

# ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ

## АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7

ФЕВРАЛЬ, 1971

ВЫПУСК 1

ПРОБЛЕМА МИЛНА С ВОЗМУЩЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ . . . . В. П. Гринин	5
ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ СОВОЛЕВА Q ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ . . . . . Ж. Белл, Р. Калаба, С. Уэно	23
ОБРАЗОВАНИЕ ЛИНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. II. ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ . . . . . Х. Домке	39
ОБ ИЗМЕНЕНИЯХ БЛЕСКА ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ ЗВЕЗД-КАРЛИКОВ . . . . . В. Г. Горбачкий	57
ЗАСТЫВШИЕ ЗВЕЗДЫ И КРАТНЫЕ СИСТЕМЫ О. Х. Гусейнов, Х. И. Новрузова	65
О ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ. II. Ю. П. Коровяковский	71
О ХАРАКТЕРЕ ВСПЫШЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ ЗВЕЗД ТИПА UV СЕТИ. I. В. С. Оскарян, В. Ю. Терембин	83
НЬЮТОНОВСКАЯ ТЕОРИЯ БЫСТРО ВРАЩАЮЩИХСЯ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ . . . . . В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян	95
ЭВОЛЮЦИЯ И РАДИАЛЬНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ, ЭФФЕКТОВ НЕЙТРОНИЗАЦИИ И ОТО . . . . . Ю. А. Вартамян, А. В. Овсепян	107
УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ ТОЧЕЧНЫХ МАСС. I. ОГРАНИЧЕННЫЙ ПО РАДИУСУ ЦИЛИНДР Г. С. Бисноватый-Коган	121
К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН РЕЛЯТИВИСТСКИМИ СГУСТКАМИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В. Я. Эдман	135
О КОНВЕКЦИИ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ Л. Н. Иванов	143
<b>КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ</b>	
ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ЗВЕЗД ТИПА МИРЫ КИТА . . . . . Р. А. Варданян	159
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ. III. . . . . Е. А. Тигнов, А. Д. Чернин	161

Е Р Е В А Н

## Խ Մ Ր Պ Ա Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Ւ Ե Ղ Ի Մ

Ա. Ա. Բոյարչուկ, Վ. Ա. Դոմբրովսկի, Յա. Բ. Ջելդովիչ, Հ. Մ. Թովմասյան,  
Ս. Ա. Կապլյան, Վ. Հ. Համբարձումյան (գլխավոր խմբագիր), Բ. Ե. Մարգարյան,  
Լ. Վ. Միրզոյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Վ. Սորոկն

## Редакционная коллегия

В. А. Амбарцумян (главный редактор), А. А. Боярчук, В. А. Домбровский,  
Я. Б. Зельдович, С. А. Каплан, Б. Е. Маркарян, Л. В. Мирзоян (зам. главного  
редактора), В. В. Соболев, Г. М. Товмасын

„АСТРОФИЗИКА“ — научный журнал, издаваемый Академией наук Армянской ССР. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой.

Журнал предназначается для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал выходит 4 раза в год, цена одного номера 1 рубль, подписная плата за год 4 рубля. Подписку можно произвести во всех отделениях Союзпечати, а за границей через агентство „Международная книга“, Москва, 200.

«Աստրոֆիզիկա»-ն գիտական հանդես է, որը հրատարակվում է Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի կողմից: Հանդեսը ազատում է ինֆեռարային հորիզոնները աստղերի ֆիզիկայի, միգամածությունների ու միջաստղային միջավայրի ֆիզիկայի, աստղային և աստղալակտիկական աստղազոտություն, ինչպես նաև աստրոֆիզիկային սահմանակից բնագավառների գծով:

Հանդեսը հախառնաված է գիտական աշխատակիցների, ասպիրանտների և բարձր կարգի ուսանողների համար:

Հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան 4 անգամ, 1 համարի արժեքն է 1 ուրիշ, բաժանորդագիրը 4 ուրիշ մեկ տարվա համար: Բաժանորդագրվել կարելի է «Սոյուզպեչատ»-ի բոլոր բաժանմունքներում, իսկ արտասահմանում «Մեծդոնառադնայա կնիգա» գործակալության միջոցով, Մոսկվա, 200:

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7

ФЕВРАЛЬ, 1971

ВЫПУСК 1

ПРОБЛЕМА МИЛНА С ВОЗМУЩЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

В. П. ГРИНИН

Поступила 25 мая 1970

Рассматривается задача о нестационарном свечении атмосферы звезды. Предполагается, что температурное возмущение вызвано появлением на границе источника излучения переменной интенсивности. Приводятся основные уравнения для функции источника  $S(\tau, \mu)$  и интенсивности отраженного излучения  $I_0(\mu)$ . При выводе этих уравнений принято во внимание возмущение оптических свойств атмосферы. Получено приближенное решение задачи для одномерной среды и дается физическая интерпретация результатов.

В настоящей заметке продолжается начатое ранее [1] исследование процесса нестационарного отражения света в эруптивных звездах. В статье [1] была рассмотрена упрощенная модель этого явления: предполагалось, что рассеивающая среда изотермична и ее оптические свойства не меняются с течением времени. Последнее предположение существенно в том отношении, что оно допускает разделение полей излучения — стационарного излучения звезды и нестационарного излучения, вызванного вспышкой. При этом процессы диффузии стационарного и нестационарного излучения считаются независимыми друг от друга, а результирующее поле излучения представляет собой суперпозицию этих полей.

Такая постановка задачи значительно упрощает ее решение, однако предположения, положенные в ее основу, в условиях звездных атмосфер представляются довольно искусственными.

Здесь мы откажемся от этих ограничений и рассмотрим процесс нестационарного свечения температурно-неоднородной среды с учетом возмущения ее оптических свойств.

1. *Постановка задачи.* Будем считать, что атмосфера звезды находится в условиях локального термодинамического равновесия, и объемный коэффициент поглощения  $\alpha$  не зависит от частоты („серое“ приближение).

Другим параметром, определяющим скорость переноса лучистой энергии, является среднее время  $t_1$  проводимое квантом\* в поглощенном состоянии. Как было показано В. В. Соболевым [2], в условиях ЛТР величина  $t_1$  удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{E_1}{E_2}. \quad (1)$$

Здесь  $E_1$  — энергия в поглощенном состоянии в  $1 \text{ см}^3$ ,  $E_2$  — плотность лучистой энергии:  $E_2 = aT^4$ ,  $t_2$  — среднее время, проводимое квантом в пути между двумя последовательными рассеяниями:  $t_2 = 1/\alpha c$ , где  $c$  — скорость света.

В звездных атмосферах основную часть времени излучение проводит в поглощенном состоянии ( $E_1 \gg E_2$ ) и величиной  $t_2$  можно пренебречь по сравнению с  $t_1$ .

Для полного определения элементарного акта рассеяния фотона наряду с величиной  $t_1$  необходимо еще знание функции  $\psi(t)$ , дающей вероятность переизлучения фотона через промежуток времени  $t$  после его поглощения.

Так же, как и в [1], мы примем, что

$$\psi(t) dt = e^{-\frac{t}{t_1}} \frac{dt}{t_1}. \quad (2)$$

Это соотношение справедливо только в стационарной среде, когда величина  $t_1$  не меняется с течением времени. Если же  $t_1 = t_1(t)$ , то тогда вместо (2) будем иметь:

$$\psi(t', t) dt = \exp\left(-\int_{t'}^t \frac{dt}{t_1(t)}\right) \frac{dt}{t_1(t)}, \quad (3)$$

где  $t'$  — момент времени, соответствующий поглощению фотона.

Оптические параметры  $\alpha$  и  $t_1$ , определяющие скорость переноса лучистой энергии, являются функциями термодинамического состояния вещества и, следовательно, зависят от интенсивности поля излучения в среде.

\* Имеется в виду средний планковский квант, соответствующий локальной температуре среды.

Появление на границе атмосферы нестационарного источника интенсивности  $E(t)$  приведет к дополнительному нагреву среды и ее температура  $T_0(r)$  получит некоторое приращение  $T(\vec{r}, t): \bar{T}(\vec{r}, t) = T_0(r) + T(\vec{r}, t)$ . Следствием этого будет изменение оптических свойств среды (величины  $\alpha_0$  и  $t_1^0$  получат приращение соответственно  $\alpha$  и  $t_1$ ).

Таким образом, рассмотрение процесса нестационарного свечения атмосферы приводит к задаче о диффузии излучения в среде, оптические свойства которой меняются с течением времени. Причем это изменение в свою очередь определяется изменением интенсивности излучения.

Мы рассмотрим эту задачу в линейном приближении, то есть будем предполагать, что температурное возмущение мало

$$\left| \frac{T}{T_0} \right| \ll 1. \quad (4)$$

Учитывая, что в условиях ЛТР температура среды  $T_0$  однозначно связана с функцией источника:  $S_0 \sim T_0^4$ , от температурного возмущения  $T$  можно перейти к соответствующему приращению функции источника  $S$ :

$$\bar{S}(\vec{r}, t) = S_0(r) + S(\vec{r}, t). \quad (5)$$

При этом, очевидно,  $T/T_0 = S/4S_0$ . Тогда величины  $\alpha$  и  $t_1$  могут быть представлены в виде

$$\bar{\alpha}(\vec{r}, t) = \alpha_0(r) \left[ 1 + a_1(r) \frac{S(\vec{r}, t)}{S_0(r)} \right]; \quad (6)$$

$$\bar{t}_1(\vec{r}, t) = t_1^0(r) \left[ 1 + a_2(r) \frac{S(\vec{r}, t)}{S_0(r)} \right], \quad (7)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{4} \left( \frac{d \ln \alpha}{d \ln T} \right)_v; \quad a_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{d \ln t_1}{d \ln T} \right)_v. \quad (8)$$

Это даст нам возможность выполнить линеаризацию уравнения относительно искомой величины  $S$ , в которое параметры  $\alpha$  и  $t_1$  войдут нелинейным образом.

Если в полученном таким путем уравнении ограничиться членами порядка  $S/S_0$ , то оно будет линейным как относительно величины  $S$ ,

так и относительно возмущения  $E(t)$ . Следовательно, в этом случае имеет смысл нахождение резольвентных решений.

Ниже будет дано решение этой задачи в одномерном приближении. Что касается перехода к трехмерной среде, то при этом не возникает никаких принципиальных трудностей, и соответствующие этому случаю уравнения будут приведены в конце статьи.

2. *Основные уравнения.* Функция источника  $S_0$ , соответствующая стационарному решению проблемы Милна, в одномерном приближении (эквивалентном приближению Шварцшильда-Шустера) определяется уравнением

$$S_0(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-|\tau-\tau'|} S_0(\tau') d\tau' \quad (9)$$

и равна

$$S_0 = \frac{\varepsilon_0}{a_0} = \frac{E_0}{2} (1 + \tau). \quad (10)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  — объемный коэффициент излучения,  $E_0$  — поток лучистой энергии за единицу времени,  $\tau$  — эффективное оптическое расстояние, такое, что  $\tau/2 = t$ , где  $t$  — реальная оптическая глубина:

$$t = \int_0^r \alpha_0(r) dr \quad (\text{множитель } 1/2 \text{ соответствует усредненному по полу-}$$

сфере значению  $\cos \theta$ ).

Уравнение (9) может быть записано в несколько иной форме:

$$S_0(\tau) = \frac{1}{2f(\tau)} \int_0^{\infty} e^{-|\tau-\tau'|} d\tau' \int_{-\infty}^u e^{-(u-\tau')/f(\tau')} S_0(\tau') du', \quad (11)$$

где принято во внимание, что элементарный акт рассеяния фотона происходит с задержкой во времени, определяемой соотношением (2).

В качестве временного масштаба здесь выбрано значение  $t_1^0$  на оптической глубине  $\tau = 0$  и введено обозначение  $u = t/t_1^0(0)$ . При этом  $t_1^0(\tau) = t_1^0(0) f(\tau)$ , и

$$S_0(\tau) = \sigma T_0^+ t_1^0(0). \quad (12)$$

Допустим теперь, что в момент времени  $u = 0$  в поверхностных слоях атмосферы возникло температурное возмущение, вызванное по-

явлением на границе нестационарного источника интенсивности  $E(u)$ . Не умаляя общности, можно принять, что  $E(u) = \delta(u)$ , где  $\delta(u)$  — дельта-функция Дирака.

Температурному возмущению  $T$  согласно формуле (12) будет соответствовать приращение функции источника  $S = 4\sigma T_0^3 T t_1(1)$ . С другой стороны, по определению  $\bar{S} = (\varepsilon_0 + \varepsilon)/(\alpha_0 + \alpha)$ , и, следовательно,

$$S = \varepsilon/\alpha_0 - S_0\alpha/\alpha_0. \quad (13)$$

Учитывая, что согласно (6)  $\alpha/\alpha_0 = a_1 S_1/S_0$ , отсюда находим:

$$(1 + a_1) S = \varepsilon/\alpha_0 \equiv S_1. \quad (14)$$

Уравнение, определяющее функцию  $S$ , удобно вывести в два этапа: сначала составить уравнение для величины  $S_0 + S_1 = (\varepsilon_0 + \varepsilon)/\alpha_0$ , а затем с помощью соотношения (14) перейти в нем от  $S_1$  к  $S$ . При этом необходимо учесть возмущение оптических параметров  $\alpha$  и  $t_1$ .

Согласно (6), вероятность того, что квант, излученный в момент времени  $u'$  ( $u' \geq 0$ ) на оптической глубине  $\tau'$ , будет поглощен в интервале оптических глубин от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$  определяется теперь соотношением

$$g(u', \tau', \tau) d\tau = \exp\left(-|\tau - \tau'| - \int_{|\tau - \tau'|}^{\tau} a_1(t) \frac{S(t, u')}{S_0(t)} dt\right) \times \\ \times \left(1 + a_1(\tau) \frac{S(\tau, u')}{S_0(\tau)}\right) d\tau, \quad (15)$$

где

$$\int_{|\tau - \tau'|}^{\max(\tau, \tau')} = \int_{\min(\tau, \tau')}^{\max(\tau, \tau')},$$

а вероятность того, что квант, поглощенный на оптической глубине  $\tau$  в момент времени  $u'$ , переизлучится в интервале времени от  $u$  до  $u + du$ , согласно (3) и (7), будет равна:

$$\psi(\tau, u', u) du = \exp\left(-\frac{u - u'}{f(\tau)} + \frac{a_2(\tau)}{f(\tau)} \int_{\max(0, u')}^u \frac{S(\tau, t)}{S_0(\tau)} dt\right) \times \\ \times \left(1 - a_2(\tau) \frac{S(\tau, u)}{S_0(\tau)}\right) \frac{du}{f(\tau)}. \quad (16)$$

Уравнение, определяющее величину  $S_0 + S_1$ , должно, очевидно, учитывать излучение, пришедшее непосредственно от нестационарного

источника, и излучение, рассеянное в атмосфере (включая „собственное“ излучение среды).

Принимая во внимание (15) и (16), можем записать его следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S_0(\tau) + S_1(\tau, u) = & \\
 = \frac{1}{2f(\tau)} e^{-\tau-uf(\tau)} + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|} d\tau' \int_{-\infty}^0 \psi(\tau, u', u) + S_0(\tau') du' + & \\
 + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau' \int_0^u g(u', \tau', \tau) \psi(\tau, u', u) (S_0(\tau') + S_1(\tau', u')) du'. &
 \end{aligned} \quad (17)$$

Линеаризация этого уравнения заключается в разложении функций  $g$  и  $\psi$  в ряды по степеням возмущения. Ограничиваясь при этом членами порядка  $S/S_0$ , будем иметь

$$g(u', \tau', \tau) = e^{-|\tau-\tau'|} \left( 1 + a_1(\tau) \frac{S(\tau, u')}{S_0(\tau)} - \int_{|\tau-\tau'|} a_1(t) \frac{S(t, u')}{S_0(t)} dt \right), \quad (18)$$

$$\psi(\tau, u', u) = \frac{1}{f(\tau)} e^{-(u-u')/f(\tau)} \left( 1 - a_2(\tau) \frac{S(\tau, u)}{S_0(\tau)} + \frac{a_2(\tau)}{f(\tau)} \int_{\max(0, u')} \frac{S(\tau, t)}{S_0(\tau)} dt \right). \quad (19)$$

Учитывая далее соотношения (10), (11) и (14), после некоторых упрощений получаем

$$f(\tau) \beta(\tau) S(\tau, u) = \frac{1}{2} e^{-\tau-uf(\tau)} + \int_0^u e^{-(u-u')/f(\tau)} \left\{ (\beta(\tau) - 1) S(\tau, u') + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|} \left[ (1 + a_1(\tau')) S(\tau', u') - S_0(\tau') \int_{|\tau-\tau'|} a_1(t) \frac{S(t, u')}{S_0(t)} dt \right] d\tau' \right\} du', \quad (20)$$

где  $\beta(\tau) = 1 + a_1(\tau) + a_2(\tau)$ , или с учетом (1) и (8)

$$\beta(\tau) = \left( \frac{d \ln E_1}{d \ln E_2} \right)_\sigma = \frac{1}{4} \frac{T_0}{E_1} \rho_0 c_v, \quad (21)$$

и

$$f(\tau) \beta(\tau) = \frac{c_v}{16 \sigma_0 T_0^3 t_1^2(0)}. \quad (22)$$

Здесь  $c_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $\kappa$  — коэффициент поглощения на 1 г вещества.

Согласно Е. А. Шпигелю [3], величина  $c_0/16 \pi \kappa_0 T_0^3$  представляет собой характерное время релаксации  $t_r$  оптически тонкой температурной флуктуации. Из формулы (22) следует, что эта величина связана со средним временем пребывания кванта в поглощенном состоянии соотношением

$$t_r = \beta t_1. \quad (23)$$

В случае идеального газа, не имеющего внутренних степеней свободы,  $\beta = 1/4$ , и, следовательно,  $t_r = t_1/4$ .

Если процесс температурного возмущения происходит при постоянном давлении, то тогда  $t_r = \gamma^2 t_1$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты:  $\gamma = c_p/c_v$ .

Уравнение (20) можно несколько упростить. Для этого продифференцируем его по  $u$  и примем во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|} \left[ a_1(\tau') S(\tau', u) - S_0(\tau') \int_{|\tau-\tau'|}^\infty a_1(t) \frac{S(t, u)}{S_0(t)} dt \right] d\tau' = \\ = - \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty \frac{e^{-|\tau-\tau'|}}{1+\tau'} a_1(\tau') S(\tau', u) d\tau'. \end{aligned} \quad (24)$$

В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} f(\tau) \beta(\tau) \frac{\partial S(\tau, u)}{\partial u} + S(\tau, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|} S(\tau', u) d\tau' - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty \frac{e^{-|\tau-\tau'|}}{1+\tau'} a_1(\tau') S(\tau', u) d\tau' \end{aligned} \quad (25)$$

с начальным условием

$$S(\tau, 0) = e^{-\tau/2} f(\tau) \beta(\tau). \quad (26)$$

В пределе при  $a_1$  и  $a_2 \rightarrow 0$  (25) переходит в уравнение нестационарной диффузии излучения в среде, оптические свойства которой не меняются с течением времени:

$$f(\tau) \frac{\partial S(\tau, u)}{\partial u} + S(\tau, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|} S(\tau', u) d\tau'. \quad (27)$$

Решение этого уравнения определяет характер диффузии дополнительного излучения от нестационарного источника, если последнее рассматривать как примесь в фотонном газе „собственного“ поля излучения среды.

В общем случае, когда  $a_1 \neq 0$  и  $a_2 \neq 0$ , распространение температурного возмущения определяется уравнением (25), и в этом процессе наряду с дополнительным излучением участвуют также (за счет изменения оптических свойств среды) фотоны „собственного“ поля излучения.

Основное отличие этих двух уравнений состоит в появлении второго члена в правой части (25). Можно, однако, показать, что это отличие имеет место лишь в случае температурно-неоднородной среды. В тех же случаях, когда рассеивающая среда изотермична, учет возмущения ее оптических свойств по существу эквивалентен выбору нового масштаба времени  $t_1 \rightarrow t_r$ .

В дальнейшем для удобства записи мы выполним указанную замену и за единицу времени примем значение  $t_r(0)$  ( $u = t/t_r(0)$ ). Тогда в уравнении (25) функцию  $f(\tau)\beta(\tau)$  следует заменить на  $h(\tau) = t_r(\tau)/t_r(0)$ ; и окончательное оно примет вид

$$h(\tau) \frac{\partial S(\tau, u)}{\partial u} + S(\tau, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-|\tau-\tau'|} S(\tau', u) d\tau' \quad (28)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-|\tau-\tau'|}}{1+\tau'} a_1(\tau') S(\tau', u) d\tau',$$

$$S(\tau, 0) = e^{-\tau/2} h(\tau). \quad (29)$$

Очевидно, что функция  $S(\tau, u)$  должна быть нормирована так, чтобы

$$\int_0^{\infty} S(\tau, u) du = S(\tau), \quad (30)$$

где  $S(\tau)$  — стационарное решение проблемы Милна с точечным источником на границе, т. е. решение уравнения

$$S(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-|\tau-\tau'|} S(\tau') d\tau' - \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-|\tau-\tau'|}}{1+\tau'} a_1(\tau') S(\tau') d\tau'. \quad (31)$$

Нетрудно показать, что это есть

$$S(\tau) = \exp\left(\int_0^{\tau} \frac{a_1(\tau')}{1+\tau'} d\tau'\right). \quad (32)$$

3. *Интенсивность отраженного излучения.* Если решение уравнения (28) известно, то интенсивность выходящего излучения (совпадающая в одномерном приближении с потоком) может быть легко найдена по формуле

$$\bar{I}(u) = I_0 + I(u). \quad (33)$$

Здесь  $I_0$  — интенсивность излучения невозмущенной атмосферы ( $I_0 = E_0$ ),  $I$  — нестационарная составляющая излучения.

В случае произвольного возмущения  $E(u)$ , допускающего линеаризацию уравнения (17),

$$I(u) = \int_0^u I_i(u-u') E(u') du', \quad (34)$$

где  $I_i$  — интенсивность отраженного излучения, соответствующая мгновенному возмущению единичной мощности:  $E(u) = \delta(u)$ .

Рассуждая так же, как и при выводе уравнения (28), можно показать, что

$$I_i(u) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} S(\tau, u) \left(1 - \frac{a_1(\tau)}{1+\tau}\right) d\tau, \quad (35)$$

или с учетом (28)

$$\frac{1}{2} I_i(u) = \frac{\partial S(0, u)}{\partial u} + S(0, u). \quad (36)$$

Наряду с формулами (35) и (36) существует еще одно простое соотношение, связывающее функции  $I_i(u)$  и  $S(\tau, u)$ . Для нахождения

его воспользуемся следующими рассуждениями: так как по условию задачи мы пренебрегаем временем, в течение которого излучение находится в пути между рассеяниями ( $t_1 \gg t_2$ ), то величина  $Q(u) =$

$= \int_0^{\infty} T \rho_0 c_p dr$  представляет собой всю дополнительную энергию, находящуюся в данный момент времени в среде. Соответственно величина  $1 - Q(u)$  равна энергии, отраженной атмосферой к моменту времени  $u$ . То есть

$$\int_0^u I_s(u) du = 1 - \int_0^{\infty} T \rho_0 c_p dr. \quad (37)$$

Если в этом соотношении перейти от величин  $r$  и  $T$  к  $S(\tau, u)$  и  $\tau$ , то в результате получим

$$I_s(u) = -2 \frac{d}{du} \int_0^{\infty} S(\tau, u) h(\tau) d\tau. \quad (38)$$

4. *Трехмерная среда.* Полученные выше уравнения для функции источника (28) и интенсивности излучения (35) легко обобщаются на случай трехмерной среды. Мы приведем здесь соответствующие уравнения для двух важных частных случаев, когда 1) среда освещается параллельными лучами интенсивности  $\delta(u)$ , падающими под углом  $\arcs \cos \eta$  к нормали; 2) возмущение атмосферы вызвано мгновенным точечным источником единичной мощности.

В первом случае функция источника определяется уравнением

$$\begin{aligned} h(\tau) \frac{\partial S(\tau, u)}{\partial u} + S(\tau, u) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) S(\tau', u) d\tau' + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ E_1(|\tau - \tau'|) a_1(\tau') S(\tau', u) - E_0(|\tau - \tau'|) \times \right. \\ &\left. \times S_0(\tau') \int_{|\tau - \tau'|}^{\infty} a_1(t) \frac{S(t, u)}{S_0(t)} dt \right] d\tau' \end{aligned} \quad (39)$$

с начальным условием

$$S(\tau, 0) = e^{-\tau/\eta} / 4\pi h(\tau), \quad (40)$$

а интенсивность излучения, отраженного под углом  $\arccos \mu$  к нормали, соотношением

$$I_i(u, \tau, \mu) = \int_0^{\infty} e^{-\tau t} \left[ S(\tau, u) (1 + a_1(\tau)) - \frac{S_0(\tau)}{\mu} \int_0^{\tau} a_1(t) \frac{S(t, u)}{S_0(t)} dt \right] \frac{d\tau}{\mu}. \quad (41)$$

Здесь  $E_0$  и  $E_1$  — интегральные экспоненциальные функции нулевого и первого рода.  $S_0(\tau)$  — функция источника в невозмущенной атмосфере:

$$S_0(\tau) = \frac{3}{4} F(\tau + q(\tau)), \quad (42)$$

где  $q(\tau)$  — функция Хопфа.

Если источник точечный, то тогда функция  $S$  зависит не только от глубины, но и от расстояния  $r$  до оси симметрии, и это обстоятельство существенно усложняет решение задачи.

В некоторых случаях, однако, вместо интенсивности  $I_i(u, r, \mu, \varphi)$  достаточно знать полную энергию, отраженную атмосферой в момент времени  $u$ , то есть величину

$$E_i(u, \mu) = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} I_i(u, r, \mu, \varphi) r dr. \quad (43)$$

Можно показать, что  $E_i$  связана с интегральной функцией источника

$$S(\tau, u) = 2\pi \int_0^{\infty} S(\tau, u, r) r dr \quad (44)$$

соотношением

$$E_i(u, \mu) = \int_0^{\infty} e^{-\tau u} \left[ S(\tau, u) (1 + a_1(\tau)) \frac{S_0(\tau)}{\mu} \int_0^{\tau} a_1(t) \frac{S(t, u)}{S_0(t)} dt \right] d\tau, \quad (45)$$

а сама величина  $S(\tau, u)$  определяется уравнением (39) с начальным условием

$$S(\tau, 0) = E_1(\tau)/2h(\tau). \quad (46)$$

Во всех рассмотренных выше случаях предполагалось, что температурное возмущение поверхностных слоев атмосферы связано с

появлением дополнительного излучения от нестационарного источника. Однако ясно, что выбор конкретного механизма нагрева среды не является здесь решающим обстоятельством. Например, повышение температуры может быть вызвано газодинамическими эффектами (прохождением фронта ударной волны и т. д.). При этом уравнения (28) и (39) позволяют рассчитать изменение температуры в атмосфере как функцию оптической глубины  $\tau$  и времени  $u$ . Для этого нужно лишь соответствующим образом изменить в них начальные условия.

В заключение этого раздела отметим, что интегральное уравнение для температурного возмущения  $T$ , аналогичное уравнению (39), было получено ранее Е. А. Шпигелем [3] и решено для случая бесконечной изотермической среды (в этом случае член, учитывающий возмущение коэффициента поглощения, обращается в нуль). Ниже на основе диффузионного приближения мы рассмотрим влияние этого фактора на перенос лучистой энергии в условиях звездных атмосфер. Забегая несколько вперед, укажем, что в ряде случаев это влияние оказывается существенным и может привести к заметному изменению закона нестационарного свечения среды.

5. *Диффузионное приближение.* От интегродифференциального уравнения (28) путем дифференцирования по  $\tau$  можно перейти к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( h \frac{\partial S}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{a_1}{1 + \tau} \right) S = h \frac{\partial S}{\partial u} \quad (47)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями. Если, далее, здесь пренебречь членом  $\partial^2/\partial \tau^2 (h(\partial S/\partial u))$  (что допустимо в области  $\tau \gg 1$ ,  $u \gg 1$ ), то в результате мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{a_1}{\tau} \right) S = h \frac{\partial S}{\partial u} \quad (48)$$

с начальными и граничными условиями

$$S(\tau, 0) = 0 \quad \text{и} \quad S(\infty, u) = 0.$$

Последнее уравнение является аналогом обычного уравнения диффузии [4, 5]:

$$\operatorname{div} \left[ \dot{T} \left( \frac{dK_0}{dT} \right)_p \nabla T_0 + K_0 \nabla T \right] = \rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (49)$$

в котором учтено возмущение коэффициента лучистой теплопроводности  $K_0$ .

Следует отметить, что вместо уравнения (49), или эквивалентного ему уравнения (49) часто используется более простое уравнение:

$$\operatorname{div}(K_0 \nabla T) = \rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (50)$$

Строго говоря, это можно делать только в изотермических средах, когда  $\nabla T_0 = 0$ . В тех же случаях, когда важен учет неоднородности среды, подобная замена становится необоснованной. Для пояснения сказанного сделаем некоторые оценки. Пусть  $R$  — характерный масштаб температурной неоднородности среды,  $r$  — характерный размер температурной флуктуации. Тогда в уравнении (49)  $\nabla T_0 \approx T_0/R$ ,  $\nabla T \approx T/r$  и отношение

$$T \left( \frac{dK_0}{dT} \right)_p \nabla T_0 / K_0 \nabla T \approx \left( \frac{d \ln K_0}{d \ln T} \right)_p \frac{r}{R}.$$

Поскольку величина  $(d \ln K_0 / d \ln T)_p \sim 1$ , то отсюда следует, что оба члена в левой части уравнения (49) будут одного порядка когда  $r \approx R$ , т. е. когда размер температурной флуктуации сравним, с характерным размером температурной неоднородности среды.

Подобные условия, как легко видеть, имеют место в нашем случае, когда температурное возмущение возникает в поверхностных слоях атмосферы, и здесь, следовательно, важен учет возмущения оптических свойств среды. Чтобы выяснить влияние этого фактора на характер распространения температурного возмущения, обратимся к уравнению (48), сделав предварительно некоторые упрощающие предположения.

6. *Поле излучения вдали от границы.* Примем, что коэффициент поглощения на 1 г вещества определяется формулой

$$\kappa(\rho, T) \sim \rho^l T^s, \quad (51)$$

где  $l$  и  $s$  — некоторые постоянные параметры. Тогда, согласно (8)

$$(a_1)_v = \frac{s}{4}; \quad (a_1)_p = \frac{s-l-1}{4}. \quad (52)$$

Далее, можно показать (см., например, [4]), что в этом случае плотность и температура связаны между собой соотношением

$$\rho_0 \sim T_0^{\frac{3-s}{1+l}} \quad (53)$$

и, если предположить, что удельная теплоемкость в атмосфере постоянна, то отсюда и из (22), (51) следует:

$$h(\tau) \simeq \tau^\mu, \quad (54)$$

где

$$\mu = -\frac{1}{4} \left( 3 + s + (3 - s) \frac{l}{1+l} \right).$$

С учетом этого перепишем уравнение (48) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - j \frac{a_1}{\tau} \right) S = \tau^\mu \frac{\partial S}{\partial u}, \quad (55)$$

выделив в нем с помощью индекса  $j$  ( $j=0$  или  $1$ ) член, учитывающий изменение оптических свойств среды. Последнее уравнение легко решается методами операционного исчисления. Применяя к нему преобразование Лапласа и принимая во внимание начальное условие  $S(\tau, 0) = 0$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - j \frac{a_1}{\tau} \right) \bar{S} = \tau^\mu p \bar{S}, \quad (56)$$

где

$$\bar{S}(\tau, p) = \int_0^\infty e^{-p u} S(\tau, u) du.$$

Ограниченное на бесконечности решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\bar{S}(\tau, p) = C(p) \tau^{\frac{1+j a_1}{2}} K_\nu \left( \frac{2}{m} \sqrt{p} \tau^{\frac{m}{2}} \right). \quad (57)$$

Здесь  $K_\nu$  — функция Бесселя чисто мнимого аргумента,

$$m = 2 + \mu; \quad \nu = \frac{1 - j a_1}{m}; \quad (58)$$

Для нахождения неизвестной функции  $C(p)$  воспользуемся нормировочным соотношением (32), которое в данном случае имеет вид:

$$S(\tau) = \begin{cases} \tau^{a_1} & \text{при } j = 1 \\ 1 & \text{при } j = 0, \end{cases} \quad (59)$$

и тем обстоятельством, что  $S(\tau) = \int_0^{\infty} S(\tau, u) du = \lim_{p \rightarrow 0} \bar{S}(\tau, p)$ . Учитывая это, из (57) получаем

$$C(p) = \frac{2}{m \cdot \Gamma(\nu)} p^{\frac{\nu}{2}}. \quad (60)$$

Подстановка (60) в (57) и обращение полученного выражения дают при  $\tau \gg 1$ ,  $u \gg 1$ :

$$S(\tau, u) = \frac{m^{-2\nu}}{\Gamma(\nu)} \frac{\tau}{u^{1+\nu}} \exp\left(-\frac{\tau^m}{m^2 u}\right). \quad (61)$$

Из этого соотношения прежде всего следует, что рассматриваемое приближение годится только для тех значений параметров  $l$  и  $s$  в формуле (51), которые обеспечивают выполнение двух условий:

1.  $m > 0$  — ограниченность решения на бесконечности.
2.  $\nu > 0$  — условие существования стационарного решения.

Согласно (58) это означает, что характерное время температурной релаксации  $t_r(\tau)$  должно убывать с ростом  $\tau$  медленнее, чем  $\tau^{-2}$ . а величина  $a$ , должна быть меньше единицы. Предполагая эти условия выполненными, рассмотрим основные свойства полученного решения.

Соотношение (61) описывает движение волны термического возмущения от источника в глубь атмосферы. Для каждого фиксированного  $\tau \gg 1$  функция  $S(\tau, u)$  достигает максимального значения  $S_m$  при

$$u_m = \tau^m / m^2 (1 + \nu), \quad (62)$$

равного

$$S(\tau, u_m) \sim \tau^{j a_1 - m}. \quad (63)$$

При этом скорость движения волны  $V = d\tau/du_m$  равна

$$V = m(1 + \nu) \tau^{1-m}. \quad (64)$$

Таким образом, при  $m < 1$  ( $\mu < -1$ ) волна распространяется в среде с ускорением и, наоборот, при  $m > 1$  ( $\mu > -1$ ) скорость ее движения уменьшается с ростом  $\tau$ .

Далее, так как параметр  $m$  не зависит от индекса  $j$ , то из соотношения (61) следует, что функции  $S(\tau, u)$  при  $j=0$  и  $j=1$  в пространственном отношении подобны друг другу

$$S_{j=0}(\tau, u) / S_{j=1}(\tau, u) = \varphi(u). \quad (65)$$

Поэтому возмущение оптических свойств среды слабо влияет на величины  $u_m$  и  $V$ , и они определяются в основном тем, насколько быстро меняется с глубиной характерное время температурной релаксации  $t_r(\tau)$ .

Иначе обстоит дело, когда рассматривается временная зависимость функции  $S(\tau, u)$  при фиксированном значении  $\tau$ . Здесь оба фактора сказываются в равной степени. Так, если с увеличением температуры происходит „просветление“ среды ( $a_1 < 0$ ), то согласно (58)  $v_{j=1} > v_{j=0}$ . В этом случае возмущение оптических свойств среды приводит к более медленному (по сравнению со случаем  $j = 0$ ) нарастанию возмущения и к более крутому спаду после достижения максимального значения. При этом согласно (63) отношение

$$(S_m)_{j=1}/(S_m)_{j=0} \sim \tau^{a_1} \ll 1. \quad (66)$$

При  $a_1 > 0$  (в этом случае увеличение температуры среды приводит к увеличению ее непрозрачности) картина будет полностью противоположной.

Следует отметить, что хотя решение (61) соответствует внешнему возмущению  $E(u) = \delta(u)$  ( $S \equiv S_2$ ), основные выводы о характере распространения температурного возмущения сохраняются и в случае произвольного возмущения  $E(u)$ . Например, если  $E(u) = 1$  при  $u > 0$  (функция Хевисайда), то функция источника  $S_2$  в этом случае равна

$$S_2(\tau, u) = \int_0^u S_2(\tau, u) du = \tau^{a_1} \Gamma(\nu)^{-1} \Gamma\left(\nu, \frac{\tau^m}{m^2 u}\right). \quad (67)$$

Здесь  $\Gamma(\nu, x) = \Gamma(\nu) - \gamma(\nu, x)$ , где  $\gamma(\nu, x)$  — неполная гамма-функция.

Из этого соотношения следует, что характерное время установления лучистого равновесия на глубине  $\tau$  того же порядка, что и время  $u_m$ , а отношение установившихся значений  $S_2(\tau, \infty)$ , равное  $S(\tau)_{j=1}/S(\tau)_{j=0}$ , определяется формулой (66).

**7. Свечение внешних слоев атмосферы.** На основании сказанного выше можно заключить, что возмущение оптических свойств среды должно также заметно влиять на характер свечения поверхностных слоев атмосферы, т. е. на поведение функции  $I_2(u)$ . Чтобы выяснить влияние этого фактора, воспользуемся асимптотическим решением (61) и формулой (38). В результате получим при  $u \gg 1$ :

$$I_2(u) = \frac{\nu m^{1-2\nu}}{\Gamma(\nu)} u^{-1-\nu}. \quad (68)$$

Так же, как и в предыдущем разделе рассмотрим два случая.

1.  $a_1 < 0$ . В этом случае  $\nu_{j-1} > \nu_{j-0}$ ; поэтому  $(I_j)_{j-1} \ll (I_j)_{j-0}$  при

$u \gg 1$ . Далее, так как болометрическое альbedo атмосферы  $A = \int_0^{\infty} I_{\lambda}(u) du$

при  $j = 0$  и  $j = 1$  равно единице, то отсюда следует, что в моменты времени непосредственно после вспышки ( $u = 0 +$ ) должно выполняться обратное неравенство  $I_{\lambda}(0+)_{j-1} > I_{\lambda}(0+)_{j-0}$ .

Подобная реакция атмосферы на температурное возмущение вполне понятна: „просветление“ среды, которое происходит с увеличением температуры, обнажает внутренние, более горячие слои атмосферы. В начальные моменты времени это приводит к дополнительному повышению яркости атмосферы (по сравнению со случаем  $j = 0$ ). Вместе с тем, „просветление“ среды ускоряет выход энергии наружу и, тем самым, приводит к увеличению скорости ее высвечивания.

2.  $a_1 > 0$ . Наоборот, если нагрев среды сопровождается увеличением непрозрачности ( $\nu_{j-1} < \nu_{j-0}$ ), то наблюдаемая картина будет представлять собой результат наложения двух противоположных эффектов. С одной стороны, повышение температуры среды приводит к увеличению ее яркости. Но с другой стороны, нагретая область экранирует внутренние, более горячие слои атмосферы, в результате в начальные моменты времени яркость возмущенной атмосферы будет меньше по сравнению со случаем  $j = 0$ . Наряду с этим увеличение непрозрачности среды затрудняет выход энергии наружу, уменьшая тем самым скорость ее высвечивания.

8. *Заключение.* Таким образом, результаты двух последних разделов показывают, что изменение оптических свойств среды является важным фактором, определяющим реакцию атмосферы на температурное возмущение. Характер этого влияния зависит от того, происходит ли в результате нагрева „просветление“ среды или, наоборот, непрозрачность ее при этом растет. Причем оба случая одинаково часто встречаются в условиях звездных атмосфер. Например, в атмосферах горячих звезд с повышением температуры среда становится прозрачнее, и, следовательно, величина  $a_1 < 0$ . В то время, как в атмосферах звезд с  $T_{\text{эфф}} \lesssim 7000^\circ$  имеет место обратная картина и здесь  $a_1 > 0$ . Так, в атмосфере Солнца на глубине  $\tau = 1$ , согласно данным о коэффициенте поглощения, приведенным в [6], величина  $(a_1)_p \approx 0.4$ .

С переходом к более поздним спектральным классам величина  $\alpha_1$  возрастает, достигая значений 2 → 3 в атмосферах холодных карликов с  $T_{\text{эфф}} \approx 3000^\circ$ . Последний случай заслуживает более подробного рассмотрения, поскольку к этой группе звезд принадлежат вспыхивающие звезды, и задача о нестационарном отражении света представляет здесь большой практический интерес. К этой задаче мы вернемся в одной из следующих работ.

Автор выражает глубокую благодарность И. Н. Минину и Р. Е. Гершбергу за обсуждение основных результатов работы.

Крымская астрофизическая  
обсерватория

## THE MILNE PROBLEM WITH PERTURBATION ON THE BOUNDARY

V. P. GRININ

The problem on nonstationary radiation of stellar atmosphere is considered. It is assumed that temperature perturbation is due to radiation source of variable intensity appearing on the border. The basic equations of the source function  $S(\tau, u)$  and of the reflected intensity  $I_0(u)$  are given. These equations were deducted taking into account the perturbation of optical properties of the atmosphere. An approximate solution of the problem in one-dimensional case is obtained and the physical interpretation of the results is given.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. П. Гринин, Изв. КрАО, 43, 1970.
2. В. В. Соболев, Астров. ж., 37, 387, 1960.
3. E. A. Spiegel, Ap. J., 126, 202, 1957.
4. K. H. Böhm, E. Richter, Z. Astrophys., 48, 231, 1959.
5. E. A. Spiegel, Ap. J., 139, No. 3, 1964.
6. E. Vitense, Z. Astrophys., 28, 81, 1951.

## NUMERICAL RESULTS FOR SOBOLEV'S FUNCTION Q OF RADIATIVE TRANSFER

J. BUELL, R. KALABA, S. UENO

Received 15 June 1970

The function  $Q$  is the solution of the Fredholm integral equation

$$Q(t, x) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^x E_1(|t-y|) Q(y, x) dy, \quad 0 < t < x, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Sobolev has emphasized the importance of this function in the theory of radiative transfer and multiple scattering. In this paper the method of invariant imbedding is used to obtain numerical values of the function  $Q$ .

1. *Introduction.* In a series of papers V. V. Sobolev [1-4] has discussed the importance of the function  $Q$  in radiative transfer. This function is the solution of the Fredholm integral equation

$$Q(t, x) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^x E_1(|t-y|) Q(y, x) dy.$$

$$0 \leq t \leq x, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

where the kernel  $E_1$  is given by the integral

$$E_1(r) = \int_0^1 e^{-r/z} dz/z, \quad r > 0.$$

Physically  $Q$  may be viewed as the average number of scatterings which a photon undergoes when it is isotropically emitted at altitude  $t$  in a slab of thickness  $x$ ; the parameter  $\lambda$  is the albedo for single scattering,

and each scattering is isotropic. This function has also been discussed by M. Heaslet and R. Warming [5].

In this paper the invariant imbedding [6] approach is used to transform the integral equation for the function  $Q$  into a Cauchy problem which is readily solved via modern digital or analog computing machines. Numerical results are presented in the form of tables and graphs, and a discussion of the accuracy attained is presented.

The discussion is self-contained, and no previous contact with invariant imbedding is assumed.

2. *Derivation of Cauchy System.* Consider the integral equation

$$Q(t, x) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^x E_1(|t-y|) Q(y, x) dy, \quad (1)$$

$$0 \leq t \leq x, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

where

$$E_1(r) = \int_0^1 e^{-r/z} z^{-1} dz, \quad r > 0, \quad (2)$$

Differentiate with respect to  $x$  to obtain the equation

$$Q_x(t, x) = (\lambda/2) E_1(x-t) Q(x, x) +$$

$$+ (\lambda/2) \int_0^x E_1(|t-y|) Q_x(y, x) dy, \quad 0 \leq t \leq x. \quad (3)$$

Next introduce Sobolev's function  $\Phi$  as the solution of the integral equation

$$\Phi(t, x) = (\lambda/2) E_1(x-t) + (\lambda/2) \int_0^x E_1(|t-y|) \Phi(y, x) dy, \quad (4)$$

$$0 \leq t \leq x.$$

By regarding Eq. (3) as an integral equation for the function  $Q_x$  and keeping in mind the integral equation above for the function  $\Phi$ , it is seen that

$$Q_x(t, x) = \Phi(t, x) Q(x, x), \quad x > t. \quad (5)$$

This is the basic differential equation for the function  $Q(t, x)$ . We shall first consider the function  $\Phi(t, x)$  and then the function  $Q(x, x)$ .

Introduce the source function  $J$  as the solution of the integral equation

$$J(t, x, z) = \frac{\lambda}{4} e^{-(x-t)/z} + \frac{\lambda}{2} \int_0^x E_1(|t-y|) J(y, x, z) dy, \quad (6)$$

$$0 \leq t \leq x, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

In view of Eqs. (2) and (4) we see that the function  $\Phi$  may be expressed simply in terms of the function  $J$ . The exact relation is

$$\Phi(t, x) = 2 \int_0^1 J(t, x, z') dz'/z', \quad 0 \leq t \leq x. \quad (7)$$

We shall now derive a Cauchy system for the function  $J$ . Differentiation of Eq. (6) with respect to  $x$  yields the equation

$$J_x(t, x, z) = -z^{-1} (\lambda/4) e^{-(x-t)/z} + (\lambda/2) E_1(x-t) J(x, x, z) + \\ + (\lambda/2) \int_0^x E_1(|t-y|) J_x(y, x, z) dy. \quad (8)$$

By regarding the last equation as an integral equation for the function  $J_x$  with two inhomogeneous terms, we find that its solution is

$$J_x(t, x, z) = -z^{-1} J(t, x, z) + \Phi(t, x) J(x, x, z). \quad (9)$$

$0 \geq t.$

The function  $J(x, x, z)$  must now be considered. The integral equation (6) at  $t = x$  yields the representation

$$J(x, x, z) = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} \int_0^x E_1(x-y) J(y, x, z) dy. \quad (10)$$

Using the definition of the function  $E_1$  we may write

$$\begin{aligned}
 J(x, x, z) &= \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} \int_0^x \int_0^1 e^{-(x-y)/z'} (dz'/z') J(y, x, z) dy = \\
 &= \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} \int_0^x (dz'/z') \int_0^x e^{-(x-y)/z'} J(y, x, z) dy.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Finally we introduce the reflection function  $R$  through the definition

$$R(v, z, x) = 4 \int_0^x e^{-(x-y)/v} J(y, x, z) dy, \quad 0 \leq v, \quad z \leq 1, \quad 0 < x. \tag{12}$$

It follows that

$$J(x, x, z) = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{8} \int_0^1 R(z', z, x) dz'/z'. \tag{13}$$

We shall now obtain the Cauchy system for the function  $R$ .

Differentiate both sides of Eq. (12) with respect to  $x$ . The result is

$$\begin{aligned}
 R_x(v, z, x) &= 4 \left\{ J(x, x, z) - v^{-1} \int_0^x e^{-(x-y)/v} J(y, x, z) dy + \right. \\
 &\left. + \int_0^x e^{-(x-y)/v} [-z^{-1} J(y, x, z) + \Phi(y, x) J(x, x, z)] dy \right\}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

A slight rearrangement yields the equation

$$\begin{aligned}
 R_x(v, z, x) &= - \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{z} \right) R(v, z, x) + \\
 &+ 4J(x, x, z) \left\{ 1 + \int_0^x e^{-(x-y)/v} \Phi(y, x) dy \right\}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

The integral in the last equation may be evaluated by observing that

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 e^{-(x-y)/v} \Phi(y, x) dy &= \int_0^x e^{-(x-y)/v} 2 \int_0^1 J(y, x, z') (dz'/z') dy = \\
 &= 2 \int_0^1 (dz'/z') \int_0^x e^{-(x-y)/v} J(y, x, z') dy = \frac{1}{2} \int_0^1 R(v, z', x) dz'/z'.
 \end{aligned} \tag{16}$$

In view of this result and Eq. (13), Eq. (15) may be rewritten as

$$R_x(v, z, x) = -\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{z}\right)R(v, z, x) + \quad (17)$$

$$+ \lambda \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 R(z', z, x) dz'/z' \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 R(v, z', x) dz'/z' \right],$$

$$x > 0.$$

We may now pass to a consideration of the second factor on the right side of Eq. (5),  $Q(x, x)$ . From Eq. (1) we see that

$$Q(x, x) = 1 + (\lambda/2) \int_0^x E_1(x-y) Q(y, x) dy = \quad (18)$$

$$= 1 + (\lambda/2) \int_0^x \int_0^1 e^{-(x-y)/z} dz/z Q(y, x) dy = 1 + (\lambda/2) \int_0^1 e(z, x) dz/z,$$

where we have introduced the new emergence function  $e$ ,

$$e(v, x) = \int_0^x e^{-(x-y)/v} Q(y, x) dy, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (19)$$

A Cauchy system for the function  $e$  will now be obtained.

Differentiate Eq. (19) with respect to  $x$ , which yields the relations

$$e_x(v, x) = Q(x, x) - v^{-1} e(v, x) + \int_0^x e^{-(x-y)/v} \Phi(y, x) Q(x, x) dy = \quad (20)$$

$$= -v^{-1} e(v, x) + Q(x, x) \left[ 1 + \int_0^x e^{-(x-y)/v} \Phi(y, x) dy \right].$$

By using Eqs. (18) and (16) we find that the function  $e$  satisfies the differential equation

$$e_x(v, x) = -v^{-1} e(v, x) + \quad (21)$$

$$+ \left[ 1 + (\lambda/2) \int_0^1 e(z, x) dz/z \right] \left[ 1 + (1/2) \int_0^1 R(v, z', x) dz'/z' \right].$$

Let us now summarize the basic differential equations and initial conditions of the Cauchy system. The functions  $R$  and  $e$  satisfy the differential equations

$$R_x(v, z, x) = -\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{z}\right)R(v, z, x) + \\ + \lambda \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 R(z', z, x) dz'/z' \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 R(v, z', x) dz'/z' \right],$$

$$e_x(v, x) = -v^{-1}e(v, x) + \\ + \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e(z', x) dz'/z' \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 R(v, z', x) dz'/z' \right], \\ x \geq 0, \quad 0 \leq v, \quad z \leq 1.$$

The initial conditions at  $x = 0$  are

$$R(v, z, 0) = 0, \quad 0 \leq v, \quad z \leq 1, \quad (22)$$

$$e(v, 0) = 0, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (23)$$

At  $x = t$  the functions  $J$  and  $Q$  satisfy the initial conditions

$$J(t, t, z) = \frac{\lambda}{4} \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 R(z', z, x) dz'/z' \right], \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (24)$$

$$Q(t, t) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e(z', x) dz'/z'. \quad (25)$$

The differential equations for the functions  $J$  and  $Q$ , for  $x > t$ , are

$$J_x(t, x, z) = -z^{-1}J(t, x, z) + \\ + \frac{\lambda}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 R(z', z, x) dz'/z' \right] \int_0^1 J(t, x, z') dz'/z', \quad (26) \\ x > t, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$Q_x(t, x) = 2 \left[ 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e(z', x) dz'/z' \right] \int_0^1 J(t, x, z') dz'/z', \quad (27) \\ x > t.$$

3. *Numerical Method.* The Cauchy system can readily be solved numerically using Gaussian quadrature to approximate the integrals. This is the method of lines, and it reduces the original Cauchy system to a nonlinear system of ordinary differential equations with known initial conditions. Let  $r_1, r_2, \dots, r_N$  be the  $N$  roots of the shifted Legendre polynomial  $P_N(1-2z)$ , and let  $w_1, w_2, \dots, w_N$  be the corresponding Christoffel weights. These are tabulated in [7]. Also let

$$R(r_i, r_j, x) = R_{ij}(x), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad x > 0. \quad (28)$$

Then for the function  $R_{ij}(x)$  we may write the approximate relation

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij}(x) = & -\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right)R_{ij}(x) + \\ & + \lambda \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N R_{mj}(x) \frac{w_m}{r_m}\right] \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N R_{im}(x) \frac{w_m}{r_m}\right]. \end{aligned} \quad (29)$$

$x > 0,$

and the initial conditions

$$R_{ij}(0) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (30)$$

where a prime represents differentiation with respect to  $x$ . Previous numerical experiments indicate that  $N \cong 7$  is appropriate [7]. Observe that Eq. (29) represents  $N^2$  ordinary differential equations. The fact that the function  $R$  is symmetric in its first two arguments allows us to reduce this number to  $N(N+1)/2$ , a significant saving when  $N \cong 7$ .

The system for function  $e$  is

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(x) = & r_i^{-1} e_i(x) + \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N e_m(x) \frac{w_m}{r_m}\right] \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N R_{im}(x) \frac{w_m}{r_m}\right], \end{aligned} \quad (31)$$

$x > 0,$

$$e_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

The systems (29) and (31) are to be integrated simultaneously, a total of  $[N(N+1)/2] + N$  ordinary differential equations.

Let  $t$  be a fixed positive number. At  $x = t > 0$  we adjoin the system of ordinary differential equations,

$$\begin{aligned} \dot{J}_i(x) = & -r_i^{-1} J_i(x) + \frac{\lambda}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N R_{mj}(x) \frac{w_m}{r_m}\right] \sum_{m=1}^N J_m(x) \frac{w_m}{r_m}, \end{aligned} \quad (33)$$

$i = 1, 2, \dots, N, \quad x > t,$

$$Q'(x) = 2 \left[ 1 + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=1}^N e_m(x) \frac{w_m}{r_m} \right] \sum_{m=1}^N J_m(x) \frac{w_m}{r_m}, \quad x > t. \quad (34)$$

In the above  $N + 1$  equations we employ the notation

$$J_i(x) = J(t, x, r_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (35)$$

$$Q(x) = Q(t, x), \quad x > t. \quad (36)$$

The initial conditions at  $x = t$  are

$$J_i(t) = \frac{\lambda}{4} \left[ 1 + \sum_{m=1}^N R_{mi}(t) \frac{w_m}{r_m} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (37)$$

and

$$Q(t) = 1 + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=1}^N e_m(t) \frac{w_m}{r_m}. \quad (38)$$

On the interval  $0 < x \leq t$  we integrate  $N(N + 1)/2 + N$  ordinary differential equations. On the interval  $t \leq x \leq x_{\max}$  we integrate  $N(N + 1)/2 + 2N + 1$  ordinary differential equations, each with a known initial condition.

As a rule we shall require the values of  $Q$  for a set of values of  $t$ , rather than a single one. Let these values be denoted  $t_1, t_2, \dots, t_M$ , with

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M < x_{\max}. \quad (39)$$

In this case for  $1 \leq x \leq t_1$  we integrate the system in Eqs. (29) and (31) subject to the initial conditions at  $x = 0$  in Eqs. (30) and (32). At  $x = t_1$  we adjoin  $N + 1$  differential equations of the form of Eqs. (33) and (34) for the functions  $J_i(x) = J(t_1, x, r_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , and  $Q(t_1, x)$ ,  $t_1 \leq x \leq t_2$ . The initial conditions at  $x = t_1$  are

$$J_i(t_1) = \frac{\lambda}{4} \left[ 1 + \sum_{m=1}^N R_{mi}(t_1) \frac{w_m}{r_m} \right] \quad (40)$$

and

$$Q(t_1) = 1 + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=1}^N e_m(t_1) \frac{w_m}{r_m}. \quad (41)$$

The right sides are known numerically at this point. At  $x = t_2$  we adjoin  $N + 1$  additional differential equations for the functions  $J(t_2, x, r_1)$ ,  $J(t_2, x, r_2), \dots, J(t_2, x, r_N)$  and  $Q(t_2, x)$  together with the appropriate

initial conditions. On the interval  $t_M \leq x \leq x_{\max}$  the number of ordinary differential equations being integrated is  $N(N+1)/2 + M(N+1)$ . For  $N=7$  and  $M=10$  we integrate numerically 108 simultaneous ordinary differential equations, a reasonable number in 1970.

4. *Numerical Results.* Tables 1 to 4 present calculated values of the function  $Q(t, x)$  for  $\lambda=0.2, 0.6, 0.9$  and  $1.0$  respectively. Figure 1 to 4 are graphs of the function  $Q(t, x)$  for  $\lambda=0.2, 0.6, 0.9$  and  $1.0$ . Figure 5 gives graphs of the maximum value of  $Q(t, x)$ , which occurs at

Table 1  
 $Q(t, x)$  for  $\lambda=0.2$

$t$	$x$	$Q(t, x)$
.005	1	1.0989
.010	↓	1.1013
.500	↓	1.1543
1.000	↓	1.0964
.500	5	1.2009
1.000	↓	1.2256
1.500	↓	1.2365
2.000	↓	1.2413
2.500	↓	1.2427
5.000	↓	1.1178

Table 2  
 $Q(t, x)$  for  $\lambda=0.6$

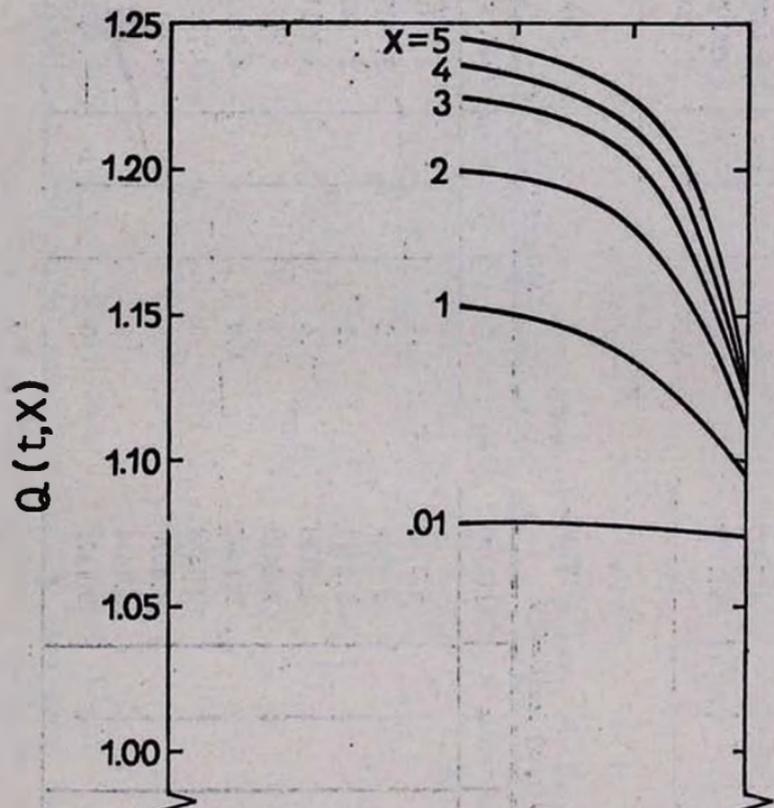
$t$	$x$	$Q(t, x)$
.1	1	1.5181
.2	↓	1.5813
.3	↓	1.6212
.4	↓	1.6436
.5	↓	1.6508
1.00	5	1.3962
2.00	↓	2.3669
2.50	↓	2.3813
3.00	↓	2.3670
3.50	↓	2.3198
5.00	↓	1.5769

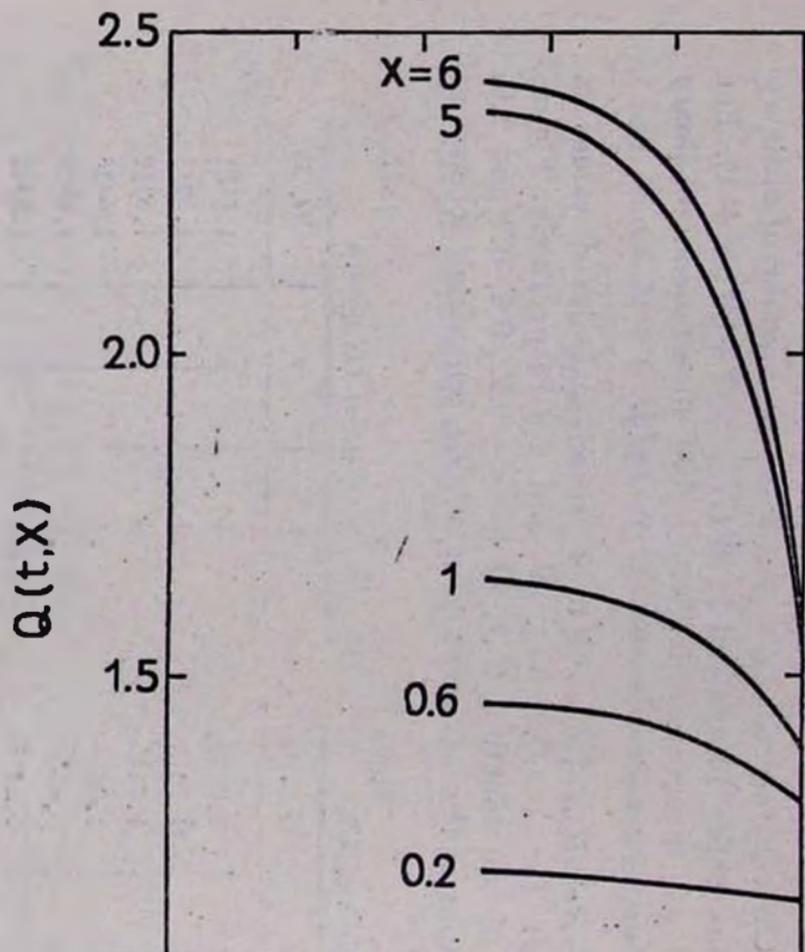
Table 3  
 $Q(t, x)$  for  $\lambda=0.9$

$t$	$x$	$Q(t, x)$
1.000	4	5.3710
2.000	↓	5.9849
3.000	↓	5.3712
3.500	↓	4.5153
4.000	↓	2.8412
.500	5	5.1407
5.000	↓	9.1338
7.000	↓	8.6070
9.500	↓	5.1416
10.000	↓	3.1477

Table 4  
 $Q(t, x)$  for  $\lambda=1.0$

$t$	$x$	$Q(t, x)$
.1	1	2.4019
.2	↓	2.5917
.3	↓	2.7147
.4	↓	2.7851
.5	↓	2.8080
1.0	↓	2.0673
3	10	43.771
5	↓	49.781
6	↓	48.282
10	↓	9.8870





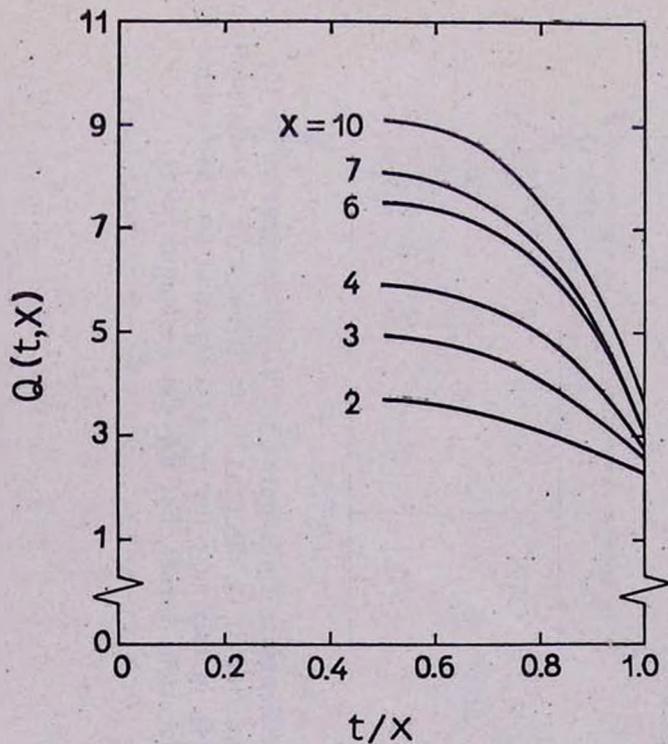


Fig. 3. Graphs of the function  $Q$  for  $\lambda=0.9$ .

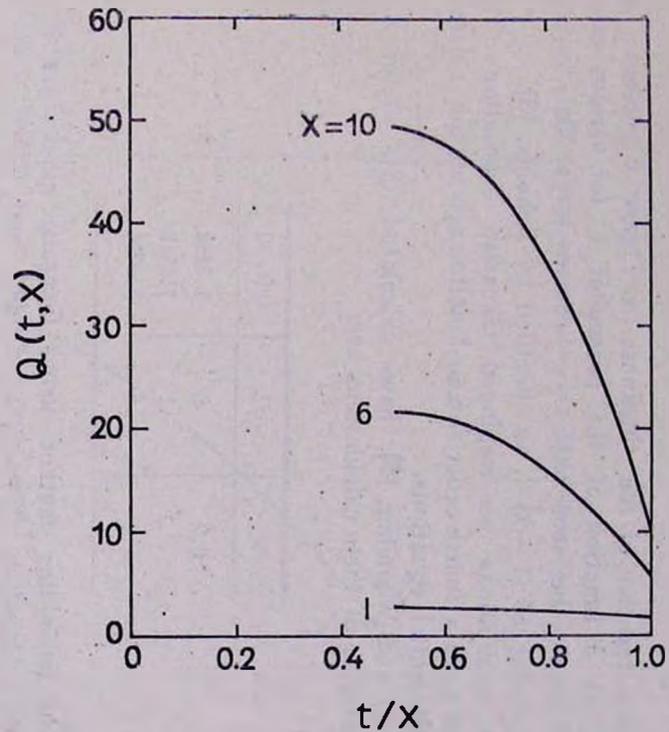


Fig. 4. Graphs of the function  $Q$  for  $\lambda=10$ .

$t/x = 0.5$ , as a function of the thickness  $x$ . Figure 6 presents  $Q_{\max} = Q(x/2, x)$  as a function of the parameter  $\lambda$ , for various values of thickness  $x$ . It can be seen that as  $x$  becomes large,  $Q_{\max}$  approaches the limiting value of  $(1 - \lambda)^{-1}$ , as specified by Sobolev, [3].

In the calculations we employed Gaussian quadrature of orders 7 and 9 and used a fourth order Adams-Moulton scheme for solving the ordinary differential equations.

Heaslett and Warming, [5], have calculated  $Q(t, x)$  for  $\lambda = 1.0$ . Numerical results of their calculations are:

$x$	$t$	$Q(t, x)$
0.2	0	1.2868
	.1	1.3768
1.0	.5	2.8084

The invariant imbedding method using Gaussian quadrature of orders 7 and 9, and integration step sizes of 0.005 and 0.0025 respectively gives, by comparison,

$x$	$t$	Order of Quadrature	$Q(t, x)$
0.2	0	7	1.2864
		9	1.2867
	.1	7	1.3776
		9	1.3761
1.0	.5	7	2.8084
		9	2.8080

5. *Discussion.* Subsequent work will be devoted to the calculation of the function  $Q$  in the case of radiation with a redistribution in frequency [4]. In this case the integral equation for the function  $Q$  retains its displacement kernel, but Eq. (2) no longer holds.

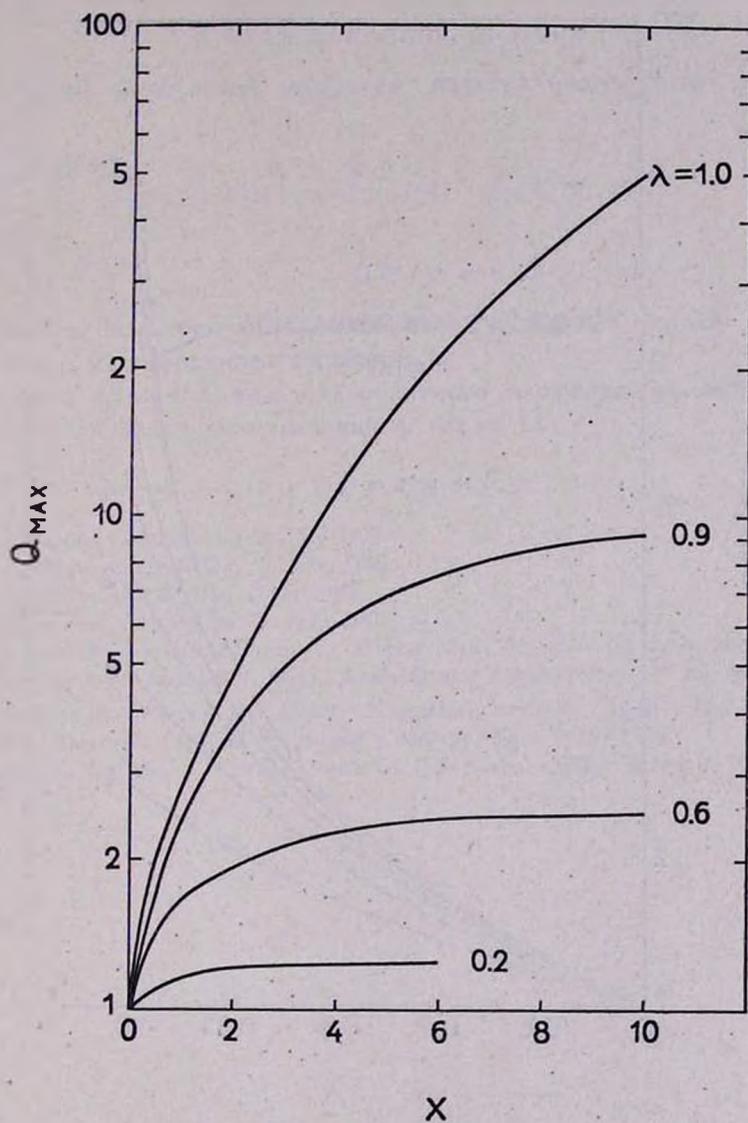


Fig. 5. Graphs of the function  $Q_{\max}$  as a function of  $x$ .

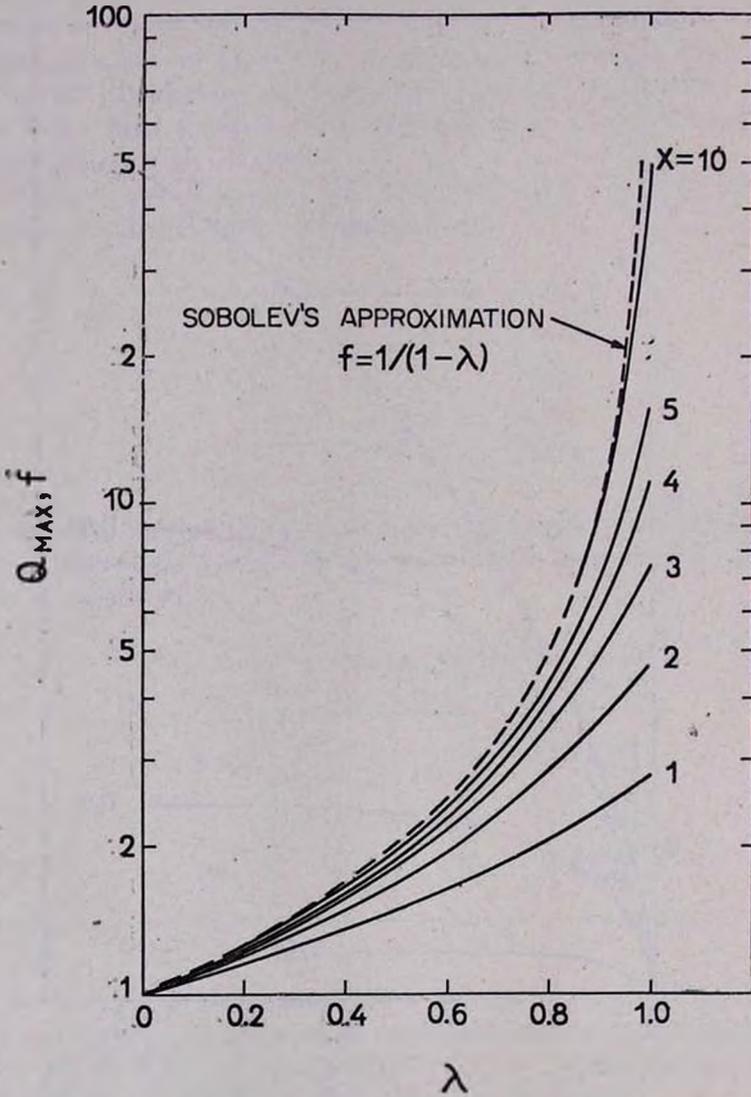


Fig. 6. Graphs of the function  $Q_{\max}$  as a function of  $\lambda$ .

## ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ СОБОЛЕВА Q ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Ж. БЕЛЛ, Р. КАЛАБА, С. УЭНО

Функция  $Q$  является решением интегрального уравнения Фредгольма

$$Q(t, x) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^x E_1(|t-y|) Q(y, x) dy;$$

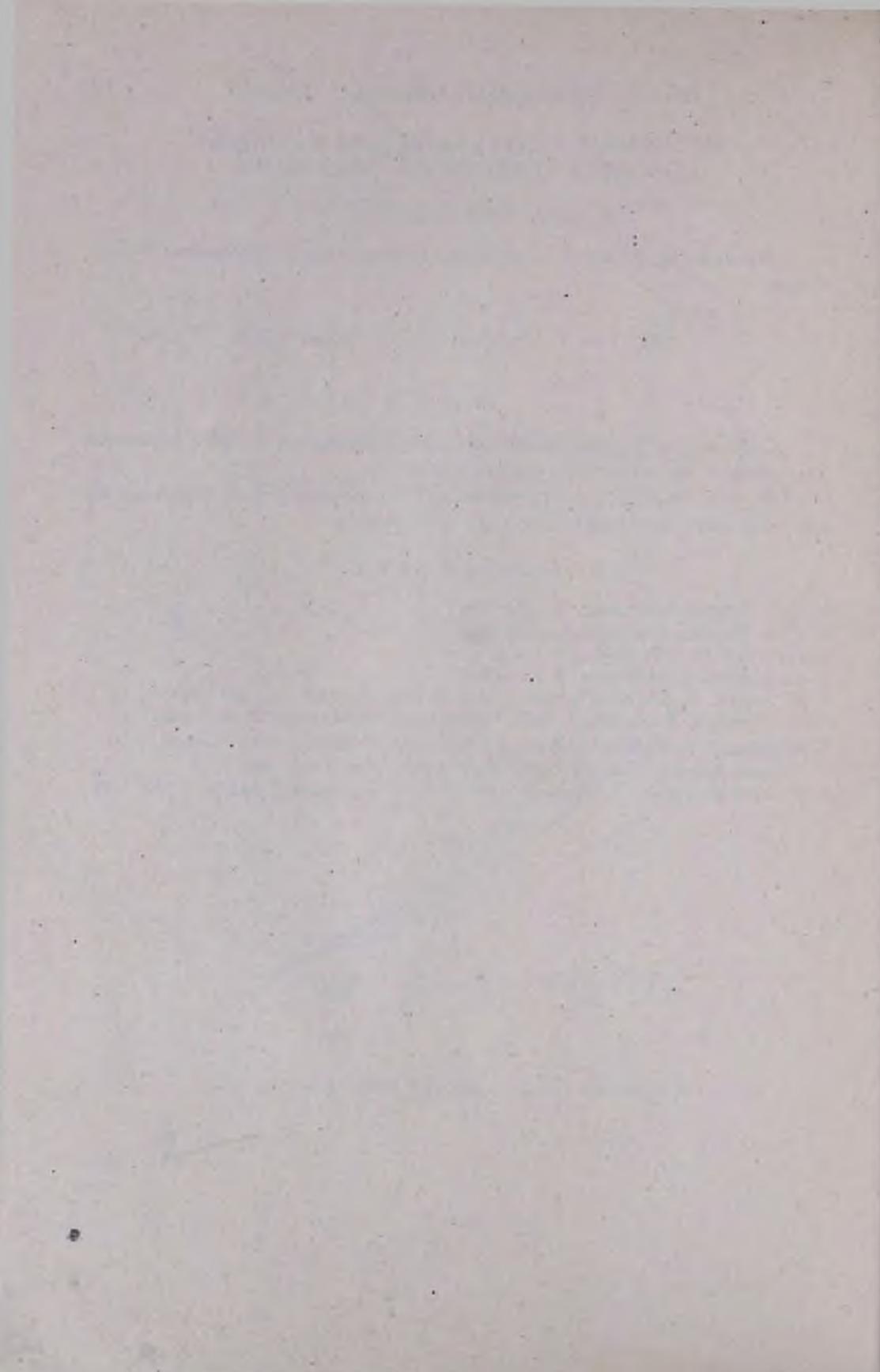
$$0 \leq t \ll x, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Соболев подчеркнул важность этой функции в теории переноса излучения и многократного рассеяния.

В этой статье метод инвариантного вложения был использован для получения численных значений функции  $Q$ .

### R E F E R E N C E S

1. V. V. Sobolev, *Astrofizika*, 2, 135, 1966.
2. V. V. Sobolev, *Astrofizika*, 2, 239, 1966.
3. V. V. Sobolev, *Astrofizika*, 3, 5, 1967.
4. V. V. Sobolev, *Astrofizika*, 3, 137, 1967.
5. M. Heaslet, R. Warming, *Intern. J. of Heat Mass Transfer*, 10, 1413, 1967.
6. H. Kagitwada, R. Kalaba, *J. Math. Analysis and Applications*, 23, 540, 1968.
7. R. Bellman, R. Kalaba, J. Lockoff, *Numerical Inversion of the Laplace Transform*, American Elsevier Publishing Company, New York, 1966.
8. J. Casti, R. Kalaba, S. Ueno, *J. quantit. Spectrosc. radiat. Transfer*, 9, 537, 1969.



ОБРАЗОВАНИЕ ЛИНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ. II. ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ

Х. ДОМКЕ

Поступила 29 января 1970

В рамках модели Милна-Эддингтона рассматривается образование линий в атмосферах звезд при наличии однородного магнитного поля. Считается, что рассеяние происходит с полным перераспределением по частотам. Вводятся скалярные функции источников, зависящие только от оптической глубины. Для них получена система интегральных уравнений типа Винера-Хопфа. В некоторых частных случаях система вырождается в одно уравнение. Путем обобщения метода В. В. Соболева на векторный случай показано, что резольвента системы выражается через обобщенные  $H$ -функции, для которых выводится система нелинейных интегральных уравнений. Через эти функции выражается и выходящее излучение для случая линейной зависимости мощности первичных источников от оптической глубины.

1. *Введение.* В первой статье [1] было рассмотрено рассеяние поляризованного излучения элементарным объемом, находящимся в магнитном поле. В настоящей статье изучается многократное рассеяние излучения в спектральной линии при наличии однородного магнитного поля.

Обычно теория переноса излучения в спектральной линии строится без учета поляризации. Тогда задача об образовании линий сводится к скалярному уравнению переноса, методы решения которого изложены, например, в [2, 3]. При учете поляризации уравнение переноса пишется для вектора Стокса. Векторные уравнения переноса излучения в зеэмановском мультиплете были получены В. Унно [4] и В. Е. Степановым [5] для случая чистого поглощения и В. Е. Степановым [6], Д. Н. Рачковским [7—9] и В. Н. Обридко [10] с учетом рассеяния света. В этих работах непосредственно применялись методы скалярной теории. При учете рассеяния это приводит к довольно гро-

моздким уравнениям. Фигурирующие в них функции зависят от нескольких переменных и не инвариантны при переходе к другой системе представления векторов Стокса.

В [1] было показано, что при некоторых предположениях матрицу рассеяния можно представить в виде суммы диад. Это позволяет ввести инвариантные функции источников, зависящие только от одного переменного. Для них мы получим систему неоднородных интегральных уравнений типа Винера-Хопфа. В некоторых частных случаях, например, если верхний для рассматриваемого перехода уровень не расщепляется под влиянием магнитного поля, система вырождается в одно уравнение, решение которого находится в замкнутой форме. В общем случае получить решение системы в явном виде нельзя. Однако удастся выяснить ряд свойств решений, в частности, для модели атмосферы Милна-Эддингтона выходящее излучение можно выразить через обобщенные Н-функции, определяемые системой нелинейных интегральных уравнений.

Используются обозначения [1], которые, как правило, не поясняются. Ссылки вида (I.24) означают формулу (24) из [1].

2. *Уравнение переноса.* Пусть в плоскопараллельной полубесконечной атмосфере имеются атомы с двумя уровнями. При наличии магнитного поля  $H$  верхний уровень расщепляется на  $2j_u + 1$ , а нижний на  $2j_n + 1$  подуровень. Кроме того имеются поглощение и излучение в непрерывном спектре, не зависящие от частоты в пределах рассматриваемого зеемановского мультиплета. Пусть магнитное поле однородно и образует угол  $\gamma_0$  с внешней нормалью к границе атмосферы. Предположим, что при рассеянии света происходит полное перераспределение по частотам внутри переходов с общим верхним подуровнем, полное перераспределение электронов нижнего состояния по подуровням, а перераспределение электронов по подуровням верхнего состояния отсутствует. Тогда, как установлено в [1], матрица рассеяния имеет вид (I.24)

$$\hat{S}(v, \gamma; v', \gamma') = \sum_{k=-j_n}^{+j_u} i_k C_k \vec{S}_k(v, \gamma) \vec{S}_k^T(v', \gamma'). \quad (1)$$

Здесь  $\vec{S}_k(v, \gamma)$  — характеристический вектор Стокса излучения при переходах электронов с подуровня  $k$  вниз, определенный согласно (I.18), а

$$C_k = \left[ \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} d\omega \vec{J}^T \vec{S}_k(\nu, \gamma) \right]^{-1}, \quad (2)$$

где  $\vec{J}$  — вектор-оператор выделения полной интенсивности [(1.7);  $\gamma$  и  $\gamma'$  — углы, образуемые направлениями соответственно рассеянного и падающего излучения с магнитным полем. Наконец,

$$\vec{S}_k(\nu, \gamma) = \hat{A}(\nu, \gamma) \vec{J}, \quad (3)$$

где  $\hat{A}(\nu, \gamma)$  — оператор поглощения, определяемый формулой (1.9). Вместо  $\hat{A}$ ,  $\vec{S}_k$  и  $C_k$  будем употреблять величины

$$\hat{\alpha}(\nu, \gamma) = \frac{1}{k_L} \hat{A}(\nu, \gamma), \quad (4)$$

$$\vec{s}_k(\nu, \gamma) = \frac{1}{k_L} \vec{S}_k(\nu, \gamma), \quad (5)$$

$$c_k(\nu, \gamma) = k_L C_k(\nu, \gamma), \quad (6)$$

где  $k_L$  — атомный коэффициент поглощения, характеризующий поглощение в зеемановском мультиплете. Будем считать, что при таком определении величины (4), (5) и (6) не зависят от глубины. Явный вид  $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$  пока не конкретизируется. В частности,  $\hat{\alpha}$  может учитывать и эффект Фарадея, т. е. вращение плоскости линейной поляризации в магнитном поле [9].

Вместо геометрической глубины  $h$  введем оптическую глубину в мультиплете

$$\tau = \int_{-\infty}^h nk_L dh',$$

где  $n$  — концентрация поглощающих атомов. Обозначим через  $\mu$  косинус угла, образуемого направлением распространения излучения с внешней нормалью, а через  $\varphi$  — азимут. Уравнение переноса для вектора Стокса  $\vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi)$  имеет при наших предположениях следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) &= [\alpha(\nu, \gamma) + \beta] \bar{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) - \\ &- \sum_{k=-j_a}^{j_a} \lambda_k c_k \bar{s}_k(\nu, \gamma) \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty d\nu' \bar{s}_k^T(\nu', \gamma') \bar{I}(\tau, \nu', \mu', \varphi') - \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=-j_a}^{j_a} \bar{s}_k(\nu, \gamma) g_k(\tau) + \bar{J}g_c(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\beta$  — отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к  $k_L n$  и

$$\cos \gamma = \mu \cos \gamma_0 + \sqrt{1 - \mu^2} \sin \gamma_0 \cos \varphi. \quad (8)$$

Первый член в правой части (7) описывает поглощение излучения атомами в мультиплете и в непрерывном спектре. Вторым членом описывается рассеяние света на атомах, а третьим слагаемым — вклад первичных источников в мультиплете и в непрерывном спектре. Мы будем считать, что

$$\frac{g_k(\tau)}{1 - \lambda_k} = g_c(\tau) = B(T(\tau)), \quad (9)$$

где  $B(T)$  — функция Планка. Это значит, в частности, что переизлучение в непрерывном спектре происходит согласно ЛТР.

К уравнению переноса (7) необходимо добавить граничное условие

$$\begin{aligned} \bar{I}(0, \nu, \mu, \varphi) &= 0, \\ 0 < \mu &\leq 1, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \nu < \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

3. *Функции источников.* Введем скалярные функции источников

$$\begin{aligned} S_k(\tau) &= 2c_k \lambda_k \int_{4\pi} d\nu \int_0^\infty d\omega \bar{s}_k^T(\nu, \gamma) \bar{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) + g_k(\tau), \\ k &= -j_a, -j_a + 1, \dots, j_a - 1, j_a. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку и подынтегральное выражение в (11) представляет собой скалярное произведение двух векторов Стокса,  $S_k(\tau)$  не зависят от

системы представления этих векторов. Если вместо  $\vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi)$  в (11) подставить вектор Стокса планковского излучения  $(1/2) \vec{J}B(T)$ , то при помощи (2), (3) и (9) найдем

$$S_k(\tau) = \left[ c_k^{i,k} \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} d\omega \vec{s}_k^T(\nu, \gamma) \vec{J} + 1 - i_k \right] B(T) = B(T), \quad (12)$$

как и должно быть.

Сведем уравнение переноса (7) с граничным условием (10) к системе интегральных уравнений для функций источников  $S_k(\tau)$ . Учитывая (11), уравнение (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) &= [\hat{\alpha}(\nu, \gamma) + \beta] \vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=-j_n}^{j_n} \vec{s}_k(\nu, \gamma) S_k(\tau) - \frac{1}{2} \vec{J}g_c(\tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Формальное решение этого уравнения при граничном условии (10) есть

$$\begin{aligned} \mu > 0, \quad \vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) &= \int_\tau^\infty \exp\left\{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma) + \beta](\tau' - \tau) \frac{1}{\mu}\right\} \times \\ &\times \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=-j_n}^{j_n} \vec{s}_k(\nu, \gamma) S_k(\tau') + \vec{J}g_c(\tau') \right\} \frac{d\tau'}{\mu}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mu < 0, \quad \vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) &= - \int_0^\tau \exp\left\{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma) + \beta](\tau' - \tau) \frac{1}{\mu}\right\} \times \\ &\times \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=-j_n}^{j_n} \vec{s}_k(\nu, \gamma) S_k(\tau') + \vec{J}g_c(\tau') \right\} \frac{d\tau'}{\mu}. \end{aligned} \quad (15)$$

В частности, для выходящего из среды излучения получаем

$$\begin{aligned} \vec{I}(0, \nu, \mu, \varphi) &= \int_0^\infty \exp\left\{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu}\right\} \times \\ &\times \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=-j_n}^{j_n} \vec{s}_k(\nu, \gamma) S_k(\tau) + \vec{J}g_c(\tau) \right\} \frac{d\tau}{\mu}. \end{aligned} \quad (16)$$

Под выражением  $\exp \left\{ - [\hat{a}(\nu, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu} \right\}$  понимается функция от матрицы в обычном смысле [11]. Предположим, что матрица  $\hat{a}(\nu, \gamma)$  диагонализуется. Пусть  $\lambda_i(\nu, \gamma)$  — ее собственные значения, а  $\vec{\psi}_i(\nu, \gamma)$  — собственные векторы, образующие базисную систему векторного пространства. Если  $\vec{\psi}_i^*(\nu, \gamma)$  биортогональная система, определяемая соотношениями

$$\vec{\psi}_i^{*T}(\nu, \gamma) \vec{\psi}_j(\nu, \gamma) = \delta_{ij}, \quad (17)$$

то оператор  $\exp \left\{ - [\hat{a}(\nu, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu} \right\}$  можно выразить следующим образом:

$$\exp \left\{ - [\hat{a}(\nu, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu} \right\} = \sum_{i=1}^4 \vec{\psi}_i(\nu, \gamma) e^{-[\lambda_i(\nu, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu}} \vec{\psi}_i^{*T}(\nu, \gamma). \quad (18)$$

Отметим, что при отсутствии эффекта Фарадея оператор  $\hat{a}(\nu, \gamma)$  симметричен (I.10), и в этом случае  $\vec{\psi}_i(\nu, \gamma) = \vec{\psi}_i^*(\nu, \gamma)$ . Как легко проверить, при этом только два собственных вектора, скажем,  $\vec{\psi}_1$  и  $\vec{\psi}_2$ , являются настоящими векторами Стокса.

Отметим свойство симметрии оператора  $\hat{a}(\nu, \gamma)$ . Если направление излучения характеризуется параметрами  $\mu$  и  $\varphi$  и образует угол  $\gamma$  с магнитным [полем, то противоположное — параметрами  $-\mu$ ,  $\varphi \pm \pi$ , а согласно (8) угол с  $H$  становится  $\gamma \pm \pi$ . Из явного выражения для оператора  $\hat{a}(\nu, \gamma)$ , приведенного в [9] с учетом эффекта Фарадея, можно вывести, что

$$\hat{a}(\nu, \gamma \pm \pi) = \hat{i} \hat{a}(\nu, \gamma) \hat{i}, \quad (19)$$

где

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Соотношение (19) было впервые отмечено Д. Н. Рачковским [8, 9]. Появление матрицы  $\hat{i}$  объясняется тем, что при замене направления

излучения на противоположное два первых параметра Стокса  $I_1$  и  $I_2$  не меняются, а два последних ( $v$ ,  $u$ ) изменяют знак. Сам же процесс поглощения инвариантен относительно такой замены.

Подставим теперь формальное решение (14) и (15) в определение функций источников (11). Используя свойство симметрии оператора  $\hat{a}(v, \gamma)$ , получаем систему интегральных уравнений

$$S_k(\tau) = \frac{1}{2} \lambda_k \int_0^\infty d\tau' \sum_{l=-j_a}^{j_a} K_{kl}(\beta; |\tau - \tau'|) S_l(\tau') + S_k^*(\tau), \quad (20)$$

$$k = -j_a, \dots, j_a.$$

Здесь

$$K_{kl}(\beta; \tau) = 2c_k \int_0^\infty dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \vec{s}_k^T(v, \gamma) e^{-[\hat{a}(v, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu}} \vec{s}_l(v, \gamma) \quad (21)$$

и

$$S_k^*(\tau) = \frac{1}{2} \lambda_k \beta \int_0^\infty d\tau' L_k(\beta; |\tau - \tau'|) g_c(\tau') + g_k(\tau) \quad (22)$$

известная функция, причем

$$L_k(\beta; \tau) = 2c_k \int_0^\infty dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \vec{s}_k^T(v, \gamma) e^{-[\hat{a}(v, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu}} \vec{j}. \quad (23)$$

Поскольку в выражениях (21) и (23) стоят скалярные произведения векторов Стокса, они не могут быть отрицательными. Эти функции имеют простой вероятностный смысл:  $(\lambda_k/2) K_{kl}(\beta; \tau) d\tau$  есть вероятность того, что квант излучится при разрушении возбуждения  $k$ -го верхнего подуровня и впервые поглотится в плоском слое толщины  $d\tau$ , находящемся на оптическом расстоянии  $\tau$  от места излучения, возбуждая подуровень  $l$  верхнего состояния. Поэтому при отсутствии поглощения в непрерывном спектре ( $\beta = 0$ ) должно иметь место соотношение

$$\int_0^\infty d\tau \sum_{l=-j_a}^{j_a} K_{kl}(0; \tau) = 1.$$

Действительно, его легко доказать, подставляя в  $K_{kl}(0; \tau)$  выражения

(6) и (2) для  $c_k$ , а также (5) и (3) для  $\vec{s}_k(\nu, \gamma)$ . Аналогичным образом функции  $L_k(\beta; \tau)$  описывают взаимодействие между излучением в непрерывном спектре и возбуждениями атомов.

Для частного случая нерасщепленного верхнего уровня ( $j_a = 0$ ) получаем только одно интегральное уравнение вида (20) с ядром

$$K(\beta; \tau) = 2c \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \vec{J}^T \hat{\alpha}^T(\nu, \gamma) \times \quad (24)$$

$$\times \sum_{i=1}^4 \vec{\psi}_i(\nu, \gamma) e^{-[\lambda_i(\nu, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu}} \vec{\psi}_i^* \hat{\alpha}(\nu, \gamma) \vec{J}.$$

При написании (24) использованы соотношения (3), (5) и (18). В случае отсутствия магнитного вращения ядро (24) упрощается еще больше:

$$K(\beta; \tau) = 2c \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^2 \lambda_i^2(\nu, \gamma) e^{-[\lambda_i(\nu, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu}}. \quad (25)$$

Сумма по  $i$  содержит только два члена, поскольку оператор полной интенсивности  $\vec{I}$  выделяет только два собственных вектора  $\vec{\psi}_1(\nu, \gamma)$  и  $\vec{\psi}_2(\nu, \gamma)$ . Аналогично для  $L(\beta; \tau)$  получаем

$$L(\beta; \tau) = 2c \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 \lambda_i(\nu, \gamma) e^{-[\lambda_i(\nu, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu}}. \quad (26)$$

Методы решения скалярного уравнения хорошо известны [2, 3].

4. *Решение системы интегральных уравнений (20)*. Таким образом, наша задача в общем случае, т. е. при расщепленном верхнем уровне, свелась к решению многомерного интегрального уравнения типа Винера-Хопфа. Такие системы подробно изучены И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейнсом [12]. Ими был обобщен метод Винера-Хопфа и доказана возможность факторизации матриц-функций. Мы обобщили развитый для решения скалярного уравнения метод В. В. Соболева [2, 3].

Удобно записать систему (20) компактно в виде  $(2j_u + 1)$ -мерного векторного уравнения. Для этого введем диагональные матрицы

$$\bar{\mathcal{C}} = (c_k \delta_{kl}), \quad \bar{\Lambda} = (\lambda_k \delta_{kl}), \quad (27)$$

затем матрицы

$$\bar{\mathcal{C}}^t(v, \gamma) = (\mathcal{C}_{kl}^t(v, \gamma)) = ([\vec{\psi}_i^{\circ T}(v, \gamma) \cdot \vec{s}_i(v, \gamma)] [s_k^T(v, \gamma) \cdot \vec{\psi}_i(v, \gamma)]), \quad (28)$$

а также векторы

$$\mathcal{C}^t(v, \gamma) = (\mathcal{C}_k^t(v, \gamma)) = ([\vec{\psi}_i^{\circ T}(v, \gamma) \cdot \vec{J}] [s_k^T(v, \gamma) \cdot \vec{\psi}_i(v, \gamma)]). \quad (29)$$

При помощи этих величин ядро  $\bar{\mathfrak{K}}(\beta; \tau) = (K_{kl}(\beta; \tau))$  векторного интегрального уравнения можно записать в виде

$$\bar{\mathfrak{K}}(\beta; \tau) = 2\bar{\mathcal{C}} \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 \bar{\mathcal{C}}^t(v, \gamma) e^{-\frac{\tau}{z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)}}, \quad (30)$$

где

$$z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi) = \frac{\mu}{\lambda_i(v, \gamma) + \beta}. \quad (31)$$

Аналогично  $(L_k)$  записывается как  $(2j_u + 1)$ -мерный вектор

$$\mathfrak{L}(\beta; \tau) = 2\bar{\mathcal{C}} \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 \mathcal{C}^t(v, \gamma) e^{-\frac{\tau}{z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)}}. \quad (32)$$

В результате, система (20) заменяется интегральным уравнением для вектора  $S(\tau) = S_k(\tau)$ :

$$S(\tau) = \frac{1}{2} \bar{\Lambda} \int_0^\infty d\tau' \bar{\mathfrak{K}}(\beta; |\tau - \tau'|) S(\tau') + S^*(\tau), \quad (33)$$

где

$$S^*(\tau) = \frac{1}{2} \beta \bar{\Lambda} \int_0^\infty d\tau' \mathfrak{L}(\beta; |\tau - \tau'|) g_c(\tau') + \mathcal{G}_0 g_c(\tau), \quad (34)$$

а  $\mathcal{G}_0 = (g_{0k}) = (1 - \lambda_k)$ .

Обозначим через  $\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau')$  резольвенту уравнения (33). Через нее решение выражается в виде

$$S(\tau) = \int_0^{\infty} d\tau' \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') S^*(\tau') + S^*(\tau). \quad (35)$$

$\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau')$  — удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') = \frac{1}{2} \Lambda \int_0^{\infty} d\tau'' \tilde{\mathfrak{K}}(\beta; |\tau - \tau''|) \tilde{\Gamma}(\beta; \tau'', \tau') + \frac{1}{2} \Lambda \tilde{\mathfrak{K}}(\beta; |\tau - \tau'|) \quad (36)$$

и

$$\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\tau'' \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau'') \Lambda \tilde{\mathfrak{K}}(\beta; |\tau'' - \tau'|) + \frac{1}{2} \Lambda \tilde{\mathfrak{K}}(\beta; |\tau - \tau'|). \quad (37)$$

Резольвенту можно выразить через функции  $\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, 0)$  и  $\tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau)$ . Дифференцируя (36) по  $\tau'$  и  $\tau$ , получаем, учитывая линейность уравнений (36) и (37),

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau'} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') = \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, 0) \tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau). \quad (38)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') &= \tilde{\Gamma}(\beta; \tau - \tau', 0) + \tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau' - \tau) + \\ &+ \int_0^{\min(\tau', \tau)} d\alpha \tilde{\Gamma}(\beta; \tau - \alpha, 0) \tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau' - \alpha), \end{aligned} \quad (39)$$

где по определению

$$\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, 0) = \tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau) = 0, \text{ если } \tau < 0.$$

Покажем, что  $\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, 0)$  и  $\tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau)$  выражаются через некоторые вспомогательные функции, являющиеся обобщениями Н-функции скалярной теории.

5. *Вспомогательные уравнения.* Имея в виду специальную форму (30) ядра  $\tilde{\mathfrak{K}}(\beta; \tau)$  и линейность интегральных уравнений, рассмотрим следующие вспомогательные уравнения:

$$\tilde{S}(\beta; \tau, z) = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda} \int_0^{\infty} d\tau' \tilde{\mathcal{R}}(\beta; |\tau - \tau'|) \tilde{S}(\beta; \tau', z) + \tilde{E} e^{-\frac{\tau}{z}} \quad (40)$$

и

$$\tilde{S}^+(\beta; \tau, z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\tau' \tilde{S}^+(\beta; \tau', z) \tilde{\Lambda} \tilde{\mathcal{R}}(\beta; |\tau' - \tau|) + \tilde{E}^+ e^{-\frac{\tau}{z}}, \quad (41)$$

где  $\tilde{E}$  — единичная матрица.

Решения этих уравнений выражаем через резольвенту

$$\tilde{S}(\beta; \tau, z) = \int_0^{\infty} d\tau' \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') e^{-\frac{\tau'}{z}} + \tilde{E} e^{-\frac{\tau}{z}}, \quad (42)$$

$$\tilde{S}^+(\beta; \tau, z) = \int_0^{\infty} d\tau' \tilde{\Gamma}(\beta; \tau', \tau) e^{-\frac{\tau'}{z}} + \tilde{E} e^{-\frac{\tau}{z}}. \quad (43)$$

$\tilde{S}(\beta; \tau, z)$  и  $\tilde{S}^+(\beta; \tau, z)$  — по существу являются преобразованиями Лапласа от резольвенты по одному из аргументов. В частности,

$$\tilde{S}(\beta; 0, z) = \int_0^{\infty} d\tau' \tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau') e^{-\frac{\tau'}{z}} + \tilde{E} \equiv \tilde{\mathfrak{F}}(\beta; z), \quad (44)$$

$$\tilde{S}^+(\beta; 0, z) = \int_0^{\infty} d\tau' \tilde{\Gamma}(\beta; \tau', 0) e^{-\frac{\tau'}{z}} + \tilde{E} \equiv \tilde{\mathfrak{F}}^+(\beta; z). \quad (45)$$

Эти соотношения показывают, что если найти  $\tilde{\mathfrak{F}}(\beta; z)$  и  $\tilde{\mathfrak{F}}^+(\beta; z)$ , то путем обращения преобразования Лапласа можно получить  $\tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau)$  и  $\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, 0)$ , а тем самым резольвенту  $\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau')$ . В частности, через  $\tilde{\mathfrak{F}}$  и  $\tilde{\mathfrak{F}}^+$  выражается и выходящее излучение.

Выведем нелинейное интегральное уравнение для  $\tilde{\mathfrak{F}}(\beta; z)$  и  $\tilde{\mathfrak{F}}^+(\beta; z)$ . Для этого умножим уравнение (38) на  $e^{-\left(\frac{\tau}{z} + \frac{\tau'}{z'}\right)}$  и проинтегрируем по  $\tau$  и  $\tau'$  от 0 до  $\infty$ . Тогда, интегрируя по частям и учитывая формулы (42)–(45), получим

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{R}}(z, z') &= \int_0^{\infty} d\tau e^{-\frac{\tau}{z}} \bar{\mathfrak{S}}(\beta; \tau, z) = \int_0^{\infty} d\tau e^{-\frac{\tau}{z'}} \bar{\mathfrak{S}}^+(\beta; \tau, z') = \\ &= \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} \right)^{-1} \bar{\mathfrak{F}}^+(\beta; z') \bar{\mathfrak{F}}(\beta; z). \end{aligned} \quad (46)$$

Из формул (37) и (41) следует

$$\bar{\Gamma}(\beta; 0, \tau) = \frac{1}{2} \bar{\Lambda} \bar{\mathfrak{C}} \int_0^{\infty} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{l=1}^4 2\bar{\mathfrak{C}}^l(v, \tau) \bar{\mathfrak{S}}^+(\beta; \tau, z_l(\beta; v, \mu, \varphi)). \quad (47)$$

Подставляя это в уравнение (44), при помощи (46) получаем искомое нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{F}}(\beta; z) &= \bar{\mathfrak{E}} + \frac{1}{2} \bar{\Lambda} \bar{\mathfrak{C}} \int_0^{\infty} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{l=1}^4 2\bar{\mathfrak{C}}^l(v, \tau) \times \\ &\times \frac{\bar{\mathfrak{F}}^+(\beta; z_l(\beta; v, \mu, \varphi))}{z^{-1} + z_l^{-1}(\beta; v, \mu, \varphi)} \bar{\mathfrak{F}}(\beta; z). \end{aligned} \quad (48)$$

Аналогично получаем, используя (36), (40) и (46)

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{F}}^+(\beta; z) &= \bar{\mathfrak{E}} + \frac{1}{2} \bar{\mathfrak{F}}^+(\beta; z) \int_0^{\infty} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{l=1}^4 \frac{\bar{\mathfrak{F}}(\beta; z_l(\beta; v, \mu, \varphi))}{z^{-1} + z_l^{-1}(\beta; v, \mu, \varphi)} \times \\ &\times \bar{\Lambda} \bar{\mathfrak{C}} 2\bar{\mathfrak{C}}^l(v, \tau). \end{aligned} \quad (49)$$

Матрицы  $\bar{\mathfrak{F}}(\beta; z)$  и  $\bar{\mathfrak{F}}^+(\beta; z)$  являются обобщенными Н-функциями Чандрасекара [13]. В случае  $j_a = 0$  это две равные скалярные функции Н( $\beta; z$ ). В общем случае при симметричном операторе поглощения  $\hat{a}$  имеется простая связь между ними. Учтя диагональность матриц  $\bar{\mathfrak{C}}$  и  $\bar{\Lambda}$  и симметричность матриц  $\bar{\mathfrak{C}}^l(v, \tau)$ , при помощи уравнений (48) и (49) легко убедиться в том, что

$$\bar{\Lambda} \bar{\mathfrak{C}} \bar{\mathfrak{F}}^{+T}(\beta; z) = \bar{\mathfrak{F}}(\beta; z) \bar{\Lambda} \bar{\mathfrak{C}}. \quad (50)$$

Рассмотрим более подробно случай нерасщепленного верхнего уровня. Тогда все уравнения становятся одномерными, как в теории

без учета поляризации и магнитного поля. Хотя ядро  $\tilde{K}(\beta; \tau)$  в нашем случае имеет более сложный вид, оно сохраняет все существенные свойства, которые позволяют найти решение задачи в замкнутом виде. Отметим, в частности, что для  $H(\beta; z)$  справедлива формула [3]

$$\ln H(\beta; z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln [1 - \lambda V(u; \beta)] \frac{z du}{z^2 u^2 + 1}, \quad (51)$$

где

$$V(u; \beta) = \int_0^{\infty} d\tau K(\beta; \tau) \cos u\tau. \quad (52)$$

При отсутствии эффекта Фарадея для  $V(u; \beta)$  получаем из (52) и (25)

$$V(u; \beta) = 2c \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i^2(\nu, \gamma) z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)}{1 + u^2 z_i^2(\beta; \nu, \mu, \varphi)}. \quad (53)$$

Найти решение в общем случае ( $j_n \neq 0$ ) в замкнутом виде не удастся.

В дальнейшем нам потребуются моменты матриц  $\tilde{\Phi}$ -функций, определенные следующим образом:

$$\tilde{h}_n(\beta) = \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 z_i^{n+1}(\beta; \nu, \mu, \varphi) \tilde{\Phi}(\beta; z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)) \tilde{\Lambda} \tilde{\mathcal{C}} 2 \tilde{\mathcal{C}}'(\nu, \gamma) \quad (54)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n^+(\beta) &= \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 z_i^{n+1}(\beta; \nu, \mu, \varphi) \tilde{\mathcal{C}} \times \\ &\times 2 \tilde{\mathcal{C}}'(\nu, \gamma) \tilde{\Phi}^+(\beta; z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)). \end{aligned} \quad (55)$$

Через них выражается, например,  $\tilde{\Phi}(\beta; \infty)$ , а именно:

$$\tilde{\Phi}(\beta; \infty) = \left[ E - \frac{1}{2} \tilde{\Lambda} \tilde{h}_0^+(\beta) \right]^{-1}. \quad (56)$$

Последнее соотношение легко получить из нелинейного интегрального уравнения (48).

6. *Выходящее излучение.* Теперь применим развитую выше теорию к задаче об образовании линий в атмосфере. Для этого перепишем выражение (16) для вектора Стокса выходящего излучения при помощи (18) в виде

$$\vec{I}(0, \nu, \mu, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \vec{\psi}_l(\nu, \gamma) \frac{1}{\mu} \left\{ \sum_{k=-j_n}^{j_n} a_{lk}(\nu, \gamma) \int_0^{\infty} d\tau e^{-\frac{\tau}{z_l(\beta; \nu, \mu, \varphi)}} \times \right. \\ \left. \times S_k(\tau) + \beta a_{lc}(\nu, \gamma) \int_0^{\infty} d\tau e^{-\frac{\tau}{z_l(\beta; \nu, \mu, \varphi)}} g_c(\tau) \right\}, \quad (57)$$

где

$$a_{lk}(\nu, \gamma) = \vec{\psi}_l^* T(\nu, \gamma) \vec{s}_k(\nu, \gamma), \quad (58)$$

$$a_{lc}(\nu, \gamma) = \vec{\psi}_l^* T(\nu, \gamma) \vec{J}. \quad (59)$$

Формулу (57) представим при помощи вектор-функции

$$\mathfrak{R}(z) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} S(\tau) d\tau, \quad (60)$$

скалярной функции

$$R_c(z) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} g_c(\tau) d\tau \quad (61)$$

и вектора  $\mathfrak{R}_l(\nu, \gamma) = (a_{lk}(\nu, \gamma))$  в следующем виде:

$$\vec{I}(0, \nu, \mu, \varphi) = \frac{1}{2\mu} \sum_{l=1}^4 \vec{\psi}_l(\nu, \gamma) \{ \mathfrak{R}_l^T(\nu, \gamma) \mathfrak{R}(z_l(\beta; \nu, \mu, \varphi)) + \\ + \beta a_{lc}(\nu, \gamma) R_c(z_l(\beta; \nu, \mu, \varphi)) \}. \quad (62)$$

Найдем вектор  $\mathfrak{R}(z)$ . Для этого рассмотрим вначале вспомогательный случай матрицы функций первичных источников

$$\tilde{S}^* \left( \tau, \frac{1}{m} \right) = \tilde{E} e^{-m\tau}. \quad (63)$$

Ясно, что матрицей функций источников является тогда  $\tilde{S}(\beta; \tau, 1/m)$ . Из (46) следует, что матрица

$$\tilde{\mathfrak{R}}\left(z, \frac{1}{m}\right) = \int_0^{\infty} d\tau e^{-\frac{\tau}{z}} \tilde{S}\left(\beta; \tau, \frac{1}{m}\right) = z \frac{\tilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z) \tilde{\mathfrak{H}}\left(\beta; \frac{1}{m}\right)}{1 + mz}. \quad (64)$$

В частности, для  $\tilde{S}^*(\tau) = \tilde{E}$  получаем

$$\tilde{\mathfrak{R}}(z, \infty) = z \tilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z) \tilde{\mathfrak{H}}(\beta; \infty) = \tilde{\mathfrak{R}}_0(z). \quad (65)$$

Рассмотрим еще случай

$$\tilde{S}_1^*(\tau) = \tilde{E}\tau. \quad (66)$$

Поскольку

$$\tilde{S}_1^*(\tau) = -\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m} \tilde{S}^*\left(\tau, \frac{1}{m}\right), \quad (67)$$

то в силу линейности нашей системы

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{R}}_1(z) &= -\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m} \tilde{\mathfrak{R}}\left(z, \frac{1}{m}\right) = \\ &= z \tilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z) \left\{ z + \tilde{\mathfrak{H}}(\beta; \infty) \frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{H}}_1^+(\beta) \right\} \tilde{\mathfrak{H}}(\beta; \infty). \end{aligned} \quad (68)$$

При получении производной по  $m$  от матрицы  $\tilde{\mathfrak{H}}(\beta; 1/m)$  было использовано уравнение (48).

Предположим, что источники в непрерывном спектре представляются линейной функцией оптической глубины, т. е.

$$g_e(\tau) = B_0(1 + b\tau). \quad (69)$$

Тогда из (34) следует

$$\begin{aligned} S^*(\tau) &= B_0 \left\{ (1 + b\tau) \mathfrak{G}_1(\beta) + \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 e^{-\frac{\tau}{z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathfrak{G}_2'(\beta; \nu, \mu, \varphi) \right\}, \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\mathfrak{G}_1(\beta) = 2\beta \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi) \tilde{\Delta} \tilde{\mathfrak{G}}^i(\nu, \gamma) + \mathfrak{G}_0 \quad (71)$$

и

$$\mathcal{G}_2'(\beta; \nu, \mu, \varphi) = \beta z_l(\beta; \nu, \mu, \varphi) (bz_l(\beta; \nu, \mu, \varphi) - 1) \bar{\Lambda} \bar{\mathcal{G}} \bar{\mathcal{G}}'(\nu, \gamma). \quad (72)$$

Функция  $\mathfrak{R}(z)$  выражается поэтому через  $\bar{\mathfrak{R}}(z, 1/m)$ ,  $\bar{\mathfrak{R}}_0(z)$  и  $\bar{\mathfrak{R}}_1(z)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(z) = B_0 \left\{ (\bar{\mathfrak{R}}_0(z) + b\bar{\mathfrak{R}}_1(z)) \mathcal{G}_1(\beta) + \right. \\ \left. + \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{l=1}^4 \mathfrak{R}(z; z_l(\beta; \nu, \gamma)) \mathcal{G}_2'(\beta; \nu, \mu, \varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (73)$$

Скалярная же функция  $R_c(z)$  дает выражение для выходящего излучения при отсутствии рассеяния. Для нее имеем

$$R_c(z) = B_0 z (1 + bz). \quad (74)$$

Таким образом, все функции, входящие в формулу (62), нами найдены. Подобным образом можно выразить выходящее излучение через обобщенные Н-функции и в более сложных случаях зависимости первичных источников от глубины, а именно, если  $g_c(\tau)$  есть произведение полиномов от  $\tau$  на экспоненту, но мы на этом не будем останавливаться.

Рассмотрим опять случай нерасщепленного верхнего уровня ( $j_a = 0$ ). Если не учитывать эффект Фарадея, то величины (58) и (59) становятся равными

$$a_l(\nu, \gamma) = \vec{\psi}_l^T(\nu, \gamma) \vec{s}(\nu, \gamma) = (\vec{\psi}_l^T(\nu, \gamma) \hat{a}(\nu, \gamma) \vec{j}), \quad (75)$$

$$a_l(\nu, \gamma) = \begin{cases} \lambda_l(\nu, \gamma), & i = 1, 2 \\ 0 & i = 3, 4, \end{cases}$$

а

$$a_{ic}(\nu, \gamma) = \vec{\psi}_l(\nu, \mu, \varphi) \vec{I} = \begin{cases} 1, & i = 1, 2 \\ 0, & i = 3, 4. \end{cases} \quad (76)$$

Для выходящего излучения получаем тогда согласно (62)

$$\begin{aligned} \vec{I}(0, \nu, \mu, \varphi) = \frac{1}{2\mu} \sum_{l=1}^2 \vec{\psi}_l(\nu, \gamma) \times \\ \times \{R(z_l(\beta; \nu, \mu, \varphi)) \lambda_l(\nu, \gamma) + \beta R_c(z_l(\beta; \nu, \mu, \varphi))\}, \end{aligned} \quad (77)$$

где

$$R(z) = B_0 z H(\beta; z) \left\{ \left[ 1 + H(\beta; \infty) \frac{1}{2} \lambda h_1(\beta) + z \right] H(\beta; \infty) G_1(\beta) + \right. \\ \left. + \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^2 \frac{H(\beta; z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi))}{z + z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)} z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi) G_2'(\beta) \right\}, \quad (78)$$

$$G_1(\beta) = \beta \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^2 2i c z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi) \lambda_i(\nu, \mu, \varphi) + (1 - \lambda), \quad (79)$$

$$G_2'(\beta; \nu, \mu, \varphi) = \beta i c i_i(\nu, \mu, \varphi) [b z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi) - 1]. \quad (80)$$

Отметим, что в этом частном случае выходящее излучение представляется линейной комбинацией только двух ортогональных векторов  $\vec{\psi}_1(\nu, \gamma)$  и  $\vec{\psi}_2(\nu, \gamma)$ . Два других собственных вектора оператора поглощения  $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$  не входят ни в одну функцию, характеризующую поле излучения. Этот факт показывает, что теорию можно с самого начала построить на основе этих двух ортогонально поляризованных лучей света, что было сделано В. Е. Степановым [6]. Ясно также, что такой подход в общем случае неправилен.

В заключение отметим, что наши результаты включают и случай монохроматического рассеяния. Для перехода к нему нужно во все интегралы по частоте ввести  $\delta$ -функцию Дирака,  $\delta(\nu' - \nu)$ , где  $\nu$  — рассматриваемая частота (см. [1]). При полном перераспределении электронов по подуровням верхнего состояния атомов теория формально совпадает с частным случаем  $j_n = 0$  развитой выше теории, только оператор поглощения  $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$  имеет тогда более сложную зависимость от частоты (см. также [1]).

Таким образом, мы получили решение задачи об образовании линий при наличии магнитного поля для нескольких моделей рассеяния света на атомах. При этом поведение поля поляризованного излучения описывалось при помощи скалярных функций источников, зависящих только от одной переменной и имеющих простой физический смысл.

В следующей части работы будут приведены результаты численных расчетов, выполненных на основе развитой выше теории.

LINE FORMATION IN THE PRESENCE OF MAGNETIC FIELD.  
II. SOURCE FUNCTIONS

H. DOMKE

Theory of line formation in Milne-Eddington model atmospheres with homogeneous magnetic field is developed. Complete frequency redistribution upon scattering is taken into account. Scalar source functions are introduced depending only on optical depth. For these functions coupled integral equations of Wiener-Hopf type are derived. In special cases these equations degenerate to one equation. The resolvent of the coupled equations may be found in terms of generalized H-functions by generalizing Sobolev's method to vectorial case. For the generalized H-functions coupled nonlinear integral equations are found. The emergent radiation is found in terms of these H-functions for the case of the energy output of primary sources linearly increasing with the optical depth.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. X. Домке, *Астрофизика*, 5, 521, 1969.
2. В. В. Соболев, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, Гостехиздат, М., 1956.
3. В. В. Иванов, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, Наука, М., 1969.
4. W. Улло, *P.A.S. Jарап*, 8, 108, 1956.
5. В. Е. Степанов, *Изв. КрАО*, 18, 136, 1958.
6. В. Е. Степанов, *Изв. КрАО*, 19, 20, 1958.
7. Д. Н. Рачковский, *Изв. КрАО*, 30, 267, 1963.
8. Д. Н. Рачковский, *Изв. КрАО*, 36, 9, 1967.
9. Д. Н. Рачковский, *Изв. КрАО*, 37, 56, 1967.
10. В. Н. Обридко, *Астрон. ж.*, 42, 502, 1965.
11. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Гостехиздат, М., 1953.
12. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *УМН*, 13, 3, 1958.
13. S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*, Oxford, 1950.

ОБ ИЗМЕНЕНИЯХ БЛЕСКА ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ  
ЗВЕЗД-КАРЛИКОВ

В. Г. ГОРБАЦКИЙ

Поступила 18 июня 1970

Рассматривается влияние газовых потоков в тесных двойных системах звезд-карликов на наблюдаемые кривые блеска. Вычислен профиль „горба“ на кривой блеска, предшествующего главному минимуму. Путем сравнения наблюдаемого „горба“ с рассчитанным оценена оптическая толщина излучающего слоя в дискообразных оболочках VV Pup и U Gem. Показано, что флуктуации блеска в этих системах могут быть вызваны неоднородностью турбулентной газовой струи, сталкивающейся с оболочкой.

В тесных системах звезд-карликов, к которым относятся, в частности, повторные новые звезды и звезды типа U Близнецов, существуют мощные газовые потоки. Вблизи звезд газовыми потоками формируются дискообразные оболочки. Различные эффекты, связанные с этими потоками, исследованы в работах [1, 2]. Здесь более детально рассмотрено влияние взаимодействия потоков с оболочкой главной звезды на изменения блеска системы.

1. *Излучение нагретой области оболочки („горячего пятна“).* У многих тесных двойных систем, наблюдающихся как затменные переменные, кривая блеска асимметрична относительно главного минимума, причем блеск до минимума больше, чем после него. Подобная асимметрия была интерпретирована как следствие существования в оболочке затмеваемой звезды интенсивно излучающей области—„горячего пятна“, расположенной вблизи прямой, соединяющей центры компонент [1]. Форма кривой блеска зависит от состояния вещества в горячем пятне. Рассмотрим простую модель горячего пятна и найдем, как меняется испускаемое им излучение в зависимости от фазы.

Предположим, что оболочка (в плоскости которой лежит луч зрения) представляет собой цилиндрический слой радиуса  $R_0$  и высоты  $2b$ . Нагретую действием падающей на оболочку струи область оболочки будем считать прямоугольным параллелепипедом, стороны которого  $2a$  и  $2b$  ( $a \ll R_0$ ) и высота  $2h$  ( $h \ll a$ ). Пусть  $\alpha$  и  $\varepsilon$  — коэффициенты излучения и поглощения в этой области соответственно, а через  $\varphi$  обозначим угол между направлением из центра оболочки на центр пятна и лучом зрения. Выбрав систему координат с началом в центре пятна и осью  $ou$ , направленной к наблюдателю (рис. 1), для

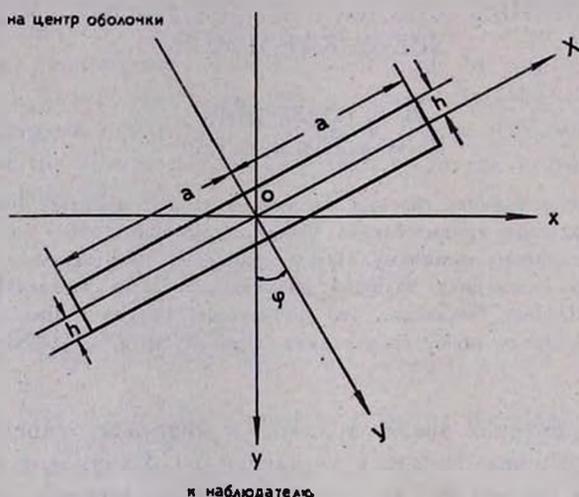


Рис. 1. Схематическое представление нагретой области („горячего пятна“).

интенсивности излучения  $I$ , выходящего из пятна в направлении  $ou$ , имеем выражение (предполагая, что в оболочке вне пятна  $\alpha = \infty$ )

$$I(\varphi) = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \varepsilon(X, Y) e^{-\int_y^{y_2} \alpha(X; Y) dy} dy \right\} 2b dx, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} X &= x \cos \varphi - y \sin \varphi; & Y &= x \sin \varphi + y \cos \varphi; \\ x_1 &= -a \cos \varphi + h \sin \varphi; & x_2 &= a \cos \varphi + h \sin \varphi; \end{aligned}$$

$$y_1 = \begin{cases} \frac{-x \sin \varphi - h}{\cos \varphi} & \text{при } 0 \leq |x| \leq a \cos \varphi - h \sin \varphi; \\ -x \operatorname{tg} \varphi - \frac{a}{\sin \varphi} + \frac{x}{\cos \varphi \sin \varphi} & \text{при } a \cos \varphi - h \sin \varphi < x \leq \\ & \leq a \cos \varphi + h \sin \varphi; \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{h - x \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

При постоянстве величин  $\varepsilon$  и  $a$  в слое получаем из (1) простое приближенное выражение

$$I(\varphi) = 4 \frac{\varepsilon}{a} ab \cos \varphi \left[ 1 - e^{-\frac{\tau_0}{\cos \varphi}} \right], \quad (2)$$

пригодное при  $0 \leq \varphi \leq \arccos(h/a)$ . Через  $\tau_0$  здесь обозначена оптическая толщина слоя.

В предельном случае, когда  $\tau_0 \gg 1$ ,  $I \sim \cos \varphi$ . Если же  $\tau_0 \ll 1$ , то  $I(\varphi) \approx \text{const}$  при  $\varphi \ll \arccos \tau_0$  и  $I \sim \cos \varphi$  при  $\arccos \tau_0 \lesssim \varphi < \arccos(h/a)$ .

Вследствие различия между блеском звезды в эпоху видимости излучения пятна и блеском в период, когда пятно находится на противоположной по отношению к наблюдателю стороне оболочки, возникает „горб“ на кривой блеска. Высота „горба“ определяется величиной отношения  $[I_* + I(0)]/I_* \equiv 1/k$ , где  $I_*$  — интенсивность излучения звезды при отсутствии горячего пятна.

При известной высоте горба  $A = m_{\max} - m_{\min}$  его форма описывается следующей зависимостью звездной величины  $m$  от угла фазы  $\varphi$ :

$$m = m_{\max} - 2.5 \lg \left[ (1 - k) \frac{\left( 1 - e^{-\frac{\tau_0}{\cos \varphi}} \right) \cos \varphi}{1 - e^{-\tau_0}} + k \right], \quad (3)$$

где

$$k = 10^{0.4A}.$$

Обращаясь к наблюдениям, видим, что форма очень выдающегося „горба“ на кривой блеска звезды VV Pup [3] хорошо описывается формулой (3) при  $\tau_0 = 0.3$  (рис. 2), а кривая блеска звезды U Близнецов [4] соответствует значению  $\tau_0 = 3$  (рис. 3).

Поскольку наблюдаемая продолжительность интервала повышенного блеска не превосходит половины периода, то размеры светя-

щейся области должны быть существенно меньшими, чем радиус оболочки, то есть условие  $a \ll R_0$  выполняется. По-видимому, рассмотренная простая модель горячего пятна может в первом приближении представить структуру разогретой области оболочки. Для точного определения физических условий в пятне по кривой блеска требуются гораздо более полные наблюдательные данные, притом для различных областей спектра. Пока по имеющимся данным о кривых блеска тесных двойных систем звезд-карликов и, в частности, звезд типа U Близнецов вблизи затмения можно сказать, что оптическая толщина нагретого струей слоя порядка единицы или еще меньше.

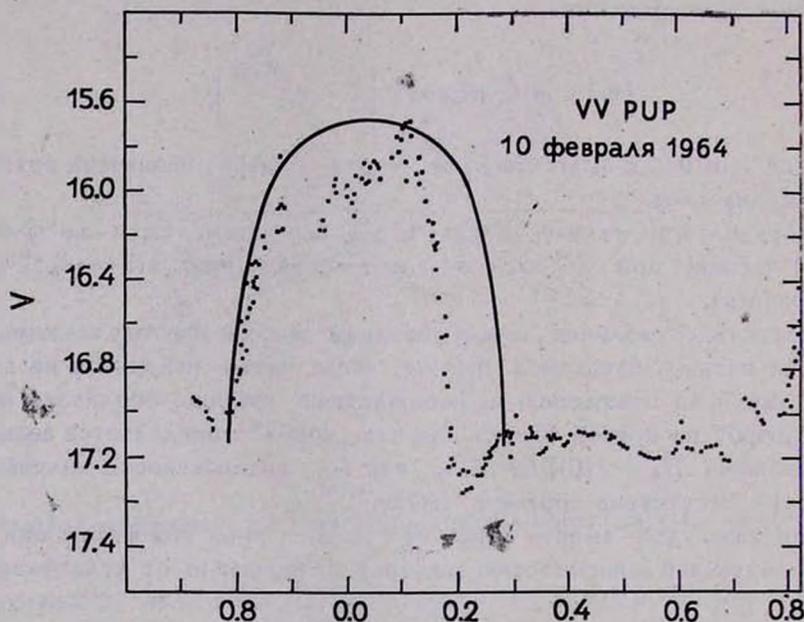


Рис. 2. Кривая блеска VV Pup (по [3]); сплошной линией изображена теоретическая кривая, соответствующая  $\tau_0 = 0.3$ .

Мощность газового потока, нагревающего оболочку, оценивалась ранее по вкладу горячего пятна в общее излучение системы [1]. Однако при этом учитывалось лишь излучение в видимой области спектра. Проведенные позже расчеты распределения энергии в спектре излучения оптически тонкого слоя газа, нагретого ударной волной [2], показали, что энергия, испускаемая в невидимой ультрафиолетовой области спектра  $E_{UV}$ , превышает видимое излучение  $E_V$ . Отношение  $E_{UV}/E_V$  зависит от скорости убывания температуры вследствие высвечивания газа за фронтом ударной волны. Эта скорость характери-

зается параметром  $\mu$ . Значение  $\mu$  было оценено для горячего пятна в двух затменных системах по наблюдаемым цветам U—V и V—V в разных фазах. К сожалению, в использованных формулах (формулы (26) в работе [2]) не был учтен нуль-пункт системы UBV, принимаемый наблюдателями. В правой части первой из этих формул должен стоять множитель  $k_1 \approx 3$ , а во второй формуле—множитель  $k_2 \approx 0.4$ . Исправленное значение  $\mu$  составляет для U Близнецов около 0.5, а для UX Большой Медведицы получается, что  $\mu \approx 0$ .

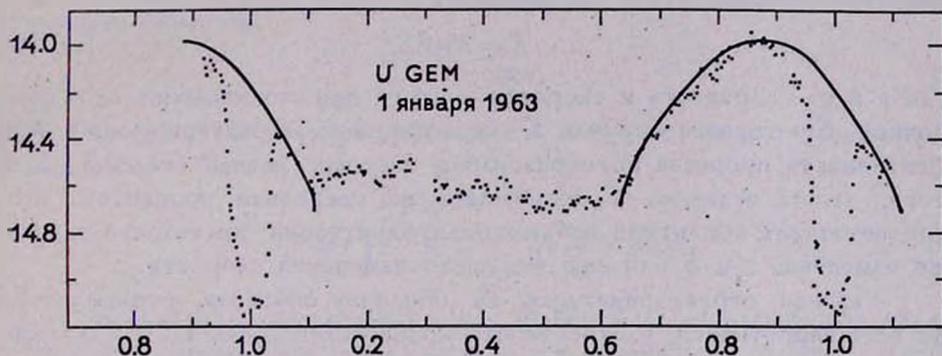


Рис. 3. Кривая блеска U Gem (по [4]); сплошной линией изображена теоретическая кривая, соответствующая  $\tau_0=3$ .

Если излучающая область оптически тонкая, то при  $\mu = 0.5$  невидимое излучение  $E_{UV}$  на порядок превышает видимое. Горячее пятно в оболочке звезды U Близнецов излучает в видимой области спектра около  $10^{31}$  эрг/сек (при значении абсолютной величины системы  $M_V = 9^m 5$ ) и поэтому общее излучение его близко к  $10^{32}$  эрг/сек. При условии, что вся излучаемая горячим пятном энергия возникла за счет кинетической энергии газовой струи, скорость в которой порядка  $10^8$  см/сек, расход массы в струе  $Q$  составляет приблизительно  $10^{16}$  г/сек  $\approx 10^{-10} M_{\odot}/год$ . Предполагая излучающую область непрозрачной для коротковолнового излучения, что вполне возможно, поскольку оптическая толщина  $\tau$  в видимой части спектра порядка единицы, мы должны получить для  $Q$  меньшее значение. Однако величина  $Q$  не может быть существенно меньше, чем  $10^{15}$  г/сек.

2. О природе флуктуаций блеска. Флуктуации блеска с характерным временем от десятков секунд до десятков минут и характерным масштабом от нескольких сотых до нескольких десятых звездных величин характерны для всех тесных двойных систем звезд-карликов (см., например [3, 5]). Как уже отмечалось, энергия, обусловленная

нагревом дискообразной оболочки в такой системе газовой струей, вносит существенный вклад в общее излучение. В частности, у системы U Близицево в период, когда горячее пятно находится на видимой стороне оболочки, блеск почти вдвое больше, чем в фазах, когда нагретая область невидима. Всякие изменения в скорости или плотности струи должны сказываться на энергии, вносимой ею в оболочку и, следовательно, на свечении системы.

Излучение, возникающее при преобразовании кинетической энергии струи, определяется выражением

$$E = K\rho v^3 S, \quad (4)$$

где  $\rho$  и  $v$  — плотность и скорость в струе при столкновении ее с оболочкой,  $S$  — сечение струи и  $K$  — коэффициент, характеризующий эффективность процесса преобразования энергии, равный 0.2—0.3. Для того, чтобы величина  $E$  изменилась на несколько процентов, что соответствует амплитуде наблюдаемых флуктуаций, достаточно такого же изменения  $\rho$  и  $S$  или еще меньшего изменения скорости.

Газовая струя, падающая на оболочку спутника, формируется, по всей вероятности, в окрестности критической точки  $L_1$ . Продолжительность фазы затмения спутником в системе U Близицево невелика и, соответственно, радиус спутника существенно меньше расстояния до главной звезды. Нет достаточных оснований для предположения о том, что в этой системе, как и в других подобного типа, спутник заполняет внутреннюю поверхность Роша. Скорее следует считать, что его размеры значительно меньше, чем у этой поверхности и что он обладает газовой оболочкой, вещество которой постепенно переходит в струю. На присутствие таких оболочек указывают и данные спектроскопических наблюдений (см., например, [6]). Оболочка должна иметь форму диска.

Газ в оболочке движется со скоростью, близкой к круговой кеплеровской скорости. Силы вязкости приводят к существованию развитой турбулентности в оболочке и большую роль в ее динамике должно играть турбулентное трение [7]. Струя, формирующаяся в турбулентной оболочке, не может быть вполне однородной — в ней должны существовать флуктуации плотности и скорости.

Оценим характерный размер  $l$  пульсаций основного масштаба в оболочке. Из условия, требующего чтобы вихрь не размывался существенно вращением оболочки [7], находим соотношение

$$l \approx \frac{r\Delta u}{v_\varphi}, \quad (5)$$

где  $\Delta u$  — скорость вихря,  $r$  — его расстояние от центра оболочки и

$v_\varphi$  — средняя скорость вращения на этом расстоянии. С другой стороны, для величины  $l$  можно вывести еще одно соотношение, если использовать полученное в [7] равенство

$$rv_r \bar{\sigma} = \bar{\tau}_i, \quad (6)$$

где  $v_r$  — средняя скорость радиального движения газа,  $\bar{\sigma}$  — поверхностная плотность и  $\bar{\tau}_i$  — коэффициент турбулентной вязкости, проинтегрированный по всей толщине оболочки. Величина  $\bar{\tau}_i$  определяется следующим образом:

$$\bar{\tau}_i \approx \sigma l \Delta u. \quad (7)$$

Из (5), (6) и (7) находим размеры и скорость вихрей наибольшего масштаба:

$$l \approx r \sqrt{\frac{v_r}{v_\varphi}}; \quad \Delta u \approx \sqrt{v_r v_\varphi}. \quad (8)$$

Величина  $v_r$  определяется по значению  $Q$  и оказывается на два порядка меньшей, чем  $v_\varphi$ . Поэтому для основного масштаба турбулентности в оболочке, учитывая, что ее радиус порядка  $10^{10}$  см, находим значение  $l \approx 10^9$  см, а пульсации скоростей могут достигать нескольких десятков км/сек. Неоднородности в струе, вызванные турбулентными пульсациями в оболочке, должны быть тех же масштабов.

Масштаб неоднородности в струе  $d$  оценивается и независимо, по продолжительности  $\Delta t$  наблюдаемых флуктуаций блеска. Очевидно, что

$$d \approx v \Delta t, \quad (9)$$

где  $v$  — скорость течения газа в струе. Так как  $\Delta t \approx 30$  сек и  $v \approx 5 \cdot 10^7$  см/сек, то  $d \approx 10^9$  см, то есть того же порядка, что и  $l$ .

В том случае, если наблюдаемые флуктуации блеска представляются собой просто колебания мощности излучения, а природа излучения остается прежней, характеристики излучения, в частности, показатели цвета при флуктуациях не должны меняться. Из наблюдений Цукерман [5], рассматривавшей излучение при флуктуациях как некоторое дополнительное, следует, что величины  $U-V$  и  $V-V$  для излучения флуктуаций такие же, как и для общего излучения системы, исходящего, главным образом, из дискообразной оболочки главной звезды, точнее из горячего пятна.

Таким образом, фотометрические данные подтверждают высказанное предположение о природе флуктуаций блеска тесных двойных систем, подобных системе U Близнецов. Заметим, что неоднородность вращающейся оболочки главной звезды, обуславливающая неодинаковую эмиссионную способность ее в различных частях, также может являться одной из причин наблюдаемых флуктуаций блеска.

Ленинградский государственный  
университет

## ON BRIGHTNESS CHANGES IN CLOSE BINARY SYSTEMS OF DWARF STARS

V. G. GORBATZKY

Some effects of gaseous streams in the close binary systems of dwarf stars on the observed light-curves are considered. The profile of „hump“ on light curve preceding the primary minimum is calculated. Optical density of radiating layer of the disk-like envelope VV Pup and U Gem is estimated by the comparison of the observed hump with the calculated one. It is shown that brightness fluctuations in these systems may be caused by inhomogeneity of turbulent gaseous jet which collides with the envelope.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Г. Горбацкий, *Астрофизика*, 3, 205, 1967.
2. В. Г. Горбацкий, *Астрофизика*, 4, 505, 1968.
3. M. Walker, *Mitt. Sternw, Budapest*, No. 57, 1965.
4. W. Krzeminsky, *Ap. J.*, 140, 1051, 1965.
5. F. Zuckerman, *Ann. Astrophys.*, 24, 431, 1961.
6. Дж. Гринстейн, в сб. „Звездные атмосферы“, гл. 19, (русск. перевод), ИЛ, М., 1963.
7. В. Г. Горбацкий, *Труды АО АГУ*, 22, 16, 1965.

## ЗАСТЫВШИЕ ЗВЕЗДЫ И КРАТНЫЕ СИСТЕМЫ

О. Х. ГУСЕЙНОВ, Х. И. НОВРУЗОВА

Поступила 25 мая 1970

Пересмотрена 14 января 1971

Среди спектрально-двойных выбраны 13 систем, в которых невидимые компоненты более массивны. Если предположить, что невидимая звезда находится на главной последовательности, то оцененная по массе ее светимость в большинстве случаев оказывается больше светимости видимого компонента. Этот и другие факты наводят на мысль, что некоторые из приведенных двойных имеют вторым компонентом релятивистскую звезду.

Открытие пульсаров, наряду с указанием на перспективность поиска нейтронных звезд по их радиоизлучению, сильно укрепило веру в существование в Галактике большого количества нейтронных и застывших звезд (НИЗЗ). Оценка числа существующих в Галактике НИЗЗ уже в настоящее время необходима для решения многих вопросов звездной эволюции. Но, к сожалению, застывшие звезды не проявляют активности даже в начальной стадии их образования, которая наблюдается в случае нейтронных звезд. Поэтому наиболее вероятным способом обнаружения застывших звезд остается поиск их в кратных системах [1].

В работе [1] указывалось на перспективность поиска НИЗЗ среди спектрально-двойных систем с невидимыми и незатмевающими компонентами и были приведены конкретные пары, в которые могли входить релятивистские звезды. Эта работа была продолжена в [2] с использованием каталога [3]. Тримбл и Торн выделили 10 систем, в которых невидимые компоненты превосходят по массе главные ( $M_2 > M_1$ ), т. е. возможно наличие НИЗЗ. Мы провели тщательный поиск систем с невидимыми компонентами, удовлетворяющих условиям  $M_2 > M_1$ ,  $M_2 > 1.2 M_{\odot}$  и выделили 13 пар, которые приведены в

табл. 1. В таблице приведены номера звезд по каталогам Баттена и НД, названия звезд, экваториальные координаты, отнесенные к 1900 году, видимая и абсолютная звездные величины, а также спектральный класс видимой компоненты. Здесь же приведены величины, характеризующие орбитальное движение, т. е. период в днях, половина амплитуды периодического изменения скорости  $K_1$  в км/сек, произведение большой полуоси видимой компоненты на синус угла наклона в  $10^6$  км, эксцентриситет орбиты  $l$  и функция масс  $f(M)$ .

Известно, что массу невидимой компоненты можно определить, используя выражение

$$\frac{f(M)}{M_1} = \frac{(M_2/M_1)^3}{(1 + M_2/M_1)^2} \sin^3 i, \quad (1)$$

если знать массу видимой компоненты  $M_1$  и значение синуса угла наклона. Массу видимой компоненты определяли по зависимости спектр—масса для каждого класса светимости,  $\sin^3 i$  придавали значе-

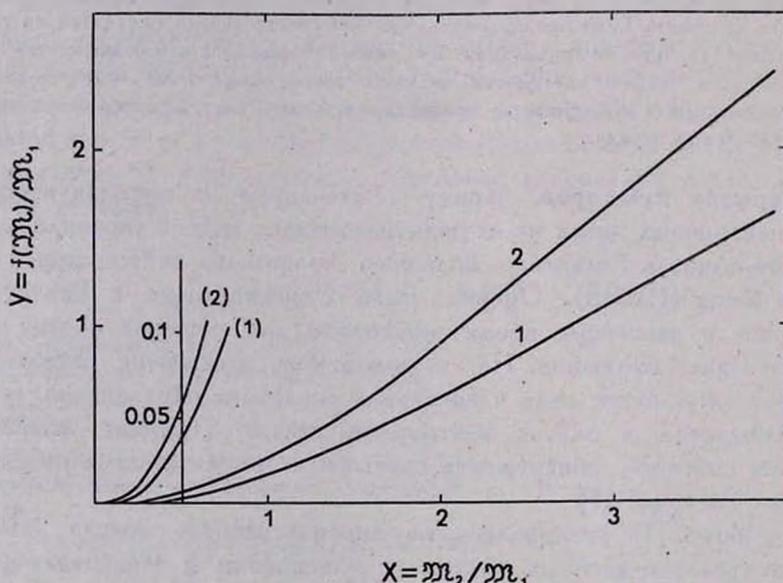


Рис. 1. Графическое решение уравнения (1). Кривая 1 относится к случаю  $\sin^3 i = 2/3$ , кривая 2 — к случаю  $\sin^3 i = 1$ . Для участка от 0 до 0.1 по оси  $y$ -ов взят масштаб в 10 раз больший. Эти кривые приведены в левой части рисунка.

ния  $2/3$  и  $1$ . В предположении  $\sin^3 i = 2/3$  находили среднее значение массы невидимой компоненты  $M_2$ , а при  $\sin^3 i = 1$  — наименьшее  $M_2$ . Уравнение (1) решали графически. Кривая 1 на рис. 1 относится к случаю  $\sin^3 i = 2/3$ , а кривая 2 — к случаю  $\sin^3 i = 1$ .

Из статистических исследований нам было известно, что невидимая компонента может превосходить по массе главную звезду, если только функция масс  $f(M) > 0.2$ , и поэтому мы оценили массы невидимых компонент только для систем с  $f(M) > 0.2$ . Звезд, удовлетворяющих условию  $M_2 > M_1$ , оказалось 22. В двух из этих систем, В 134 и В 240, получили  $M_2 > 1.2 M_{\odot}$ , поэтому эти системы опустили, так как в них невидимые компоненты могли быть белыми карликами.

После уточнения с помощью [4, 5] данных по остальным системам, следующие семь звезд—В 50, В 130, В 208, В 221, В 225, В 356, В 714 также пришлось отбросить.

Известно, что, зная видимую звездную величину и удаленность звезды от наблюдателя, можно определить абсолютную звездную величину и тем самым уточнить данные о спектре. Поэтому мы определяли расстояния до систем, приведенных в таблице, как по абсолютной звездной величине, найденной по спектру, так и по параллаксу и сравнивали их.

Для определения истинного расстояния  $r$  до звезды (с учетом межзвездного поглощения) имеем

$$\lg R = \lg r + \frac{a_v r}{1000} \tag{2}$$

$$m - M = -5 + 5 \lg r + \frac{a_v r}{1000}$$

Здесь  $R$  — расстояние без учета межзвездного поглощения,  $a_v$  — поглощение в видимой области на 1 *кпс*. Величины  $a_v$  в направлении звезд мы брали из [6—8], а расстояния  $r$  определяли, используя номограмму, приведенную в работе [9]. В табл. 1 (17 столбец) расстояния, определенные по указанному выше способу, написаны сверху, снизу написаны расстояния, найденные по параллаксу. Для тех звезд, расстояния до которых могли определять по параллаксу, под абсолютными звездными величинами, найденными по спектру, записаны также и абсолютные величины, найденные из второго уравнения [2].

Возможность оптического разрешения звезд двойной системы зависит от расстояния между ее компонентами. С целью выявления такой возможности из выражений

$$a_1 \sin i = 0.137 (1 - e^2)^{1/2} PK_1, \tag{3}$$

$$a_1 + a_2 = [P^3 (M_1 + M_2)]^{1/3} \tag{4}$$

Таблица 1

№	HD звезда	$\alpha_{1900}$	$\delta_{1900}$	$m$	Sp <sub>1</sub>	M <sub>1</sub>	P дни
1	2	3	4	5	6	7	8
1 В 127	28052 71 Tau	04 <sup>h</sup> 20. <sup>m</sup> 6	+15°23'	4.51	F0V	+2. <sup>m</sup> 8 +1.5	5200
2 В 141	30353 KS Per	04 41.8	+43 06	7.7	A0 II A5 Ia	-3.0 -7.0	360
3 В 145	31109 $\omega$ Eri	04 48.0	-05 37	4.39	A9 IV	+2.1 +1.3	3057
4 В 155	33232	05 03.7	+40 53	8.1	B3e V B3e III	-1.7 -3.2	3710
5 В 189	37507 49 Ori	05 34.0	-07 16	4.81	A4 IV	+1.1 +1.9	446
6 В 232	56986 $\eta$ Gem	07 14.2	+22 10	3.52	F0 IV	+2.2 +2.2	2239
7 В 257	64511 U Gem	07 49.2	+22 16	8.9-14	Be IV		0.174
8 В 343	104321 $\pi$ Vir	11 55.7	+07 10	4.67	A4 V	+1.8 +1.3	283
9 В 367	110951 32 Vir	12 40.6	+08 13	5.17	A <sub>m</sub>	+1.8	38.3
10 В 508	168339 $\zeta$ Pav	18 14.0	-61 33	4.36	K2 III	+0.8 +0.4	2214
11 В 576	187399	19 44.7	+29 10	7.7	A0 III	-0.4	28
12 В 615	193928	20 17.8	+36 36	9.4	WN6		21.6
13 В 655	205767 $\zeta$ Agr	21 32.4	-08 18	4.69	A7 V A7 IV	+2.4 +0.7 +0.7	8016

определили  $a_1 \sin i$  (верхние цифры в 10 столбце) и  $a_1 + a_2$  (нижние цифры в 10 столбце). Оказалось, что самым большим угловым расстоянием между компонентами—0"025 обладает система В 232. Такое угловое расстояние слишком мало и поэтому приведенные в таблице системы оптически неразрешимы.

Сравнение значений  $a_1 \sin i$  и  $a_1 + a_2$  для каждой системы позволяет судить и о значении  $\sin i$ . Как видно из таблицы, отношение  $a_1 \sin i / (a_1 + a_2)$  имеет наименьшее значение (0.4) в случае системы В 343 и наибольшее (0.6) для В 232. Таким образом, хотя в среднем найденные нами массы вторых компонент правильны, но все же они в некоторых случаях занижены. Так для системы В 343 вероятно  $\sin^3 i \sim 0.35$ , а не 2/3, поэтому масса второго компонента больше найденной нами.

Таблица 1 (продолжение)

$K_1$ км/сек	$a_1 \sin i$ $10^3$ км	$e$	$f(\Sigma)$	$\Sigma X_1$	$\Sigma X_2$	$\Sigma X_2'$	$\bar{0}''$	$r$ пс	$Sp_2$	$M_2$
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
15.1	898 1620	0.241	1.7	1.6	4.6	3.5		22.5 41.7	B8V	-0. <sup>m</sup> 1
51.4	210 390	0.28	4.41	5 12	12.6 18	9.9 14.8		4000	B3V A1Ia	-1.7 -7.0
18.1	583 1100	0.46	1.318	1.7	3.9	3.1		29.5 43.5	B9V	+0.3
31.5	1340 2360	0.31	10.4	9.5 11	27.7	21.4		1500 3500	O8V	-5.5
28.6	126 306	0.549	0.635	2.3	3.3	2.4		53 38.5	A2V	+1.4
27.1	670 1120	0.353	3.8	1.8	9.4	6.3		17.6 17.9	B5V	-1.0
266	0.525 1.24	0.05	0.33	1.2	1.3	1.1			G0V	+4.6
26.2	84.5 211	0.265	0.473	2.1	2.5	1.9		40 50	A5V	+2.0
48.1	21.8 54.2	0.074	0.438	2	2.3	1.9		50	A5V	+2.0
17.9	455 1040	0.264	1.188	3.7	5.2	4.2		55 66.7	B7V	-0.3
105	32.2 61.4	0.35	2.72	3.5	8.1	6.4		460	B5V	-1.0
130	33.4 57.8	0.0	4.94	10	17.5	14.4			B1V	-3.4
11.3	900 1920 1920	0.544	0.711	1.7 2.8	2.7 3.5	2.2 2.8		30 66.7	A4V A0V	+1.9 -0.7

Обычно звезды главной последовательности имеют несколько меньшую светимость, чем звезды других классов светимости, имеющие ту же массу. Поэтому невидимость второй компоненты часто может объясняться именно этим. Исходя из этого, в 18 столбце нами приведены спектральный класс, соответствующий минимальным массам невидимых компонент  $\Sigma X_2'$  в предположении, что они находятся на главной последовательности, а в 19 столбце — их светимости. Сравнение 7 и 19 столбцов таблицы показывает, что даже минимальные возможные светимости невидимых компонент в предположении, что они находятся на главной последовательности часто больше светимостей видимых.

Если можно объяснять невидимость массивных компонент только малой светимостью, то такие же системы должны встречаться и среди затменных звезд. Однако такие системы в каталогах [3, 5] отсутствуют. С другой стороны, предположение о двойственности самой невидимой компоненты [2] также не всегда объясняет ее малую светимость по сравнению с первой компонентой (например, В 127 и др.).

Дальнейшее теоретическое исследование приведенных систем затрудняется тем, что выводы в большой степени зависят от точности определения классов светимости и спектров звезд. Поэтому этой заметкой мы желаем привлечь внимание наблюдателей к данным системам.

В заключение благодарим Я. Б. Зельдовича, И. М. Копылова, О. А. Мельникова, М. А. Свечникова за интерес к работе и ценные советы.

Шемахинская астрофизическая  
обсерватория

## CONGEALED STARS AND MULTIPLE SYSTEMS

O. H. GUSEINOV, H. I. NOVUZOVA

Thirteen systems of spectroscopic binaries have been chosen with more massive invisible components. If the invisible component is a main-sequence star, luminosity estimated by the mass is greater than that of the general component in most cases. These facts give the possibility to suggest that some of the quoted binaries have a relativistic star as a secondary component.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ya. B. Zeldovich, O. H. Guseinov, *Ap. J.*, 144, 841, 1965.
2. L. V. Trimble, K. S. Thorne, *Ap. J.*, 156, 1013, 1969.
3. A. H. Batten, *Publ. Dom. astrophys. Obs.*, 8, 119, 1968.
4. C. Jaschek, H. Conde, *Amelia C. de Sierra*, Catalogue of stellar spectra classified in the Morgan-Keenan system, La Plata, 1964.
5. М. А. Свечников, Каталог орбитальных элементов, масс и светимостей тесных двойных звезд, Свердловск, 1969.
6. А. С. Шаров, *Астрон. ж.*, 40, 900, 1963.
7. О. А. Мельников, Г. Г. Лемауэр, К. Т. Стоякова, А. Н. Геращенко, *Изв. ГАО*, 24, 84, 1964.
8. П. П. Паренаго, *Астрон. ж.*, 22, 129, 1945.
9. М. Е. Набоков, *Астрон. ж.*, 24, 5, 1940.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7

ФЕВРАЛЬ, 1971

ВЫПУСК 1

О ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ. II.

Ю. П. КОРОВЯКОВСКИЙ

Поступила 27 января 1970

Пересмотрена 23 марта 1970

Рассчитаны траектории движения газовых потоков в тесных двойных системах звезд U Gem, VV Pup, UX UMa в трехмерном случае с учетом динамических эффектов газового давления. Получены координаты точки встречи газового потока, идущего от спутника, с оболочкой звезды для различных величин и направлений начальных скоростей. Скорость встречи газового потока с оболочкой составляет  $500 \div 550$  км/сек для системы UX UMa,  $550 \div 600$  км/сек для системы VV Pup и  $900 \div 1000$  км/сек для системы U Gem. Делается попытка объяснить различную мощность свечения „горячего пятна“ в системах U Gem, VV Pup, WZ Sge и в системах UX UMa, DQ Her.

В работе [1] приводятся некоторые результаты расчета траекторий движения газовых струй в тесных двойных системах в трехмерном случае с учетом динамических эффектов газового давления, роль которых оценивается в автомоделном приближении. Газовый поток, текущий от спутника, разгоняясь в гравитационном поле главного компонента системы, встречается с оболочкой главной звезды, теряя при этом часть своей кинетической энергии, и в результате столкновения в оболочке образуется локально нагретая область (так называемое „горячее пятно“). Дополнительное излучение, возникающее в этой области, обуславливает появление на кривой блеска двойной системы „горба“ [2].

В [1] были рассчитаны модели газовых потоков и было проведено сравнение вычисленных положений точки встречи потока и оболочки с наблюдаемым положением „горба“ на кривых блеска двойных систем WZ Sge и DQ Her. Как показали расчеты [1], из сравнения наблюдаемого положения „горба“ на кривой блеска с теоретическим положением точки встречи можно оценить соотношение скоростей враще-

ния спутника вокруг своей оси и обращения его вокруг центра масс. Путем численного интегрирования системы уравнений движения находится как величина скорости выброса, необходимая для отрыва вещества от спутника, так и величина скорости газового потока при встрече с оболочкой, которые могут быть использованы для оценок мощности ударной волны, возникающей при встрече газового потока с оболочкой [2].

В связи с этим представляет интерес провести дополнительные расчеты движения газовых потоков для тех тесных двойных систем, на кривых блеска которых присутствуют „горбы“, а именно для систем U Gem, VV Pup, UX UMa. Используя систему уравнений движения, полученных в [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2 \frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2 \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial C}{\partial y} + Q \frac{y - y_0}{z^2 + (y - y_0)^2} \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{\partial C}{\partial z} + Q \frac{z}{z^2 + (y - y_0)^2} \\ \frac{d^2x_0}{d\tau^2} - 2 \frac{dy_0}{d\tau} = \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{d^2y_0}{d\tau^2} + 2 \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{\partial C}{\partial y} \end{array} \right. \quad (1)$$

где

$$C = \frac{1}{1+q} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q}{1+q} \frac{1}{\sqrt{(x - a_0)^2 + y^2 + z^2}} + \\ + \left( x - \frac{q}{1+q} \right)^2 + y^2, \\ q = \frac{\mathcal{M}_{\text{гл}}}{\mathcal{M}_{\text{кп}}}, \quad \tau = \omega_0 t,$$

$\omega_0$  [сек<sup>-1</sup>] — угловая скорость обращения спутника по орбите, мы провели расчеты траекторий движения газовых потоков для четырех моделей тесных двойных систем. Параметры этих моделей приведены в табл. 1.

Обозначения в табл. 1:  $\mathcal{M}_{\text{гл}}$  — масса голубого компонента,  $\mathcal{M}_{\text{кп}}$  — масса красного компонента,  $q$  — соотношение масс компонентов системы,  $a_0$  — расстояние между центрами компонентов,  $R_{\text{кп}}$  — радиус

Таблица 1

Модель	$\Sigma R_{\text{гл}}$	$\Sigma R_{\text{сп}}$	$q = \frac{\Sigma R_{\text{гл}}}{\Sigma R_{\text{сп}}}$	$a_0$ (см)	$R_{\text{сп}}$ (в долях $a_0$ )	$R_{\text{об}}$ (в долях $a_0$ )	$x_{L_1}$ (в долях $a_0$ )	$R_0$ (в долях $a_0$ )	T °K	$\mu$	$Q \cdot 10^{-3}$	Обозначение звезды
III	1.20	1.30	0.923	$1.24 \cdot 10^{11}$	0.529	0.25	0.529	0.01	$5 \cdot 10^3$	1	1.43	U Gem [3]
IV	1.20	1.30	0.923	$1.24 \cdot 10^{11}$	0.450	0.25	0.529	0.01	$5 \cdot 10^3$	1	1.43	U Gem [3]
V	0.60	1.30	0.462	$6.20 \cdot 10^{10}$	0.300	0.50	0.600	0.01	$10^4$	1/2	3.73	VV Pup [4]
VI	1.28	0.77	1.660	$1.26 \cdot 10^{11}$	0.200	0.40	0.448	0.01	$10^4$	1/2	7.03	UX UMa [5]

спутника в долях  $a_0$ ,  $x_{L_1}$  — координата точки Лагранжа  $L_1$ ,  $R_{06}$  — радиус оболочки, вращающейся вокруг главной звезды,  $T$  — температура газа в потоке,  $\mu$  — молекулярный вес,  $R_0$  — начальный радиус газового цилиндра в долях  $a_0$ ,  $Q$  — член, описывающий эффект газового давления:

$$Q = 2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} A \rho_c^{\gamma-1} \frac{1}{a_0^2 \omega_0^2};$$

$A$  — энтропийная константа и  $\rho_c$  — плотность газа на оси симметрии газового цилиндра. Принимаем  $\gamma = 5/3$ .

Численное интегрирование системы уравнений движения проводилось на ЭЦВМ „БЭСМ 3м“ для пяти точек газового цилиндра А, В, С, Д, Е, которые в момент  $\tau = 0$  располагались, как показано на рис. 1в [1].

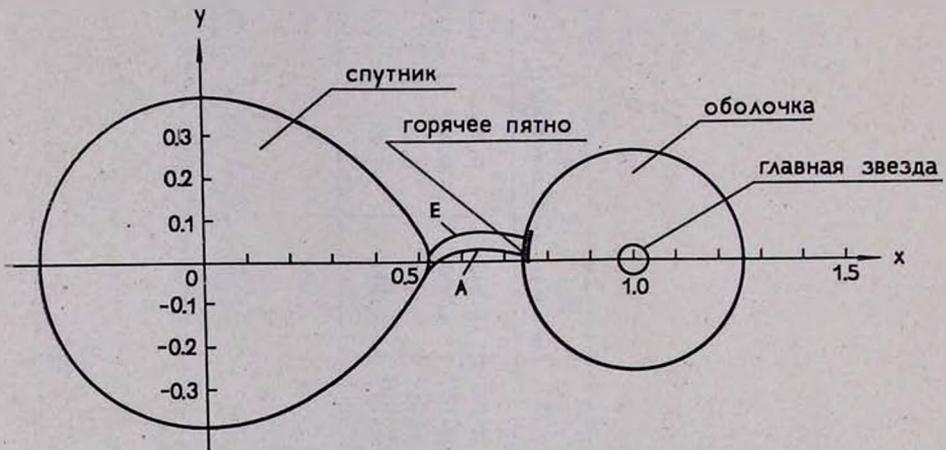


Рис. 1. Траектории точек А и Е в плоскости  $xu$  для модели III при начальных скоростях  $V_x^0 = 5$  км/сек,  $V_y^0 = 160$  км/сек,  $V_z^0 = 0$ .

В табл. 2 помещены величины начальных скоростей, для которых проводилось численное интегрирование системы уравнений  $V_x^0$  и  $V_y^0$ , координаты  $x_c$  и  $y_c$ , скорости  $V_x^c$ ,  $V_y^c$  газового потока при встрече с оболочкой, ширина и толщина потока  $\Delta y$  и  $\Delta z$ , время перелета вещества от спутника до встречи с оболочкой  $\Delta \tau$ .

На рис. 1, 2, 3 нанесены траектории точек А, С, Е, в плоскости  $xu$  и  $xz$  для моделей III и IV при различных значениях начальной скорости. Модель III отличается от модели IV лишь иным значением

Таблица 2

Модель III (U Gem), единица характерной скорости = 520 км/сек

Вариант расчета	$V_x^0$ (в ед. характерн. скорости)	$V_y^0$ (в ед. характерн. скорости)	$x_e$ (в до- лях $a_0$ )	$y_c$ (в до- лях $a_0$ )	$V_x^c$ (в ед. характерн. скорости)	$V_y^c$ (в ед. характерн. скорости)	$\Delta y$ (в до- лях $a_0$ )	$\Delta x$ (в до- лях $a_0$ )	$\Delta z$ ( $\Delta z = \omega_0 \Delta t$ )
1	0.001	0	0.755	-0.030	1.80	-0.35	0.025	0.020	0.3
2	0.004	0.004	0.750	-0.035	2.00	-0.30	0.030	0.020	—
3	0.005	0	0.760	-0.050	2.00	-0.30	0.025	0.018	—
4	0.010	0	0.750	-0.040	1.90	-0.30	0.025	0.020	0.3
5	0.010	0.010	0.750	-0.040	2.00	-0.30	0.030	0.020	—
6	0.010	-0.010	0.760	-0.045	2.00	-0.30	0.025	0.020	—
7	0.010	-0.040	0.750	-0.025	2.00	-0.29	0.020	0.015	—
8	0.010	0.300	0.750	+0.035	2.00	-0.30	0.035	0.020	—
9	0.020	0.020	0.760	-0.032	2.00	-0.30	0.020	0.020	—
10	0.030	0	0.750	-0.040	2.05	-0.30	0.020	0.020	—
11	0.060	0	0.760	-0.045	2.00	-0.30	0.015	0.015	—
12	0.100	0	0.755	-0.040	2.00	-0.30	0.030	0.020	—
13	0.200	0	0.750	-0.050	2.05	-0.31	0.020	0.020	—
14	0.300	0	0.750	-0.040	2.00	-0.30	0.020	0.020	—
15	0.400	0	0.750	-0.035	2.00	-0.25	0.030	0.020	—

Модель IV (U Gem), единица характерной скорости = 520 км/сек

1	0.001	0	0.765	-0.080	1.95	-0.300	0.040	0.020	—
2	0.010	0	0.760	-0.080	2.00	-0.300	0.040	0.020	0.44
3	0.050	0	0.770	-0.090	1.90	-0.320	0.040	0.020	—
4	0.100	0	0.760	-0.065	2.10	-0.360	0.042	0.020	—
5	0.300	0	0.765	-0.075	2.00	-0.420	0.030	0.020	0.36

Модель V (VV Pup), единица характерной скорости = 650 км/сек

1	0.010	0	0.510	-0.082	0.750	-0.390	0.088	0.080	0.68
2	0.010	0.20	0.500	+0.030	0.800	-0.340	0.070	0.070	0.55
3	0.050	0	0.510	-0.080	0.770	-0.350	0.085	0.080	0.61
4	0.200	0	0.500	-0.065	0.790	-0.350	0.065	0.060	0.45
5	0.300	0	0.500	-0.060	0.820	-0.360	0.060	0.050	0.39
6	0.400	0	0.500	-0.055	0.870	-0.365	0.050	0.040	0.34
7	0.500	0	0.500	-0.050	0.900	-0.420	0.050	0.040	0.30

Таблица 2 (продолжение)

Модель VI (UX UMa), единица характерной скорости = 470 км/сек

1*	0.01	0	—	—	—	—	—	—	—
2*	0.05	0	—	—	—	—	—	—	—
3	0.30	0	0.68	-0.24	1.17	-0.43	0.19	0.15	1.00
4	0.40	0	0.68	-0.24	1.20	-0.49	0.18	0.14	0.82
5	0.50	0	0.68	-0.24	1.26	-0.54	0.18	0.12	0.70
6	0.30	+0.30	0.60	-0.03	1.20	-0.58	0.14	0.13	0.69
7	0.30	-0.30	0.83	-0.64	1.18	+0.08	—	0.07	1.84
8	0.30	+0.10	0.64	-0.18	—	—	0.20	0.15	—
9	0.40	+0.20	0.60	-0.08	—	—	0.15	0.12	—

\* Точка падает обратно на поверхность спутника.

величины радиуса спутника. В модели III принято, что спутник заполняет полость Роша и истечение вещества происходит из точки  $L_1$  ( $x_0 = x_{L_1}$ ), а в модели IV точка выброса отстоит от точки  $L_1$  на

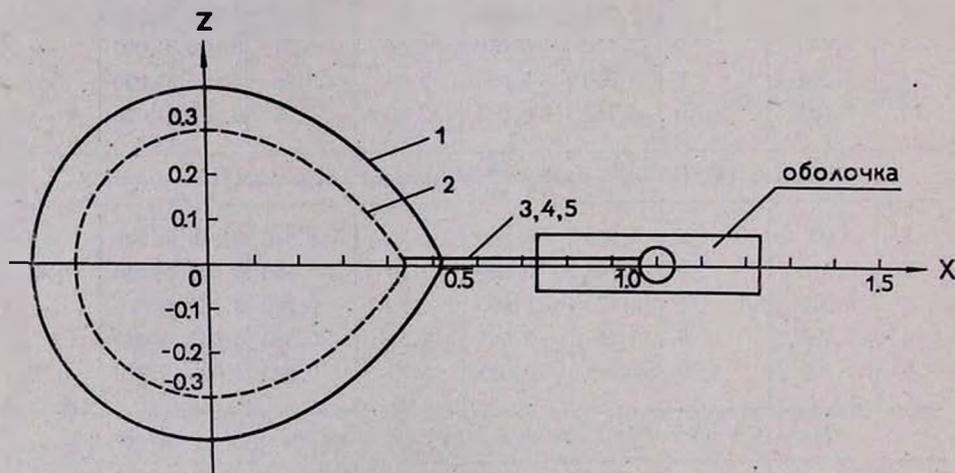


Рис. 2. Траектория точек С в плоскости  $xz$  для моделей III и IV: 1—спутник в модели III; 2—спутник в модели IV; 3—при  $V_x^0 = 5$  км/сек,  $V_y^0 = V_z^0 = 0$ ; 4—при  $V_x^0 = 0.5$  км/сек,  $V_y^0 = V_z^0 = 0$ ; 5—при  $V_x^0 = 5$  км/сек,  $V_y^0 = 160$  км/сек,  $V_z^0 = 0$ .

величину  $\Delta x = 0.079 \cdot a_0$ . Несмотря на это различие, скорость отрыва вещества в модели III и в модели IV оказывается одного порядка и составляет несколько сотен метров в секунду (0.5–1.0 км/сек).

Скорость встречи потока с оболочкой в моделях III и IV, как это следует из табл. 2, заключена в пределах  $900 + 1000$  км/сек, и при соударении потока с оболочкой образуется сильная ударная волна, све-

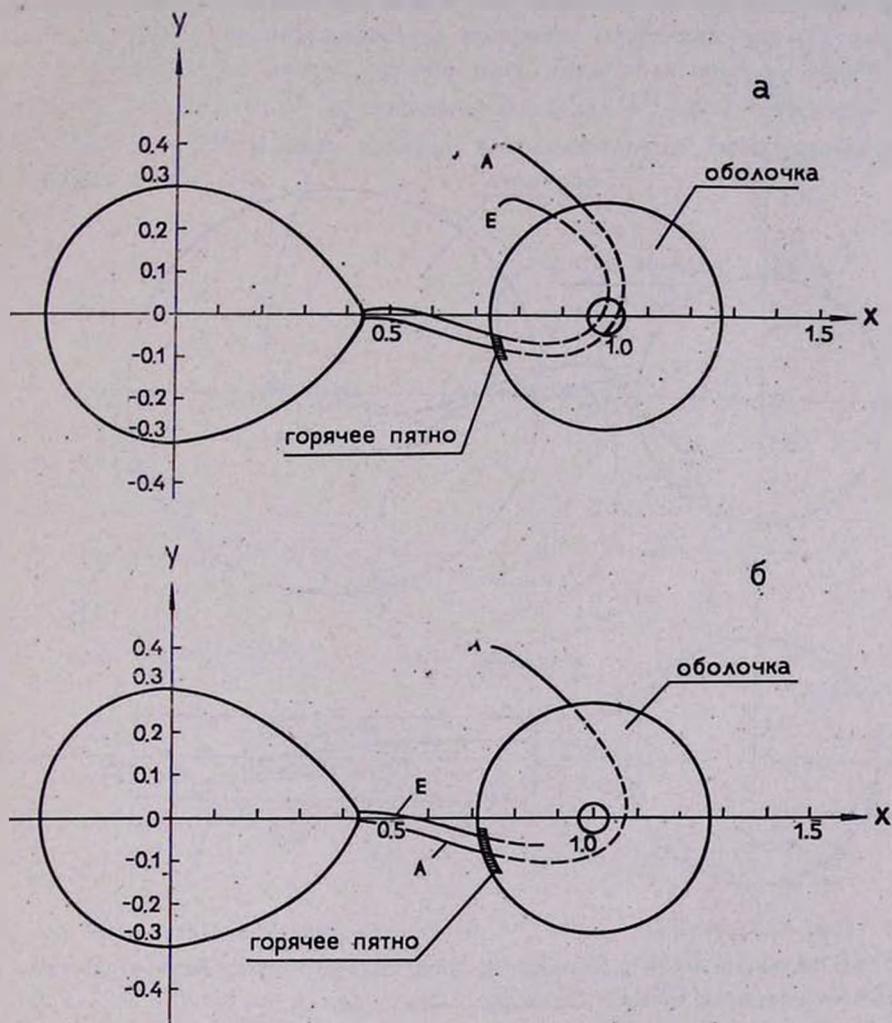


Рис. 3. Траектории точек А и Е в плоскости  $xy$  для модели IV. а—при начальных скоростях  $V_x^0=0.5$  км/сек,  $V_y^0=V_z^0=0$ ; б—при начальных скоростях  $V_x^0=5$  км/сек,  $V_y^0=V_z^0=0$ .

чение за фронтом которой обуславливает появление „горба“ на кривой блеска. Параметры моделей III и IV были взяты близкими к элементам орбиты звезды U Gem [3].

На рис. 4 и 5 даны траектории точек А, С и Е в плоскостях  $xu$  (4а, 5а) и  $xz$  (4б и 5б) для модели V при различной по величине и направлению скорости выброса. Следует отметить, что скорость отрыва вещества для модели V лежит в пределах  $V_x^0 = 6 \div 10$  км/сек,

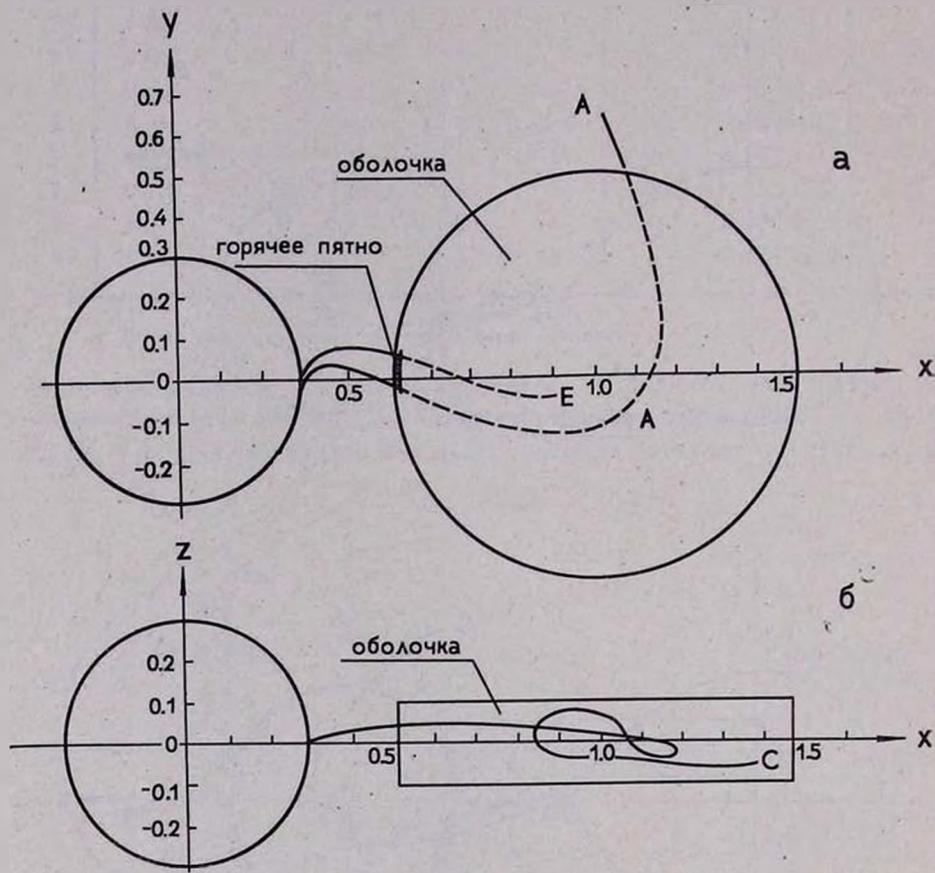


Рис. 4. Траектории точек А, С и Е для модели V при начальных скоростях  $V_x^0 = 6.5$  км/сек,  $V_y^0 = 130$  км/сек,  $V_z^0 = 0$ ; а—траектории точек А, Е в плоскости  $xu$ ; б—траектория точки С в плоскости  $xz$ .

несмотря на то, что в данной модели спутник не заполняет внутреннюю полость Роша. Поэтому, если на поверхности спутника вещество имеет небольшую величину скорости (тепловые движения атомов или приливные возмущения), то оно может свободно перетекать к оболочке главной звезды.

Параметры модели V близки к элементам орбиты тесной двойной системы VV Pup [4]. Из сравнения положения точки встречи потока

и оболочки в модели V с наблюдаемым положением „горба“ на кривой блеска этой системы можно заключить, что их совпадение достигается в случае, когда  $V_x^0 = 6$  км/сек,  $V_y^0 = 60$  км/сек. По-видимому, в системе VV Pup мы имеем дело, как и в случае системы WZ Sge (модель II, [1]), с несинхронностью вращения спутника вокруг своей оси и обращения его вокруг центра масс. Скорости встречи потока с оболочкой для модели V заключены в пределах  $V_x^* = 550 + 600$  км/сек,  $V_y^* = -200 + -250$  км/сек, и перед встречей поток имеет уплощенную форму (табл. 2).

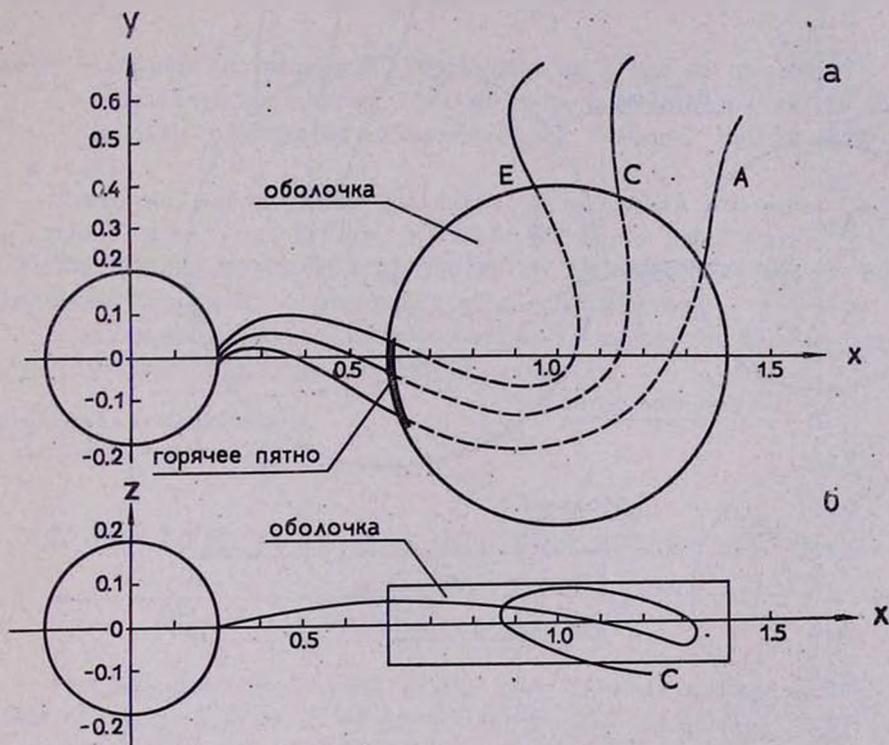


Рис. 5. Траектории точек А, С, Е, для модели V при начальных скоростях  $V_x^0 = 130$  км/сек,  $V_y^0 = V_z^0 = 0$ ; а—траектории точек А, С, Е в плоскости  $xу$ ; б—траектория точки С в плоскости  $xz$ .

На рис. 6 приведены траектории точек А, С, Е в плоскостях  $xу$  (6а) и  $xz$  (6б) для модели VI. В модели VI значение минимальной скорости, при которой возможен отрыв вещества из точки  $(R_{сп}, 0, 0)$ , лежит в пределах  $V_x^0 = 100 + 120$  км/сек, а скорости потока при встрече с оболочкой составляют  $V_x^* = 500 + 550$  км/сек и  $V_y^* = -200$  км/сек и почти не зависят от скорости выброса.

Как следует из расчетов, часть вещества, не попавшая в оболочку, летит по направлению движения главной звезды, и если в точке выброса существует некоторая дисперсия скоростей по величине и направлению, это вещество делает форму оболочки вокруг главной звезды несимметричной, вытянутой в направлении движения главной звезды. Несимметричная форма оболочки может сказаться в изменении интенсивности эмиссионных линий в различных элонгациях.

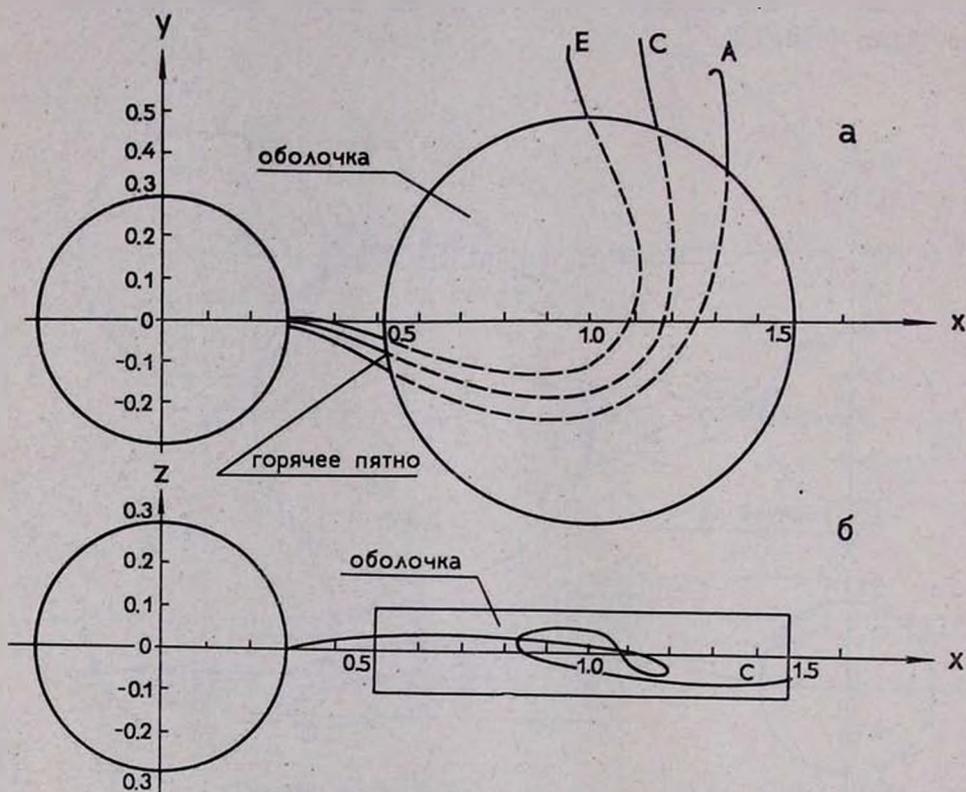


Рис. 6. Траектории точек А, С, Е для модели VI при начальных скоростях  $V_x^0=140$  км/сек,  $V_y^0=140$  км/сек,  $V_z^0=0$ ; а—траектории точек А, С, Е в плоскости  $xy$ ; б—траектория точки С в плоскости  $xz$ .

Из табл. 2 следует, что скорости отрыва вещества от спутника в моделях III, IV, V, а также в ранее рассмотренной в [1] модели I, оказываются близкими к тепловой скорости движения атомов на поверхности звезды ( $1 \div 10$  км/сек), в то время, как скорости отрыва вещества в моделях VI и II из [1] значительно больше и составляют  $100 + 150$  км/сек. Вследствие этого мощность газового потока в пер-

вых трех моделях будет существенно выше, чем в моделях VI и II, так как на поверхности спутника большее количество вещества обладает скоростью порядка 2—10 км/сек, и меньшее — скоростью 100—150 км/сек. Вместе с тем, скорости встречи газового потока с оболочкой в моделях III, IV, V и I [1] превосходят скорости в моделях VI и II из [1] (см. табл. 2). Энергия свечения разогретой области, как известно [2], пропорциональна кинетической энергии падающего на оболочку потока и равна

$$E_{\text{св}} \approx \frac{1}{2} E_{\text{кин}} = \frac{1}{4} m v_{\text{всп}}^2, \quad (3)$$

где  $m$  — количество вещества, падающего за 1 сек на оболочку.

Следовательно, в первых трех моделях и в модели I из [1] мощность свечения разогретой области будет больше, чем в моделях VI и II [1].

Возможно, наблюдаемые различия в мощности свечения „горячего пятна“ в системах U Gem, VV Pup, WZ Sge и в системах DQ Her, UX UMa (в предположении равенства их светимостей) могут быть объяснены, исходя из приведенных выше соображений.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. М. Арестенко за помощь при обработке числового материала.

Специальная астрофизическая  
обсерватория АН СССР

## ON THE MOTION OF GAS IN CLOSE BINARY SYSTEMS

Yu. P. KOROVYAKOVSKY

The trajectory movement of the gas streams in close binary systems of stars U Gem, VV Pup, UX UMa were calculated in a three-dimensional case, dynamic effects being taken into account. The coordinates of the point of encounter of the gas-stream, coming from the satellite with the envelope of the star is obtained for different amounts and directions of initial velocities. The velocity of the encounter of the gas stream with the envelope is 500—550 km/sec for UX UMa system 550—600 km/sec for VV Pup system and 900—1000 km/sec for U Gem system. Attempts have been made to explain the different power of luminosity of the „Hot spot“ in the systems U Gem, VV Pup, WZ Sge and in the systems UX UMa, DQ Her.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю. П. Коровяковский, *Астрофизика*, 5, 67, 1969.
2. В. Г. Горбачкий, *Астрофизика*, 3, 246, 1967.
3. W. Krzeminski, *Ap. J.*, 142, 1051, 1965.
4. G. H. Herbig, *Ap. J.*, 132, 76, 1960.
5. П. П. Паренато, *ПЗ*, 7, 196, 1950.

О ХАРАКТЕРЕ ВСПЫШЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ  
ЗВЕЗД ТИПА UV Ceti. I.

В. С. ОСКАНЯН, В. Ю. ТЕРЕБИЖ

Поступила 8 июня 1970

Проводится статистический анализ наблюдательных данных о вспышках звезд UV Ceti в 1967, 1968—1969 гг. и YZ CMi в 1967—1970 гг. Показано, что вспышечная активность этих звезд оставалась неизменной в течение указанных промежутков времени. Рассмотрение числа вспышек звезды в фиксированных интервалах времени и промежутков времени между вспышками показывает, что последовательность вспышек звезд UV Ceti и YZ CMi близка к пуассоновской.

I. *Введение.* За последние несколько лет наблюдательные данные о вспыхивающих звездах в окрестности Солнца настолько расширились, что стало возможным поставить вопрос о характере временной последовательности вспышек этих звезд. Тот факт, что последовательность вспышек звезд типа UV Ceti является случайной, был выяснен, конечно, с самого начала изучения вспыхивающих звезд. Однако было неясно, является ли эта последовательность совершенно случайной (пуассоновской), или вероятность появления вспышки зависит от предшествующей истории вспышечной активности звезды. Образно говоря, в случае пуассоновской последовательности вспышек звезда в каждый момент времени „решает“, вспыхнуть ей или нет, независимо от того, когда были предшествующие вспышки. Если же процесс не пуассоновский, то предшествующая история влияет на решение.

Различные наблюдатели, изучавшие этот вопрос, пришли к противоречивым выводам. Так, В. Кункель [1] полагает, что последовательность является пуассоновской, тогда как А. Эндрюс [2], П. Ф. Чугайнов [3], К. Осава и соавторы [4] считают, что явление вспышек:

имеет приблизительно периодический характер с периодом порядка нескольких часов или нескольких десятков часов.

В настоящей работе вопрос о характере вспышечной активности звезд YZ CMi и UV Cet рассматривается на основе изучения распределения числа вспышек в фиксированных промежутках времени и интервалов времени между последовательными вспышками этих звезд. Можно было бы думать, что знание автокорреляционной функции процесса облегчит изучение рассматриваемого вопроса, однако известно [5], что для пуассоновского процесса вид корреляционной функции зависит только от формы кривой блеска вспышек. Возможны случаи, когда пуассоновский и непуассоновский процессы имеют одну и ту же корреляционную функцию (некоторые примеры приведены в [5]). Поэтому знание корреляционной функции не позволяет однозначно решить вопрос о характере случайного процесса.

2. *Наблюдательный материал.* В настоящей работе были использованы следующие наблюдательные данные:

1. Фотоэлектрические наблюдения UV Cet, выполненные Кункелем [6] в 1967 г. Наблюдения велись в  $u$ -цвете на 36" и 16" телескопах, так что приводимый наблюдательный материал не является достаточно однородным. К сожалению, автор не разделяет данные, полученные на различных инструментах, поэтому нам пришлось рассмотреть этот вопрос на основании косвенных признаков. В качестве таковых были взяты средний интервал времени между обнаруженными вспышками и распределение вспышек по яркости. В результате мы пришли к выводу, что сентябрьские наблюдения 1967 г., вероятнее всего, были проведены на 36" телескопе, а октябрьские — на 16", и в дальнейшем рассматривали эти периоды по отдельности. В первых двух строчках табл. 1 приведены: эффективное время  $t$  наблюдений Кункеля, число зарегистрированных вспышек за это время  $n$ , средний интервал времени между вспышками  $\tau = t/n$  и средняя частота вспышек  $\nu = \tau^{-1}$ .

2. Фотоэлектрические наблюдения UV Cet, выполненные в  $b$ -цвете в 1968—1969 гг. [7—14]. Наблюдения велись на различных инструментах. Для того, чтобы сделать наблюдательный материал более однородным, мы, пользуясь опубликованными кривыми блеска и данными об амплитудах, отобрали из всех зарегистрированных вспышек те вспышки, амплитуды которых  $\Delta m$  превосходили 0.15. В случае многократных вспышек отдельными вспышками считались те пики, для которых выполнялось условие  $\Delta m > 0.15$  (считая от уровня фона, обусловленного предыдущей вспышкой) и интенсивность в максимуме

отсчитанная от уровня нормального блеска звезды, не менее, чем в 1.5 раза превышала интенсивность фона. Из приводимых указанными авторами вспышек принятый критерий отсеивает лишь несколько вспышек и добавляет несколько новых, так что подавляющее большинство зарегистрированных вспышек учитывалось в данном исследовании. В табл. 1, помимо уже указанных параметров, в последних двух столбцах приведены математическое ожидание числа вспышек в каждом наблюдательном периоде  $E(N)$  и соответствующее стандартное отклонение  $\sigma(N) = \sqrt{E(N)}$ . Величина  $E(N)$  находилась по формуле  $E(N) = \nu t$ , где  $\nu$  — средняя за 1968—1969 гг. частота вспышек. Как видно из табл. 1, число наблюдавшихся в отдельные годы вспышек мало отличается от математического ожидания, поэтому можно считать, что в течение 1968—1969 гг. активность вспышечной деятельности UV Ceti оставалась неизменной.

Таблица 1

Звезда	Наблюд. период	t (мин)	n	$\tau$ (мин)	$\nu$ (мин <sup>-1</sup> )	$E(N)$	$\sigma(N)$
UV Ceti	IX. 1967	1216	102	11.92	0.08390		
	X. 1967	3499	155	22.57	0.04430		
	1968	5129	67	76.55	0.01306	61.0	7.8
	1969	7902	88	89.80	0.01114	94.0	9.7
	1968—1969	13031	155	84.07	0.01189		
YZ CMi	1967	1918	8	240	0.00417	7.2	2.7
	1968	11428	41	280	0.00357	43.0	6.6
	1969	6002	19	316	0.00316	22.7	4.8
	1970	6247	29	215	0.00465	23.6	4.9
	1967—1970	25595	97	264	0.00379		

3. Фотовольтрические наблюдения YZ CMi в b-цвете в 1967—1970 гг. [15—24]. Отбор наблюдательного материала проводился так же, как и для UV Ceti. Соответствующие данные приведены в табл. 1. Как видно, и в данном случае мы можем считать, что отклонения частоты вспышек в отдельные годы от средней носят случайный характер.

3. Распределение моментов вспышек UV Ceti по данным Кукуля. Число вспышек звезды за фиксированный интервал времени  $t$  является случайной величиной, которую мы выше обозначили посредством  $N(t)$ . Для пуассоновского процесса распределение вероятностей  $N$  определяется формулой

$$P\{N(t) = k\} \equiv p_k(t) = e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где  $\nu$  есть среднее число вспышек за единицу времени.

Для того, чтобы сравнить наблюдаемое для какой-либо звезды распределение  $N$  с пуассоновским, необходимо, чтобы интервалы непрерывного наблюдения данной звезды значительно превышали средний промежуток времени между вспышками. Если это условие не соблюдается, то приходится либо использовать слишком маленькие интервалы времени, на которых в большинстве случаев число вспышек равно 0 или 1, либо объединять имеющиеся интервалы в более крупные, что искусственно сближает наблюдаемое распределение с пуассоновским.

Из имеющихся в настоящее время наблюдательных данных лишь данные Кункеля [6] удовлетворяют указанному выше условию. Для его наблюдений (напомним, что они велись в  $u$ -цвете) средний интервал времени между вспышками был равен  $12^m$  и  $23^m$  при использовании соответственно  $36''$  и  $16''$  телескопов, тогда как средний интервал непрерывного наблюдения примерно равнялся  $200^m$ .

Наблюдаемое распределение числа вспышек звезды было построено следующим образом. Эффективное время наблюдений в сентябре 1967 г. (мы будем для краткости называть это время периодом I) было разбито на промежутки длиной  $t_1 = 23^m 84$ , а время наблюдений в октябре 1967 г. (период II) — на промежутки длиной  $t_2 = 45^m 12$ . Длительность промежутков времени была выбрана так, чтобы математические ожидания числа вспышек звезды на каждом промежутке в периоды I и II были равны друг другу:  $\nu_1 t_1 = \nu_2 t_2 = 2$ . Это дает возможность рассматривать совместное распределение величины  $N$  за все время наблюдений.

Обозначим посредством  $n_k$  число тех промежутков времени, на которых было зарегистрировано  $k$  вспышек звезды. Тогда величина

$\hat{p}_k = n_k / \sum_0^{\infty} n_k$  представляет собой эмпирическую вероятность того,

что звезда вспыхнет  $k$  раз за рассматриваемый промежуток времени. Полное число промежутков времени (число реализаций  $N$ ) было равно 51 для первого наблюдательного периода, 77 — для второго и 128 — для всего периода наблюдений. Соответствующие величины  $n_k$  и  $\hat{p}_k$  приведены в табл. 2. Во второй колонке этой таблицы приведены также теоретические вероятности  $p_k$ , найденные по формуле (1) при  $\nu t = 2$ . Из таблицы видно, что согласие между теоретическим и наблю-

даемым распределениями  $N$  во всех случаях можно считать удовлетворительным, а для первого периода наблюдений — исключительно хорошим. Применение критерия  $\chi^2$  к суммарному распределению показывает, что имеется вероятность 0.5 получить отклонение от теоретического распределения по крайней мере столь же большое, как фактически наблюдаемое. Значения вероятности  $P(\chi^2 > \chi^2_{\text{obs}})$  для всех трех распределений приведены в последней строке табл. 2.

Таблица 2

$k$	$p_k$	36"		16"		Все данные	
		$n_k$	$p_k$	$n_k$	$p_k$	$n_k$	$p_k$
0	0.135	8	0.157	11	0.143	19	0.148
1	0.271	14	0.275	27	0.350	41	0.320
2	0.271	12	0.235	14	0.182	26	0.205
3	0.180	10	0.196	14	0.182	24	0.188
4	0.090	4	0.078	4	0.052	8	0.062
5	0.036	1	0.020	5	0.065	6	0.047
6	0.012	1	0.020	0	0.000	1	0.008
7	0.003	1	0.020	2	0.026	3	0.023
8	0.002						
$\Sigma$		51		77		128	
$P(\chi^2_0)$			0.97		0.40		0.50

Таким образом, наблюдаемое распределение числа вспышек UV Ceti согласуется с гипотезой о том, что последовательность вспышек этой звезды образует пуассоновский процесс.

Другой случайной величиной, распределение которой столь же полно характеризует пуассоновский процесс, как и распределение  $N$ , является промежуток времени от начала наблюдений до момента первой вспышки. Обозначим эту случайную величину посредством  $\xi$ , а ее плотность распределения — посредством  $f(t)$ . Как легко видеть, для пуассоновского процесса

$$f(t) = \nu e^{-\nu t}, \quad 0 \leq t < \infty \quad (2)$$

(мы должны умножить вероятность того, что на промежутке  $[0, t]$  нет вспышек, на вероятность появления одной вспышки в промежутке  $[t, t + dt]$ ). Точно такое же распределение имеет для пуассоновского процесса и случайная величина  $\eta$  — промежуток времени между последовательными вспышками.

В своей работе Кункель приводит моменты начала интервалов непрерывного наблюдения и моменты вспышек, поэтому мы можем найти наблюдаемое распределение величин  $\xi$  и  $\eta$  и сравнить его с распределением (2). Соответствующие результаты для первого и второго периодов наблюдений представлены на рис. 1 и 2. Общее число

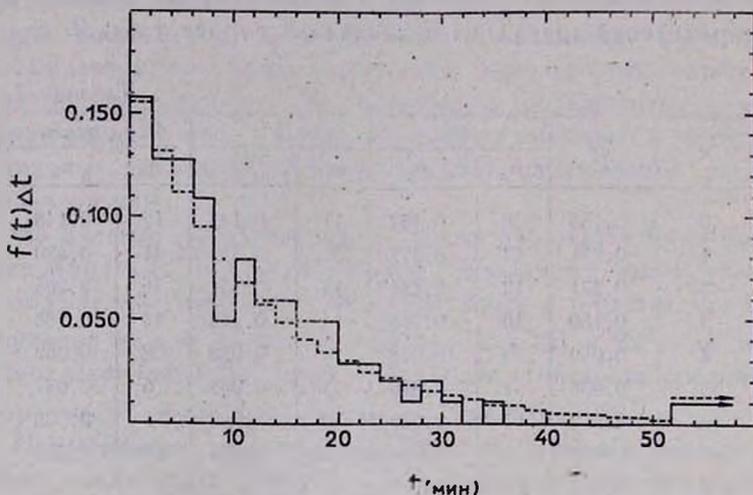


Рис. 1. Наблюдаемое (сплошная линия) и теоретическое распределения промежутков времени между вспышками UV Ceti в сентябре 1967 г.  $P(\chi^2_0) = 0.88$ .

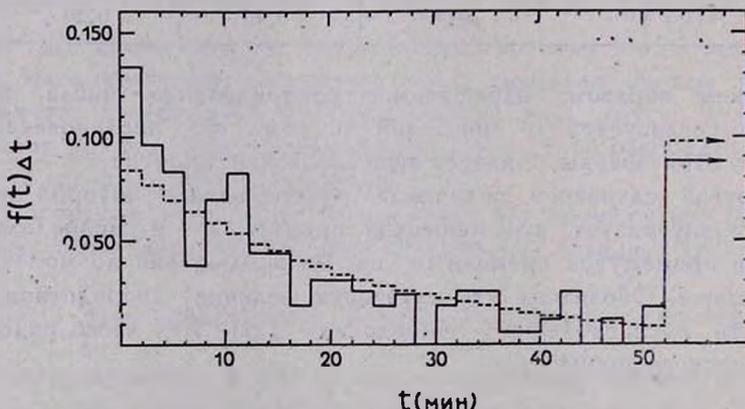


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для наблюдений UV Ceti в октябре 1967 г.  $P(\chi^2_0) = 0.25$ .

реализаций величин  $\xi$  и  $\eta$  равно 257. Как видно, и в данном случае наблюдаемое распределение удовлетворительно согласуется с ожидаемым для пуассоновского процесса, что поддерживает вывод, сделанный ранее на основе статистики числа вспышек.

## 4. Учет конечности интервалов непрерывного наблюдения.

Как уже упоминалось выше, обычно при наблюдениях вспыхивающих звезд средний промежуток времени между наблюдаемыми вспышками  $\tau$  сравним со средней величиной интервала непрерывного наблюдения  $\bar{I}$ . Например, для совместных наблюдений UV Cet в 1968—1969 гг.  $\tau = 84^m$ , а  $\bar{I} = 60^m$ . В случае YZ CMi  $\tau = 264^m$ , а  $\bar{I}$  по-прежнему равно приблизительно  $60^m$ . При этих условиях последовательные вспышки звезды, отделенные друг от друга промежутком времени порядка  $\tau$ , будут наблюдаться с малой вероятностью, а вспышки, быстро следующие одна за другой, будут наблюдаться почти всегда. Поэтому совершенно необходимым становится учет влияния конечности интервалов непрерывного наблюдения на функцию распределения промежутков времени между вспышками.

Обозначим длительность интервала непрерывного наблюдения звезды через  $I$ . Поскольку на длину этого интервала влияют самые различные причины,  $I$  является случайной величиной с некоторой плотностью распределения  $g(t)$ . Для каждой звезды функция  $g(t)$  может быть найдена из приводимых в литературе данных. Если условия наблюдения двух звезд мало отличаются, то, очевидно, следует ожидать, что функции распределения  $I$  также будут отличаться не сильно.

На рис. 3 представлены значения функции  $g(t)$  для наблюдений UV Cet в 1968—1969 гг. и для наблюдений YZ CMi в 1967—1970 гг. Они и в самом деле отличаются настолько мало, что отличие можно считать обусловленным случайными флуктуациями.

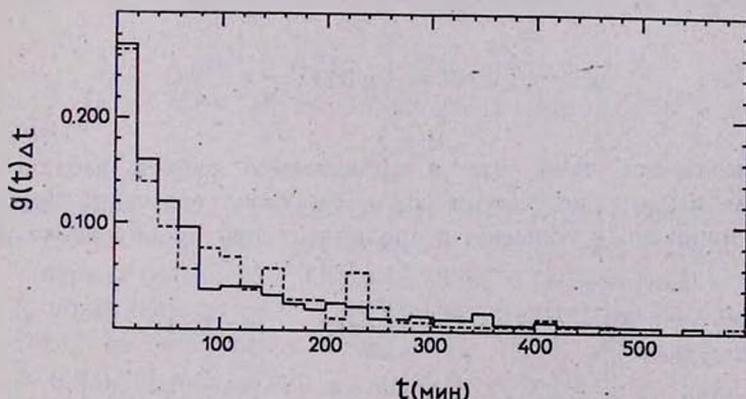


Рис. 3. Распределения интервалов времени непрерывного наблюдения звезд YZ CMi (сплошная линия) и UV Cet.

Предположим, что пуассоновский процесс наблюдается в течение интервалов времени, длительность которых есть случайная величина

с плотностью  $g(t)$ . Найдем вероятность  $f(t) dt$  того, что А) первая вспышка произойдет в промежутке времени между  $t$  и  $t + dt$  после начала наблюдательного интервала и В) она будет зарегистрирована. Поскольку  $P(AB) = P(A)P(B|A)$ , мы имеем

$$f(t) = \nu e^{-\nu t} \int_t^{\infty} g(t') dt'. \quad (3)$$

Промежуток времени между вспышками  $\eta$  тоже будет распределен с плотностью (3), если считать, что промежуток времени  $I_1$  от первой вспышки до конца наблюдательного интервала распределен так же, как и весь интервал  $I$ . Как показывают наблюдательные данные, такое предположение близко к действительности. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать совместное распределение величин  $\xi$  и  $\eta$ . Функция  $g(t)$ , приведенная на рис. 3, получена с учетом дополнительных интервалов  $I_k$ .

Таким образом, в данном случае наблюдаемое распределение промежутков времени от начала наблюдений до первой вспышки и между вспышками мы должны сравнивать с функцией (3). Если наблюдения производятся в интервалах времени, длительность которых значительно превышает  $\nu^{-1}$ , то из (3) мы вновь получаем показательное распределение (2).

Следует заметить, что величина  $f(t) dt$  представляет собой математическое ожидание числа первых зарегистрированных вспышек в промежутке времени между  $t$  и  $t + dt$ . В соответствии с этим

$$p \equiv \int_0^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} g(t) (1 - e^{-\nu t}) dt \quad (4)$$

есть вероятность того, что в произвольно взятом наблюдательном интервале мы регистрируем хотя бы одну вспышку. Вероятность зарегистрировать  $k$  вспышек в произвольно взятом интервале равна

$$p_k = \int_0^{\infty} g(t) e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^k}{k!} dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

5. *Распределение промежутков времени между последовательными вспышками звезд YZ CMi и UV Cet.* Пусть  $N'$  означает полное число рассмотренных интервалов непрерывного наблюдения,  $n_k$  —

число вспышек звезды, происшедших в промежутке времени между  $t_k$  и  $t_k + \Delta t$  после начала интервала или после предыдущей вспышки. Величины  $f_k^* = n_k'/N'$ ,  $k = 0, 1, \dots$  определяют наблюдаемое распределение, соответствующее теоретическому распределению (3). Шаг по времени  $\Delta t$  для каждой звезды находился из условия  $\Delta t \approx 0.1\tau$ . Было принято, что для YZ CMi величина  $\Delta t = 20^m$ , а для UV Cet!  $\Delta t = 10^m$ .

Теоретическое и наблюдаемое распределения промежутков времени между вспышками YZ CMi представлены на рис. 4. Из него видно, что согласие между распределениями можно считать хорошим. Применение критерия  $\chi^2$  (к предварительно нормированным на 1 распределениям) показывает, что с вероятностью  $P(\chi_0^2) = 0.60$  расхождение могло быть больше наблюдаемого. Далее, из (4) можно найти значение величины  $p$  для теоретического распределения. Оно оказывается равным  $p \approx 0.256$ , в то время как наблюдаемое значение  $p^* \approx 0.262$ .

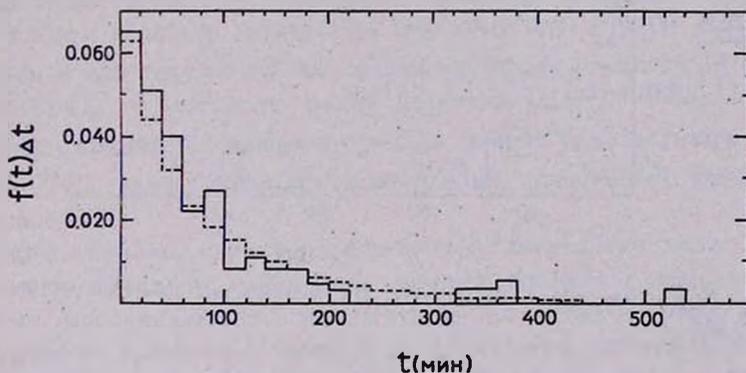


Рис. 4. То же, что и на рис. 1, для наблюдений YZ CMi в 1967—1970 гг  $P(\chi_0^2) = 0.60$ .

Обратимся теперь к наблюдательным данным о вспышках UV Cet в 1968—1969 гг. Как уже указывалось, общее число вспышек звезды за этот период равно 155. Наблюдаемое и теоретическое распределения  $f_k$  приведены на рис. 5. В данном случае согласие значительно хуже того, которое было найдено во всех предыдущих случаях ( $P(\chi_0^2) \approx 0.03$ ). Наблюдаемое значение  $p^* \approx 0.470$ , в то время как теоретическое  $p \approx 0.507$ . Как показывает более внимательное рассмотрение, отличие вызвано, в основном, избытком близко расположенных вспышек ( $\eta < 10^m$ ), причем этот избыток нельзя считать результатом случайной флуктуации.

В самом деле, существуют последовательности близко расположенных вспышек, вероятность осуществления которых очень мала в случае пуассоновского процесса со средней для всего времени наблюдения частотой  $\nu$ . Например, 26 октября 1968 г. К. Осава и др. [25] зарегистрировали 7 вспышек за 5.4 мин. Для пуассоновского процесса с  $\nu = 1/84$  мин вероятность события  $N(5.4) \geq 7$  равна, в соответствии с формулой (1),

$$P[N(5.4) \geq 7] = \sum_{k=7}^{\infty} e^{-\frac{5.4}{84}} \frac{1}{k!} \left(\frac{5.4}{84}\right)^k \approx 10^{-12}. \quad (6)$$

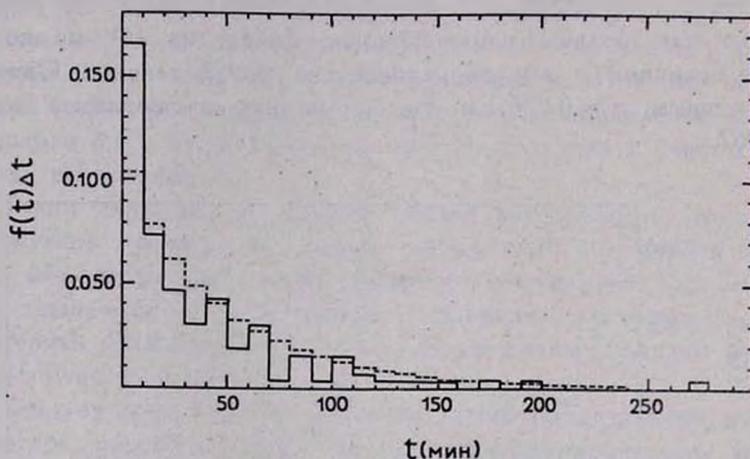


Рис. 5. То же, что и на рис. 1, для наблюдений UV Ceti в 1968—1969 гг.  $P(\lambda_0^2) = 0.003$ .

Поскольку полное время наблюдений содержит примерно 2400 промежутков по 5.4 мин, то математическое ожидание рассматриваемых событий равно  $2.4 \cdot 10^{-9}$ , в то время как наблюдается одно событие. Полученное значение составляет в действительности нижний предел, так как мы не разбили все время наблюдений на фиксированные интервалы наперед заданным образом, а выбрали наименьший интервал, содержащий 7 вспышек (вообще говоря, в данном случае нужно использовать теорию серий событий). Все же представляется несомненным, что мы имеем здесь действительно редкое событие для пуассоновского процесса.

В значительно более слабой степени тенденция к группированию вспышек UV Ceti заметна и в некоторых других случаях. Так например, 14 и 18 октября 1968 г. наблюдалось по 3 вспышки за проме-

жухот времени 2 мин. Для вспышек YZ CMi тенденция к группированию не обнаружена, так что, если такая тенденция и есть, то она незначительна.

Мы приходим к выводу, что последовательность вспышек (в смысле определения вспышки, используемого в данной работе) звезды UV Seti иногда обнаруживает заметные отклонения от пуассоновской последовательности. Эти отклонения обусловлены тем, что встречаются группы вспышек, быстро следующих одна за другой. Возможно, что определение вспышки, данное в разделе 2, не совсем точно отражает единичный процесс освобождения энергии в атмосфере звезды, и всю группу вспышек, наблюдавшихся 26 октября, следует считать одной вспышкой со сложной кривой блеска. Однако в любом случае следует подчеркнуть, что отмеченная тенденция к группированию слаба. Так, если не учитывать лишь кратную вспышку 26 октября 1968 г., то расхождение между теоретическим и наблюдаемым распределениями промежутков времени между вспышками выйдет из значимой области [26], и гипотезу о пуассоновском характере последовательности вспышек отвергать нельзя ( $P(\gamma_0^2) = 0.05$ ). Если же не учитывать и две группы по три вспышки, наблюдавшиеся 14 и 18 октября 1968 г., то согласие будет хорошим ( $P(\gamma_0^2) = 0.20$ ). Наконец, увеличение принятого нижнего предела амплитуды вспышек (например, до  $0^m 25$ ) также приводит к заметному ослаблению тенденции к сгущиванию.

Таким образом, характер вспышечной активности звезд YZ CMi UV Seti в произвольно выбранный момент времени слабо зависит от процессов, происходивших в предыдущие моменты времени, и последовательность вспышек близка к пуассоновской последовательности с постоянной средней частотой вспышек  $\nu$ . Разумеется, последний вывод относится лишь к активности звезд в рассматриваемый период времени и возможность того, что средняя частота вспышек зависит от времени (с характерным интервалом изменения в несколько лет), исключить нельзя.

Авторы благодарны В. А. Амбарцумяну, Р. Е. Гершбергу и П. Ф. Чугайнову за полезные замечания, сделанные при обсуждении полученных результатов.

*Примечание при корректуре.* Др. Кункель любезно сообщил нам, что принятое в настоящей статье разделение наблюдательных данных, полученных им на 36" и 16" телескопах, соответствует действительности.

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

ON SOME CHARACTERISTICS OF THE FLARE ACTIVITY  
OF UV Ceti TYPE STARS

V. S. OSKANIAN, V. Yu. TEREBIZH

A statistical analysis of the flare data obtained in 1967—1969 for the star UV Ceti and in 1967—1970 for the star YZ CMi is effectuated. It is shown that the flare activity of these stars did not change during the years mentioned above. From a detailed investigation of the number of flares observed in a fixed time-interval and of the time delays between two consecutive flares, it could be concluded that the successions of flares on the stars UV Ceti and YZ CMi are near the Poissonian.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. W. E. Kunkel, An optical study of stellar flares, Thesis, University of Texas, Austin, 1967.
2. A. D. Andrews, PASP, 78, 324, 1966.
3. P. F. Chugatnov, Proceedings of the IV Colloquium on variable stars, Budapest, 1968.
4. K. Osawa, K. Ichimura, T. Noguchi, E. Watanabe, Tokyo astr. Bull., No. 180, 1968.
5. С. М. Рылов, Введение в статистическую радиофизику, Наука, М., 1966, §§ 7, 34.
6. W. E. Kunkel, IBVS, No. 315, 1968.
7. K. Osawa, K. Ichimura, T. Noguchi, E. Watanabe, IBVS, No. 310, 1968.
8. R. I. Havlan, B. E. Westerlund, R. E. White, IBVS, No. 343, 1969.
9. F. M. Batson, IBVS, No. 354, 1969.
10. P. F. Chugatnov, IBVS, No. 338, 1969.
11. A. H. Jarrett, J. P. Eksteen, IBVS, No. 349, 406, 1969; No. 412, 1970.
12. S. Cristaldi, M. Rodono, IBVS, No. 404, 1969.
13. P. F. Chugatnov, N. I. Shakhovskaya, IBVS, No. 411, 1969.
14. K. Osawa, K. Ichimura, T. Noguchi, E. Watanabe, T. Okada, K. Okida, IBVS No. 405, 1969.
15. A. D. Andrews, IBVS, No. 265, 307, 1968.
16. K. Stenpien, IBVS, No. 305, 1968.
17. K. Osawa, K. Ichimura, T. Noguchi, E. Watanabe, IBVS, No. 267, 1968; No. 331, 1969.
18. V. S. Oskantan, IBVS, No. 268, 1968.
19. S. Cristaldi, M. Rodono, IBVS, No. 274, 1968; No. 423, 1970.
20. P. F. Chugatnov, IBVS, No. 266, 1968; No. 338, 1969.
21. J. P. Eksteen, Th. Schmidt, IBVS, No. 264, 1968.
22. N. I. Shakhovskaya, IBVS, No. 339, 1969.
23. S. Cristaldi, M. Narbone, M. Rodono, IBVS, No. 332, 1969.
24. K. Osawa, K. Ichimura, T. Noguchi, E. Watanabe, T. Okada, K. Okida, IBVS, No. 426, 1970.
25. K. Osawa, K. Ichimura, T. Noguchi, E. Watanabe, Tokyo astr. Bull., No. 188, 1968.
26. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948.

НЬЮТОНОВСКАЯ ТЕОРИЯ БЫСТРО ВРАЩАЮЩИХСЯ  
БЕЛЫХ КАРЛИКОВ

В. В. ПАПОЯН, Д. М. СЕДРАКЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Поступила 20 мая 1970

В приближении  $\Omega^4$  определены структура и интегральные параметры вращающихся как твердое тело с угловой скоростью  $\Omega$  равновесных псевдосферондальных моделей белых карликов. Полученные результаты незначительно отличаются от аналогичных в приближении  $\Omega^2$ , поэтому можно считать, что для конфигураций, находящихся в критическом относительно истечения вещества состоянии, приближение  $\Omega^2$  применимо так же успешно, как и приближение  $\Omega^4$ . Сравнение найденных результатов с результатами более точного метода Джеймса дает хорошее совпадение.

1. В настоящее время имеется большое количество исследований, в которых рассмотрены связанные с вращением изменения в структуре самогравитирующих конфигураций в рамках теории тяготения Ньютона [1—8]. Значительная часть их выполнена в предположении о малости связанных с вращением изменений, что позволяет выбрать в качестве малого параметра используемой теории возмущений отношение энергии вращения к гравитационной энергии ( $\beta$ ), и ограничиться первым по этому параметру приближением. Оценить эффективность такого подхода можно лишь, если удастся показать, что результаты, полученные более точными методами или, по крайней мере, в приближении  $\beta^2$ , мало отличаются от аналогичных в приближении  $\beta$ . Сравнение рассчитанных в линейном по  $\beta$  приближении параметров простейших белых карликов [5, 8], а также конфигураций, вещество которых описывается политропным уравнением состояния [1, 2, 4, 6], с соответствующими результатами, полученными точным методом Джеймса [3], показывает что для таких моделей приближение  $\beta$  оказывается весьма удовлетворительным (отклонение не превышает 10%). Неплохое совпадение, но лишь для моделей с большим значением показа-

теля политропы, получается и при сравнении с результатами Ананда [8], использовавшего приближение  $\beta^2$ . Тем не менее, нет никаких оснований утверждать, что линейное по  $\beta$  приближение применимо также успешно при расчетах внутренней структуры и интегральных характеристик более реальных моделей белых карликов и барионных звезд. Поэтому представляется необходимым рассмотреть вращение белых карликов и барионных звезд в приближении  $\beta^2$ .

Недавно предложен метод расчета интегральных характеристик и внутренней структуры конфигураций, вещество которых описывается однопараметрическим уравнением состояния, в квадратичном по  $\beta$  приближении [9]. В настоящем сообщении на основе этого метода подсчитаны параметры как простейших моделей белых карликов, так и белых карликов с учетом эффектов нейтронизации. Полученные результаты мало отличаются от аналогичных в приближении  $\beta$ , что вместе с вышеизложенным позволяет заключить, что в используемом методе зависимость поправок второго порядка малости от уравнения состояния весьма слабая. Следовательно, можно ожидать, что подобные результаты будут получены также и в случае барионных звезд.

2. Структура равновесных псевдосфероидальных конфигураций, вращающихся как твердое тело с угловой скоростью  $\Omega$ , определяется решением системы следующих уравнений:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right] = G, \quad (1)$$

$$F = -\varphi + G_c \beta R^2 (1 - \mu^2) + C. \quad (2)$$

Здесь

$$F = \int \frac{dP}{\rho}, \quad G = 4\pi k \rho, \quad \beta = \frac{\Omega^2}{8\pi k \rho_c}. \quad (3)$$

$P$  и  $\rho$  — давление и плотность вещества соответственно,  $k$  — гравитационная постоянная, индексом „с“ снабжены значения рассматриваемых величин в центре конфигурации.

Если искать решения системы (1)–(3) в виде разложений в ряд по степеням  $\beta$  и ограничиться приближением  $\beta^2$ , то, согласно результатам работы [9], для гравитационного потенциала внутри ( $\varphi^{(i)}$ ) и вне ( $\varphi^{(e)}$ ) распределения масс получим

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)} = & c_0 - f(R) - \beta [f_0(R) + A_2 f_2(R) P_2(\mu) - G_c R^2 (1 - \mu^2) - c_1] - \\ & - \beta^2 \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(i)}(R) P_l(\mu) + \sum_{l=2}^4 A_l^{(i)} \Phi_l(R) P_l(\mu) - c_2 \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varphi^{(e)} = \frac{k_0}{R} + \beta \sum_{l=0}^2 \frac{k_{1l}}{R^{l+1}} P_l(\mu) + \beta^2 \sum_{l=0}^4 \frac{k_{2l}}{R^{l+1}} P_l(\mu), \quad (5)$$

Для радиуса конфигурации в направлении  $\mu$  имеем

$$R_2 = R_0 + \beta \sum_{l=0}^2 q_l P_l(\mu) + \beta^2 \sum_{l=0}^4 q_l^{(1)} P_l(\mu), \quad (6)$$

а для распределения плотности вдоль радиуса звезды

$$\begin{aligned} G(R, \mu) = & g(R) + \beta \gamma [f_0(R) + A_2 f_2^{(1)}(R) P_2(\mu)] + \\ & + \beta^2 \left\{ \gamma \left[ \sum_{l=0}^4 f_l^{(1)}(R) P_l(\mu) + \sum_{l=2}^4 A_l^{(1)} \Phi_l(R) P_l(\mu) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_1}{2} [f_0(R) + A_2 f_2(R) P_2(\mu)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Радиальные функции  $f_l(R)$  и  $\Phi_l(R)$  являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_0 f &= -g, \\ \Delta_0 f_0 + \gamma f_0 &= 4g_e, \\ \Delta_2 f_2 + \gamma f_2 &= 0, \\ \Delta_0 f_0^{(1)} + \gamma f_0^{(1)} &= -\frac{\gamma_1}{2} \left( f_0^2 + \frac{1}{5} A_2^2 f_2^2 \right), \\ \Delta_2 f_2^{(1)} + \gamma f_2^{(1)} &= -\gamma_1 A_2 f_2 \left( f_0 + \frac{1}{7} A_2 f_2 \right), \\ \Delta_4 f_4^{(1)} + \gamma f_4^{(1)} &= -\frac{9}{35} \gamma_1 A_2^2 f_2^2, \\ \Delta_l \Phi_l + \gamma \Phi_l &= 0, \quad l = 2, 4, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Delta_l = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d}{dR} \right) - \frac{l(l+1)}{R^2}, \quad \gamma = \frac{dg}{df}, \quad \gamma_1 = \frac{d^2 g}{df^2}. \quad (9)$$

Решения этой же системы в точке  $R_0$  — границе соответствующей невращающейся конфигурации, позволяют найти значения постоянных  $c_0, c_1, c_2, A_2, A_l^{(1)}, k_0, k_{1l}, k_{2l}, q_l, q_l^{(1)}$ , [9], фигурирующих в

разложениях (4)–(7), которые вместе с (5) и (6) дают возможность определить важнейшие интегральные характеристики звезды—массу  $M$ , квадрупольный момент  $Q$ , экваториальный  $R_e$  и полярный  $R_p$  радиусы. Действительно,

$$\begin{aligned} M &= -\frac{k_0 + \beta k_{10} + \beta^2 k_{12}}{k}, \\ Q &= \beta k_{12} + \beta^2 k_{22}, \\ R_e &= R_0 + \beta L_1 + \beta^2 L_2, \\ R_p &= R_0 + \beta (q_0 + q_2) + \beta^2 (q_0^{(1)} + q_2^{(1)} + q_4^{(1)}). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$L_1 = q_0 - 0.5 q_2, \quad L_2 = q_0^{(1)} - 0.5 q_2^{(1)} + 0.375 q_4^{(1)}.$$

При фиксированной центральной плотности величина параметра  $\beta$  изменяется от 0 до некоторого максимального значения  $\beta_{\max}$ , которое легко получить из условия отсутствия истечения вещества с экватора конфигурации, т. е. из равенства на экваторе центробежной и гравитационной сил

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)_{R=R_e} = 2G_c \beta_{\max} R_e.$$

Откуда, используя (5) и ограничиваясь в разложении по  $\beta$  членами, пропорциональными  $\beta^2$ , получим

$$\beta_{\max} = -\frac{P}{2N} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4M_0 N}{P^2 R_0^2}} \right). \quad (11)$$

Здесь  $M_0$  — масса конфигурации в отсутствие вращения,

$$\begin{aligned} P &= -2G_c R_0 - \frac{2M_0 L_1}{R_0^3} - \frac{k_{10}}{R_0^2} + \frac{3k_{12}}{2R_0^4}, \\ N &= -2G_c L_1 - \frac{M_0}{R_0^4} (2L_2 R_0 - 3L_1^2) - \frac{6k_{12} L_1}{R_0^5} + \\ &+ \frac{2k_{10} L_1}{R_0^3} - \frac{k_{20}}{R_0^2} + \frac{3k_{22}}{2R_0^4} - \frac{15k_{24}}{8R_0^6}. \end{aligned}$$

Таким образом, все величины, определяющие структуру и интегральные параметры конфигурации, вещество которых определяется однопараметрическим уравнением состояния, можно найти решением

системы уравнений (8) на границе  $R_0$  соответствующей невращающейся звезды.

3. Состояние вещества в белых карликах подробно изучалось в работах [10—12]. В интервале центральных плотностей  $10^6 \text{ г/см}^3 \leq \rho_c \leq 1.8 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$  вещество состоит преимущественно из голых ядер и свободного газа вырожденных электронов. В таких условиях плотность вещества определяется ядрами, а давление электронами. Поэтому, если ввести  $x = p_e/m_e c$ , то уравнение состояния белых карликов запишется в следующем виде:

$$\rho = \frac{32}{3} \left( \frac{m_e}{m_n} \right)^3 K_n \left( \frac{A}{Z} \right) x^3, \quad (12)$$

$$P = \frac{4}{3} \left( \frac{m_e}{m_n} \right)^4 K_n [x(2x^2 - 3)\sqrt{1+x^2} + 3 \ln(x + \sqrt{1+x^2})].$$

Здесь  $K_n = m_n^4 c^5 / 32 \pi^2 \hbar^3$ ,  $p_e$  — граничный импульс Ферми электрона,  $A$  и  $Z$  — атомный вес и номер соответствующих ядер. Обычно принято считать,  $A/Z = 2$  [10], однако в условиях полного вырождения при заданном  $A$  заряд  $eZ$  зависит от граничной энергии электронов и уменьшается с уменьшением их плотности [11], что приводит к „нейтронизации“ ядер и достаточно точно аппроксимируется полиномом [12]:

$$\frac{A}{Z} = 2 + 1.255 \cdot 10^{-2} x + 1.755 \cdot 10^{-5} x^2 + 1.376 \cdot 10^{-6} x^3. \quad (13)$$

Для указанных моделей белых карликов система уравнений (8) проинтегрирована в довольно широком диапазоне центральных плотностей — от  $\rho_c = 1.014 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$  до  $\rho_c = 2.449 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$ . Часть уравнений системы (8) не позволяет вести интегрирование от центра конфигурации  $R = 0$ . Поэтому интегрирование начато со значений  $R = r_0$ , причем величина  $r_0$  выбиралась по возможности малой. При этом в качестве начальных условий приняты следующие:  $R = r_0$ ,  $g = g_c$ ,  $f = f_c$ ,  $(3/2g_c)f_0 = f_2 = f_2^{(1)} = r_0^2$ ,  $f_0^{(1)} = 0$ ,  $f_4^{(1)} = \Phi_4 = r_0^4$ . Отметим, что  $f_2 = \Phi_2$ . Все расчеты выполнены для конфигураций, находящихся в критическом относительно истечения вещества состоянии, т. е. для  $\beta = \beta_{\text{max}}$ . Максимальное значение  $\beta$  и интегральные параметры (10) найдены как в линейном, так и в квадратичном по  $\beta$  приближении. Результаты интегрирования представлены рис. 1, 2, а также таблицами 1 (модели белых карликов с учетом „нейтронизации“) и 2 (модели с  $A/Z = 2$ ).

На рис. 1 показана зависимость, измеренной в единицах массы Солнца, массы вращающихся (в приближении  $\beta^*$ ) моделей белых карликов с переменным  $A/Z$  от большой полуоси  $R_e$ , измеренной в километрах (на оси абсцисс —  $\ln R_e$ ). На рис. 2 — то же для моделей с

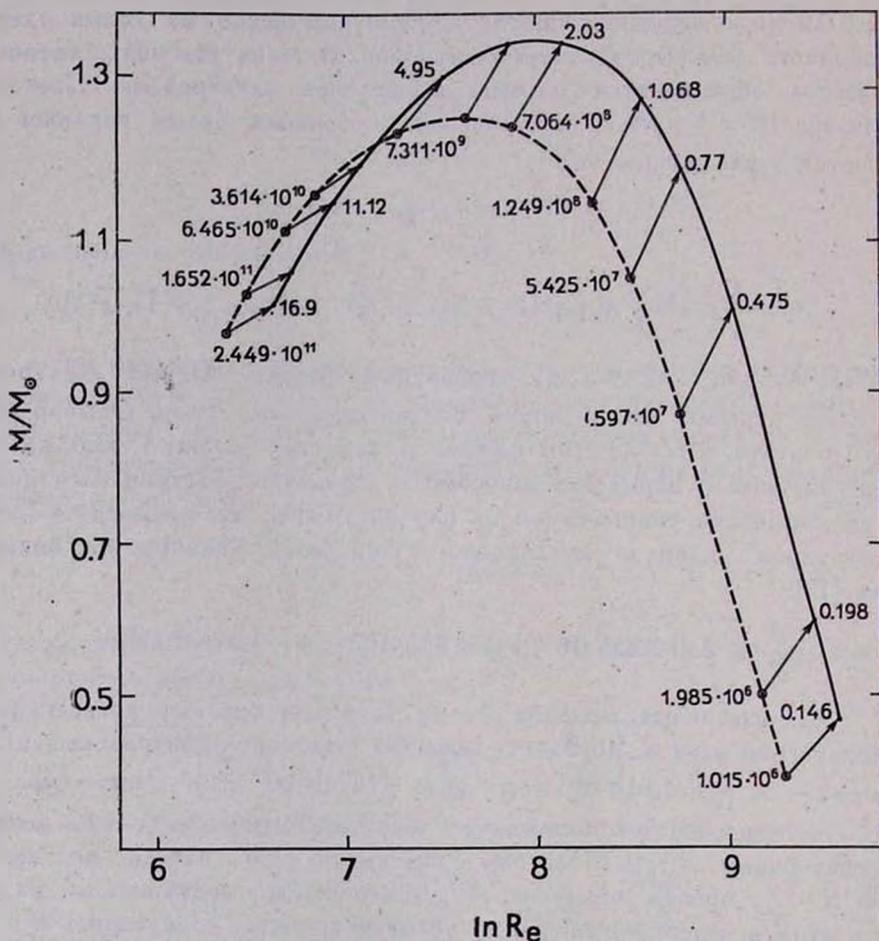


Рис. 1. Зависимость масс вращающихся моделей белых карликов с переменным  $A/Z$  от большой полуоси. На оси ординат — масса  $M$  в единицах массы Солнца. На оси абсцисс —  $\ln R_e$  (большая полуось  $R_e$  измерена в километрах). Пунктиром изображено семейство невращающихся моделей. Подробности в тексте.

$A/Z = 2$ . Для сравнения на обоих рисунках пунктиром приводится аналогичная кривая в отсутствие вращения. Стрелками соединены точки, соответствующие сферическим и вращающимся конфигурациям с одинаковой плотностью в центре. Стрелка начинается в точке,

определяющей массу и радиус сферического тела, и прочерчивает все значения этих величин для белых карликов с той же центральной

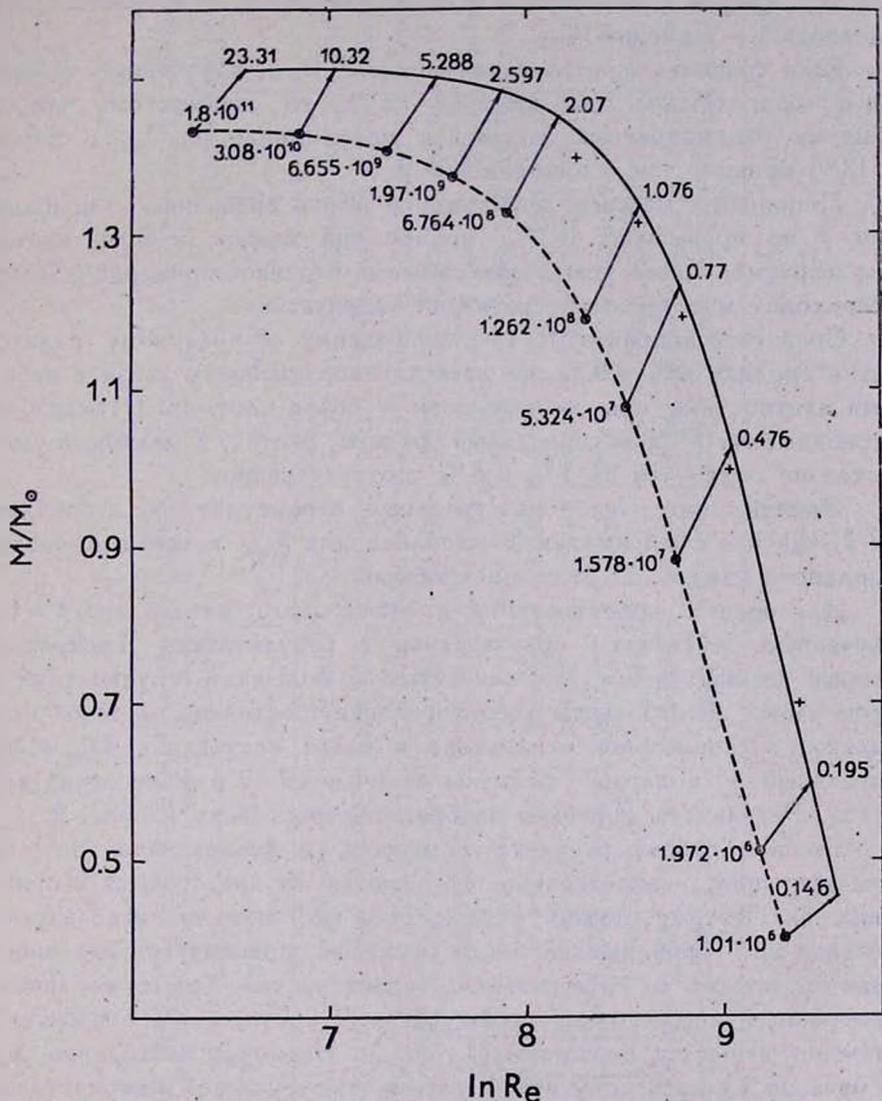


Рис. 2. Зависимость массы вращающихся моделей белых карликов с  $A/Z = 2$  от большой полуоси. На оси ординат — масса  $M$  в единицах массы Солнца. На оси абсцисс —  $\ln R_e$  (большая полуось  $R_e$  измерена в километрах). Пунктиром изображено семейство невращающихся моделей. Крестиками отмечены результаты Джеймса [3]. Подробности в тексте.

плотностью и с  $\Omega$ , увеличивающейся от 0 до  $\Omega_{\max}$ . По длине стрелки от ее начала до любой точки можно найти параметры „промежуч-

ной" конфигурации, вращающейся с интересующей нас угловой скоростью  $\Omega \leq \Omega_{\max}$ , если учесть, что полная длина стрелки соответствует  $\Omega_{\max}$ . Цифры у пунктирной кривой — центральная плотность. Цифры у сплошной — значения  $\Omega_{\max}$ .

Если сравнить критические значения  $\Omega_{\max}$ , полученные в линейном и квадратичном приближениях по  $\beta$ , то оказывается, что для обеих из рассмотренных моделей в приближении  $\beta^2$ ,  $\Omega_{\max}$  в среднем на 13% меньше, чем в приближении  $\beta$ .

Поправки к массе в приближении  $\beta^2$  по сравнению с приближением  $\beta$  не превышают 0.5%, причем они меньше у более плотных конфигураций. Масса вращающихся белых карликов примерно в 1.1 раз превосходит массу соответствующих сферических.

Сравнение поправок к экваториальному и полярному радиусам дает в среднем 4% и 2% соответственно, причем у звезд с небольшими плотностями они меньше, чем у более плотных. Отметим, что в приближении  $\beta^2$  экваториальный радиус растет, а полярный уменьшается не более чем на 5% и 3% соответственно.

Заметим, что расчет интегральных параметров как в приближении  $\beta$ , так и в приближении  $\beta^2$  выполнен для  $\beta_{\max}$ , которые вычислены отдельно в каждом из этих приближений.

Для оценки эффективности предложенного метода при  $\beta = \beta_{\max}$ , полученные результаты сравнивались с результатами Джеймса [3], который весьма точным, но связанным с большими трудностями методом нашел интегральные характеристики простейших моделей белых карликов. Максимальное отклонение в массе составляет 4%, а экваториальный и полярный радиусы отличаются от джеймсовских всего на 1%. Результаты Джеймса изображены крестиками на рис. 2.

Таким образом, результаты расчета в квадратичном по  $\beta$  приближении лишь незначительно отличаются от аналогичных в приближении  $\beta$ . Поэтому можно утверждать, что методы, использующие линейное по  $\beta$  приближение, могут успешно применяться для определения структуры и интегральных характеристик белых карликов и политропных конфигураций, находящихся в критическом относительно истечения вещества состоянии ( $\beta = \beta_{\max}$ ). Несмотря на то, что такое заключение удалось получить в рамках ньютоновской теории тяготения, нам кажется, что оно остается в силе и в релятивистской теории.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Г. С. Саакяну за многочисленные консультации.

Ереванский государственный  
университет  
Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

Таблица 1

ВАЖНЕЙШИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВРАЩАЮЩИХСЯ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ С ПЕРЕМЕННЫМ  $A/Z$ 

$\rho_c$ г/см <sup>3</sup>	$M_0/M_\odot$	$R_0$ км	Приближение $\beta$					Приближение $\beta^2$				
			$M/M_\odot$	$R_e$ км	$R_p$ км	$Q$	$\omega_{\max}$	$M/M_\odot$	$R_e$ км	$R_p$ км	$Q$	$\omega_{\max}$
$1.015 \cdot 10^6$	0.3923	$1.083 \cdot 10^4$	0.4753	$1.399 \cdot 10^4$	$9.084 \cdot 10^3$	$5.603 \cdot 10^{19}$	0.1719	0.4730	$1.433 \cdot 10^4$	$9.204 \cdot 10^3$	$5.834 \cdot 10^{19}$	0.1459
$1.985 \cdot 10^6$	0.4993	$9.574 \cdot 10^3$	0.6007	$1.233 \cdot 10^4$	$8.075 \cdot 10^3$	$5.269 \cdot 10^{19}$	0.2323	0.5985	$1.265 \cdot 10^4$	$8.163 \cdot 10^3$	$5.399 \cdot 10^{19}$	0.1976
$1.597 \cdot 10^7$	0.8694	$6.369 \cdot 10^3$	1.0145	$8.121 \cdot 10^3$	$5.507 \cdot 10^3$	$3.068 \cdot 10^{19}$	0.5537	1.010	$8.365 \cdot 10^3$	$5.583 \cdot 10^3$	$3.181 \cdot 10^{19}$	0.4752
$5.425 \cdot 10^7$	1.053	$4.907 \cdot 10^3$	1.202	$6.205 \cdot 10^3$	$4.318 \cdot 10^3$	$1.733 \cdot 10^{19}$	0.8868	1.197	$6.417 \cdot 10^3$	$4.460 \cdot 10^3$	$1.811 \cdot 10^{19}$	0.7665
$1.294 \cdot 10^8$	1.149	$4.020 \cdot 10^3$	1.292	$5.062 \cdot 10^3$	$3.580 \cdot 10^3$	$1.051 \cdot 10^{19}$	1.230	1.287	$5.248 \cdot 10^3$	$3.687 \cdot 10^3$	$1.103 \cdot 10^{19}$	1.068
$7.064 \cdot 10^8$	1.250	$2.680 \cdot 10^3$	1.369	$3.350 \cdot 10^3$	$2.438 \cdot 10^3$	$3.365 \cdot 10^{18}$	2.319	1.363	$3.487 \cdot 10^3$	$2.500 \cdot 10^3$	$3.508 \cdot 10^{18}$	2.029
$2.099 \cdot 10^9$	1.264	$2.029 \cdot 10^3$	1.366	$2.529 \cdot 10^3$	$1.867 \cdot 10^3$	$1.491 \cdot 10^{18}$	3.497	1.359	$2.637 \cdot 10^3$	$1.903 \cdot 10^3$	$1.548 \cdot 10^{18}$	3.073
$7.311 \cdot 10^9$	1.241	$1.458 \cdot 10^3$	1.322	$1.813 \cdot 10^3$	$1.356 \cdot 10^3$	$5.582 \cdot 10^{17}$	5.626	1.316	$1.895 \cdot 10^3$	$1.378 \cdot 10^3$	$5.787 \cdot 10^{17}$	4.947
$3.614 \cdot 10^{10}$	1.158	$9.478 \cdot 10^2$	1.217	$1.177 \cdot 10^3$	$8.917 \cdot 10^2$	$1.502 \cdot 10^{17}$	10.23	1.212	$1.232 \cdot 10^3$	$9.048 \cdot 10^2$	$1.536 \cdot 10^{17}$	9.038
$6.465 \cdot 10^{10}$	1.114	$8.125 \cdot 10^2$	1.165	$1.008 \cdot 10^3$	$7.675 \cdot 10^2$	$9.165 \cdot 10^{16}$	12.57	1.160	$1.056 \cdot 10^3$	$7.778 \cdot 10^2$	$8.896 \cdot 10^{16}$	11.12
$1.652 \cdot 10^{11}$	1.027	$6.425 \cdot 10^2$	1.066	$7.912 \cdot 10^2$	$6.109 \cdot 10^2$	$4.111 \cdot 10^{16}$	17.04	1.063	$8.360 \cdot 10^2$	$6.176 \cdot 10^2$	$4.199 \cdot 10^{16}$	15.10
$2.449 \cdot 10^{11}$	0.9838	$5.866 \cdot 10^2$	1.019	$7.352 \cdot 10^2$	$5.709 \cdot 10^2$	$2.925 \cdot 10^{16}$	19.05	1.016	$7.635 \cdot 10^2$	$5.651 \cdot 10^2$	$3.002 \cdot 10^{16}$	16.90

Таблица 2

ВАЖНЕЙШИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВРАЩАЮЩИХСЯ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ С  $A/Z=2$ 

$\rho_c$ $г/см^3$	$M_0/M_\odot$	$R_0$ км	Приближение $\beta$					Приближение $\beta^2$				
			$M/M_\odot$	$R_e$ км	$R_p$ км	$Q$	$\omega_{max}$	$M/M_\odot$	$R_e$ км	$R_p$ км	$Q$	$\omega_{max}$
$1.0101 \cdot 10^6$	0.3955	$1.086 \cdot 10^4$	0.4795	$1.403 \cdot 10^4$	$9.099 \cdot 10^3$	$5.713 \cdot 10^{49}$	0.1720	0.4755	$1.434 \cdot 10^4$	$9.571 \cdot 10^3$	$5.790 \cdot 10^{49}$	0.1458
$1.972 \cdot 10^6$	0.5044	$9.605 \cdot 10^3$	0.6073	$1.237 \cdot 10^4$	$8.097 \cdot 10^3$	$5.395 \cdot 10^{49}$	0.2324	0.6032	$1.268 \cdot 10^4$	$8.491 \cdot 10^3$	$5.530 \cdot 10^{49}$	0.1951
$1.578 \cdot 10^7$	0.8862	$6.405 \cdot 10^3$	1.036	$8.161 \cdot 10^3$	$5.532 \cdot 10^3$	$3.200 \cdot 10^{49}$	0.5548	1.030	$8.408 \cdot 10^3$	$5.620 \cdot 10^3$	$3.330 \cdot 10^{49}$	0.4762
$5.324 \cdot 10^7$	1.082	$4.940 \cdot 10^4$	1.238	$6.250 \cdot 10^3$	$4.342 \cdot 10^3$	$1.842 \cdot 10^{49}$	0.8911	1.232	$6.466 \cdot 10^3$	$4.485 \cdot 10^3$	$1.930 \cdot 10^{49}$	0.7700
$1.262 \cdot 10^8$	1.191	$4.062 \cdot 10^3$	1.342	$5.116 \cdot 10^3$	$3.613 \cdot 10^3$	$1.1385 \cdot 10^{49}$	1.240	1.337	$5.302 \cdot 10^3$	$3.718 \cdot 10^3$	$1.190 \cdot 10^{49}$	1.076
$6.764 \cdot 10^8$	1.328	$2.702 \cdot 10^3$	1.459	$3.380 \cdot 10^3$	$2.451 \cdot 10^3$	$3.839 \cdot 10^{48}$	2.368	1.453	$3.514 \cdot 10^3$	$2.508 \cdot 10^3$	$3.997 \cdot 10^{48}$	2.070
$1.972 \cdot 10^9$	1.377	$2.043 \cdot 10^3$	1.493	$2.547 \cdot 10^3$	$1.872 \cdot 10^3$	$1.794 \cdot 10^{48}$	3.628	1.486	$2.655 \cdot 10^3$	$1.910 \cdot 10^3$	$1.880 \cdot 10^{48}$	3.207
$6.655 \cdot 10^9$	1.407	$1.460 \cdot 10^3$	1.509	$1.817 \cdot 10^3$	$1.350 \cdot 10^3$	$7.333 \cdot 10^{47}$	6.009	1.502	$1.896 \cdot 10^3$	$1.374 \cdot 10^3$	$7.590 \cdot 10^{47}$	5.288
$3.081 \cdot 10^{10}$	1.426	$9.348 \cdot 10^2$	1.513	$1.161 \cdot 10^3$	$8.711 \cdot 10^2$	$2.354 \cdot 10^{47}$	11.70	1.506	$1.213 \cdot 10^3$	$8.852 \cdot 10^2$	$2.380 \cdot 10^{47}$	10.32
$5.324 \cdot 10^{10}$	1.430	$7.925 \cdot 10^2$	1.512	$9.832 \cdot 10^2$	$7.403 \cdot 10^2$	$1.562 \cdot 10^{47}$	14.95	1.505	$1.029 \cdot 10^3$	$7.517 \cdot 10^2$	$1.578 \cdot 10^{47}$	13.22
$1.262 \cdot 10^{11}$	1.433	$6.080 \cdot 10^2$	1.511	$7.544 \cdot 10^2$	$5.694 \cdot 10^2$	$8.316 \cdot 10^{46}$	22.25	1.504	$7.894 \cdot 10^2$	$5.779 \cdot 10^2$	$8.296 \cdot 10^{46}$	19.66
$1.797 \cdot 10^{11}$	1.435	$5.446 \cdot 10^2$	1.511	$6.755 \cdot 10^2$	$5.105 \cdot 10^2$	$6.403 \cdot 10^{46}$	26.23	1.503	$7.068 \cdot 10^2$	$5.180 \cdot 10^2$	$6.372 \cdot 10^{46}$	23.31

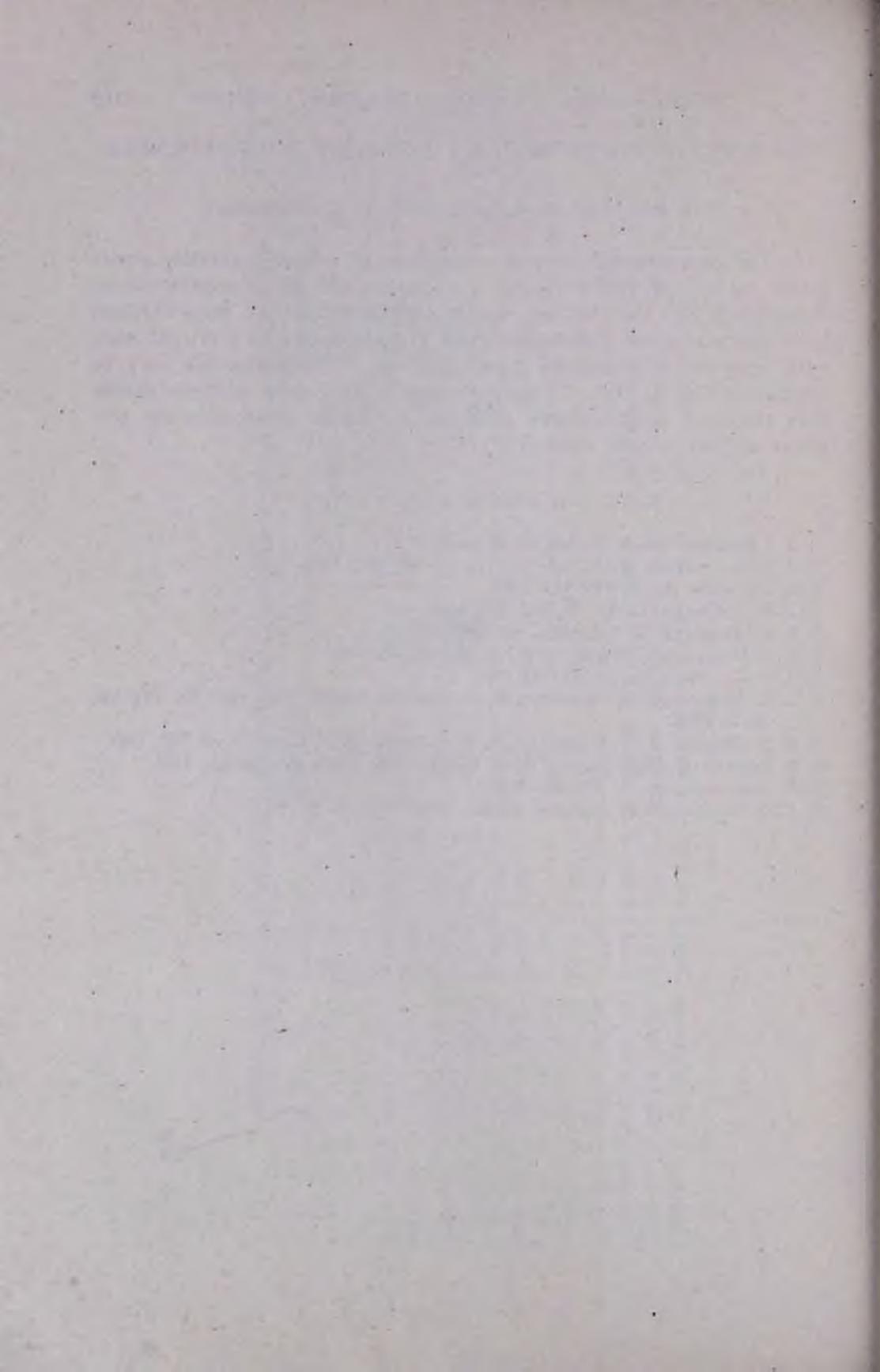
## NEWTON THEORY OF RAPIDLY ROTATING WHITE DWARFS

V. V. PAPOYAN, D. M. SEDRAKIAN, E. V. CHUBARIAN;

The structure and integral parameters of uniformly rotating equilibrium models of white dwarfs are determined in  $\Omega^4$ -approximation. It is shown that the obtained results slightly differ from those obtained in  $\Omega^2$ -approximation. Consequently for a configuration in a critical state with respect to equatorial instability, the  $\Omega^2$ -approximation may be applied as well as the  $\Omega^4$ -approximation. Comparison of these results with the more exact results obtained by James shows that the proposed method is quite accurate.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. S. Chandrasekhar, M. N., 93, 390, 1933.
2. S. Chandrasekhar, N. R. Lebovitz, Ap. J., 136, 1082, 1962.
3. R. A. James, Ap. J., 140, 552, 1964.
4. I. W. Roxburgh, M. N., 128, 157, 237, 1964.
5. I. W. Roxburgh, Z. Astrophys., 62, 1934, 1965.
6. J. J. Monaghan, I. W. Roxburgh, M. N., 131, 13, 1965.
7. S. P. S. Anand, Ap. J., 153, 135, 1968.
8. В. В. Паполян, Д. М. Седракиан, Э. В. Чубарян, Сообщ. Бюр. обс., 39, 101, 1968; 40, 86, 1969.
9. В. В. Паполян, Д. М. Седракиан, Э. В. Чубарян, ДАН АрмССР, 49, 237, 1969.
10. E. Schatzman, White Dwarfs, North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1958.
11. E. Schalpeter, Ap. J., 134, 669, 1961.
12. Г. С. Саакян, Э. В. Чубарян, Сообщ. Бюр. обс., 34, 99, 1963.



АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7

ФЕВРАЛЬ, 1971

ВЫПУСК 1

ЭВОЛЮЦИЯ И РАДИАЛЬНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ  
ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ С УЧЕТОМ  
ВРАЩЕНИЯ, ЭФФЕКТОВ НЕЙТРОНИЗАЦИИ И ОТО

Ю. А. ВАРТАНЯН, А. В. ОВСЕПЯН

Поступила 5 февраля 1970

Рассматривается эволюция изотермических вращающихся белых карликов, совершающих радиальные пульсации. При этом учтены как эффекты нейтронизации (процесс обратного  $\beta$ -распада), так и поправки ОТО. Вычислены для различных масс эволюционные кривые—зависимость температуры от плотности, а также точки потери устойчивости. Найдены соответствующие значения периодов пульсаций.

1. *Введение.* В работе [1] были рассмотрены последние стадии эволюции белых карликов, масса которых больше чандрасекаровского предела. Для различных масс были вычислены эволюционные кривые (зависимость температуры от плотности), а также точки потери устойчивости. При этом были учтены поправки общей теории относительности, которые, как известно [2], играют весьма важную роль при рассмотрении устойчивости белых карликов. В [3] та же задача была решена с учетом как нейтронизации (процесса обратного  $\beta$ -распада), так и поправок ОТО. Было показано, что для устойчивости белых карликов нейтронизация играет более значительную роль, нежели эффект ОТО. Независимо о роли нейтронизации было сказано также в [4].

Однако, как в [1], так и в [3], задача решалась без учета вращения. В настоящей работе рассматривается предколлапсовая эволюция изотермических белых карликов, совершающих радиальные пульсации. Задача решена с учетом вращения, эффектов нейтронизации и ОТО. Рассмотрение ведется энергетическим методом [5], применимость которого обеспечивается тем, что для белых карликов, находя-

щихся вблизи чандрасекаровского предела, в большей части конфигураций, где сконцентрирована доминирующая часть массы звезды, вырожденный электронный газ ультрарелятивистский и, следовательно, для распределения плотности можно принять политропное распределение с показателем  $n = 3$ . Изотермичность же конфигураций обеспечивается весьма большой теплопроводностью вырожденных электронов.

2. *Условия равновесия и устойчивости.* В [6], используя метод, предложенный в [7], из закона сохранения энергии для белых карликов, совершающих радиальные пульсации, было получено

$$(\partial E / \partial y_c)_{S, M, K} = 0, \quad (1)$$

$$(y_c^2 / I_0) (\partial^2 E / \partial y_c^2)_{S, M, K} = \omega^2, \quad (2)$$

где  $E$  — полная энергия звезды,  $S$  — энтропия,  $M$  — масса,  $K$  — момент вращения,  $I_0$  — момент инерции относительно центра звезды

$$I_0 = 4\pi \int_0^R \rho r^4 dr, \quad (3)$$

$y_c \equiv \rho_c^{1/3}$ ,  $\rho_c$  — значение плотности в центре конфигурации,  $\omega$  — основная частота радиальных пульсаций. Условие (1) есть условие экстремума энергии (условие равновесия звезды), а (2) — условие минимума (условие устойчивости). Значению  $y_c$ , при котором  $\omega^2 = 0$ , соответствует критическое состояние, т. е. состояние потери устойчивости.

Для первой и второй производных энергии по  $y_c$  легко получить [6]

$$\begin{aligned} (\partial E / \partial y_c)_{S, M, K} &= 3y_c^{-4} M \int_0^1 (P/\varphi(\nu)) d\nu - 0.639 GM^{5/3} - \\ &- 1.86 G^2 c^{-2} M^{7/3} y_c + 2.40 K^2 M^{-5/3} y_c, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\partial^2 E / \partial y_c^2)_{S, M, K} &= 9y_c^{-5} M \int_0^1 (\gamma - 4/3) (P/\varphi(\nu)) d\nu - \\ &- 1.86 G^2 c^{-2} M^{7/3} + 2.40 K^2 M^{-5/3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $P$  — давление,  $\gamma = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_s$  — показатель адиабаты,  $\varphi(\nu)$  — функция Эмдена с  $n = 3$ , ( $\rho = \rho_c \varphi(\nu)$ ). Если приравнять  $K$  нулю, то мы придем к соответствующим уравнениям [1].

В квазивырожденных белых карликах для давления и плотности соответственно имеем [8]

$$P = P_e + P_p = \frac{m_e c^2}{24\pi^2 \lambda_e^3} f(x) \left( 1 + \frac{4\pi^2 t^2 x \sqrt{x^2 + 1}}{f(x)} \right) + \frac{\rho k T}{\Lambda m_p}, \quad (6)$$

$$\rho = \frac{m_p}{3\pi^2 \lambda_e^3 z} x^3 \left( 1 + \frac{\pi^2 t^2 (2x^2 + 1)}{2x^4} \right), \quad (7)$$

где

$$f(x) = (2x^2 - 3)x\sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (8)$$

$$\lambda_e = \hbar/m_e c, \quad t = kT/m_e c^2, \quad z = Q/A, \quad x = p_e/m_e c,$$

$p_e$  — импульс Ферми вырожденных электронов,  $m_e$  и  $m_p$  — соответственно масса электрона и протона;  $Q$  — заряд,  $A$  — массовое число ядер. В дальнейшем мы предположим, что вещество состоит из ядер группы железа, т. е.  $A = 56$ .

Как будет показано в разделе 3, для белых карликов с  $M \geq 1.5M_\odot$  потеря устойчивости происходит при значениях  $t > 1$ . При этом в среде за счет рождения пар будут присутствовать в значительном количестве позитроны и казалось необходимо учесть их вклад в термодинамические величины. Однако легко показать [9], что условие квазивырожденности электронов приводит к тому, что концентрация позитронов  $n_+$  оказывается намного меньше, чем концентрация тепловых электронов (электронов, под „максвелловским хвостом“ распределения Ферми) и поэтому их вкладом можно пренебречь.

Как известно, в условиях, имеющихся в недрах белых карликов, становится возможным соединение электронов с атомными ядрами — процесс обратного  $\beta$ -распада (см., например, [5, 10]). В результате величина  $z$  зависит от граничного импульса электронов. Из условия минимума энергии, приходящей на один нуклон, для этой величины легко получить [9, 10],

$$z = z_0 (1 - \alpha \sqrt{x^2 + 1}); \quad z_0 = 26/56; \quad \alpha = 5.317 \cdot 10^{-3}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7) и (8) и воспользовавшись тем, что электронный газ ультрарелятивистский ( $x \gg 1$ ) и квазивырожден ( $t/x \ll 1$ ), для  $P$  и  $\rho$  окончательно получим

$$P = \frac{m_e c^2}{12\pi^2 \lambda_e^3} x^4 (1 - 1/x^2 + 2\pi^2 t^2/x^2 + 4t/Qx), \quad (10)$$

$$\rho = \frac{m_p}{3\pi^2 \lambda_e^3 z_0} x^3 (1 + \pi^2 t^2/x^2 + \alpha x). \quad (11)$$

В том же приближении для энтропии на грамм вещества легко получить

$$s = (k/Am_p) \left[ \pi^2 Q t/x + (3/2) \ln(t/x^2) + \ln((2I+1) Q 3\pi^2 (Am_p/2\pi m_e)^{3/2}) + \frac{5}{2} \right], \quad (12)$$

где  $I$  — спин ядра.

Перейдем теперь к вычислению величины  $(\gamma - 4/3)P$ , входящей в уравнение (2). Из определения  $\gamma$  имеем

$$(\gamma - 4/3)P = \rho (\partial P / \partial \rho)_s - (4/3)P. \quad (13)$$

Но

$$(\partial P / \partial \rho)_s = \frac{\partial(P, s) / \partial(x, t)}{\partial(\rho, s) / \partial(x, t)} = \frac{(\partial P / \partial x)_t - (\partial P / \partial t)_x (\partial s / \partial x)_t / (\partial s / \partial t)_x}{(\partial \rho / \partial x)_t - (\partial \rho / \partial t)_x (\partial s / \partial x)_t / (\partial s / \partial t)_x}. \quad (14)$$

Тогда, имея в виду (10)–(14), после вычислений получим

$$(\gamma - 4/3)P = \frac{m_e c^2}{9\pi^{3/2} \kappa_e^3} \left[ x^2/2 - \alpha x^3/3 + tx^3/Q - (\pi^2 t^2 x^2/2Q) (3/2Q + \pi^2 t/x)^{-1} \right]. \quad (15)$$

В уравнения (4) и (5) входит также величина  $K$  — момент количества движения, которую можно выразить через  $y_e$ . Действительно

$$K = \frac{2}{3} I_0 \Omega, \quad (16)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость твердотельного вращения, а  $I_0$  — определяется соотношением (3). Выберем для  $K$  значение, при котором истечение вещества с экватора может наступать лишь на последней стадии эволюции. При этом из (16) легко показать

$$K^2 = 0.0133 M^{10/3} y_e^{-1}. \quad (17)$$

Здесь  $y_e$  определится: а) для конфигураций, масса которых меньше чандрасекаровского предела и которые кончают эволюцию в состоянии устойчивых белых карликов с  $T=0$ , из соответствующего значения центральной плотности; б) для конфигураций, масса которых больше чандрасекаровского предела, из значения центральной плотности, при которой наступает потеря устойчивости (напомним, что  $y_e = \rho_c^{1/3}$ ).

Наконец, воспользовавшись распределением  $\rho = \rho_c \varphi(\nu)$ , можно также найти распределение  $x = x_c \psi(\nu)$ . Из (11) легко получить

$$\psi = \varphi^{1/3} \left[ 1 - \frac{\alpha x_c}{3} (\varphi^{1/3} - 1) - \frac{\pi^2 t^2}{3 x_c^2} (\varphi^{-2/3} - 1) \right]. \quad (18)$$

Подставляя (10), (11), (15) и (17) в (4) и (5) и имея в виду (18), после вычисления всех численных коэффициентов, окончательно получим

$$t^2 (21.71 - 6.697 m^{2/3}) + 0.1538 t x_c + [x_c^3 (0.001488 - 0.003608 m^{2/3} - 0.0002236 m^{4/3} + 0.02471 x_c^{-1} m^{2/3}) + x_c^2 (0.58 - 0.5089 m^{2/3}) - 2.14] = 0, \quad (19)$$

$$\omega^2 = (1.227 x_c - 0.0007518 x_c^4 - 0.00006381 x_c^4 m^{4/3} + 0.02205 t x_c^2 + 0.007279 x_c^4 x_c^{-1} m^{2/3}) / m^{2/3}. \quad (20)$$

Уравнение (19) соответствует (1) и есть условие равновесия, а (20) соответствует (2);  $m = (M/M_\odot)$ ,  $M_\odot$  — масса Солнца. Члены, подчеркнутые сплошной линией, есть вклад вращения, волнистой линией — вклад ОТО, а пунктирной — вклад нейтронизации. Если в (19) и (20) подставить  $t = 0$ , то мы придем к соответствующим уравнениям работы [6].

3. *Результаты расчетов.* Рассмотрим вначале зависимость массы от центральной плотности для конфигураций, расположенных вдоль различных изотерм. Для этого придадим в (19) величине  $t = kT/m_c c^3$  определенные значения и приравняем  $x_c^* = x_c$ . Тогда (19) сведется к квадратному уравнению относительно  $m^{2/3}$ . Каждому значению  $x_c$  будет соответствовать определенное значение  $m$ . На рис. 1 изображены кривые  $m_T(x)$ , соответствующие различным значениям температуры  $t$ , значения которых выписаны рядом с кривыми. Для выявления роли вращения приведены также кривые для тех же значений температуры при отсутствии вращения (пунктирные кривые). На кривых равновесия показаны точки потери устойчивости (точки, в которых  $\omega^2 = 0$ ). Из рис. 1 видно, что лишь в случае низких температур ( $t \approx 0.1$ ) вид кривых  $m_T(x)$  такой же, как в случае холодных конфигураций. С увеличением температуры вид этих кривых меняется: они не имеют максимума. Учет вращения, хотя и не меняет общего характера кривых для определенного значения  $t$ , приводит к увеличению как массы, так

и центральной плотности, при которой происходит потеря устойчивости. На рис. 2 приводится зависимость  $\omega^2$  от центральной плотности для различных изотерм: а) в случае предельного вращения (когда наступает истечение) — сплошные кривые; б) в случае отсутствия вращения — пунктирные кривые. Мы замечаем, что увеличение температуры приводит к увеличению значения как критической плотности, так и максимума  $\omega^2$ . Это происходит по той причине, что в условии стабильности (20) температурный член, который обусловлен „максвелловским хвостом“ распределения Ферми вырожденных электронов и ядрами, входит с положительным знаком, т. е. играет стабилизирующую роль.

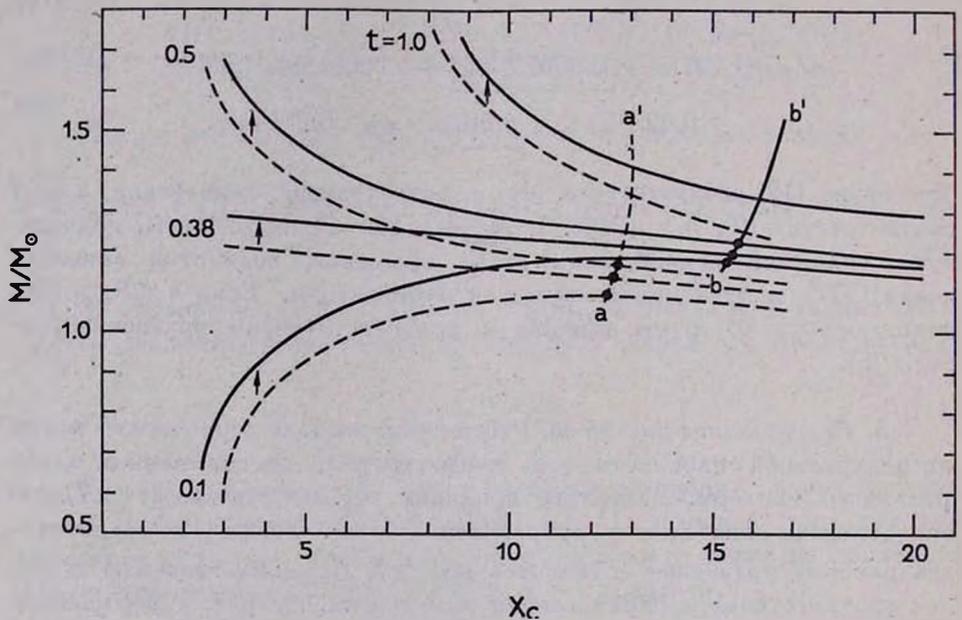


Рис. 1. Зависимость массы от центральной плотности для конфигураций, расположенных вдоль различных изотерм. Рядом с кривыми приводятся соответствующие им значения  $t = kT/mc^2$ . Пунктирные кривые относятся к невротающимся конфигурациям, а сплошные — к вращающимся с предельной угловой скоростью. Линия  $aa'$  соответствует точкам потери устойчивости невротающихся конфигураций, а  $bb'$  — вращающихся.

Перейдем теперь к рассмотрению эволюционных кривых. Прежде всего необходимо найти значение  $x^*$ . Рассмотрим сперва случай, когда  $t$  меньше чандрасекаровского предела — значения максимальной массы холодных конфигураций. В этом случае звезда заканчивает эволюцию на устойчивой ветви холодных белых карликов. В [6] для холодных

конфигураций были вычислены кривые  $m(x_c)$  для различных значений  $l = \Omega/\Omega_{\max}$  ( $\Omega_{\max}$  — угловая скорость, при которой начинается истечение), из которых для данного  $m$  мы можем определить  $x_c$  и отождествить его с  $x_c^*$ . В случае же, когда  $m$  больше предельной массы холодных конфигураций, звезда квазиравновесно переходит от устойчивой ветви одной изотермы на другую, пока не придет в состояние

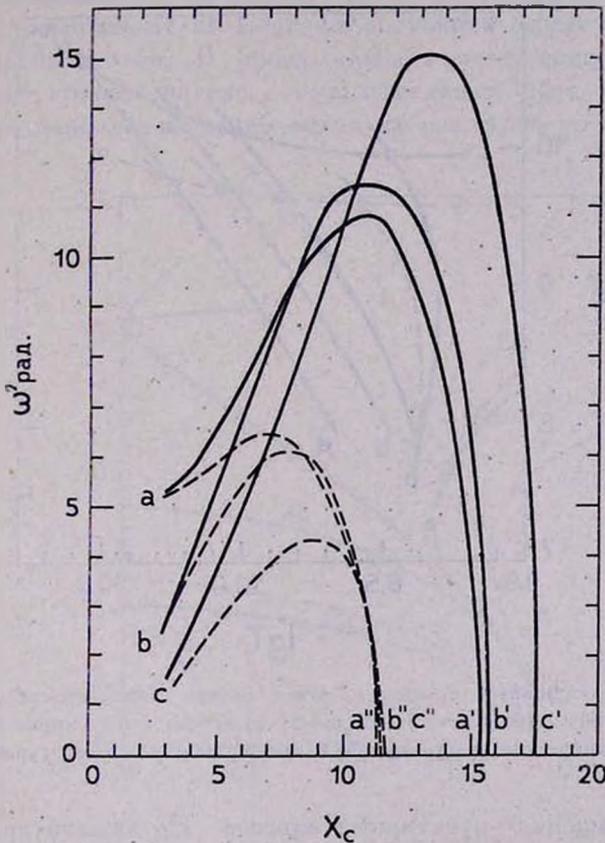


Рис. 2. Зависимость  $\omega^2$  от параметра  $x_c$  для различных изотерм. Пунктирные кривые относятся к случаю отсутствия вращения, а сплошные — к вращающимся конфигурациям.  $t=0.05$  (для  $aa'$  и  $aa''$ );  $t=0.5$  (для  $bb'$  и  $bb''$ );  $t=2.0$  (для  $cc'$  и  $cc''$ ).

потери устойчивости, после чего наступает коллапс. В этом случае  $x_c^*$  будет соответствовать плотности критического состояния — состояния потери устойчивости. Для нахождения этой величины зададим в (19) и (20)  $m$  и, приравняв  $\omega^2 = 0$ , решим совместно эти два урав-

нения. При этом мы найдем значения  $t$  и  $x_c$ , при которых наступает потеря устойчивости.

Имея значения  $x_c^0$  для каждого  $m$  из (19), придавая значения  $x_c$ , мы можем найти соответствующие значения  $t$ , т. е. кривые  $t_M(x_c)$ . Для различных масс эти кривые изображены на рис. 3. Для этих же значений масс приводятся также эволюционные кривые и в случае

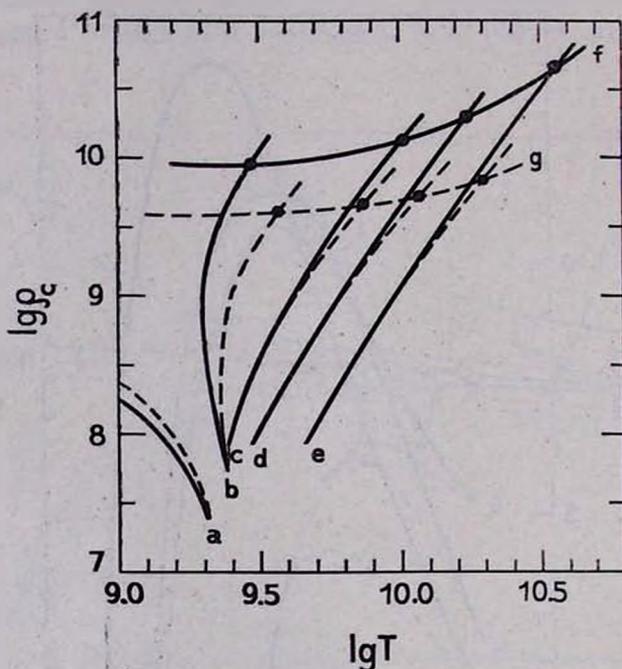


Рис. 3. Эволюционные кривые и точки потери устойчивости для различных масс. а)  $m=1$ ; б)  $m=1.2$ ; в)  $m=1.5$ ; д)  $m=2$ ; е)  $m=3$ ; ф и г—линии потери устойчивости соответственно для вращающихся и невращающихся конфигураций.

отсутствия вращения—пунктирные кривые. На каждой кривой приводятся точки потери устойчивости, которые соединены линией потери устойчивости. Мы замечаем, что для невращающихся конфигураций значения плотностей потери устойчивости весьма слабо зависят от массы—кривая почти горизонтальна. В работе [1], где не был учтен эффект обратного  $\beta$ -распада, уже при значениях  $M = 3M_\odot$  эта кривая сворачивала вниз, т. е. для таких масс потеря устойчивости происходила при меньших плотностях, что было обусловлено учетом эффекта ОТО. При учете же нейтронизации вклад члена ОТО даже при таких относительно больших массах оказывается малым и поэтому этот эффект

не наблюдается. В случае же вращающихся конфигураций с увеличением массы увеличивается также значение критической плотности— кривая  $f$  при увеличении массы идет вверх. Это обусловлено тем, что в условии устойчивости (20) с увеличением массы увеличивается также член вращения, который входит с положительным знаком.

Из рис. 3 видно, что почти для всех конфигураций, масса которых больше чандрасекаровского предела, подход к состоянию потери устойчивости происходит с отрицательной теплоемкостью. Для звезд же, которые заканчивают эволюцию в состоянии белых карликов, теплоемкость положительна. В обоих случаях учет вращения смещает эволюционные кривые налево, т. е. замедляет рост температуры с сжатием. Это наиболее наглядно видно на рис. 4, на котором отдельно

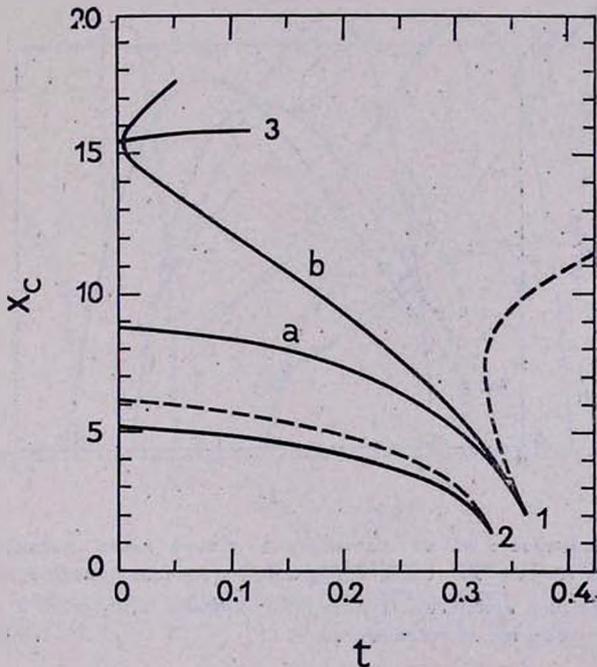


Рис. 4. Эволюционные кривые для масс:  $M=1.14 M_{\odot}$  (кривые, выходящие из точки 1) и  $M=1 M_{\odot}$  (кривые, выходящие из точки 2).

приведены эволюционные кривые для двух малых масс:  $M=1.142 M_{\odot}$  (кривые, выходящие из точки 1) и  $M=1 M_{\odot}$  (кривые, выходящие из точки 2). Звезда с  $M=1.142 M_{\odot}$  соответствует состоянию потери устойчивости при  $\Omega = \Omega_{\max}$  и  $T=0$ . Так как на кривой  $m(x_c)$  эта точка лежит за максимумом [6], то для данной массы, имеется также

другое состояние с меньшей центральной плотностью и соответственно большим моментом вращения (см. (17)), при котором хотя и начинается истечение, но состояние устойчиво. Поэтому для конфигурации с  $M = 1.142 M_{\odot}$  мы приводим две эволюционные кривые, соответствующие различным значениям момента вращения. В обоих случаях истечение наступает при  $T = 0$ . Однако в случае большего момента вращения (кривая 1a) конфигурация кончает эволюцию в устойчивом состоянии, в то время как в состоянии 1b — в момент истечения теряет устойчивость. Масса  $M = 1 M_{\odot}$  меньше предельной массы невращающихся холодных белых карликов и поэтому для нее не может наблюдаться аналогичная ситуация. Мы замечаем, что чем больше момент вращения, тем больше кривая смещается налево, т. е. стабильность увеличивается с увеличением момента вращения  $K$  (см. (5)).

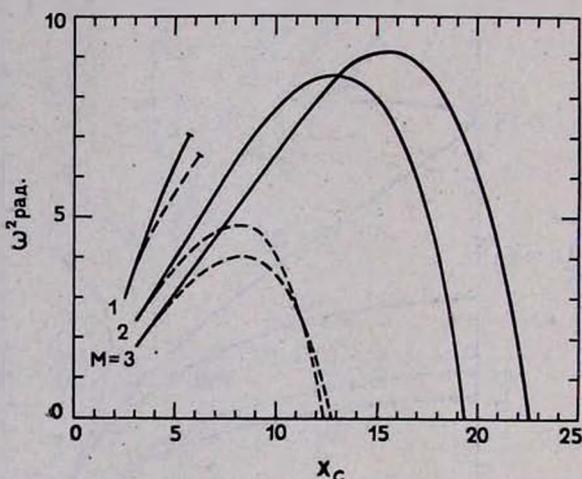


Рис. 5. Зависимость  $\omega^2$  от плотности в центре вдоль эволюционных кривых соответствующих масс  $M = 1M_{\odot}$ ,  $2M_{\odot}$ ,  $3M_{\odot}$ , (значения масс приводятся рядом с соответствующими им кривыми). Пунктирные кривые относятся к невращающимся конфигурациям с теми же значениями масс.

На рис. 5 и 6 для различных масс приводится зависимость  $\omega^2$  соответственно от центральной плотности и температуры. Пунктирные кривые относятся к невращающимся конфигурациям с теми же массами. Из этих рисунков видно, что лишь для конфигураций, которые заканчивают эволюцию на устойчивой ветви холодных белых карликов, кривые монотонны. В остальных случаях все кривые имеют максимум, который соответствует минимальному периоду пульсаций для дан-

ной массы. Наличие максимума  $\omega^2$  обусловлено следующим обстоятельством. Первоначально с ростом плотности для звезды определенной массы устойчивость увеличивается. Здесь сказывается стабилизирующая роль вращения (энергия вращения с увеличением плотности при постоянной массе и моменте вращения растет как  $\rho^{2/3}$ ). При этом пока роль эффектов нейтронизации и ОТО мала. Однако, так как эти члены зависят от плотности сильнее, чем эффект вращения (см. (20)), то с увеличением плотности в некоторый момент они становятся больше эффекта вращения и так как они отрицательны, то стабильность начинает уменьшаться и  $\omega^2$  при определенном значении  $\rho_c$  приравняется нулю — конфигурация становится неустойчивой.

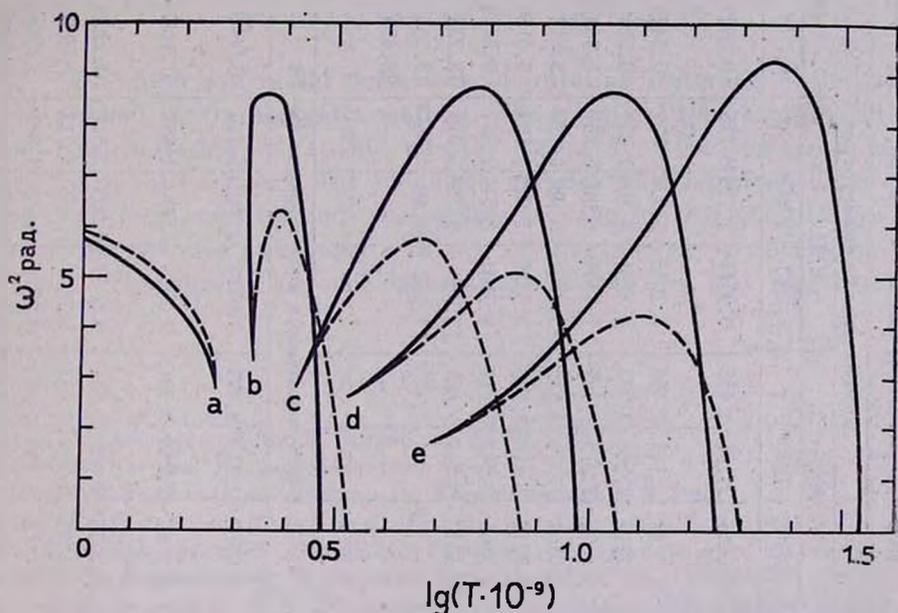


Рис. 6. Зависимость  $\omega^2$  от температуры вдоль эволюционных кривых. Пунктирные кривые относятся к невротающимся конфигурациям, а сплошные — к вращающимся. Для кривых а)  $m=1$ ; б)  $m=1.2$ ; в)  $m=1.5$ ; д)  $m=2$ ; е)  $m=3$ .

В табл. 1 для различных значений масс приводятся значения центральной плотности и им соответствующие значения температуры и периода пульсаций  $\tau$  ( $\tau = 2\pi/\omega$ ) в случае момента вращения, при котором истечение возможно только в конце эволюции. Для сравнения приводятся для тех же масс значения соответствующих величин при отсутствии вращения.

ЗАВИСИМОСТЬ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПЕРИОДА РАДИАЛЬНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ОТ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ  
 ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МАСС ( $\rho_c$  г/см<sup>3</sup>;  $T$  °К;  $\tau$  сек)

$x_c$	Вращающиеся конфигурации ( $\Omega = \Omega_{\max}$ )														
	$M/M_{\odot}=1$			$M/M_{\odot}=1.2$			$M/M_{\odot}=1.5$			$M/M_{\odot}=2$			$M/M_{\odot}=3$		
	$\rho_c/10^9$	$T/10^9$	$\tau$	$\rho_c/10^9$	$T/10^9$	$\tau$	$\rho_c/10^9$	$T/10^9$	$\tau$	$\rho_c/10^9$	$T/10^9$	$\tau$	$\rho_c/10^9$	$T/10^9$	$\tau$
3	0.0634	1.731	3.227	0.0665	2.191	3.458	0.07136	2.724	3.716	0.0805	3.539	4.075	0.1076	5.252	4.631
4	0.1421	1.272	2.770	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	0.2714	0.138	2.457	0.2852	2.143	2.696	0.3045	3.322	2.879	0.3424	4.869	3.133	0.4547	7.822	3.517
7	—	—	—	0.7717	2.144	2.332	0.8231	4.104	2.459	0.9249	6.411	2.644	1.2266	10.63	2.915
9	—	—	—	1.6421	2.215	2.159	1.7506	5.002	2.231	1.9667	8.067	2.354	2.6084	13.57	2.536
11	—	—	—	3.0169	2.372	2.135	3.2156	5.981	2.132	3.6131	9.801	2.190	4.7944	16.59	2.287
13	—	—	—	5.0213	2.616	2.324	5.3523	7.023	2.169	6.0154	11.59	2.133	7.9876	19.69	2.134
15	—	—	—	7.7856	2.942	3.217	8.3001	8.117	2.457	9.3314	13.44	2.207	12.400	22.85	2.064
17	—	—	—	11.444	3.344	$I_m$	12.203	9.256	3.919	13.724	15.33	2.550	18.253	26.07	2.093
19	—	—	—	—	—	—	17.213	10.43	$I_m$	19.365	17.26	4.390	25.776	29.34	2.289
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	26.430	19.23	$I_m$	35.209	32.67	2.998
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	46.799	36.05	$I_m$

Невращающиеся конфигурации ( $\Omega=0$ )

3	0.0639	1.816	3.277	0.0668	2.217	3.477	0.0716	2.748	3.737	0.0808	3.563	4.100	0.1081	5.277	4.664
4	0.1438	1.519	2.871	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	0.2749	1.092	2.625	0.2867	2.258	2.766	0.3063	3.410	2.957	0.3447	4.946	3.224	0.4585	7.901	3.630
6	0.4717	0.305	2.494	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	0.7775	2.440	2.517	0.8299	4.297	2.661	0.9336	6.572	2.871	1.2410	10.79	3.185
9	—	—	—	1.6575	2.784	2.635	1.7691	5.335	2.717	1.9907	8.338	2.875	2.6479	13.83	3.111
11	—	—	—	3.0508	3.283	4.002	3.2570	6.485	3.681	3.6666	10.207	3.631	4.8824	16.98	3.661
13	—	—	—	5.0874	3.914	$I_m$	5.4331	7.726	$I_m$	6.1198	12.159	$I_m$	8.1594	20.24	$I_m$

Выражаем глубокую благодарность академику В. А. Амбарцумяну и профессору Г. С. Саакяну за полезные обсуждения.

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

Ереванский государственный  
университет

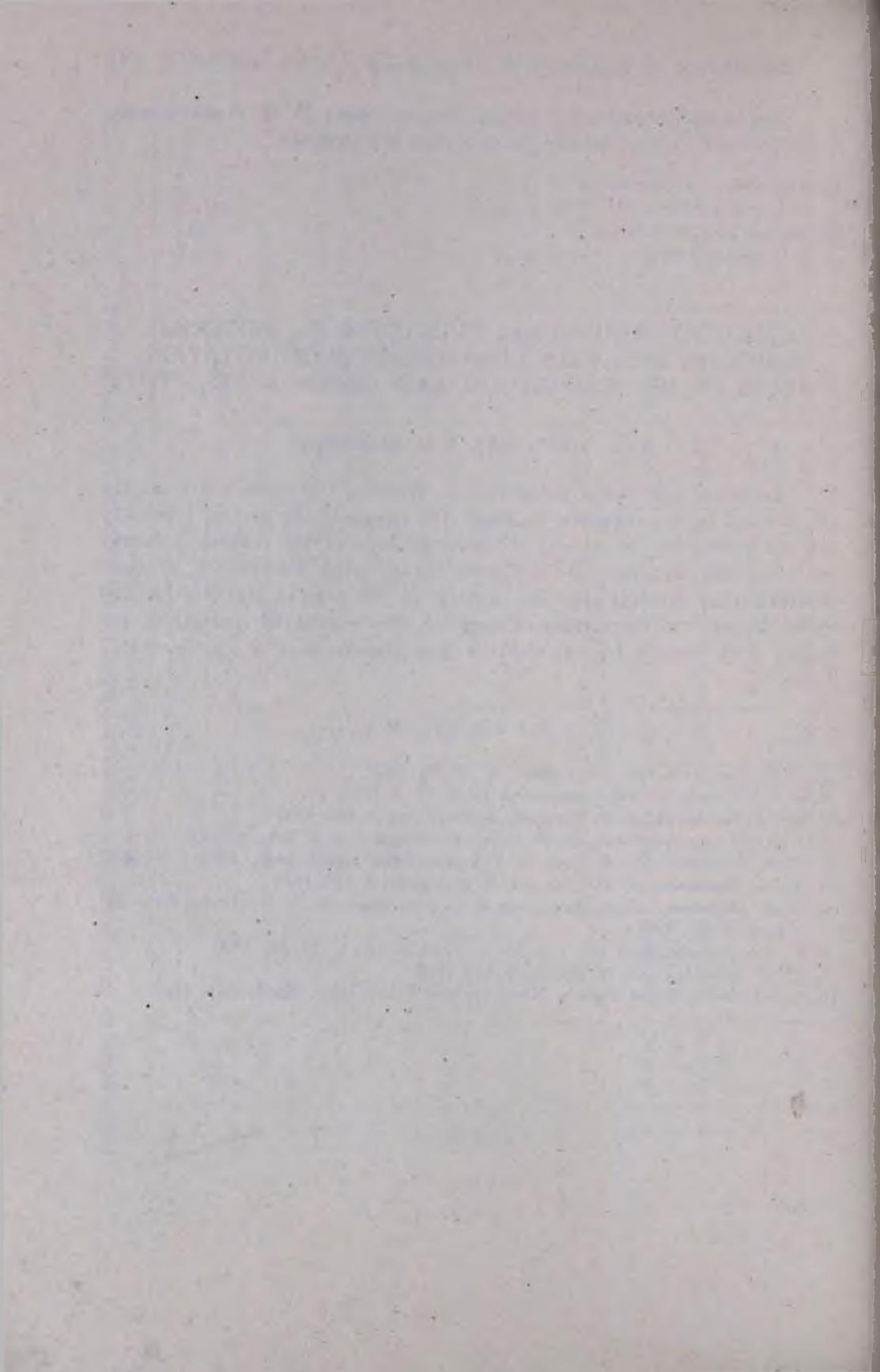
## EVOLUTION AND RADIAL PULSATIONS OF ISOTHERMIC WHITE DWARFS WITH CONSIDERATION OF ROTATION, EFFECTS OF NEUTRONIZATION AND GENERAL RELATIVITY

Yu. L. VARTANIAN, A. V. HOVSEPIAN

Evolution and radial pulsations of rotating isothermic white dwarfs are studied by the energetic method. The effects of the general relativity and neutronization of atomic nucleus (process of the reverse  $\beta$  decay) are taken into account. The evolution curves (the dependence of temperature from density) and the points of the loss of stability for different masses are calculated. Values of the period of pulsations are found. The results of calculations are shown in the fig. 1—6 and Table 1.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. С. Бисноватый-Коган, *Астрон. ж.*, 43, 89, 1966.
2. С. А. Каплан, *Уч. зап. Львовского ун-та*, 15, 4, 1949.
3. Ю. Л. Вартамян, А. В. Овсепян, *Астрофизика*, 4, 643, 1968.
4. Г. С. Бисноватый-Коган, Э. Ф. Свицов, *Астрофизика*, 5, 243, 1969.
5. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Релятивистская астрофизика*, Наука, М., 1967
6. Ю. Л. Вартамян, А. В. Овсепян, *Астрофизика*, 6, 601, 1970.
7. В. Ф. Дьяченко, Я. Б. Зельдович, В. С. Ищенко, В. В. Палайчик, *Астрофизика*, 4, 189, 1968.
8. С. Чандрасекар, *Введение в учение о строении звезд*, ИЛ, М., 1950.
9. Ю. Л. Вартамян, *Астрофизика*, 4, 373, 1968.
10. E. Schatzman, *White Dwarfs*, North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1958.



АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7

ФЕВРАЛЬ, 1971

ВЫПУСК 1.

УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ  
ТОЧЕЧНЫХ МАСС.  
I. ОГРАНИЧЕННЫЙ ПО РАДИУСУ ЦИЛИНДР

Г. С. БИСНОВАТЫЙ-КОГАН

Поступила 10 апреля 1970

Исследована устойчивость бесконечно длинного, ограниченного по радиусу цилиндра с различными равновесными функциями распределения. Применялся метод интегрирования по траекториям. Рассматривалась функция распределения по оси  $z$   $f(v_z)$ , состоящая из двух взаимно проникающих пучков с одинаковыми тепловыми разбросами и произвольной относительной скоростью. Получено, что при подавлении джинсовской неустойчивости, за счет выбора достаточно большого теплового разброса по  $z$ , отсутствует и пучковая неустойчивость при любой относительной скорости пучков. В противоположность плазме, где с увеличением относительной скорости всегда появляется пучковая неустойчивость, в гравитирующем цилиндре увеличение относительной скорости пучков способствует стабилизации системы.

1. *Введение.* Аналогия электростатических и гравитационных сил позволила применить мощный аппарат кинетической теории устойчивости плазмы для исследования устойчивости гравитирующих систем точечных масс [1–8]. Как уже отмечалось во многих работах по гравитационной неустойчивости, исследование устойчивости гравитирующей среды осложняется тем, что однородное состояние не является равновесным, поэтому необходима неоднородность, анизотропия или вращение для существования равновесия в гравитирующей среде. В работах [1–6] была получена пучковая неустойчивость однородной среды при отсутствии равновесного состояния. В [8] получена анизотропная неустойчивость гравитирующего цилиндра, но не проверялось, подавлена ли при этом джинсовская неустойчивость.

В работах [6, 9, 10] кинетические неустойчивости исследовались квазиклассическим методом, т. е. для коротких волн.

В настоящей работе исследуется устойчивость равновесных цилиндра и шара путем точного решения линеаризованных уравнений методом, изложенным в [11].

Рассматривается вращающийся ограниченный по радиусу цилиндр равновесие в плоскости вращения которого достигается равенством центробежной и гравитационной сил или выбором равновесной функции распределения. По оси вращения рассматривалась функция распределения  $f(v_z)$ , предложенная для плазмы Джексоном [12], позволяющая вычислять аналитически возникающие интегралы, а в остальном дающая результаты, совпадающие с максвелловским распределением.

Функция  $f(v_z)$  состояла из двух взаимно проникающих пучков с одинаковыми тепловыми разбросами и произвольной относительной скоростью. В результате получено, что при любой относительной скорости подавление джинсовской ветви колебаний за счет выбора достаточно большой температуры, аналогично гидродинамическому случаю, рассмотренному в [9], автоматически влечет за собой подавление неустойчивости на пучковой ветви колебаний. Более того, относительная скорость пучков оказывает стабилизирующее влияние на джинсовскую ветвь колебаний.

2. *Равновесные состояния однородного вращающегося цилиндра.* В декартовой системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , направленной по оси  $z$ , кинетическое уравнение для частиц одинаковой массы  $m$  имеет вид [6—8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left[ \Omega^2 x + 2\Omega v_y - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \frac{\partial f}{\partial v_x} + \\ + \left[ \Omega^2 y - 2\Omega v_x - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] \frac{\partial f}{\partial v_y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим цилиндр, бесконечный по оси  $z$ , ограниченный по радиусу  $r = r_0$ , однородной плотности  $\rho_0$ , вращающийся в плоскости  $(xy)$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Его гравитационный потенциал  $\Phi_0$ , определяемый из уравнения Пуассона, есть

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \pi G \rho_0 (x^2 + y^2) + c = \frac{\omega_0^2}{4} (x^2 + y^2) + c \\ \omega_0^2 = 4\pi G \rho_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем равновесные функции распределения такого цилиндра методом, аналогичным [13—15]. Для этого найдем интегралы урав-

нений характеристик кинетического уравнения (1) и построим функцию распределения, зависящую от этих интегралов и дающую при интегрировании по скоростям однородную плотность.

Система уравнений характеристик для потенциала (2) имеет вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{2\Omega v_y - 2\alpha x} = \frac{dv_y}{-2\Omega v_x - 2\alpha y}; \quad v_z = \text{const}$$

$$\alpha = \frac{1}{4} (\omega_0^2 - 2\Omega^2) = \frac{1}{2} (\Omega_0^2 - \Omega^2); \quad \Omega_0^2 = \omega_0^2/2. \quad (3)$$

Первый интеграл характеристической системы уравнений—сохраняющаяся величина полной энергии в плоскости вращения

$$J_1 = \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2) + \alpha (x^2 + y^2). \quad (4)$$

Второй интеграл системы (4) выражает сохранение проекции момента количества движения на ось  $z$ .

$$J_2 = 2\alpha (xv_y - yv_x) - \Omega (v_x^2 + v_y^2). \quad (5)$$

Третий, очевидный, интеграл есть сохраняющаяся скорость по оси  $z$

$$J_3 = v_z. \quad (6)$$

Функция распределения, описывающая однородный, ограниченный по радиусу, бесконечный по  $z$  цилиндр, имеет вид

$$f = -\frac{n_0}{\pi} \delta(2\alpha r_0^2 - 2J_1) \psi(J_3) \quad \begin{matrix} J_1 \leq \alpha r_0^2 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} J_1 > \alpha r_0^2 \end{matrix} \quad (7)$$

Здесь  $\int f d\vec{v} = n_0$ ,  $r_0$  — радиус цилиндра,  $\psi$  — произвольная функция. Учитывая (4), (6), можно записать функцию распределения (7) в виде

$$f = \frac{n_0}{\pi} \delta[2\alpha (r_0^2 - r^2) - v_{\perp}^2] \psi(v_z), \quad \begin{matrix} v_{\perp}^2 \leq 2\alpha (r_0^2 - r^2) \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_{\perp}^2 > 2\alpha (r_0^2 - r^2) \end{matrix} \quad (8)$$

$$v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2; \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Из (8) при  $\Omega = 0$ ,  $\alpha = \Omega_0^2/2$ , получаем решение для невращающегося цилиндра, найденное в [17]. При  $\alpha = 0$  вращение полностью компенсирует гравитацию в плоскости  $(xy)$ .

В этом случае интеграл  $J_1$  не зависит от пространственной координаты и решение, получаемое из (8), представляет собой цилиндр, где частицы в плоскости  $(xy)$  движутся по круговым траекториям. Устойчивость такого цилиндра относительно возмущений, лежащих в плоскости  $(xy)$ , рассматривалась в [9]. Случай  $\alpha = 0$  является в некотором смысле вырожденным, так как для бесконечного по радиусу цилиндра точным решением здесь является произвольная функция  $f(v_\perp^2)$ , что рассматривалось в [6—8]. Для ограниченного по радиусу цилиндра этого не будет. Бесконечный по радиусу цилиндр всегда неустойчив по Джинсу относительно возмущений с достаточной длиной волны, зависящих от  $z$ . Поэтому, как отмечено в [7, 9], справедливо только рассмотрение возмущений, не зависящих от  $z$ . Здесь рассматривается только ограниченный по радиусу цилиндр, для которого справедливо рассмотрение возмущений произвольного типа.

3. *Линеаризованное кинетическое уравнение и траектории частиц в поле невозмущенного потенциала.* Линеаризованное кинетическое уравнение, получающееся из (1), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left[ \Omega^2 x + 2\Omega v_y - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right] \frac{\partial f}{\partial v_x} + \\ + \left[ \Omega^2 y - 2\Omega v_x - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] \frac{\partial f}{\partial v_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f_0}{\partial v_y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Линеаризованное уравнение Пуассона в цилиндрических координатах  $(r, z, \varphi)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho, \quad \rho = m \int f d\vec{v}. \quad (10)$$

Для решения уравнения (9) применим метод „интегрирования по траекториям“, описанный, в применении к плазме, в работах [11, 16]. Уравнение (9) аналогично рассмотренному в [11] уравнению, описывающему плазму в продольном магнитном и радиальном электрическом полях. Вращение здесь играет роль магнитного поля, а гравитационное поле — электрического. При исследовании устойчивости плазмы обычно имеют дело с равновесными решениями, в которых частицы движутся по произвольным траекториям. В гравитации, из-за отсутствия „нейтральности“, часто приходится иметь дело с дельта-функ-

ционными равновесными решениями, в которых набор траектории невозмущенного состояния ограничен: например, цилиндр с круговыми орбитами, получающийся из (8) при  $z = 0$ , или шар с круговыми орбитами. При возмущении дельта-функционального решения возникают траектории, отличающиеся от траекторий нулевого решения. Поэтому необходимо рассмотрение возмущенных траекторий в поле невозмущенного потенциала.

Для (9) имеет место следующая система уравнений траекторий в поле потенциала (2):

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{2(\Omega v_y - \alpha x)} = \frac{dv_y}{-2(\Omega v_x + \alpha y)}; \quad \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (11)$$

При написании (11) было учтено, что  $\partial\Phi_0/\partial x - \Omega^2 x = 2\alpha x$ ,  $\partial\Phi_0/\partial y - \Omega^2 y = 2\alpha y$ .

Систему уравнений (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2\alpha x + 2\Omega \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\alpha y - 2\Omega \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (12) полностью аналогична соответствующей системе для траекторий из [11]. Так же, как в [11], введем переменную  $\xi = x + iy$ , для которой получаем из (12) уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2i\Omega \frac{d\xi}{dt} + 2\alpha\xi = 0. \quad (13)$$

Решение ищем в виде  $\xi = ae^{i\omega t}$  и после подстановки в (13) и решения характеристического уравнения

$$\omega^2 + 2i\Omega\omega - 2\alpha = 0$$

получаем ответ в виде

$$\begin{aligned} \xi &= ae^{i\omega_a t} + be^{i\omega_b t} \\ \omega_a &= -\Omega - \sqrt{\Omega^2 + 2\alpha}, \\ \omega_b &= -\Omega - \sqrt{\Omega^2 + 2\alpha}. \end{aligned} \quad (14)$$

Постоянные  $a$  и  $b$  найдем из начальных условий в момент времени  $t'$

$$\begin{aligned}\xi' &= r'e^{i\varphi'} = ae^{i\omega_a t} + be^{i\omega_b t}, \\ \frac{d\xi'}{dt'} &= v'_\perp e^{i\theta'} = i(a\omega_a e^{i\omega_a t'} + b\omega_b e^{i\omega_b t'}).\end{aligned}\quad (15)$$

Здесь  $\varphi$  — угол между радиусом-вектором частицы и осью  $x$ ,  $\theta$  — угол между радиусом-вектором скорости частицы и осью  $v_x$  в пространстве скоростей. Выражая теперь величины в момент  $t'$  через их значения в момент  $t$ , получим

$$\begin{aligned}r'e^{i\varphi'} &= \frac{re^{i\varphi}}{\omega_b - \omega_a} \left[ \omega_b e^{i\omega_a(t'-t)} - \omega_a e^{i\omega_b(t'-t)} \right] + \\ &+ i \frac{v_\perp e^{i\theta}}{\omega_b - \omega_a} \left[ e^{i\omega_a(t'-t)} - e^{i\omega_b(t'-t)} \right].\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}v'_\perp e^{i\theta'} &= ire^{i\varphi} \frac{\omega_a \omega_b}{\omega_b - \omega_a} \left[ e^{i\omega_a(t'-t)} - e^{i\omega_b(t'-t)} \right] - \\ &- \frac{v_\perp e^{i\theta}}{\omega_b - \omega_a} \left[ \omega_a e^{i\omega_a(t'-t)} - \omega_b e^{i\omega_b(t'-t)} \right].\end{aligned}\quad (17)$$

Решение третьего уравнения (12) тривиально; выражая значения в момент  $t'$  через их значения в момент  $t$ , имеем

$$v'_x = v_x; \quad z' = z + v_x(t' - t).\quad (18)$$

Для дальнейшего понадобятся выражения для  $v'^2_\perp$  и  $r'^2$ , выпишем их.

$$\begin{aligned}r'^2 &= r^2 \left\{ \frac{\omega_b^2 + \omega_a^2}{(\omega_b - \omega_a)^2} + \frac{4a}{(\omega_b - \omega_a)^2} \cos [(\omega_a - \omega_b)(t' - t)] \right\} + \\ &+ \frac{2v^2_\perp}{(\omega_b - \omega_a)^2} \{1 - \cos [(\omega_a - \omega_b)(t' - t)]\} - \frac{rv_\perp}{(\omega_b - \omega_a)^2} \{4\Omega \sin(\varphi - \theta) + \\ &+ 2\omega_b \sin[\varphi - \theta + (\omega_a - \omega_b)(t' - t)] + 2\omega_a \sin[\varphi - \theta - (\omega_a - \omega_b)(t' - t)]\}.\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}v'^2_\perp &= -r^2 2a \left\{ \frac{2\omega_a \omega_b}{(\omega_b - \omega_a)^2} + \frac{4a}{(\omega_b - \omega_a)^2} \cos [(\omega_a - \omega_b)(t' - t)] \right\} + \\ &+ \frac{v^2_\perp}{(\omega_b - \omega_a)^2} \{ \omega_a^2 + \omega_b^2 - 2\omega_a \omega_b \cos [(\omega_a - \omega_b)(t' - t)] \} + \\ &+ \frac{rv_\perp 2a}{(\omega_b - \omega_a)^2} \{ 4\Omega \sin(\varphi - \theta) + 2\omega_b \sin[\varphi - \theta + (\omega_a - \omega_b)(t' - t)] + \\ &+ 2\omega_a \sin[\varphi - \theta - (\omega_a - \omega_b)(t' - t)] \}.\end{aligned}$$

Из (18), (19) следует, что аргументы нулевой функции распределения не меняются при движении частицы в невозмущенном потенциале

$$2\alpha(r_0^2 - r'^2) - v_{\perp}'^2 = 2\alpha(r_0^2 - r^2) - v_{\perp}^2. \quad (20)$$

$$v_z' = v_z.$$

4. *Решение линеаризованного кинетического уравнения.* Левую часть уравнения (9) можно рассматривать как полную производную от функции распределения по времени, где координаты и скорости частиц меняются во времени в соответствии с (16), (17).

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}. \quad (21)$$

Интегрируя (21) по времени от  $-\infty$ , где возмущения обращаются в нуль, до  $t$ , получим

$$f = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{r}'} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}'} dt'. \quad (22)$$

Здесь  $\Phi$ ,  $f_0$  — функции  $\vec{r}'$ ,  $\vec{v}'$ , которые, в свою очередь, по формулам (16)—(18) выражаются через  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $t$ ,  $t'$ . Таким образом, (22) определяет решение линеаризованного кинетического уравнения как функцию  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $t$ .

Будем искать решение для  $f$  и  $\Phi$  в виде  $f = f e^{i(kx - \omega t)}$ ,  $\Phi = \Phi e^{i(kx - \omega t)}$ . Обозначив  $u = 2\alpha(r_0^2 - r^2) - v_{\perp}^2$ , получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_x'} = 2v_x' \frac{\partial f_0}{\partial u}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial v_y'} = 2v_y' \frac{\partial f_0}{\partial u}.$$

Подставляя это в (22) и учитывая (20), имеем

$$f e^{i(kv_z - \omega t)} = 2 \frac{\partial f_0}{\partial u} \int_{-\infty}^t \left( v_x' \frac{\partial \Phi}{\partial x'} + v_y' \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right) e^{i(kx' - \omega t')} dt' + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \int_{-\infty}^t ik \Phi e^{i(kx' - \omega t')} dt'. \quad (23)$$

Учитывая, что  $\left(v'_x \frac{\partial \Phi}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) dt' = d\Phi$  и беря первый интеграл (23) по частям с учетом (18), получим

$$f = -i \left[ 2(\omega - kv_z) \frac{\partial f_0}{\partial u} - k \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right] \int_{-\infty}^t \Phi(r', \varphi') e^{i(\omega - kv_z)(t-t')} dt' - 2 \frac{\partial f_0}{\partial u} \Phi(r, \varphi). \quad (24)$$

Подставляя в (24) функцию распределения (8) и учитывая, что  $f$  и  $\Phi$  пропорциональны  $e^{im\varphi}$ , получим для возмущенной функции распределения

$$f = i \frac{n_0}{\pi} \left[ 2(\omega - kv_z) \frac{d\delta}{du} \psi(v_z) - k\delta(u) \frac{d\psi}{dv_z} \right] \times \int_{-\infty}^t \Phi(r') e^{im(\varphi' - \varphi) + i(\omega - kv_z)(t-t')} dt' + 2 \frac{n_0}{\pi} \frac{d\delta}{du} \psi(v_z) \Phi(r). \quad (25)$$

5. *Случай  $\alpha = 0$ .* Этот случай обычно рассматривается при исследовании устойчивости гравитирующего цилиндра [6—9]. Для произвольной функции  $f_0(v^2_{\perp}, v_z)$ , являющейся решением для бесконечного по  $r$  цилиндра, функция (24) является решением линеаризованного уравнения для возмущений,  $u = -v^2_{\perp}$ . Дисперсионное уравнение можно получить, полагая в (24) все величины  $\sim e^{i(k_x x + k_y y)}$  и беря интеграл с помощью разложения в ряд по функциям Бесселя. После этого находят возмущенную плотность  $n = \int f d\vec{v}$  и, подставляя в линеаризованное уравнение Пуассона (10), получают дисперсионное соотношение, использованное в [6—8]. При этом всегда есть неустойчивость для  $k \neq 0$ .

Здесь рассматривается ограниченный по радиусу цилиндр, поэтому при  $\alpha = 0$  все частицы движутся по круговым орбитам и невозмущенная функция распределения (8) есть

$$f_0 = -\frac{n_0}{\pi} \delta(-v^2_{\perp}) \psi(v_z). \quad (26)$$

Решения уравнений для траекторий в этом случае упрощаются и из (16)—(19) имеем

$$r'^2 = r^2 - \frac{rv_{\perp}}{\Omega} \{ \sin(\varphi - \theta) - \sin[\varphi - \theta + 2\Omega(t' - t)] \} + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega^2} [1 - \cos 2\Omega(t' - t)]. \quad (27)$$

$$r'e^{i\varphi'} = re^{i\varphi} + i \frac{v_{\perp}}{2\Omega} e^{i\theta} (e^{-2i\Omega(t'-t)} - 1).$$

Для того, чтобы взять интеграл в (25), разложим  $\Phi(r')$  и  $e^{im(\varphi' - \varphi)}$  в ряд Тэйлора по степеням  $v_{\perp}$ , при этом удобно разлагать комбинации  $\Phi(r')/r'^m$  и  $[r'e^{i(\varphi' - \varphi)}]^m$ . После этого интегрируем по скоростям и получаем возмущенную плотность  $n$ . Из-за наличия  $\delta$ -функции в  $f_0$  достаточно иметь только два первых члена разложения по степеням  $v_{\perp}$ . После серии простых, но довольно громоздких вычислений, для плотности  $n$  имеем

$$n = n_0 \left[ \left( \Phi'' + \frac{\Phi'}{r} - \frac{m^2}{r^2} \Phi \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(v_s) dv_s}{4\Omega^2 - (\omega - kv_s)^2} - \Phi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(d\psi/dv_s) dv_s}{\omega - kv_s} \right]. \quad (28)$$

Здесь штрих означает производную по  $r$ . Подставляя (28) в уравнение Пуассона (10), получаем, аналогично гидродинамическому случаю [9]

$$\begin{aligned} \Phi'' + \frac{\Phi'}{r} - \left( \frac{m^2}{r^2} - q^2 \right) \Phi &= 0 & r < r_0 \\ \Phi'' + \frac{\Phi'}{r} - \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \Phi &= 0 & r > r_0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$q^2 = -k^2 \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{dv_s} \frac{dv_s}{\omega - kv_s}}{1 - \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(v_s) dv_s}{4\Omega^2 - (\omega - kv_s)^2}}.$$

Решение уравнений (29) должно быть везде конечным, обращаться в нуль на бесконечности и быть непрерывным вместе с первой производной. Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\begin{aligned} \Phi &= A J_m(qr) & r < r_0 \\ \Phi &= B k_m(kr) & r > r_0. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $J_m$  — функция Бесселя первого рода,  $k_m$  — функция Макдональда [18]. Из условия непрерывности (30) вместе с первой производной при  $r = r_0$  получаем коэффициенты  $A$ ,  $B$ , и условие существования нетривиального решения для них

$$\frac{q J_{m-1}(qr_0)}{J_m(qr_0)} = - \frac{k k_{m-1}(kr_0)}{k_m(kr_0)}. \quad (31)$$

Из (31) следует, что  $q$  имеет минимум  $q_{\min} r_0 = 2.4$  — первый нуль функции  $J_0(x)$ \*. Таким образом дисперсионное уравнение имеет вид

$$k^2 \left[ 1 - \frac{\omega^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi/dv_z}{\omega - kv_z} dv_z \right] = -q^2 \left[ 1 - \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(v_z) dv_z}{4\Omega^2 - (\omega - kv_z)^2} \right]. \quad (32)$$

Дискретный набор значений  $q$ , как функция  $k$ ,  $m$ ,  $r_0$ , задается (31). Для нас важно только то, что величина  $q$  имеет минимум

$$q_{\min} = \frac{2.4}{r_0}.$$

6. *Случай  $\alpha = 0$ . Функция распределения Джэксона.* Для того, чтобы интегралы, входящие в дисперсионное уравнение (32), можно было взять аналитически, Джэксоном в аналогичном случае плазмы была предложена [12] функция

$$\psi(v) = \frac{\Delta}{2\pi} \left[ \frac{1}{(v-u)^2 + \Delta^2} + \frac{1}{(v+u)^2 + \Delta^2} \right]. \quad (33)$$

Эта функция очень похожа на максвелловскую и удобна для исследования пучковой неустойчивости. Здесь  $\Delta$  — тепловой разброс пучка,  $2u$  — относительная скорость пучков. При  $u < \Delta/\sqrt{3}$  функция распределения (33) имеет только один горб. При больших  $u$ ,  $\psi(v)$  имеет уже два горба и минимум при  $v = 0$ . Неустойчивость в плазме имеет место при  $u > \Delta$  и начинается с самых длинных волн [12]. Воз-

\* Это утверждение не вполне точно, подробнее см. [20].

никновение неустойчивости со стороны длинных волн характерно для пучковой неустойчивости в плазме. Для взятия интегралов в (32) воспользуемся правилом обхода полюсов подынтегральных выражений, найденным Ландау [19]. В результате получаем дисперсионное уравнение в виде

$$1 + \frac{\omega_0^2}{k^2} \frac{\left(\frac{\omega}{k} + i\Delta\right)^2 + u^2}{\left[\left(\frac{\omega}{k} + i\Delta\right)^2 - u^2\right]^2} =$$

$$= -\frac{q^2}{k^2} \left\{ 1 + \frac{\omega_0^2}{k^2} \frac{\left(\frac{\omega}{k} + i\Delta\right)^2 + u^2 - 4\frac{\Omega^2}{k^2}}{\left[\left(\frac{\omega}{k} + i\Delta\right)^2 + u^2 - 4\frac{\Omega^2}{k^2}\right]^2 - 4u^2\left(\frac{\omega}{k} + i\Delta\right)^2} \right\}. \quad (34)$$

Так же, как в плазме, здесь наиболее неустойчивыми являются длинные волны. Действительно, рассмотрим сначала случай  $u = 0$ . Тогда из (34) имеем

$$1 + \frac{\omega_0^2/k^2}{\left(\frac{\omega}{k} + i\Delta\right)^2} = -\frac{q^2}{k^2} \left\{ 1 + \frac{\omega_0^2}{k^2} \left[ \left(\frac{\omega}{k} + i\Delta\right)^2 - 4\frac{\Omega^2}{k^2} \right]^{-1} \right\}.$$

$$\omega_0^2 = 2\Omega^2 \quad (35)$$

Решение для  $z = (\omega/\Omega + i(k\Delta/\Omega))^2$ , выражаемое через  $x = k^2/q^2$ , имеет вид

$$z = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{8x}{1+x}}. \quad (36)$$

Неустойчивость может возникнуть только на ветви со знаком „-“ причем, так как функция  $\frac{1}{x} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8x}{1+x}}\right)$  монотонно „растет с ростом  $x$ , наиболее неустойчивыми являются длинные волны. При  $x \rightarrow 0$  имеем

$$\omega_{1,2} = -ik \left( \Delta \pm 2\frac{\Omega}{q} \right), \quad \omega_{3,4} = \pm \sqrt{2} \Omega - ik\Delta. \quad (37)$$

Из (37) следует, что при  $\Delta > 2\Omega/q_{\min}$  джинсовская неустойчивость по оси  $z$  подавлена и при  $u = 0$  вращающийся цилиндр радиуса  $r_0$  с

функцией распределения (33) устойчив. Очевидно, что этот вывод сохраняется для любой функции распределения по  $v_x$ , не имеющей горбов при  $v = 0$  и обладающей достаточным тепловым разбросом. Этот же вывод получен в [9] с помощью анизотропной гидродинамики.

Рассмотрим теперь случай  $u \neq 0$ ,  $k \rightarrow 0$ . В этом случае неустойчивой может стать ветвь  $\omega = -ik(\Delta - 2\Omega/q)$ . Обозначив  $p = (u^2 q^2)/\Omega^2$ , получим из (34) решение в виде

$$\frac{z}{x} = p - 2 \pm 2\sqrt{1-2p}. \quad (38)$$

При малых  $p$  имеем

$$\left(\frac{z}{x}\right)_1 = -4 + 3p; \quad \left(\frac{z}{x}\right)_2 = -p.$$

При  $p > 1/2$  имеем

$$I_m \sqrt{\frac{z}{x}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(V p^2 + 4p - p + 2)} \rightarrow \pm \sqrt{2}. \\ p \rightarrow \infty.$$

Таким образом наличие относительной скорости двух пучков с тепловым разбросом оказывает стабилизирующее воздействие, прямо противоположное случаю плазмы. Подавление джинсовской неустойчивости влечет за собой затухание пучковых ветвей колебаний. При наличии скорости  $u$  для стабилизации джинсовской неустойчивости цилиндра требуется меньший тепловой разброс, чем при  $u = 0$ .

Именно при изменении  $u$  от 0 до  $\infty$  необходимый для устойчивости тепловой разброс уменьшается от  $2\Omega/q_{\min}$  до  $\sqrt{2}\Omega/q_{\min}$ , т. е. требуется подавление неустойчивости как бы каждого пучка в отдельности с плотностью  $\rho_j/2$ .

Таким образом, кинетическая энергия пучка препятствует гравитации и способствует затуханию колебаний, а не их раскачке, как в плазме.

Выражаю благодарность А. Б. Михайловскому и А. М. Фридману за полезное обсуждение.

Институт прикладной математики  
АН СССР

THE STABILITY OF THE GRAVITATING SYSTEMS OF POINT  
MASSES I. THE FINITE CYLINDER OF RADIUS

G. S. BISNOVATY-KOGAN

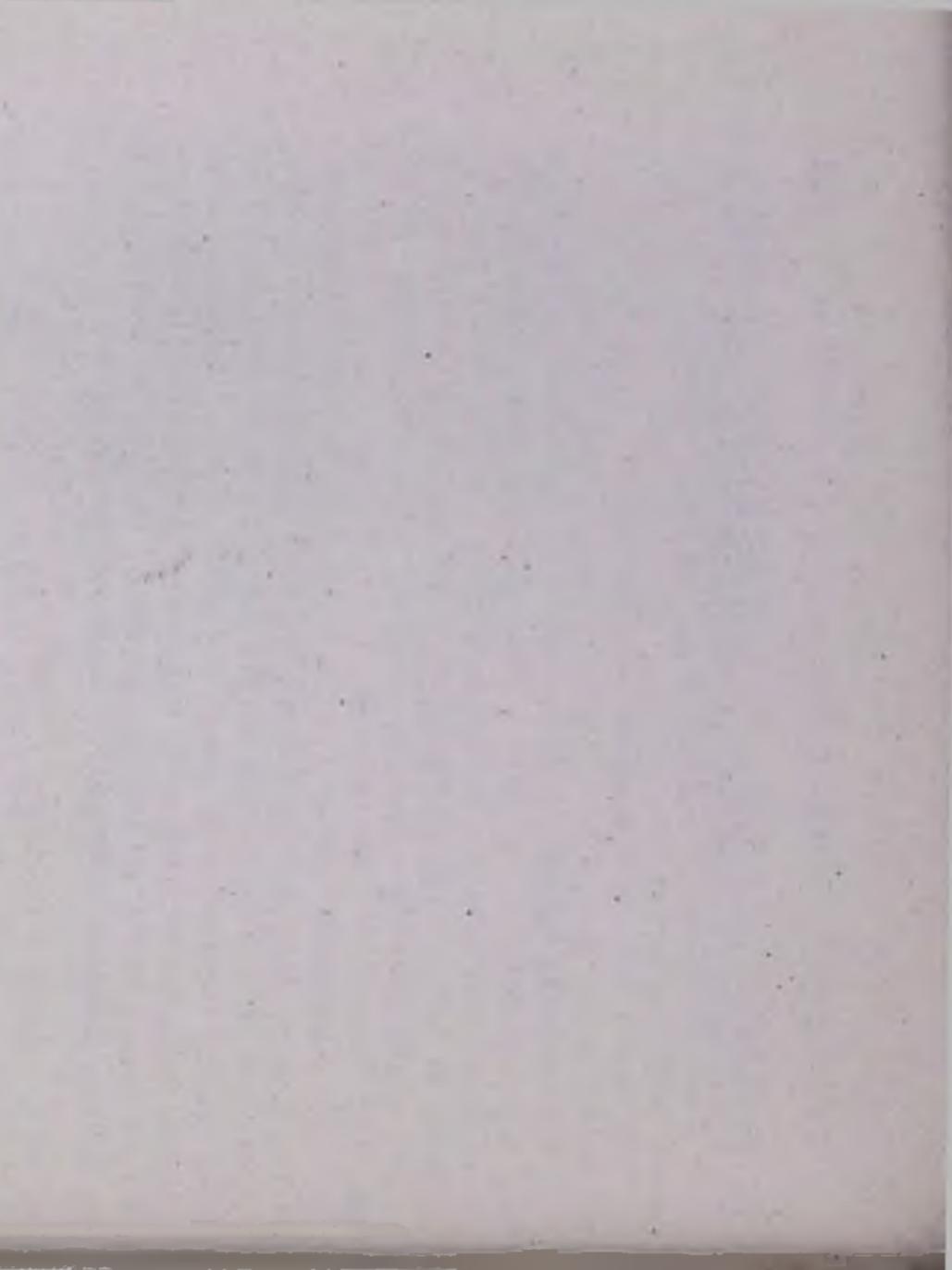
The rotating cylinder of finite radius  $r_0$  and infinite along the  $z$  axis is considered. The equilibrium state of this cylinder is due to the rotation and appropriate distribution function. Along the  $z$  axis the function of Jackson [12] is considered, which for plasma permits to calculate analytically the appearing integrals which are similar to the Maxwell Function in other respects.

The distribution function  $f(v_z)$  is constructed by means of two penetrating streams with equal thermal velocity and arbitrary relative velocities. As a result it is obtained that in the presence of arbitrary large relative velocity the absence of Jeans instability, due to sufficiently large thermal velocity also renders the absence of the instability on the two-stream branch of the oscillations. Moreover, the relative velocity has a stabilizing influence on the Jeans branch of oscillations.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. P. Sweet, M. N., 125, 285, 1963.
2. D. Lynden-Bell, M. N., 124, 279, 1962.
3. М. Н. Максумов, Л. С. Марочник, ДАН СССР, 164, 1019, 1965.
4. В. И. Лебедев, М. Н. Максумов, Л. С. Марочник, Астрон. ж., 42, 709, 1965.
5. М. Н. Максумов, Л. С. Марочник, Астрон. ж., 42, 261, 1965.
6. Л. С. Марочник, Н. Т. Птицына, Астрон. ж., 45, 516, 1968.
7. E. P. Lee, Ap. J., 148, 185, 1967.
8. G. S. Wu., Phys. Fluids, 11, 545, 1968.
9. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Р. Э. Сагдеев, А. М. Фридман, ПМТФ, № 3, 3, 1969.
10. Л. С. Марочник, А. А. Сучков, Астрон. ж., 46, 319, 1969.
11. M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker, Ядерный синтез, Дополнение, кн. I, 143, 1962.
12. J. D. Jackson, Nucl. En. part C: Plasma Phys., 1, 171, 1960.
13. E. D. Fackerell, Ap. J., 153, 643, 1968.
14. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Астрофизика, 5, 223, 1969.
15. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Астрофизика, 5, 425, 1969.
16. В. Д. Шафранов, Вопросы теории плазмы, вып. 3, 3, 1963.
17. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Астрофизика, 6, 387, 1970.
18. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, Справочник по математике, Наука, М., 1964.
19. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 574, 1946; УФН, 93, 527, 1967.
20. А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, ЖЭТФ, 1971 (в печати).





К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ  
ВОЛН РЕЛЯТИВИСТСКИМИ СГУСТКАМИ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. Я. ЭЙДМАН

Поступила 13 июля 1970

Рассматривается излучение сгустков заряженных частиц, движущихся со скоростью, близкой к скорости света. Полученные результаты используются для исследования электромагнитного излучения пульсаров.

В настоящее время в астрономии открыты очень мощные источники электромагнитного излучения (например, квазары и пульсары). В то же время излучение, например, пульсаров выходит, по видимому, из относительно малого объема. Это означает, что источники электромагнитного излучения пульсаров весьма эффективны в широком диапазоне частот (от радио до рентгеновских волн). Поэтому вполне возможно, что в условиях пульсаров имеем дело с излучением сгустков частиц с размерами, меньшими длины волны  $\lambda$ . При движении такого сгустка во внешних полях может произойти разделение зарядов, благодаря чему сгусток становится весьма эффективным излучателем электромагнитных волн.

В настоящей статье не ставится цели исследовать причины возникновения таких сгустков, хотя заметим, что они могут возникнуть, например, при прохождении энергичных частиц слоя среды (лавинные электронно-позитронные сгустки)\*. Наконец, указанные сгустки могут образоваться в результате развития неустойчивостей, могущих существовать в плазме, окружающей пульсар.

\* При этом ускорение частиц может быть связано также электромагнитным полем самого пульсара [1].

В связи со сказанным ранее представляет интерес получить формулы, описывающие излучение электромагнитных волн произвольно движущимися сгустками. В настоящей статье приведены выражения для поля излучения в случае, когда сгусток движется со скоростью  $v_1$ , близкой к скорости света  $c$ , вдоль определенного направления. При этом учитываются изменения заряда в сгустке, его дипольного момента, а также учитываются направленные перемещения заряда в направлении, перпендикулярном  $v_1$ . Отмечается, что только последний механизм дает линейно поляризованное излучение для системы некогерентных сгустков. В заключение полученные выражения используются для оценок электромагнитного излучения пульсаров.

Как уже отмечалось, при движении сгустка во внешних электромагнитных полях в нем происходит разделение зарядов. Кроме того, сгусток может переносить нескомпенсированный заряд  $q_0(t)$ , который, например, для электронно-позитронного сгустка может возникнуть в результате аннигиляции позитронов с электронами среды. На возможность излучения нескомпенсированного заряда электронно-позитронного сгустка в связи с радиоизлучением широких атмосферных ливней обращено внимание в [2, 3] (см. также [4]). Учитывая сказанное, будем грубо считать, что источником электромагнитного поля, обязанного движущемуся с большой скоростью сгустку, является плотность стороннего тока

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_1 + \vec{j}_2 \quad \text{при } t > 0, \quad (1)$$

$$j(t < 0) = 0$$

$$\vec{j}_0 = q_0(t) \vec{v}_0(t) \delta(x) \delta(y) \delta[z - z_0(t)] \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\vec{j}_1 = p(t) \vec{v}_1(t) \delta'(x) \delta(y) \delta[z - z_*(t)] \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\vec{j}_2 = 2q_2(t) \vec{v}_2(t) \delta(x) \delta(y) \delta[z - z_*(t)] \quad t > 0. \quad (4)$$

Здесь скорости  $v_0 = dz_0/dt \rightarrow c$ ,  $v_1 = dz_*/dt \rightarrow c$ ,  $\vec{v}_1 = \{0, 0, v_1\}$ ,  $\vec{v}_2 = \{v_2, 0, 0\}$ ,  $p = lq$  — дипольный момент сгустка, имеющего заряд одного знака  $q$ ,  $\delta' = d\delta/dx$ , функции  $z_0(t)$ ,  $z_*(t)$  описывают законы движения сгустков. Ток  $\vec{j}_2$  учитывает направленные перемещения зарядов в сгустке в направлении, перпендикулярном  $\vec{v}_1$  ( $v_2 \ll c \sqrt{1 - v_1^2/c^2}$ ).

Разумеется, формулы (2), (4) справедливы для волн, длина которых много больше максимального размера сгустка  $l_m$ .

Ниже в основном будем интересоваться только случаем излучения в вакууме, когда скорости  $v_1, v_0$  близки к скорости света. Поэтому для нахождения поля излучения, отвечающего источникам (2)–(4), удобно воспользоваться уравнением для магнитного поля

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}. \quad (5)$$

Найдем прежде всего магнитное поле излучения, отвечающее току  $\vec{j}_2$ .

Из (5) для  $\vec{j}_2$  обычным образом имеем (для существенной только здесь при  $v_1 \rightarrow c$  компоненты  $H_y$ )

$$H_y = H_{2y}(x, y, z) = \frac{1}{cr} \int j_2 \left( t - \frac{R}{c} \right) \delta(x') \delta(y') \times \\ \times \delta \left[ z' - z_0 \left( t - \frac{R}{c} \right) \right] dx' dy' dz'. \quad (6)$$

$$j_2 = 2v_2 g_2; \quad R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}; \quad \delta(\zeta) = \frac{d\delta}{d\zeta};$$

$$\zeta = z' - z_0 \left( t - \frac{R}{c} \right), \quad \text{т. е.}$$

$$H_{2y} \approx \frac{1}{c^2 r} \int_{z_0 \left( t - \frac{R}{c} \right)}^{\infty} f(\zeta) \frac{d\delta(\zeta)}{d\zeta} d\zeta, \quad (7)$$

где

$$f(\zeta) = j_2 \left[ t - R_1(\zeta)/c \right] \left/ \left[ 1 - \cos \theta_{z_0} \left( t - \frac{R_1}{c} \right) / c \right] \right.; \quad R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2};$$

$$v_1 = z_0 = dz_0/dt; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad z_0 \rightarrow c, \quad \cos \theta = z/r.$$

Производя в (7) интегрирование по частям и учитывая, что  $v_1 \rightarrow c$ , после некоторых преобразований будем иметь

$$H_{2y} = H_{2h} + H_{2g}, \quad (8)$$

причем

$$H_{2h} = -\frac{\delta [z_0 (t - r/c)] j_2(0)}{[1 - \beta_1(0) \cos \theta] cr}; \quad \beta_1 = \frac{v_1}{c}; \quad (9)$$

$$H_{2g} = \frac{\{(dj_2(t')/dt') [1 - \beta_1(t') \cos \theta] + j_2(t') \dot{\beta}_1(t') \cos \theta\} \cos \theta}{[1 - \beta_1(t') \cos \theta]^3 c^2 r}; \quad (10)$$

$$\dot{\beta}_1 = \frac{d\beta_1}{dt}; \quad j_2 = 2q_2 v_2.$$

В (10) значение  $t'$  определяется из уравнения

$$t' = \frac{z'}{c} = z_c \left( t - \frac{R_1}{c} \right). \quad (11)$$

Для  $v_1 = \text{const}$ , как легко показать при  $v_1 \rightarrow c$ .  $t' = \xi / (1 - \beta_1)$ ;  $\xi = t - r/c$ ;  $0 < \xi \leq L_n (1 - \beta_1)/c$ ;  $L_n$  — длина пробега сгустка.

Из анализа (10), (11) следует обычным образом, что поле излучения при  $v_1 \rightarrow c$  сосредоточено в узком конусе около направления  $\vec{v}_1$  с углом раствора  $\Delta\theta \approx \sqrt{1 - \beta}$ . Кроме того, поле  $H_g$  не равно нулю только в узком слое  $0 \leq \xi \leq L_n (1 - \beta_1)/c$ .

Для магнитного поля излучения  $H_{0\varphi}$ , отвечающего току (4), таким же образом получаем

$$H_{0\varphi} = \sin \theta H_{2y} \quad (j_2 = j_0), \quad (12)$$

причем  $H_{2y}$  ( $j_2 = j_0$ ) дается формулами (8) — (10) с заменой  $j_2$  на  $j_0 = q_0(t) v_0(t)$ .

Магнитное поле здесь имеет единственную компоненту, направленную на орту  $\vec{e}_\varphi$  в сферической системе координат с осью, совпадающей с осью  $Oz$  ( $\vec{H}_0 = \{H_{0r}; H_{0\theta}; H_{0\varphi}\} = \{0, 0, H_\varphi\}$ ).

Аналогично может быть найдено и магнитное поле излучения, соответствующее току  $\vec{j}_1$  (см. (3)). В результате, например, для  $\beta_1 = \text{const}$  ( $\beta_1 \rightarrow 1$ ) будем иметь

$$\vec{H}_1 = \{H_{1r}; H_{1\theta}; H_{1\varphi}\} = \{0, 0, H_\varphi\}$$

$$H_{1\varphi} = \frac{\sin^2 \theta \cos \varphi}{c^3 r} \left\{ \dot{\delta}(c\xi) \frac{px_1^2 v_1}{(1 - x\beta_1)^3} - \right. \\ \left. - \delta'(c\xi) \frac{pv_1^2}{(1 - x\beta_1)} + \frac{x^3 [\beta_1(t)]^2 \ddot{p}(t')}{[1 - x\beta_1(t')]^3} \right\}, \quad (13)$$

$$0 < \theta < \sqrt{1 - \beta_1}; \quad 0 < \xi < \frac{L_n}{c} (1 - \beta_1),$$

где  $p(t) = lv_1q; \quad x = \cos \theta; \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt}; \quad \ddot{p} = \frac{d^2p}{dt^2};$

$$t' = \xi/(1 - \beta); \quad \xi = t - r/c.$$

В связи с формулами (10), (11) следует указать на одно важное обстоятельство.

Предположим, что имеем не один излучатель типа (4), а систему таких излучателей с компонентой скорости  $v_2$ , ориентированной вдоль определенного направления, как это имеет место для сгустков, поляризуемых внешним магнитным полем. Тогда излучение, определяемое током  $j_2$ , будет линейно поляризованным с направлением поляризации электрического поля волны  $\vec{E}$ , параллельным  $v_2$ .

Представляет интерес оценить требуемое число сгустков для того, чтобы объяснить электромагнитное излучение пульсаров. Ради определенности оценку можно вести, считая, что электронно-позитронные сгустки образуются энергичными частицами\*. В этом случае можно считать, что сгусток формируется при прохождении энергичной частицей слоя относительно плотной среды, а электромагнитное излучение возникает по выходе сгустка из среды в вакуум. Поскольку сгусток движется в сильном магнитном поле  $H_0 = 10^{13}$  гаусс, то он поляризуется\*\* (необходимо считать, что все размеры характеризующие сгусток, меньше гирорадиуса частиц  $r_H = mc^3/eH_0 \sqrt{1 - \beta_1^2}$ ;  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона).

В сгустке, движущемся в вакууме, благодаря аннигиляции зарядов в сгустке возникает ток вида (4). Аннигилирующая часть заряда  $q_2$ , отвечающая току (4), может быть оценена следующим образом. Характерное время аннигиляции порядка  $T$ ,  $L_a = cT$ ,

$$L_a \approx \frac{(1 - \beta_0^2) b^3}{2 \pi r_0^2 \sqrt{1 - \beta_1^2} \ln(2/\sqrt{1 - \beta_1^2})}$$

(см. [5]), где число частиц в сгустке  $\sqrt{x}$  положено равным  $\sqrt{x} \approx \sqrt{1 - \beta_1^2} / \sqrt{1 - \beta_0^2}$ ;  $r_0 = e^2/mc^3$ , объем сгустка  $\Delta V \approx b^3(1 - \beta_1^2)^2$ ,  $b$  — тол-

\* Хотя по существу все основные оценки легко могут быть получены и для случая произвольных сгустков зарядов.

\*\* Если аппроксимировать сгусток двумя зарядами  $\pm q$ , движущимися в вакууме, то расстояние между зарядами  $\pm q$  находится из условия равенства нулю сил, действующих на заряды  $l \approx \sqrt{q(1 - \beta^2)/H_0}$ ;  $q = \sqrt{x} e$ ;  $\sqrt{x}$  — число электронов в сгустке.

щина слоя плотной среды, в которой формировался сгусток до выхода в вакуум, сечение аннигиляции  $\sigma_0 = \pi r_0^2 \sqrt{1-\beta_1^2} \ln(2/\sqrt{1-\beta_1^2})$ . В качестве  $q_2$  в оценочных формулах можно положить  $q_2 = q \lambda/L_a$ , где  $q$  — полный заряд одного знака в сгустке,  $\lambda$  — длина излучаемой волны.

Пока  $\lambda \gg l_m \simeq z \sqrt{1-\beta_1^2}$  ( $z$  — путь, проходимый сгустком), то, как легко показать, формулы (9), (10) дают величину поля одного порядка, причем спектральная плотность излучения  $W_\omega$  и полное излучение одного сгустка  $W$  могут быть записаны в виде

$$W_\omega = cr^3 \int |H_\omega|^2 d\Omega \simeq \frac{e^2 \kappa \lambda^2}{L_a^2 c},$$

$$W = \frac{e^2 \kappa \lambda_{\max}}{L_a^2} \simeq \frac{e^2 \kappa}{L_a},$$
(14)

где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  — элемент телесного угла,  $\sqrt{\kappa}$  — число электронов в сгустке. Если сгусток образован энергичной частицей, то  $\sqrt{\kappa} = \epsilon/\epsilon_0 = \sqrt{1-\beta_1^2}/\sqrt{1-\beta_0^2} \gg 1$  ( $\epsilon$ ,  $\epsilon_0$  — конечная (по выходе из плотной среды) и начальная энергии быстрой частицы).

Интенсивность излучения системы сгустков, разумеется, существенно зависит от статистических характеристик рассматриваемой системы. Для оценок остановимся на двух случаях. Во-первых, будем считать, что радиус корреляции в системе порядка длины волны максимального радиоизлучения пульсаров ( $l_m \simeq 10^3$  см). Тогда сгустки, образованные быстрыми частицами в объеме порядка  $l_m^3$ , движутся одинаково и излучение, выходящее из объема  $l_m^3$ , будет равно

$$I_{\omega_m} \simeq W_{\omega_m} N_{б.ч.}^2, \quad \omega_m \simeq \frac{2\pi c}{\lambda_m},$$

$$I \simeq W N_{б.ч.}^2,$$
(15)

где  $N_{б.ч.}$  — число быстрых частиц в объеме  $l_m^3$ . Если считать, что полный излучающий объем есть  $V = sL_a$ ,  $L_a \sim l_m \simeq 10^3$  см,  $s = 10^{13}$  см<sup>2</sup>, то требуемое число энергичных частиц в единице объема (для того, чтобы объяснить интенсивность радиоизлучения пульсаров) должно быть равно  $N_{б.ч.} \simeq 10^9 / \sqrt{\kappa} \simeq 10^9 \sqrt{1-\beta_0^2} / \sqrt{1-\beta_1^2}$  см<sup>-3</sup>. Обратим здесь внимание на следующее весьма важное обстоятельство. Выше рассматривалось излучение электромагнитных волн в вакууме. Для того, чтобы убедиться в законности такого рассмотрения, необходимо в исследуемой системе оценить величину отношения  $j_n(E)/\omega E$  (соответствующее

уравнение Максвелла может быть записано в виде  $\text{rot } \vec{H} = (4\pi/c) \times \times (\vec{j}_{\text{ст.}} + \vec{j}_{\text{н.}}) + (1/c) (\partial E/\partial t)$ ,  $\vec{j}_{\text{ст.}}$  — сторонний ток;  $\vec{j}_{\text{н.}}$  — ток, наводимый полем  $\vec{E}$ . Принимая во внимание формулы (9), (10), (14), (15), а также то обстоятельство, что  $j_{\text{н.}} \approx c\sqrt{1-\beta_{\text{гел}}^2}$ ,  $\beta = v/c$  (в сгустках, движущихся со скоростью  $v \rightarrow c$ , наведенная скорость не может быть больше  $c\sqrt{1-\beta^2}$ ,  $n$  — концентрация частиц  $n \approx N_{\text{б.ч.}} \cdot \sqrt{x}/L_a^3$ ), находим\*  $\vec{j}_{\text{н.}}(E)/\omega E \approx 1 - \beta^2$  при  $L_a \approx \lambda$ .

По существу с этим же обстоятельством связано и то, что в рассматриваемой схеме можно не учитывать и реабсорбцию излучения (толщина излучающего слоя здесь порядка  $L_a \approx \lambda$  и, в частности, поле за время существования сгустка  $T$  практически не отрывается от него).

Формулы (15) написаны для случая, когда сгустки в объеме  $\lambda^3$  излучают когерентно. Аналогично можно привести оценки и для случая, когда имеем дело с системой некогерентных сгустков. В результате для требуемого числа быстрых частиц будем иметь  $n_{\text{б.ч.}} \approx 20^{27}/x = = 10^{27} (1 - \beta_0^2)/(1 - \beta^2) \text{ см}^{-3}$ .

В заключение автор выражает признательность А. А. Андронову, В. В. Железнякову, С. А. Капану, Ю. А. Рыжову, Е. В. Суворову, В. В. Тамойкину, Ю. В. Чугунову за дискуссии.

Научно-исследовательский радиофизический институт, г. Горький

## ON THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC RADIATION OF RELATIVISTIC BUNCH OF CHARGED PARTICLES

V. Ya. EIDMAN

The radiation of bunch of charged particles moving with relativistic velocity is considered. The results are used for the investigation of electromagnetic radiation of pulsars.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. И. Сыроватский, Ускорение галактических и солнечных космических лучей. Труды XI Международной конференции по космическим лучам, Будапешт, 1969.
2. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 41, 616, 1961.

\* См. в этой связи также [6].

3. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 48, 988, 1965.
4. E. D. Kahn, I. Jersch, Proc. R. Soc., A289, No. 1417, 206, 1966.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Наука, М., 1967, § 12.
6. А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, ЖЭТФ, 30, 913, 1956.

О КОНВЕКЦИИ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ  
ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Л. Н. ИВАНОВ

Поступила 28 декабря 1969

В приближении теории длин перемешивания получена зависимость от времени конвективного потока энергии (61) при периодических изменениях ускорения силы тяжести. Сжимаемость вещества учитывалась только при вычислении силы плавучести, действующей на конвективные элементы. Показано, что возможные изменения плотности вещества, обусловленные приливами, могут только увеличить амплитуду колебаний величины конвективного потока.

*Введение.* Если звезда входит в состав тесной двойной системы и обладает несинхронным вращением относительно своего спутника, конвективный перенос энергии в этой звезде происходит в условиях периодического по времени ускорения силы тяжести. Так как ускорение силы тяжести является одним из основных параметров, определяющих конвекцию, исследование специфических особенностей конвективной теплопроводности в периодическом гравитационном поле позволит лучше понять структуру и динамику компонентов тесных двойных систем.

На первом этапе таких исследований полезно рассмотреть упрощенную задачу о конвекции в плоском газовом слое, представляющем собой часть конвективной оболочки звезды, находящемся в переменном поле силы тяжести, задаваемом выражением:

$$g(t) = g_0 (1 + \alpha \cos 2\omega t); \quad (1)$$

Цель настоящей работы — найти зависимость от времени конвективного потока энергии в этом слое, так как знание именно потока энергии важно для астрофизических применений. При этом будем предполагать, что время тепловой релаксации слоя значительно пре-

вышает период изменения  $g(t)$ , поэтому приливные колебания, которые он может испытать, считаем адиабатическими.

К сожалению, в настоящее время нет точной нелинейной теории конвекции даже при постоянном ускорении силы тяжести, поэтому ниже, при выводе уравнений для величин, характеризующих конвективный перенос энергии, воспользуемся процедурой, предложенной В. Унно в [1] и опирающейся на представление о длине перемешивания. Далее будем учитывать следующие ограничения:

1. Величина длины перемешивания конвективных элементов много меньше характерного масштаба приливных движений.

2. Конвективные скорости дозвуковые. Турбулентное давление не существенно по сравнению с газовым. К конвективным движениям применимо приближение Буссинеска, т. е. сжимаемость учитывается только при вычислении силы плавучести.

3. Выражения для турбулентной вязкости и температуропроводности берутся в том виде, как они предлагаются в теории длины перемешивания.

2. *Основные уравнения.* Состояние газового слоя полностью определяется заданием полей скоростей, плотности и температуры. Они описываются уравнениями неразрывности, движения и теплопроводности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + g; \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dt} - \left( \frac{dT}{dP} \right)_{ad} \frac{dP}{dt} = -\frac{1}{\rho c_p} \nabla F_r, \quad (4)$$

где лучистый поток энергии определяется выражением

$$F_r = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \nabla T; \quad (5)$$

Связь между термодинамическими параметрами задается уравнением состояния:

$$P = \frac{R^*}{\mu} \rho T. \quad (6)$$

Здесь принято обозначение:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla). \quad (7)$$

Символ  $\kappa$  означает непрозрачность,  $\mu$  — молекулярный вес,  $R^*$  — газовую постоянную.

Следует отметить, что вещество слоя участвует в двух видах движения: конвективном и приливном. И если приливному движению свойственна систематичность, упорядоченность, то конвективные движения характеризуются хаотичным распределением скоростей, таким, что средняя его скорость в некоторой горизонтальной плоскости равна нулю. Аналогично, поля температуры и плотности также можно представить в виде двух компонент: усредненной, плавно меняющейся с высотой и наложенными на нее флуктуациями, связанными с конвективными элементами. Таким образом,

$$v = \bar{v} + v', \quad P = \bar{P} + P', \quad T = \bar{T} + T' \quad \text{и т. д.} \quad (8)$$

где чертой сверху обозначены величины, усредненные по горизонтали, а величины со штрихом обозначают конвективные флуктуации.

Подставим (8) в уравнения (2) — (4) и проведем усреднение в горизонтальной плоскости, тогда получим группу уравнений, описывающих поля усредненных величин:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \nabla \bar{v} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{P} + g - \overline{(v'\nabla)v'} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{P} + g; \quad (10)$$

(здесь пренебрегли выражением  $(v'\nabla)v'$ , представляющим турбулентное давление)

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} - \left(\frac{dT}{dP}\right)_{ad} \frac{D\bar{P}}{Dt} + \overline{v'\nabla T'} = -\frac{1}{\rho c_p} \nabla \bar{F}, \quad (11)$$

причем, оператор

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v}\nabla) \quad (12)$$

означает субстанциальную производную, связанную с приливыми движениями.

Вычитая из уравнений (2), (3), (4) соответственно уравнения (9), (10), (11) и пользуясь приближением Буссинеска, получим уравнения для флуктуаций

$$\nabla \mathbf{v}' = 0; \quad (13)$$

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt} + [(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' - \overline{(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'}] = -\frac{1}{\rho} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho^2} \nabla \bar{P} - (\mathbf{v}' \nabla) \bar{\mathbf{v}}; \quad (14)$$

$$\frac{DT'}{Dt} + [(\mathbf{v}' \nabla) T' - \overline{(\mathbf{v}' \nabla) T'}] - \beta \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho c_p} \nabla F'. \quad (15)$$

Здесь

$$\beta = - \left[ \frac{dT}{dz} - \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right] \quad (16)$$

— сверхadiaбатический градиент.

Определяя, как обычно, конвективный поток энергии выражением

$$F_c = \overline{\rho c_p \mathbf{v}' T'}; \quad (17)$$

и используя (13), запишем

$$\overline{\mathbf{v}' \nabla T'} = \frac{1}{\rho c_p} \nabla F_c,$$

тогда уравнение энергии (11) примет вид

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} - \left( \frac{dT}{dP} \right)_{ad} \frac{D\bar{P}}{Dt} = -\frac{1}{\rho c_p} \nabla (\bar{F}_r + F_c). \quad (18)$$

В уравнении (14) пренебрегаем последним членом по сравнению с  $(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'$ , так как величина  $\bar{\mathbf{v}}$  меняется в пространстве гораздо медленнее, чем  $\mathbf{v}'$ .

Выражения в квадратных скобках в (14) и (15) соответствуют турбулентному трению и турбулентной теплопроводности; в приближении теории длины перемешивания их можно представить в виде

$$(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' - \overline{(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{R} \mathbf{v}'; \quad (19)$$

$$(\mathbf{v}' \nabla) T' - \overline{(\mathbf{v}' \nabla) T'} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{R} T'; \quad (20)$$

причем,  $2R$  — характерный размер конвективного элемента, а

$$\tilde{\mathbf{v}} = |\mathbf{v}'|. \quad (21)$$

Пользуясь уравнением неразрывности (13), в уравнении (14) можно освободиться от члена, содержащего  $P'$ . Пренебрегая затем детальной структурой конвективных элементов, полагаем  $v_x = \bar{v}$  и в результате получаем

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{\bar{v}^2}{R} - \frac{\bar{T}}{2\bar{T}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}. \quad (22)$$

Здесь учтено, что

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{\bar{T}}{\bar{T}}, \quad (23)$$

где

$$\bar{T} = |\bar{T}'|. \quad (24)$$

В приближении длины перемешивания, для оптически толстых конвективных элементов можно написать:

$$\frac{1}{\rho c_p} \nabla F_r' = -\frac{4ac}{3} \frac{\bar{T}^3}{\rho^3 c_p} \nabla^2 T' = \frac{4ac}{3} \frac{\bar{T}^3}{\rho^3 c_p} \frac{\bar{T}}{R^2} = \frac{\gamma}{R^2} \bar{T}, \quad (25)$$

где  $\gamma$  — коэффициент лучистой температуропроводности.

Теперь уравнение (15) примет вид

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} = \beta \bar{v} - \frac{\bar{v}\bar{T}}{R} - \frac{\gamma}{R^2} \bar{T}. \quad (26)$$

Для того, чтобы получить полное представление о зависимости конвективного потока от времени, нужно решить систему уравнений (9), (10), (18), (22), (26), задав начальные условия. Решение этих уравнений безусловно, представляет собой весьма сложную математическую задачу. Однако для получения приближенной картины вариаций конвективного потока можно обойтись без такого точного решения всей системы.

3. *Приближенное рассмотрение задачи.* Предположим, что период изменения  $g(t)$  больше времени механической релаксации газового слоя, тогда распределение давления в нем сравнительно быстро будет приспосабливаться к новым значениям  $g$ . Таким образом, можно

приближенно считать, что все время будет справедливо уравнение гидростатического равновесия

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = -\bar{\rho}g. \quad (27)$$

Благодаря этому, уравнение (21) примет вид

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{\bar{v}^2}{R} + \frac{g(t)\bar{T}}{2\bar{T}}. \quad (28)$$

Далее будем рассматривать уравнения (26) и (28) как замкнутую систему, считая величины  $\beta$ ,  $\chi$ ,  $\bar{T}$ ,  $R$ ,  $g$  параметрами.

При периодических изменениях  $g$ , величины  $\bar{T}$ ,  $\beta$ ,  $R$ ,  $\chi$  также могут испытывать периодические же отклонения от некоторых своих средних значений. Вследствие большой величины времени тепловой релаксации газового слоя эти средние значения изменяются гораздо медленнее, чем  $g$ , и мы считаем их постоянными во времени.

В настоящей работе ограничимся случаем, когда  $\chi$ ,  $\bar{T}$ ,  $\beta$  вообще постоянны, что, по-видимому, справедливо для внутренних областей конвективной зоны.

К сожалению, очень мало известно о величине длины перемешивания. Принято, что в звездах она порядка высоты однородной атмосферы, т. е.

$$R = \alpha \frac{R^*T}{\mu g}, \quad (29)$$

где  $\alpha$  — множитель порядка единицы.

О возможных изменениях  $R$  при колебаниях величины  $g$  вообще ничего не известно, поэтому рассмотрим вначале случай постоянного  $R$  (случай А). Он важен тем, что допускает аналитическое решение системы уравнений (26) и (28).

В случае переменного  $R$  (случай В) будем предполагать, что изменения размеров конвективных элементов связаны с общими приливными деформациями газового слоя, при этом масса элемента не должна меняться, т. е.

$$\bar{\rho}R^3 = M = \text{const.} \quad (30)$$

Чтобы распространить это предположение и на случай постоянного  $R$ , очевидно, нужно потребовать неизменности средней плотности вещества при изменениях  $g$ , т. е.

$$\bar{\rho}(g(t)) = \text{const.} \quad (31)$$

В случае А уравнение (31) играет роль уравнения состояния.

4. *Случай постоянного R.* Преобразуем уравнения (26) и (28) с помощью подстановки

$$\bar{v} = \frac{Ru'}{u}. \quad (32)$$

В этом разделе штрих означает дифференцирование по времени.

В результате получим:

$$(\bar{T}u)' = \beta Ru' - \frac{\chi}{R^2} \bar{T}u; \quad (33)$$

$$u'' - \frac{g}{2TR} \bar{T}u = 0. \quad (34)$$

Дифференцируя по  $t$  (33), используя (34), и вводя новую функцию:

$$\varphi = \bar{T}u, \quad (35)$$

имеем

$$\varphi'' = \frac{\beta g}{2T} \varphi - \frac{\chi}{R^2} \varphi'. \quad (36)$$

Подстановкой

$$\varphi = \psi \exp\left(-\frac{\chi}{2R^2} t\right) \quad (37)$$

это уравнение сводится к уравнению Хилла:

$$\psi'' - \left(\frac{\chi^2}{4R^4} + \frac{\beta g}{2T}\right) \psi = 0, \quad (38)$$

так как коэффициент при  $\psi$  есть периодическая функция от времени. Обычно уравнение Хилла записывают в виде

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + J(z)\psi = 0,$$

где  $z = \omega t$  и

$$J(z) = \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2z + \dots$$

В нашем случае:

$$\theta_0 = -\frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\chi^2}{4R^4} + \frac{\beta g_0}{2T} \right); \quad \theta_1 = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\beta g_0}{4T} \chi. \quad (39)$$

Решение уравнения (38) имеет вид

$$\psi = e^{\mu\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2n\omega t}; \quad (40)$$

и, следовательно,

$$\varphi = e^{\eta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2n\omega t}, \quad (41)$$

где

$$\eta = \mu\omega - \frac{\chi}{2R^2}, \quad (42)$$

характеристический показатель  $\mu$  определяется из условия:

$$\sin^2\left(\frac{1}{2} \pi i \mu\right) = \Delta(0) \sin^2\left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{\theta_0}\right), \quad (43)$$

где  $\Delta(0)$  — определитель Хилла, выражается через  $\theta_0$  и  $\theta_1$ , в нашем случае его значения порядка единицы [2] (при  $\kappa = 0$ ,  $\Delta(0) = 1$ ).

Так как  $\theta_0 < 0$  при  $\beta > 0$ , то  $\mu$  — вещественное число. В конвективной зоне должно быть  $\eta > 0$ , так как только в этом случае, как увидим ниже, имеет физический смысл выражение для конвективного потока, поэтому из двух возможных значений  $\mu$ , определяемых уравнением (43), нужно выбрать одно — положительное.

Отметим, что как при малых амплитудах  $\chi$ , так и при больших периодах колебаний  $g$

$$\mu \sim \frac{1}{\omega} \left( \frac{\chi^2}{4R^4} + \frac{\beta g_0}{2T} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (44)$$

что следует из (43) при  $\kappa \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow 0$ . Отсюда, используя (42), легко получить выражение для  $\eta$  в случае постоянного  $g(t) = g_0$ :

$$\eta_0 = \frac{\chi}{2R^2} \left[ -1 + \left( 1 + 2 \frac{\beta g_0 R^4}{T \chi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (45)$$

Детальный анализ соотношения (43) показывает, что  $\eta$  мало отличается от  $\eta_0$  при переменном  $g$ .

Теперь, используя (34), имеем

$$u' = \frac{1}{2TR} \int g \varphi dt + c_1, \quad (46)$$

$$u = \frac{1}{2\bar{T}R} \int g\varphi dt + c_1 t + c_2, \quad (47)$$

$c_1, c_2$  — произвольные постоянные.

Так как в нашем случае решение уравнения Хилла вещественно, его можно записать в виде

$$\varphi(t) = e^{\eta t} [1 + B(t)], \quad (48)$$

где

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos 2n\omega t + B_n^* \sin 2n\omega t).$$

Используя (1), получим

$$u'(t) = \frac{g_0}{2\bar{T}R\eta} \left[ e^{\eta t} (1 + A(t)) + \frac{c_1}{\eta} \right], \quad (49)$$

где

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos 2n\omega t + A_n^* \sin 2n\omega t).$$

Далее

$$u(t) = \frac{g_0}{2\bar{T}R\eta^2} [e^{\eta t} (1 + D(t)) + c_1 t + c_2], \quad (50)$$

где  $D(t)$  — тригонометрический ряд, аналогичный  $A(t)$ .

Теория уравнения Хилла позволяет найти коэффициенты ряда  $B(t)$ , а через них,  $\eta$ ,  $\omega$  и  $\chi$ , выражаются коэффициенты в  $A(t)$  и  $D(t)$ .

Окончательно общее решение системы уравнений (26) и (28) имеет вид

$$\bar{v}(t) = \frac{Ru'}{u} = R\eta \frac{e^{\eta t} [1 + A(t)] + \frac{c_1}{\eta}}{e^{\eta t} [1 + D(t)] + c_1 t + c_2}; \quad (51)$$

$$\tilde{T}(t) = \frac{\varphi}{u} = \frac{2\bar{T}R\eta^3}{g_0} \frac{e^{\eta t} [1 + B(t)]}{e^{\eta t} [1 + D(t)] + c_1 t + c_2}. \quad (52)$$

5. Конвективный поток энергии в случае А. Напомним, что по формуле (17)

$$F_c = \bar{\rho} c_p \overline{v' T'}.$$

Обычно при вычислении  $F_c$  заменяют среднее от произведения произведением средних, т. е. полагают

$$\overline{v'T'} = \overline{v'} \cdot \overline{T'} = \bar{v} \cdot \bar{T}. \quad (53)$$

Таким образом, для нахождения зависимости  $F_c(t)$  достаточно подставить в (17) выражение (51) и (52) для  $\bar{v}$  и  $\bar{T}$ . Чтобы выяснить закономерности, описываемые получаемой таким образом формулой, рассмотрим случай, когда ускорение силы тяжести в некоторый момент времени  $t_0$  изменяется скачком от одного постоянного значения  $g_1$  до другого —  $g_0$ . При этом конвективный поток энергии также должен измениться. Чтобы получить выражения, описывающие этот процесс, нужно решить исходную систему уравнений (26), (28), положив  $g = g_0$ ,  $x = 0$ ,  $\omega = 0$ . Тогда, учитывая, что  $A(t) = B(t) = D(t) = 0$ ,  $\Delta(0) = 1$ ,  $\eta = \eta_0$ , получим

$$\bar{v} = R\eta_0 \frac{e^{\eta_0 t} + \frac{c_1}{\eta_0}}{e^{\eta_0 t} + c_1 t + c_2}; \quad (54)$$

$$\bar{T} = \frac{2\bar{T}R\eta_0^2}{g_0} \frac{e^{\eta_0 t}}{e^{\eta_0 t} + c_1 t + c_2}. \quad (55)$$

Значения постоянных  $c_1$  и  $c_2$  определяются из условия, что в момент  $t = t_0$ :  $\bar{v} = \bar{v}(g_1)$ ,  $\bar{T} = \bar{T}(g_1)$ . Отсюда видим, что с течением времени величины  $\bar{v}$  и  $\bar{T}$  стремятся к постоянным значениям:

$$\bar{v}(g_0) = R\eta_0, \quad (56)$$

$$\bar{T}(g_0) = \frac{2\bar{T}R\eta_0^2}{g_0}. \quad (57)$$

Предельное значение конвективного потока при  $g = g_0$  определяется выражением

$$F_c(g_0) = 2\bar{\rho}c_p \frac{\bar{T}R^2\eta_0^3}{g_0}. \quad (58)$$

Как видно из формул (54) и (55), промежуток времени, в течение которого происходит приспособление конвекции к новому гравитационному полю, зависит от  $\eta_0$ . В связи с этим величину  $\eta_0^{-1}$  естественно назвать характерным временем релаксации конвективного потока энер-

гии —  $t_c$ . В астрофизических условиях, при больших размерах конвективных элементов, когда

$$\frac{\chi^2}{4R^4} \ll \frac{\beta g_0}{2\bar{T}}, \quad (59)$$

справедливо приближенно

$$t_c = \sqrt{\frac{2\bar{T}}{\beta g_0}}. \quad (60)$$

Это выражение удобно тем, что не зависит от параметра  $R$ .

Возвращаясь к формулам (51), (52), видим, что там величина  $\eta^{-1}$  имеет смысл характерного промежутка времени, за который конвекция приспособляется к стационарному колебательному режиму.

Для моментов времени, отстоящих достаточно далеко от начального, характер вариаций конвективного потока уже не зависит от начальных условий, они „забываются“. Учитывая это, с помощью формул (51), (52) легко получить выражение для режима стационарных колебаний конвективного потока

$$F_c(t) = 2\bar{\rho}c_p \frac{\bar{T}R^2\eta^3}{g_0} \frac{[1 + A(t)][1 + B(t)]}{[1 + D(t)]^2}. \quad (61)$$

Как уже отмечалось выше, безразмерные коэффициенты рядов  $A$ ,  $B$ ,  $D$  выражаются через  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\eta$ ,  $\chi$ ,  $\omega$ . Так как величины  $\eta$  и  $\omega$  имеют размерности  $[\text{сек}^{-1}]$ , они должны входить в выражения для коэффициентов в комбинации  $\omega/\eta = \omega t_c$ . Если для  $t_c$  справедлива формула (60), то, как это видно из (39),  $\theta_0$  и  $\theta_1$  выражаются через  $\omega t_c$  и  $\chi$ . В результате можно утверждать, что характер относительных изменений конвективного потока при периодических изменениях  $g$  определяется величинами  $\chi$  и

$$q = \omega t_c. \quad (62)$$

При  $q \gg t$  вычисления показывают, что в (61) можно ограничиться только первыми гармониками, тогда:

$$1 + A(t) = 1 - \frac{\chi^2}{8} \frac{1}{1+q^2} + \frac{\chi}{4} \frac{1}{1+q^2} \cos 2\omega t + \frac{\chi}{4} \frac{1+2q^2}{q(1+q^2)} \sin 2\omega t; \quad (63)$$

$$1 + B(t) = 1 - \frac{\chi}{4} \frac{1}{1+q^2} \cos 2\omega t + \frac{\chi}{4} \frac{1}{q(1+q^2)} \sin 2\omega t; \quad (64)$$

$$1 + D(t) = 1 - \frac{\chi^2}{8} \frac{1}{1+q^2} - \frac{\chi}{4} \frac{1}{1+q^2} \cos 2\omega t + \frac{\chi}{4} \frac{1}{q(1+q^2)} \sin 2\omega t. \quad (65)$$

Из этих формул легко получить, что при увеличении  $q$  амплитуда колебаний  $F_c(t)$  стремится к нулю. Это означает, что при достаточно быстрых колебаниях  $g$ , конвективный поток не успевает на них реагировать. По мере уменьшения амплитуды наблюдается смещение по фазе максимального значения  $F_c(t)$  относительно максимального значения  $g(t)$ .

При  $q < 1$  выражения для рядов  $A, B, D$  сильно усложняются, но можно получить простую зависимость  $F_c(t)$  при  $\omega t_c \ll 1$ . В самом деле, в течение промежутка времени, малого по сравнению с периодом изменения  $g$ , но превышающего время релаксации  $t_c$ , можно считать  $g(t)$  постоянным и определить поток по формуле (58). Иными словами, для того, чтобы получить зависимость  $F_c(t)$  при  $q \ll 1$ , нужно воспользоваться выражениями (45), (58) для  $\tau_0$  и  $F_c$ , считая в них параметр  $g$  переменным.

Очевидно, при условии, когда справедливо (60),  $F_c(t)$  изменяется как  $[g(t)]^{1/2}$ , или приближенно

$$F_c(t) = F_c(g_0) \left( 1 + \frac{x}{2} \cos 2\omega t \right). \quad (66)$$

Результаты непосредственного численного интегрирования системы уравнений (26) и (28) показывают, что зависимость конвективного

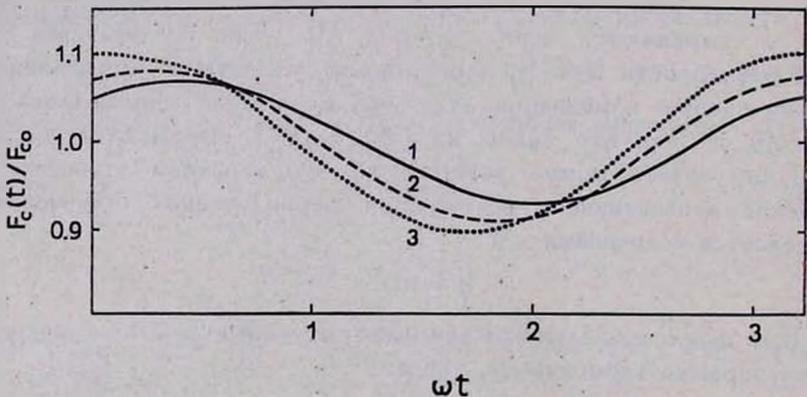


Рис. 1. Относительные изменения конвективного потока при постоянном  $R$  и различных значениях параметра  $q = \omega t_c$ . Кривая 1 соответствует  $q = 1$ ; 2:  $q = 0.5$ ; 3:  $q \ll 1$ . Во всех случаях  $x = 0.2$ .

потока от времени при  $q < 1$  не сильно отличается по форме от зависимостей, соответствующих  $q \ll 1$  и  $q = 1$  (рис. 1).

6. *Конвективный поток в случае В.* Выше была рассмотрена конвекция в предположении, что длина перемешивания при изменениях  $g$  остается постоянной. Но вследствие того, что в уравнениях (26) и (28) от величины  $R$  зависят члены, описывающие лучистый теплообмен конвективных элементов с окружающей средой, а также турбулентные теплопроводность и вязкость, переменность  $R$  скажется на вариациях конвективного потока. Как известно, при постоянном  $g$  величина  $R$  связана с высотой однородной атмосферы (см. формулу (29)). Предположим, что и при переменном  $g$  характер этой связи сохраняется, т. е. при прочих равных условиях большему  $g$  соответствует меньшее  $R$

$$R(t) \approx \frac{R^* \bar{T}}{\mu g(t)}. \quad (67)$$

В результате приливных деформаций газового слоя конвективный элемент может менять свои размеры в разных направлениях по разному (по-видимому, изменения в направлении  $\vec{g}$  будут наибольшими и ближе всего соответствовать формуле (67)).

Так как  $R$  — это характерный радиус элемента, то его зависимость от времени должна быть слабее. Поэтому пишем

$$R(t) = \frac{R_0(g_0)}{1 + \delta \cos 2\omega t}, \quad (68)$$

где  $\delta \ll \kappa$ . Равенство  $\delta = \kappa$  означало бы, что слой испытывает изотропные растяжения или сжатия. Отличия  $\delta$  от  $\kappa$  в некоторой мере учитывают реальную анизотропию приливных деформаций.

При переменном  $R$  уже не удастся найти аналитическое решение системы уравнений (26) и (28), но, как и ранее, можно получить приближенную зависимость  $F_c(t)$  при  $\omega t_c \ll 1$ .

Действительно, по формуле (58) имеем:

$$F_c(t) = 2\bar{\rho}c_p \frac{\bar{T}R^2(t) \eta^3(g(t))}{g(t)}. \quad (69)$$

Учитывая (30), можно записать:

$$F_c(t) = 2Mc_p \frac{\bar{T}\eta^3(g(t))}{R(t)g(t)}. \quad (70)$$

Если справедливо (60), то легко получаем приближенное выражение:

$$F_c(t) = F_c(g_0) \left[ 1 + \left( \delta + \frac{\kappa}{2} \right) \cos 2\omega t \right]. \quad (71)$$

Сравнивая эту формулу с (66) видим, что переменность  $R$  способствует увеличению амплитуды колебаний величины  $F_c(t)$ .

Этот вывод полностью подтверждается результатами численного интегрирования уравнений (26), (28). На рис. 2 приведены результаты вычислений при  $q = 0.25$ ,  $\alpha = 0.2$ , как при постоянном  $R$ , так и при  $\delta = 0.1$ .

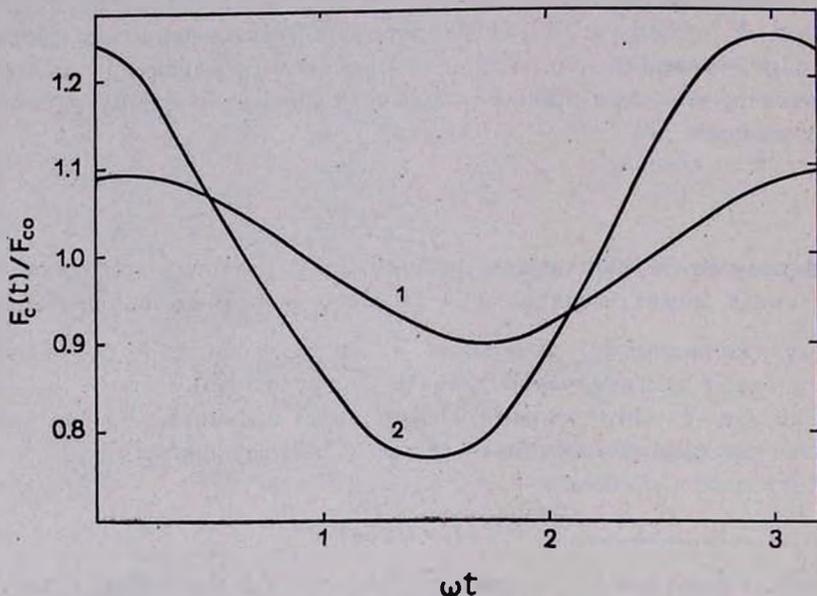


Рис. 2. Относительные изменения конвективного потока при  $\alpha = 0.2$ ,  $q = 0.25$  в случае постоянного  $R$  ( $\delta = 0$ , кривая 1) и в случае переменного  $R$  ( $\delta = 0.1$ , кривая 2).

**7. Некоторые следствия.** В предыдущих разделах было показано, как меняется конвективный поток энергии при периодических изменениях ускорения силы тяжести. Зависимость интенсивности конвективных движений от изменений  $g$  наблюдалась в ряде экспериментов (см., например, [3]). Результаты настоящей работы находятся в качественном согласии с приведенными в [3] данными о поведении конвективного потока паро-жидкостной смеси при колебаниях величины ускорения силы тяжести.

Отметим, что результаты непосредственного численного интегрирования уравнений (26), (28) подтвердили вывод о том, что характер вариаций конвективного потока, при фиксированных значениях  $\alpha$  и  $\delta$ , определяется величиной  $q = \omega/\tau_1 = \omega t_c$ , куда параметры  $R$ ,  $\bar{T}$ ,  $\gamma$ ,  $g_0$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  входят в определенной комбинации, а не индивидуальными

значениями этих параметров. Таким образом, если рассмотреть два набора различных значений указанных параметров, но таких, что величина  $q$  остается одной и той же, то и вариации конвективного потока в обоих случаях будут совпадать.

Значения величин  $x$ ,  $\delta$ ,  $q$  меняются в звезде от места к месту. Параметр  $x$ , малый в полярных областях звезды, достигает своего наибольшего значения близ экватора. В тесных двойных системах величина  $x$  может быть порядка 0.1—0.2, эти оценки следуют из данных, приведенных в [4—5]. Об изменениях параметра  $\delta$  пока ничего не известно, но можно ожидать, что он сильно меняется с глубиной.

Оценки по формуле (60) показывают, что величина времени релаксации конвективного потока может меняться вдоль радиуса звезды в весьма широких пределах. Если, например, взять даже постоянные значения  $\beta = 10^{-5}$  град/см,  $g_0 = 10^4$  см/сек<sup>2</sup>, то в результате роста температуры с глубиной, величина  $t_c$  меняется от 8 минут при  $\bar{T} = 10^4$  °К до 1 часа 20 минут при  $\bar{T} = 10^6$  °К.

Очевидно теперь, что и амплитуда колебаний величины конвективного потока меняется в звезде от места к месту. В таких условиях вариации конвективного потока могут существенно сказаться на динамике конвективных оболочек тесных двойных звезд. В первую очередь это относится к звездам-карликам позднего спектрального класса, где перенос энергии посредством конвекции является преобладающим.

В дальнейшем предполагается рассмотреть конвекцию в периодическом гравитационном поле с учетом турбулентного ее характера и применить полученные результаты к тесным двойным системам, в частности, к звездам типа U Близнецов.

В заключение автор благодарит В. Г. Горбацкого за помощь при выполнении настоящей работы и С. А. Каплана за ряд ценных критических замечаний.

Ленинградский государственный  
университет

## ON CONVECTION IN THE PERIODICAL GRAVITATION FIELD

L. N. IVANOV

In the mixing — length theory approximation the time dependent expression (61) for convective flux of energy with the periodical changes of the gravitation field is obtained. Compressibility of the

fluid is taken into consideration in the calculations of the buoyance force only.

It is proved, that tidal variations of density have to increase the amplitude of the convective flux oscillations.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *W. Unno*, PAS Japan, 19, 140, 1967.
2. *E. T. Уиттекер, Г. Н. Ватсон*, Курс современного анализа, ГТТИ, 1934, стр. 243.
3. *J. B. Woodward, H. Morte*, „Proc. 3-rd Internat. Heat Transfer Conf., Chicago, 1966“, 1966, p. 216.
4. *Krzeminski*, Ap. J., 142, 1051, 1965.
5. *Krzeminski*, Ap. J., 140, 921, 1964.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7

ФЕВРАЛЬ, 1971

ВЫПУСК 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИХ  
ПЕРЕМЕННЫХ ЗВЕЗД ТИПА МИРЫ КИТА

Согласно [1], долгопериодические переменные являются гигантами, окруженными оболочками большой оптической толщины. Этот вывод основывается на данных наблюдений. Многие факты привели к заключению, что из долгопериодических переменных звезд происходит выбрасывание вещества [2]. Одним из таких фактов является большой К-эффект, наблюдаемый в эпоху максимума блеска. При выбрасывании вещества происходит образование движущейся оболочки, в которой существует градиент скорости движения по радиусу.

Из наблюдательных данных следует также, что у этих звезд существует корреляция между периодами ( $P$ ), амплитудой изменения блеска ( $A$ ) и абсолютной величиной ( $M$ ), а именно с увеличением периодов амплитуда изменения блеска увеличивается, а абсолютная величина уменьшается [3, 4].

Одним из основных параметров долгопериодических переменных звезд, кроме  $P$ ,  $A$  и  $M$ , как нам кажется, является время возрастания блеска ( $D$ ), поэтому интересно было бы рассмотреть, не коррелирует ли этот параметр с амплитудой изменения блеска. Для этой цели из ОКПЗ мы выписали величины амплитуд, периодов и времени возрастания блеска у звезд типа Миры Кита в визуальной области спектра. Эти звезды были разбиты на две группы по периоду ( $P > 300^d$ ,  $P < 300^d$ ), а каждая из них — на четыре группы по времени возрастания блеска с интервалами  $D < 40$ ,  $40-45$ ,  $45-50$  и  $> 50$ .

В табл. 1 для отдельных подгрупп звезд представлены средние значения  $\bar{D}$ ,  $\bar{A}$  и количества звезд, содержащихся в каждой из них.

Таблица 1

$P > 300^d$			$P < 300^d$		
$\bar{D}$	$\bar{A}$	$n$	$\bar{D}$	$\bar{A}$	$n$
37	6.7	43	37	6.0	7
42	6.4	69	43	6.1	60
47	6.3	55	47	5.8	100
53	5.3	24	51	5.0	18

На рис. 1 графически представлена зависимость среднего значения амплитуды изменения блеска от времени возрастания блеска для звезд с периодами  $P \geq 300^d$  и  $P < 300^d$ . Там же кружками представ-

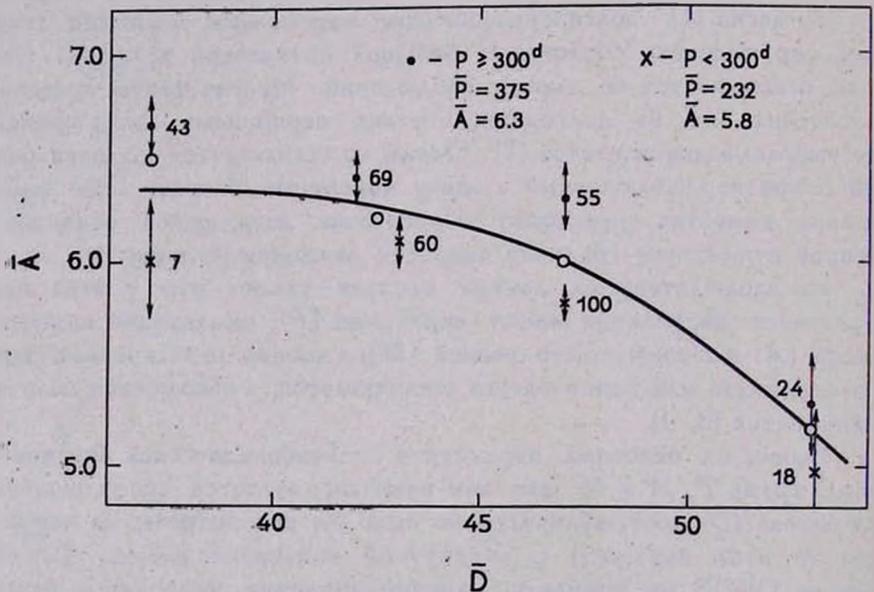


Рис. 1.

лена зависимость  $\bar{A}$  от  $\bar{D}$  для всех значений периодов звезд типа Миры Кита. Как видно из рисунка, с увеличением среднего значения времени возрастания блеска средняя амплитуда изменения блеска уменьшается. Между тем, зависимость между амплитудой изменения блеска

и периодом для звезд в указанных интервалах  $D$  весьма слаба и находится в пределах  $3\sigma$ .

Иными словами, амплитуда изменения блеска у долгопериодических переменных звезд типа Миры Кита слабее коррелирует с периодом, чем со временем возрастания блеска.

Отметим, что среднее отклонение средних значений амплитуд изменения блеска для отдельных групп звезд (указанных на рис. 1 стрелками) в некоторой степени увеличено из-за того, что взяты большие интервалы значений  $D$ .

Вышеприведенные данные указывают на то, что величина времени возрастания блеска  $D$  действительно является одним из важных параметров долгопериодических переменных звезд типа Миры Кита. Поэтому сопоставление различных характеристик этих звезд со временем возрастания блеска, вероятно, может помочь в понимании природы изменения блеска этих звезд.

*On a feature of Mira Ceti type long period variable stars. It is shown that a correlation between the brightness amplitude and the time of its rise exists for the Mira Ceti type stars.*

24 июля 1970

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

Р. А. ВАРДАНЯН

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Движущиеся оболочки звезд, Л., 1947.
2. Г. А. Шайн, Изв. АН СССР, сер. физическая, 9, 161, 1945.
3. Б. В. Кукаркин, Исследование строения и развития звездных систем, Л., 1949.
4. А. Н. Дейч и др., Курс астрофизики и звездной астрономии, 2, М., 1962, стр. 221

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ. III.

Гравитационное поле в общей теории относительности определяется не только распределением, но и движением вещества. В соответствии с этим оно может служить причиной релятивистского взаимодействия гидродинамических движений гравитирующей среды. Продолжая исследование [1, 2] нелинейных эффектов в релятивистской гидродинамике, мы рассмотрим здесь один простой пример такого взаимодействия.

Если плотность  $\rho$  и давление  $p$  не зависят от пространственных координат, то гравитирующая среда является нестационарной, она сжимается или расширяется. Относительная скорость  $v_0$  двух частиц, находящихся в данный момент времени  $t$  на расстоянии  $r$  друг от друга, определяется при изотропии движении соотношением

$$v_0 \equiv \dot{r} = H(t) r. \quad (1)$$

Пусть в таком однородном нестационарном распределении вещества имеется ограниченная область размера  $l$ , в которой помимо общего сжатия (или расширения) существуют еще слабые вращательные, вихревые движения с полем скорости  $v$ , не нарушающие однородности плотности ( $\text{div } v = 0$ ). Этим движениям отвечает некоторый момент импульса, который мы обозначим  $K$ . Рассмотрим возмущение, возникающее благодаря таким движениям во внешней среде, окружающей указанную область.

Если разности гравитационного потенциала в интересующем нас объеме малы по сравнению с квадратом скорости света, то в течение ограниченного промежутка времени метрику можно считать в нулевом приближении галилеевой. Гравитационное поле описывается при этом ньютоновской теорией, так что в любой точке (или для любой частицы), находящейся на расстоянии  $r$  от центра, выбранного внутри рассматриваемой области, гравитационная сила, действующая на единичную массу, есть  $(GM/r^2)n$ , где  $M$  — полная масса шара радиуса  $r$ ,  $n$  — орт радиус-вектора. В таком классическом приближении влияние вращательных движений на внешнюю среду отсутствует, если пренебрегать, как это предполагается, вязкостью.

В следующем, постньютоновском приближении, которое мы и будем рассматривать, необходимо учитывать отклонения метрики от галилеевой, причем гравитационное силовое поле уже не будет центрально-симметрическим. Малые отклонения от центральной симметрии, обязанные слабым вихревым движениям, создают вне возмущающей области дополнительную силу, эквивалентную кориолисовой силе, появляющейся при вращении с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{G}{c^2 r^2} [K - 3n(Kn)]. \quad (2)$$

Это утверждение представляет собою простое обобщение результата [3], относящегося к слабому стационарному гравитационному полю в вакууме. Очевидно, что наличие вещества вне области движений изменяет в принятом приближении лишь гравитационную массу источника; именно, массой источника следует считать величину  $M$ , опреде-

ленную выше. Неизменность во времени момента импульса  $K$  обеспечивает подобие рассматриваемой ситуации стационарной задаче. Что же касается массы  $M$ , то без ущерба для такого подобия она может и изменяться во времени: убывать при расширении или возрастать при сжатии.

Считая гравитационные релятивистские эффекты малыми, при вычислении эффекта, происходящего от вращательных движений, мы будем пренебрегать (по примеру [3]) влиянием неньютоновости центрально-симметрического силового поля. Тогда уравнение движения (лагранжево) для внешней среды есть

$$v = -\frac{GM}{r^2} n + 2[v\Omega] + \dots \quad (3)$$

Скорость  $v$  — это сумма скорости общего сжатия (или расширения)  $v_0$  и искомой дополнительной скорости. Поскольку последняя мала по сравнению с первой, мы можем пренебрегать ею во втором слагаемом в правой части (3). Если выбрать сферическую систему координат и направить полярную ось вдоль момента  $K$ , то проекция уравнения (3) на направление радиус-вектора даст невозмущенное уравнение для  $v_0$ . Проекция на  $\varphi$ -направление есть

$$\dot{v}_\varphi = -\frac{2G|K|}{c^2} \sin \vartheta \frac{v_0}{r^3} + \dots$$

Интегрируя, находим:

$$v_\varphi \sim \frac{G|K|}{c^2} \frac{\sin \vartheta}{r^2}. \quad (4)$$

(Несущественную константу интегрирования, как и константу, появляющуюся при интегрировании  $\vartheta$  — проекции уравнения (3),  $\dot{v}_\theta = 0$ , полагаем равной нулю).

Дивергенция  $v_\varphi$  равна нулю и поэтому эта дополнительная скорость не вызывает нарушения однородности плотности.

Решение (4) показывает, что движения, создающие момент  $K$ , увлекают своим гравитационным полем во вращение внешние слои среды. Исходное вихревое движение, взаимодействуя гравитационно с потенциальным движением (расширением или сжатием), порождает новое движение со скоростью  $v_\varphi$ .

В соответствии с общими соотношениями [2], величина эффекта гравитационного взаимодействия движений определяется в принятом приближении отношением ньютоновского потенциала  $\varphi = GM/r$  к квадрату скорости света. Например, в случае однородного вращения с

угловой скоростью  $\omega$  и сферической (с радиусом  $l$ ) формы возмущающей области

$$|K| = \frac{2}{5} M(l) l v_s, \quad M(l) = \frac{4\pi}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) l^3, \quad v_s = \omega l,$$

$$\frac{v_\varphi}{v_s} = \frac{2}{5} \frac{GM(l)}{l} \frac{1}{c^2} \left( \frac{l}{r} \right)^2 \sin \vartheta = \frac{2}{5} \frac{\varphi(l)}{c^2} \left( \frac{l}{r} \right)^2 \sin \vartheta.$$

В экваториальной плоскости ( $\vartheta = \pi/2$ ) вблизи границы области ( $r \approx l$ ) имеем приближенно

$$\frac{v_\varphi}{v_s} \approx \frac{\varphi}{c^2}. \quad (5)$$

Это соотношение по порядку величины справедливо и для области произвольной формы с произвольным распределением скорости. В частном случае, когда скорость  $v_0$  соответствует расширению по параболическому закону,  $2\varphi = v_0^2$ ,  $H \approx 1/t$ , находим

$$\frac{v_\varphi}{v} \approx \frac{v_0^2}{c^2} = \left( \frac{Hr}{c} \right)^2 \approx \left( \frac{r}{ct} \right)^2. \quad (6)$$

Как следует из соотношений (4)–(6), однородная гравитирующая среда устойчива при расширении и неустойчива при сжатии относительно возмущений, создаваемых вихревыми движениями. Этот вывод применим, в частности, к изотропной космологической модели. В квазиевклидовой космологической модели (а асимптотически при  $t \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ , также в моделях с отличной от нуля пространственной кривизной) расширение является параболическим, и потому, согласно (6), эффект вихревых возмущений определяется по порядку величины квадратом отношения масштаба вихревых движений к „расстоянию до горизонта“  $ct$ . Заметим, что решение (4) не содержится, очевидно, в линейной теории малых возмущений для изотропной модели [4].

В приближении, следующем за рассмотренным, когда учитываются величины порядка  $c^{-4}$ , исходные вихревые движения взаимодействуют с порожденным ими же вращательным движением и генерируют движение с отличной от нуля дивергенцией скорости, способное создать возмущение плотности. При вычислении этого эффекта необходимо учитывать несферичность распределения массы в возмущающей области, вклад гравитационного поля в полный момент импульса и т. п.

Мы благодарны за обсуждение А. Г. Дорошкевичу и И. Д. Новикову.

13 мая 1970

Ленинградский государственный  
университет

Физико-технический институт  
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

Е. А. ТИУНОВ

А. Д. ЧЕРНИН

*The interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics.* A solution for gravitational interaction of weak vortex motion with potential motion (expansion or contraction) of a homogeneous medium is obtained in the post-Newtonian approximation.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Чернин, Е. Д. Эйдельман, *Астрофизика*, 5, 654, 1969.
2. А. Д. Чернин, *Астрофизика*, 5, 656, 1969.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматгиз, М., 1962, стр. 363.
4. Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ*, 16, 587, 1946.

## CONTENTS

THE MILNE PROBLEM WITH PERTURBATION ON THE BOUNDARY <span style="float: right;"><i>V. P. Grinin</i></span>	5
NUMERICAL RESULTS FOR SOBOLEV'S FUNCTION Q OF RADIATIVE TRANSFER . . . . . <i>J. Buell, R. Kalaba, S. Ueno</i>	23
LINE FORMATION IN THE PRESENCE OF MAGNETIC FIELD II. SOURCE FUNCTIONS . . . . . <i>H. Domke</i>	39
ON BRIGHTNESS CHANGES IN CLOSE BINARY SYSTEMS OF DWARF STARS. . . . . <i>V. G. Gorbatzky</i>	57
CONGEALED STARS AND MULTIPLE SYSTEMS <span style="float: right;"><i>O. H. Guseinov, H. I. Nouruzova</i></span>	65
ON THE MOTION OF GAS IN CLOSE BINARY SYSTEMS <span style="float: right;"><i>Yu. P. Korovjakovsky</i></span>	71
ON SOME CHARACTERISTICS OF THE FLARE ACTIVITY OF UV CETI TYPE STARS . . . . . <i>V. S. Oskantan, V. Yu. Terebizh</i>	83
NEWTON THEORY OF RAPIDLY ROTATING WHITE DWARFS <span style="float: right;"><i>V. V. Papoyan, D. M. Sedrakian, E. V. Chubartan</i></span>	95
EVOLUTION AND RADIAL PULSATIONS OF ISOTHERMIC WHITE DWARFS WITH CONSIDERATION OF ROTATION, EFFECTS OF NEUTRONI- ZATION AND GENERAL RELATIVITY <span style="float: right;"><i>Yu. L. Vartanian, A. V. Houseplan</i></span>	107
THE STABILITY OF THE GRAVITATING SYSTEMS OF POINT MASSES. I. THE FINITE CILINDER OF RADIUS. . . . . <i>G. S. Bisnovaty-Kogan</i>	121
ON THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC RADIATION OF RELATIVIS- TIC BUNCH OF CHARGED PARTICLES . . . . . <i>V. Ya. Eidman</i>	135
ON CONVECTION IN THE PERIODICAL GRAVITATION FIELD <span style="float: right;"><i>L. N. Ivanov</i></span>	143
NOTES	
ON A FEATURE OF MIRA CETI TYPE LONG PERIOD VARIABLE STARS . <i>R. A. Vardanian</i>	159
THE INTERACTION OF VORTEX AND POTENTIAL MOTIONS IN RELATIVISTIC HYDRODY- NAMICS . . . . . <i>E. A. Tyonov, A. D. Chernin</i>	161