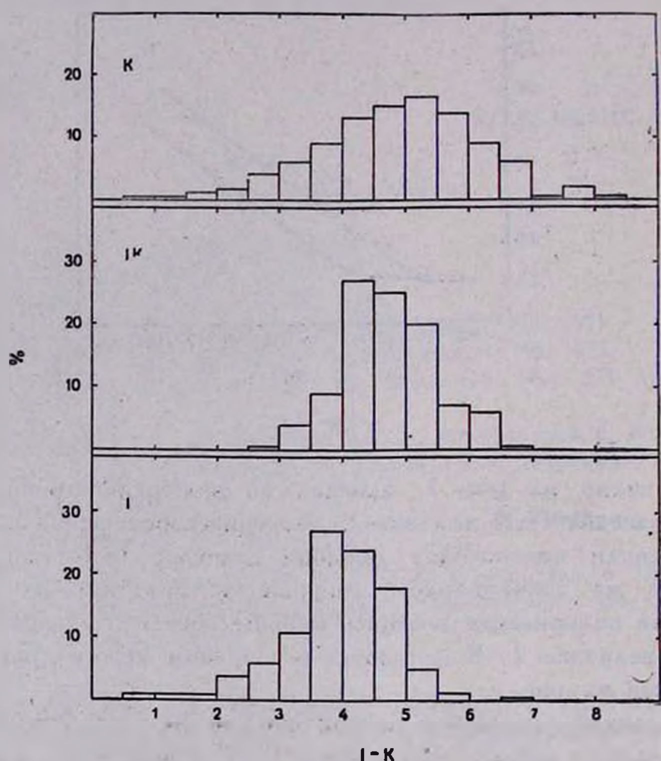

Рис. 2.

С учетом формулы (1) это означает, что более вероятно ожидать собственную поляризацию у переменных звезд типов K и IK. Действительно, подсчеты показывают, что относительное количество звезд с собственной поляризацией среди переменных типа K и IK в 1.5 раза больше, чем среди переменных типа I. Этим и можно объяснить то обстоятельство, что среднее значение собственной поляризации звезд, расположенных вблизи галактического экватора ($|b|<25°$), в 1.5 раза больше среднего значения собственной поляризации звезд, расположенных в высоких галактических широтах ($|b|>25°$), поскольку число переменных звезд типа K относительно I вблизи галактического экватора в два раза больше числа K-переменных, расположенных в высоких галактических широтах.

Вышеприведенные данные указывают на то, что звезды, обладающие собственной поляризацией, имеют избыточный цвет I—K относительно неполяризованных звезд того же спектрального класса.

Поскольку степень собственной поляризации света звезд поздних спектральных классов увеличивается с уменьшением блеска, то интересно было бы в дальнейшем рассмотреть зависимость степени поляризации от цвета I—K для индивидуальных звезд.

The Dependence Between Colours I—K and Intrinsic Polarization Late Type Stars. It is shown that stars with intrinsic polarization (P) have excess colour I—K in comparison with stars of the same spectral type without polarization. The dependence between mean I—Kand lg P is given.

21 июня 1973

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Обсерватория им. Конколи
Будапешт

Р. А. ВАРДАНЯН, Л. САБАДОШ

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Serkowski* et al., A. J., 73, 8, 677, 1969.
2. *Р. А. Варданян*, Астрофизика, 6, 77, 1970.
3. *K. Serkowski*, Preprint, Arizona, 1971.
4. *G. Neugebauer, R. B. Leighton*, Two-micron Sky Survey, a preliminary catalog California Institute Technology, Pasadena, 1969.

CONTENTS