

ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ

ТОМ 5

НОЯБРЬ, 1969

ВЫПУСК 4

ПЕРЕНОС РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОМ СЛОЕ	<i>Д. И. Наирнер</i>	507
ОБРАЗОВАНИЕ ЛИНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ I. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ	<i>Х. Домже</i>	525
КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРИНО В АНИЗОТРОПНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ <i>А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков</i>		539
К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ. II. БАРИОННЫЕ КОНФИГУРАЦИИ	<i>Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян</i>	555
ГАЛАКТИКИ С УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫМ КONTИНУУМОМ. III. <i>Б. Е. Маркарян</i>		581
О ЦЕНТРАЛЬНЫХ СГУЩЕНИЯХ S_0 ГАЛАКТИК	<i>К. А. Саакян</i>	593
О ХАРАКТЕРЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ, СВЯЗАННЫХ С КВАЗИ-ЗВЕЗДНЫМИ РАДИОИСТОЧНИКАМИ. II.	<i>М. А. Аракелян</i>	603
ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА КОНВЕКЦИЮ В ПОЛИТРОПНОЙ АТМОСФЕРЕ	<i>Н. С. Петрухин</i>	615
ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ	<i>Т. А. Агекян, И. М. Михэилэ</i>	623
ОБРАЗОВАНИЕ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ТРОЙНЫХ СБЛИЖЕНИЯХ <i>Т. А. Агекян, Ж. П. Аносова, В. Н. Безубова</i>		637
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ		
ПОЛИТРОПНЫЕ МОДЕЛИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ <i>М. А. Мнацаканян</i>		645
КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ УИОРДАНА-ДИКЕ И НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ	<i>А. М. Манджос</i>	649
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ. I	<i>А. Д. Чернин, Е. Д. Эйдельман</i>	654
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ. II	<i>А. Д. Чернин</i>	656

Е Р Е В А Н

Խ Մ ր ա գ ր ա կ ա ն կ ղ լ Ե գ ի ա

Ս. Ա. Բոյարչուկ, Վ. Ա. Դոմբրովսկի, Յա. Բ. Ջելդովիչ, Հ. Մ. Թովմասյան,
Ս. Ա. Կապլան, Վ. Հ. Համբարձումյան (գլխավոր խմբագիր), Բ. Ե. Մարգարյան,
Լ. Վ. Միրզոյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Վ. Սորոլև

Редакционная коллегия

В. А. Амбарцумян (главный редактор), А. А. Боярчук, В. А. Домбровский,
Я. Б. Зельдович, С. А. Каплан, Б. Е. Маркарян, Л. В. Мирзоян (зам. главного
редактора), В. В. Соболев, Г. М. Товмасын

„АСТРОФИЗИКА“ — научный журнал, издаваемый Академией наук Армянской ССР. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой.

Журнал предназначается для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал выходит 4 раза в год, цена одного номера 1 рубль, подписная плата за год 4 рубля. Подписку можно произвести во всех отделениях Союзпечати, а за границей через агентство „Международная книга“, Москва, 200.

«Աստրոֆիզիկա»-ն գիտական հանդես է, որը հրատարակվում է Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի կողմից: Հանդեսը տպագրում է ինֆնատիվ հոդվածներ աստղերի ֆիզիկայի, միզամոծությունների ու միջաստղային միջավայրի ֆիզիկայի, աստղային և արտագալակտիկական աստղագիտության, ինչպես նաև աստրոֆիզիկային սամանակից քննարկման գծով:

Հանդեսը նախատեսված է գիտական աշխատակիցների, ասպիրանտների և բարձր կուրսների ուսանողների համար:

Հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան 4 անգամ, 1 համարի արժեքն է 1 ուրլի, բաժանորդագիրը 4 ուրլի մեկ տարվա համար: Բաժանորդագրվել կարելի է «Սոյուզպեչատ»-ի բոլոր բաժանմունքներում, իսկ արտասահմանում «Մեխդունարոդնայա կնիգա» գործակալության միջոցով, Մոսկվա, 200:

ПЕРЕНОС РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОМ СЛОЕ

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 5 мая 1969

Рассматривается перенос излучения в резонансной линии в плоском слое оптической толщины τ_0 . Считается, что происходит консервативное рассеяние с полным перераспределением по частоте. Найдена точная асимптотическая формула, выражающая резольвентную функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$ через $\Phi(\tau) \equiv \Phi(\tau, \infty)$ при $\tau_0 \gg 1$ и любых оптических глубинах τ ($0 < \tau < \tau_0$). При помощи этой формулы может быть решена любая задача о свечении чисто рассеивающего слоя большой оптической толщины. В качестве примера найдено среднее число рассеяний кванта, возникшего в любом месте слоя.

1. *Введение.* Изучение переноса излучения в плоском слое газа, состоящего из двухуровневых атомов, на которых происходит резонансное рассеяние с полным перераспределением по частоте, приводит к интегральному уравнению с ядром, зависящим от модуля разности аргументов [1—3], для функции источников $S(\tau)$:

$$S(\tau) = g(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau'. \quad (1)$$

Здесь τ — оптическая глубина точек слоя, τ_0 — оптическая толщина слоя, τ и τ_0 рассчитываются для центра линии; λ — вероятность выживания кванта при рассеянии, $g(\tau)$ — заданная функция, характеризующая мощность первичных источников излучения, $K(\tau)$ — ядерная функция

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[\tau\alpha(x)] dx, \quad (2)$$

где x — безразмерная частота, отсчитываемая от центра линии, $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения $\left(\alpha(0) = 1, A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 1 \right)$.

В работах В. В. Соболева [1, 2] показано, что резольвента уравнения (1) выражается через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$, определяемую уравнением

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} K(|\tau|) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau', \tau_0) d\tau'. \quad (3)$$

Таким образом, если известна $\Phi(\tau, \tau_0)$, то при любых $g(\tau)$ можно найти функцию источников $S(\tau)$. Функция $\Phi(\tau, \tau_0)$ имеет простой физический смысл. С точностью до постоянного множителя она равна степени возбуждения атомов в слое, на границе которого ($\tau = 0$) все время поддерживается (не рассеянным излучением, а каким-либо другим механизмом) постоянная поверхностная плотность возбужденных атомов. Величина же ($\delta(\tau)$ — δ -функция)

$$\frac{\delta(\tau) + \Phi(\tau, \tau_0)}{1 + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau', \tau_0) d\tau'} d\tau \quad (4)$$

представляет собой вероятность того, что квант, находящийся в поглощенном состоянии на границе среды $\tau = 0$, затем, после любого числа рассеяний поглотится на глубинах от τ до $\tau + d\tau$ (подробнее о физической стороне задачи см., например, [3]).

Найти точное решение уравнения (3) с ядром (2) в замкнутой форме возможно лишь для случая полубесконечного слоя, т. е. при $\tau_0 = \infty$. Функция $\Phi(\tau) = \Phi(\tau, \infty)$ найдена в явном виде [4] и подробно исследована [4, 5] (см. также [3]). При конечных же τ_0 уравнение (3) приходится решать численно. Численные расчеты были проведены рядом авторов (см. недавний обзор Д. Хаммера и Дж. Рыбицкого [6]). Если $1 - \lambda$ не очень мало, а τ_0 не очень велико, то хорошие результаты дает применение различных численных методов. Напротив, при больших τ_0 и λ , близких к единице, для получения даже сравнительно невысокой точности требуются значительные затраты машинного времени. В астрофизических же объектах типичными являются именно такие условия, когда истинное поглощение мало, а толщина слоя велика, т. е. $1 - \lambda \ll 1$, $\tau_0 \gg 1$.

Между тем ясно, что оптические характеристики слоя большой толщины и полубесконечного слоя должны быть близки. В связи с

этим возникает задача выразить функции, определяющие поле излучения в толстом слое, через соответствующие функции для полубесконечной среды. Такая задача прежде всего рассматривалась для выходящего излучения. Во многих случаях интенсивность выходящего излучения может быть выражена через преобразования Лапласа от $\Phi(z, \tau_0)$, точнее говоря, через функции [2, 7]

$$X(z, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{z}{s}} \Phi(\tau, \tau_0) d\tau, \tag{5}$$

$$Y(z, \tau_0) = e^{-\frac{z}{s}} + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{z-\tau}{s}} \Phi(\tau, \tau_0) d\tau,$$

а для полубесконечного слоя — через

$$H(z) \equiv X(z, \infty) = 1 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{s}} \Phi(\tau) d\tau. \tag{6}$$

Для случая изотропного монохроматического рассеяния (без изменения частоты), которому соответствует $K(\tau) = E_1(\tau)$, функции $H(z)$, $X(z, \tau_0)$ и $Y(z, \tau_0)$ часто, например, в [1] и [3], обозначаются $\varphi(\mu)$, $\varphi(\mu, \tau_0)$ и $\psi(\mu, \tau_0)$ и называются функциями Амбарцумяна. В работах В. В. Соболева [8, 9] для $0 \leq \mu \leq 1$, а затем В. В. Иванова [10] для произвольных значений μ функции $\varphi(\mu, \tau_0)$ и $\psi(\mu, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ выражены через $\varphi(\mu)$ при любых λ ($0 \leq \lambda \leq 1$).

Для задач с полным перераспределением по частоте связь X - и Y -функций с H -функцией, для которой имеется, как и для $\Phi(\tau)$, явное выражение, получить труднее. Здесь приходится ограничиваться частными случаями. В. В. Иванов [7] выразил $X(z, \tau_0)$ и $Y(z, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ через $H(z)$ при выполнении одного из следующих предельных соотношений между значениями λ и τ_0 :

$$\frac{1 - V(1/\tau_0)}{1 - \lambda} \ll 1, \tag{7}$$

$$\frac{1 - V(1/\tau_0)}{1 - \lambda} \gg 1, \tag{8}$$

где

$$V(u) = \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \tau u d\tau, \tag{9}$$

в двух частных случаях, когда $\tau_0/z \gg 1$ и $\tau_0/z \ll 1$. Неравенство (7) физически означает, что в слое определяющую роль в выбывании квантов из рассеяний играет истинное поглощение. В противоположном случае (8) главный процесс выбывания квантов—выход их из среды (подробнее об этом см. [3]). Тогда во всех уравнениях можно положить $\lambda = 1$, считая рассеяние консервативным, т. е. что за каждым актом поглощения кванта атомом следует его переизлучение. Для консервативного случая в [10] найден также главный член асимптотического разложения $\frac{X(\tau_0/t, \tau_0)}{X(\infty, \tau_0)}$ и $\frac{Y(\tau_0/t, \tau_0)}{X(\infty, \tau_0)}$ при $\tau_0 \gg 1$. В [7] и [10]

рассматривался доплеровский профиль коэффициента поглощения $\alpha(x) = e^{-x^2}$. В работе автора [11] консервативный случай изучен подробнее. Найдены главные члены асимптотик $X(z, \tau_0)$ и $Y(z, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ и любых z . Что касается коэффициента поглощения, то он предполагался либо имеющим прямоугольный профиль (монохроматическое рассеяние), либо убывающим в крыле линии по степенному закону. Доплеровский профиль был рассмотрен отдельно. В. В. Иванов указал способ объединения этих результатов [3] (см. также ниже). Недавно для доплеровского профиля им получены также [12] старшие члены асимптотических разложений X - и Y -функций при $\tau_0 \rightarrow \infty$.

Асимптотическое выражение $\Phi(\tau, \tau_0)$ через $\Phi(\tau)$ до сих пор было найдено только для монохроматического рассеяния. Формула, справедливая при любых λ и любых τ ($0 < \tau \leq \tau_0$), была дана В. В. Соболевым в работе [9]. Обобщить его результат на рассеяние с полным перераспределением целиком не удастся. В настоящей статье, являющейся по существу продолжением [11], находится асимптотика $\Phi(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ в предположении, что выполняется условие (8). Отметим, что в работе [9] существенно использовалось наличие полюса у преобразования Лапласа от $\Phi(\tau)$. Как известно, так обстоит дело лишь в случае монохроматического рассеяния, при полном же перераспределении по частоте полюса нет [3—5]. Поэтому применяемый нами способ получения асимптотики $\Phi(\tau, \tau_0)$ отличается от способа [9]. Близкие, хотя менее точные результаты, касающиеся асимптотического поведения $\Phi(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$, получены недавно другим путем Ю. Ю. Абрамовым, А. М. Дыхне и А. П. Напартовичем [13].

2. *Функции M и N .* В уравнении (3) оптическая глубина заключена между 0 и τ_0 . Мы продолжим функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$ на все значения τ ($-\infty < \tau < +\infty$) при помощи того же уравнения (3). Физически такое продолжение соответствует тому, что мы дополняем слой

толщины τ_0 с обеих сторон средой с теми же оптическими свойствами, но не переизлучающей поглощаемые в ней кванты. Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \tau_0) &= N(-\tau, \tau_0) \text{ при } \tau \leq 0, \\ \Phi(\tau, \tau_0) &= M(\tau - \tau_0, \tau_0) \text{ при } \tau > \tau_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь воспользуемся тем, что если $\alpha(x)$ четная строго убывающая при $x \geq 0$ функция, то ядерную функцию $K(\tau)$ можно привести к виду [1, 3]

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} G(z) e^{-\frac{\tau}{z}} \frac{dz}{z}, \quad (11)$$

где

$$G(z) = \begin{cases} 2A \int_0^{\infty} \alpha^2(x) dx & \text{при } z \leq 1, \\ 2A \int_{x(z)}^{\infty} \alpha^2(x) dx & \text{при } z \geq 1, \\ \alpha(x(z)) = \frac{1}{z}, & x(z) > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Тогда, заменяя в (3) τ на $-\tau$, где $\tau > 0$, подставляя туда (11) и используя (10) и (5), находим, что функция $N(\tau, \tau_0)$ выражается через $X(z, \tau_0)$:

$$\Phi(-\tau, \tau_0) = N(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} X(z, \tau_0) G(z) \frac{dz}{z}. \quad (13)$$

Аналогично ($\tau > 0$, как и в (13))

$$\Phi(\tau_0 + \tau, \tau_0) = M(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} Y(z, \tau_0) G(z) \frac{dz}{z}. \quad (14)$$

Из сказанного ясен физический смысл функций M и N . Так $N(\tau, \tau_0)$ дает среднее число квантов, поглощаемых на высоте τ над слоем (на „глубине“ $-\tau$), если первоначально в поглощенном состоянии на глубине $\tau = 0$ находился один квант, а среда продолжена, как говорилось выше.

Функции $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$ вводились раньше [2] равенствами (13)–(14). Мы видим, что три функции $\Phi(\tau, \tau_0)$, $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$

по существу представляют одну. Получим уравнения, которым удовлетворяют эти функции. Дифференцируя (3) по τ_0 , находим

$$\frac{\partial \Phi(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} = \Phi(\tau_0, \tau_0) \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0). \quad (15)$$

Отсюда, используя равенства (10), получаем уравнения для M и N

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \Phi(\tau_0, \tau_0) M(\tau, \tau_0), \\ \frac{\partial M(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} - \frac{\partial M(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} &= \Phi(\tau_0, \tau_0) N(\tau, \tau_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Входящая сюда функция $\Phi(\tau_0, \tau_0)$ следующим образом выражается через $Y(z, \tau_0)$:

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) = M(0, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} G(z) Y(z, \tau_0) \frac{dz}{z}. \quad (1)$$

Применяя к системе (16) преобразование Лапласа по τ на промежутке $[0, +\infty)$, а к (15) — на конечном промежутке $[0, \tau_0]$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \Phi(\tau_0, \tau_0) \bar{M}(z, \tau_0), \\ \frac{\partial \bar{M}(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \frac{1}{z} \bar{M}(z, \tau_0) + \Phi(\tau_0, \tau_0) [\bar{N}(z, \tau_0) - 1], \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{N}(z, \tau_0) &= \int_0^{\infty} N(\tau, \tau_0) e^{-\frac{\tau}{z}} d\tau = \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\infty} X(z', \tau_0) G(z') \frac{dz'}{z' + z}, \\ \bar{M}(z, \tau_0) &= \int_0^{\infty} M(\tau, \tau_0) e^{-\frac{\tau}{z}} d\tau = \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\infty} Y(z', \tau_0) G(z') \frac{dz'}{z' + z}, \end{aligned} \quad (19)$$

а также известную систему для X - и Y -функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \Phi(\tau_0, \tau_0) Y(z, \tau_0), \\ \frac{\partial Y(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= -\frac{1}{z} Y(z, \tau_0) + \Phi(\tau_0, \tau_0) X(z, \tau_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Впрочем, (18) можно вывести и из (20).

К полученным уравнениям необходимо добавить граничные условия

$$N(\tau, \infty) = N_i(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} H(z) e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) \frac{dz}{z},$$

$$M(\tau, \infty) = \bar{M}(z, \infty) = 0, \quad (21)$$

$$\bar{N}_i(z, \infty) = \bar{N}(z) = 1 - \frac{1}{H(z)}.$$

Последнее равенство представляет собой известное нелинейное интегральное уравнение для H -функции [2, 3].

Как уже говорилось, мы будем считать выполненным неравенство (8). Это позволяет положить во всех уравнениях $\lambda = 1$. Все последующее рассмотрение проводится для этого случая. Приведем теперь те из известных результатов, относящихся к консервативному рассеянию в полубесконечном слое, которые понадобятся нам в дальнейшем.

3. *Характеристики полубесконечного слоя.* Как отмечалось выше, функции, характеризующие поле излучения в полубесконечном слое, получены в явном виде. При $\lambda = 1$ резольвентная функция $\Phi(\tau)$ дается формулой

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{G(z) e^{-\frac{\tau}{z}}}{[1 - U(z)]^2 + \frac{\pi^2}{4} z^2 G^2(z)} \cdot \frac{dz}{zH(z)}, \quad (22)$$

а для $H(z)$ справедливо выражение

$$\ln H(z) = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln[1 - V(u)] \frac{z du}{1 + z^2 u^2}, \quad (23)$$

где $V(u)$ — косинус-преобразование (9) ядерной функции $K(\tau)$, а $U(z)$ — ее двухстороннее преобразование Лапласа:

$$U(z) = V\left(\frac{i}{z}\right) = z^2 \int_0^{\infty} G(z') \frac{dz'}{z^2 - z'^2}. \quad (24)$$

Во всех представляющих практический интерес случаях асимптотики $\Phi(\tau)$ и $H(z)$ при больших τ и соответственно z выражаются через $V(u)$. Именно, в широком классе случаев $V(u)$ при малых u ведет себя таким образом, что

$$1 - V(u) \sim V_0(u) u^{2\gamma}, \quad (25)$$

где γ — постоянная ($0 < \gamma \leq 1$), а $V_0(u)$ — постоянная или медленно меняющаяся при $u \rightarrow 0$ функция. Последнее означает, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{V_0(uc)}{V_0(u)} = 1, \quad 0 < c < \infty. \quad (26)$$

Например, при монохроматическом рассеянии $\gamma = 1$, $V_0 = 1/3$, при доплеровском контуре $\gamma = 1/2$, $V_0(u) = \sqrt{\pi}/(4\sqrt{\ln 1/u})$. Если $\alpha(x)$ при $|x| \gg 1$ представляется произведением медленно меняющейся при $|x| \rightarrow +\infty$ функции на $x^{-1/(1-2\gamma)}$, то $0 < \gamma < 1/2$. В частности, при лоренцовском профиле $\alpha(x) = 1/(1+x^2)$ мы имеем $\gamma = 1/4$, $V_0 = \sqrt{2}/3$.

Если выполнено (25), то имеют место асимптотические равенства:

$$\Phi(\tau) \sim \Phi_{as}(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\gamma) \sqrt{V_0\left(\frac{1}{\tau}\right)}} \frac{1}{\tau^{1-\gamma}}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (27)$$

$$H(z) \sim H_{as}(z) = \frac{z^\gamma}{\sqrt{V_0\left(\frac{1}{z}\right)}}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (28)$$

где $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция. Нам понадобится еще функция

$$\Psi(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^\tau \Phi(\tau', \tau_0) d\tau'. \quad (29)$$

При больших τ

$$\Psi(\tau) \equiv \Psi(\tau, \infty) \sim \Psi_{as}(\tau) = \frac{\tau^\gamma}{\Gamma(1+\gamma) \sqrt{V_0\left(\frac{1}{\tau}\right)}}. \quad (30)$$

Для простоты вывода искомых асимптотик для конечного слоя мы примем ряд предположений (в конце статьи будет указано, как от них отказаться). Будем считать, что $0 < \gamma < 1/2$, а $V_0(u) = \text{const}$. Предположим также, что

$$H(z) - H_{as}(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Тогда при помощи (6) легко проверить, что выполняются соотношения: при $\tau \rightarrow \infty$

$$\Psi(\tau) - \Psi_{ss}(\tau) \rightarrow 1 + \int_0^{\infty} [\Phi(\tau) - \Phi_{ss}(\tau)] d\tau = 0. \quad (32)$$

4. *Асимптотики функций M и N.* В этом пункте мы выразим $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ через $N(\tau)$. Начнем с рассмотрения их преобразований Лапласа (19). Асимптотики $\bar{N}(z, \tau_0)$ и $\bar{M}(z, \tau_0)$ мы найдем из уравнений (18) при условиях (21). Для этого воспользуемся асимптотической формулой [3, 11, 13]

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{\gamma}{\tau_0}. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (18) и переходя к переменной $t = \tau_0/z$, получим систему

$$\begin{aligned} \bar{N}' &= \frac{\gamma}{t} \bar{M}, \\ \bar{M}' &= \frac{\gamma}{t} (\bar{N} - 1) + \bar{M}, \end{aligned} \quad (34)$$

где штрих означает производную по t . Условиями, позволяющими выделить нужное нам решение, служат ограниченность искомых функций и (21). Сводя систему (34) к одному уравнению второго порядка и решая его, найдем

$$\begin{aligned} \bar{N}(z, \tau_0) &= \bar{N}(z) - \bar{n}(t) + \bar{N}(z) \bar{n}(t), \\ \bar{M}(z, \tau_0) &= \bar{m}(t) - \bar{N}(z) \bar{m}(t). \end{aligned} \quad (35)$$

Входящие сюда функции $\bar{n}(t)$ и $\bar{m}(t)$ могут быть представлены несколькими способами:

$$\begin{aligned} \bar{n}(t) &= e^{t/2} t^{-1/2} \mathcal{W}_{1/2, \gamma}(t) - 1 = \\ &= \frac{1}{2} t^{1/2} \pi^{-1/2} e^{t/2} \left[K_{\gamma+1/2} \left(\frac{t}{2} \right) + K_{\gamma-1/2} \left(\frac{t}{2} \right) \right] - 1 = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\gamma-1} \left[\left(1 + \frac{u}{t} \right)^{\gamma} - 1 \right] du, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= \gamma e^{t/2} t^{-1/2} W_{-\gamma, \gamma}(t) = \\ &= \frac{1}{2} t^{1/2} x^{-1/2} e^{t/2} \left[K_{\gamma+1/2}\left(\frac{t}{2}\right) - K_{\gamma-1/2}\left(\frac{t}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{t\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\gamma} \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{\gamma-1} du. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $W_{k, \gamma}$ — функции Уиттекера, а K_{ν} — функции Макдональда (в [11] K_{ν} имеет другую нормировку):

$$W_{k, \gamma}(t) = \frac{t^k e^{-t/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + \gamma\right)} \int_0^{\infty} u^{-k-1/2+\gamma} \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{k-1/2+\gamma} e^{-u} du, \quad (37)$$

$$K_{\nu}(t) = \frac{t^{\nu} \sqrt{\pi}}{2^{\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} \varphi} \operatorname{sh}^{2\nu} \varphi d\varphi. \quad (38)$$

Если заменить в (35) функцию $\bar{N}(z)$ по формуле из (21), то $\bar{N}(z, \tau_0)$ и $\bar{M}(z, \tau_0)$ окажутся выраженными через H -функцию.

Отметим, что из (35) могут быть получены асимптотики X - и Y -функций при больших τ_0 , найденные в [11]. Для этого следует воспользоваться линейными интегральными уравнениями [3]:

$$[1 - U(z)] X(z, \tau_0) = 1 - \bar{N}(-z, \tau_0) - e^{-\frac{z}{s}} \bar{M}(z, \tau_0), \quad (39)$$

$$[1 - U(z)] Y(z, \tau_0) = e^{-\frac{z}{s}} - e^{-\frac{z}{s}} \bar{N}(z, \tau_0) - \bar{M}(-z, \tau_0).$$

Подставляя сюда (35), получим

$$\begin{aligned} X(z, \tau_0) &= H(z) [\bar{n}(-t) + 1] - H(-z) e^{-t} \bar{m}(t), \\ Y(z, \tau_0) &= -H(z) \bar{m}(-t) + H(-z) e^{-t} [\bar{n}(t) + 1]. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь под функциями с вещественным отрицательным аргументом понимаются полусуммы их пределов при стремлении аргумента к соответствующей точке на вещественной оси сверху и снизу. Из известного соотношения

$$H(z) H(-z) [1 - U(z)] = 1 \quad (41)$$

имеем [11]

$$H(-z) = \frac{1 - U(z)}{[1 - U(z)]^2 + \frac{\pi^2}{4} z^2 G^2(z)} \cdot \frac{1}{H(z)} \quad (42)$$

Величины $\bar{n}(-t)$ и $\bar{m}(-t)$ при $t \geq 0$ также выражаются через функции Макдональда и бесселевы функции от мнимого аргумента

$$1 + \bar{n}(-t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2} e^{-t/2} \left[I_{\gamma+1/2} \left(\frac{t}{2} \right) + I_{\gamma-1/2} \left(\frac{t}{2} \right) \right] + \cos \pi \gamma e^{-t} \bar{m}(t), \quad (43)$$

$$\bar{m}(-t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2} e^{-t/2} \left[I_{\gamma+1/2} \left(\frac{t}{2} \right) - I_{\gamma-1/2} \left(\frac{t}{2} \right) \right] + \cos \pi \gamma e^{-t} [\bar{n}(t) + 1].$$

На возможность выражения $X(z, \tau_0)$ и $Y(z, \tau_0)$ через бесселевы функции обратил внимание В. В. Иванов [3]. Отметим, что если выражения (40) и (35) подставить в известные нелинейные уравнения для X - и Y -функций (см., например, [3]), то получатся верные равенства.

Перейдем к асимптотикам самих $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$. Оригиналами $\bar{n}(t)$ и $\bar{m}(t)$, (т. е. функциями, для которых $\bar{n}(t)$ и $\bar{m}(t)$ служат преобразованиями Лапласа) являются следующие функции:

$$n(\xi) = \gamma^2 F(1 - \gamma, 1 + \gamma, 2; -\xi) = \gamma^2 (1 + \xi)^{\gamma-1} F\left(1 - \gamma, 1 - \gamma, 2, \frac{\xi}{1 + \xi}\right), \quad (44)$$

$$m(\xi) = \gamma F(1 - \gamma, 1 + \gamma, 1, -\xi) = \gamma (1 + \xi)^{\gamma-1} F\left(1 - \gamma, -\gamma, 1, \frac{\xi}{1 + \xi}\right).$$

Здесь F — полная гипергеометрическая функция

$$F(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a-1) \cdots (a-k+1) b(b-1) \cdots (b-k+1)}{k! c(c-1) \cdots (c-k+1)} z^k =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} (1-zu)^{-b} du. \quad (45)$$

Функции n и m связаны дифференциальными уравнениями, получающимися из (34),

$$\frac{d}{d\xi} [\xi n(\xi)] = \gamma m(\xi), \quad \frac{d}{d\xi} [(\xi + 1) m(\xi)] = \gamma n(\xi). \quad (46)$$

Переходя в равенствах (35) от преобразований к оригиналам, при помощи теоремы о свертке получим следующие асимптотические выражения

$$N(\tau, \tau_0) = N(\tau) - \frac{1}{\tau_0} n\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) + \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau} N(\tau') n\left(\frac{\tau - \tau'}{\tau_0}\right) d\tau',$$

$$M(\tau, \tau_0) = \frac{1}{\tau_0} m\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau} N(\tau') m\left(\frac{\tau' - \tau}{\tau_0}\right) d\tau'. \quad (47)$$

Легко проверить, что определяемые этими формулами функции удовлетворяют системе (16) и условиям (21).

5. *Асимптотика* $\Phi(\tau, \tau_0)$. Воспользуемся соотношениями, связывающими $\Phi(\tau, \tau_0)$ и $\Phi(\tau)$ с $\Phi_{\infty}(\tau)$ — решением уравнения вида (3), в котором интеграл берется от $-\infty$ до $+\infty$. Эти соотношения имеют вид ([14], см. также [3]):

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi_{\infty}(\tau) - \int_0^{\infty} \Phi_{\infty}(\tau + t) N(t, \tau_0) dt -$$

$$- \int_0^{\infty} \Phi_{\infty}(\tau_0 - \tau + t) M(t, \tau_0) dt, \quad (48)$$

$$\Phi(\tau) = \Phi_{\infty}(\tau) - \int_0^{\infty} \Phi_{\infty}(\tau + t) N(t) dt. \quad (49)$$

Подставляя в (48) асимптотики $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$ из (47), меняя порядок интегрирования и учитывая (49), находим

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) + \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\infty} n\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \Phi(\tau + t) dt -$$

$$- \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\infty} m\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \Phi(\tau_0 - \tau + t) dt \quad (50)$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \tau_0) = & \Phi(\tau) + \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} n\left(\frac{\tau' - \tau}{\tau_0}\right) \Phi(\tau') d\tau' - \\ & - \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0 - \tau}^{\infty} m\left(\frac{\tau' - \tau_0 + \tau}{\tau_0}\right) \Phi(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (51)$$

При помощи известных свойств гипергеометрических функций легко установить, что каждый из интегралов в (50) сходится при $0 < \gamma < 1/2$. Если, однако, разность интегралов рассматривать как один, то сходимость будет обеспечена при $0 < \gamma \leq 1$. Чтобы сходимость улучшить, вычтем и прибавим в (51) под знаками интегралов $\Phi_{as}(\tau')$. Тогда, вычисляя получающиеся интегралы, придем к более удобной для исследований (и особенно вычислений) формуле

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \tau_0) = & \Phi(\tau) - \Phi_{as}(\tau) \left[1 - \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\gamma} \right] + \\ & + \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} n\left(\frac{\tau' - \tau}{\tau_0}\right) [\Phi(\tau') - \Phi_{as}(\tau')] d\tau' - \\ & - \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0 - \tau}^{\infty} m\left(\frac{\tau' - \tau_0 + \tau}{\tau_0}\right) [\Phi(\tau') - \Phi_{as}(\tau')] d\tau'. \end{aligned} \quad (52)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что каждое из трех выражений (50), (51) и (52) удовлетворяет соотношению (15) точно, если $\Phi(\tau_0, \tau_0)$ взять согласно (33). Можно показать, что из (50) следуют и асимптотики (40) для X - и Y -функций. Наоборот, из (40) можно вывести формулу (50). Сделать это, однако, не очень просто, поэтому мы предпочли обходный путь — через функции M и N , которые представляют и самостоятельный интерес.

6. *Частные случаи.* Выражение (52) довольно сложно. Посмотрим, что оно дает при различных предельных соотношениях между τ и τ_0 . Рассмотрим сначала точки, находящиеся вдали от обеих граничных плоскостей. Удаленность от границ означает, что ни τ , ни $\tau_0 - \tau$ не очень малы по сравнению с τ_0 . Тогда $\Phi(\tau)$ можно заменить на $\Phi_{as}(\tau)$, а обоими интегралами в (52) пренебречь. В результате получим

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi_{as}(\tau_0) \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\gamma-1} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\gamma}. \quad (53)$$

Другими способами это выражение было получено в [12] и [13].

Вблизи границы $\tau = 0$, т. е. при $\tau \ll \tau_0$, в (52) можно откинуть второй интеграл, а в первом положить функцию n равной $n(0) = \gamma^2$. Действительно, при больших τ' разность $\Phi(\tau') - \Phi_{as}(\tau')$ мала, и основной вклад в оставленный интеграл дают малые τ' . Учитывая (29) и (30), находим, что при $\tau \ll \tau_0$

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) - \frac{\gamma^2}{\tau_0} \Psi(\tau). \quad (54)$$

Эта формула согласуется с (47), так как

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} [\Phi(\tau) - \Phi(\tau, \tau_0)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} [N(\tau) - N(\tau, \tau_0)] = \frac{\gamma^2}{\tau_0}. \quad (55)$$

Напротив, для точек вблизи границы $\tau = \tau_0$ можно считать, что $\Phi(\tau) = \Phi_{as}(\tau)$ вне интегралов, отбросить первый интеграл, а во втором заменить m на $m(0) = \gamma$. Таким образом, при $\tau_0 - \tau \ll \tau_0$

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\gamma}{\tau_0} \Psi(\tau_0 - \tau). \quad (56)$$

Последняя формула показывает, что значение $\Phi(\tau_0, \tau_0)$, даваемое (52), находится в согласии с (33).

Из проведенного рассуждения видно, что в формуле (52) внеинтегральные члены определяют поведение $\Phi(\tau, \tau_0)$ вдали от границ слоя, первый интеграл дает отклонения $\Phi(\tau, \tau_0)$ от $\Phi(\tau)$ около граничной плоскости $\tau = 0$, а второй около плоскости $\tau = \tau_0$.

Наконец, укажем формулу, охватывающую три рассмотренных предельных случая. Для этого, предполагая выполненным (32), заменим функции n и m в (52) их значениями в нуле. Тогда получим гораздо более простую, чем (52) формулу

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \tau_0) = & \Phi(\tau) - \Phi_{as}(\tau) \left[1 - \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\gamma} \right] - \\ & - \frac{\gamma}{\tau_0} [\gamma \Psi(\tau) - \Psi(\tau_0 - \tau) + \Psi_{as}(\tau_0 - \tau) - \gamma \Psi_{as}(\tau)]. \end{aligned} \quad (57)$$

В [13] получена следующая асимптотика

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\Phi(\tau) \Psi(\tau_0 - \tau)}{\Psi(\tau_0)}. \quad (58)$$

В отличие от (52) формулы (57) и (58) не являются строгими асимптотическими выражениями, в частности не удовлетворяют уравнению (15). Для двух областей — далекой от границ и вблизи $\tau = \tau_0$ — обе они переходят соответственно в (53) и (56). Для граничной же области $\tau \ll \tau_0$ (57) является несколько более точной: (58) дает лишь первое слагаемое в (54) правильно.

Рассуждения, приведенные при выводе формул этого и предыдущего пункта, строго говоря, справедливы лишь при $0 < \gamma < 1/2$ и $V_0(u) = \text{const}$. Действительно, мы использовали функцию $\Phi_{\infty}(\tau)$, которая существует для $\gamma < 1/2$. При переходе от (52) к (57) предполагалось верное лишь для $V_0(u) = \text{const}$ соотношение (32). От этих ограничений можно, однако, освободиться. Полученные для $0 < \gamma < 1/2$ выражения можно аналитически продолжить по γ , и они оказываются поэтому верны для всех значений $0 < \gamma \leq 1$. Если же $V_0(u)$ не постоянная, а медленно меняющаяся функция, то при выводе асимптотик выражения вида $V_0(\tau/\tau_0)$ надо заменять на $V_0(1/\tau_0)$. Тогда, как можно показать, все результаты остаются в силе. При $V_0(u) \neq \text{const}$ асимптотические разложения $\Phi(\tau)$ и $H(z)$ могут идти не по степеням аргументов. Например, при доплеровском профиле разложения содержат обратные степени $\ln \tau$ и $\ln z$ [3]. Тогда, если в асимптотиках $\Phi(\tau)$ и $H(z)$ ограничиться (27) и (28), т. е. взять только первые члены разложений, то соотношения (32) перестают выполняться, причем интеграл в (32) может расходиться. Тем не менее, можно показать, что формулы (54), (56) и (57) верны и в этом случае, если при выводе их под $\Phi_{\text{ас}}(\tau)$ понимать не выражение (28), а функцию, обеспечивающую сходимость интеграла в (32), в окончательных же результатах опять переходить к (28).

Отметим, что формулу (52) в случае монохроматического рассеяния ($\gamma = 1$) можно существенно уточнить, если (33) и (30) заменить на (см., например, [9])

$$\Phi_M(\tau_0, \tau_0) = \frac{1}{\tau_0 + 2q(\infty)}, \tag{59}$$

$$\Psi_M(\tau) = \sqrt{3} [\tau + q(\tau)], \tag{60}$$

где $q(\tau)$ — функция Хопфа [1], в частности $2q(\infty) = 1.4209$. Поскольку в (58) к τ_0 добавляется лишь постоянное слагаемое, то все выкладки предыдущих пунктов проходят без изменений, а поэтому остаются в силе и окончательные формулы (47) и (52), если заменить в них τ_0 перед интегралами на $\tau_0 + 2q(\infty)$. В соответствии с (44) в этом случае $n = m = 1$, так как $\gamma = 1$. В результате для $\Phi_M(\tau, \tau_0)$ получается выражение, найденное В. В. Соболевым в [9]:

$$\Phi_M(\tau, \tau_0) = \Phi_M(\tau) - \sqrt{3} \frac{\tau + q(\tau) - q(\tau_0 - \tau) + q(\infty)}{\tau_0 + 2q(\infty)}. \quad (61)$$

Отметим еще, что при $\gamma = 1$ приближенная формула (57) после замены τ перед последней квадратной скобкой на $\tau_0 + 2q(\infty)$, как и (52), переходит в (61). Формулы (53), (54) и (56) также оказываются справедливыми после указанной замены.

Асимптотика (61) дает $\Phi_M(\tau, \tau_0)$ с точностью до членов порядка $e^{-\tau}$. Относительно точности (52) в общем случае можно сказать следующее. Когда V_0 — постоянная, то порядок погрешности (52) меньше, чем $1/\tau_0$. В противном случае относительная ошибка имеет порядок той функции от τ_0 , по степеням которой производится разложение в асимптотике $\Phi_{as}(\tau_0)$, например, при доплеровском профиле она порядка $1/\ln \tau_0$.

6. *Среднее число рассеяний.* Проиллюстрируем применение полученных результатов. Асимптотика (52) верна при любых значениях оптической глубины τ ($0 \leq \tau \leq \tau_0$), и следовательно эта формула позволяет получить решение любой задачи о консервативном рассеянии излучения в слое большой оптической толщины. В качестве примера рассмотрим вопрос о среднем числе рассеяний кванта в толстом слое. Пусть $Q(\tau, \tau_0)$ — среднее число рассеяний, которое в слое толщины τ_0 испытывает квант, первоначально находившийся в поглощенном состоянии на глубине τ . Для этой величины в [15] найдено следующее выражение:

$$Q(\tau, \tau_0) = \Psi(\tau_0, \tau_0) [\Psi(\tau, \tau_0) + \Psi(\tau_0 - \tau, \tau_0) - \Psi(\tau_0, \tau_0)]. \quad (62)$$

Для $Q(0, \tau_0) = \Psi(\tau_0, \tau_0)$ и $Q(\tau_0/2, \tau_0)$ в [15] были получены верхние и нижние оценки. Пользуясь (52), мы можем найти асимптотику $Q(\tau, \tau_0)$ при любых τ , а значит и среднее число рассеяний квантов при произвольном распределении первичных источников излучения. Ограничимся рассмотрением тех же предельных случаев, что и в предыдущем разделе.

Найдем поведение $Q(\xi\tau_0, \tau_0)$, где ни ξ , ни $1 - \xi$ не слишком малы, т. е. кванты поглотились далеко от границ слоя. На основании формул (52) и (62) получим при $\xi = \text{const}$ и $\tau_0 \rightarrow \infty$:

$$Q(\xi\tau_0, \tau_0) \sim \frac{\tau_0^{2\gamma} [\xi(1-\xi)]^\gamma}{\Gamma(1+2\gamma) V_0 \left(\frac{1}{\tau_0}\right)} = \frac{\Gamma^2(1+\gamma)}{\Gamma(1+2\gamma)} \Psi_{as}(\xi\tau_0) \Psi_{as}[(1-\xi)\tau_0]. \quad (63)$$

В частности,

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) \sim \frac{\tau_0^{2\gamma}}{\Gamma(1+2\gamma) V_0\left(\frac{1}{\tau_0}\right) 2^{2\gamma}}. \quad (64)$$

Для доплеровского и лоренцовского профилей соответственно имеем

$$Q_D\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \tau_0 \ln^{1/2} \tau_0, \quad Q_L\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) \sim \frac{3}{\sqrt{\pi}} V_{\tau_0}^-. \quad (65)$$

В [15] были даны границы возможных значений численных коэффициентов в этих формулах: $0.6 \div 1.8$ и $1.3 \div 1.9$. Мы видим, что точные их значения 1.128 и 1.692 попадают примерно в середину указанных интервалов.

Для квантов, поглощенных вблизи границы $\tau = 0$, имеем из (62) и (52)

$$Q(\tau, \tau_0) \sim \frac{\tau_0^\gamma \Gamma(\gamma) \Psi(\tau)}{2\Gamma(2\gamma) \sqrt{V_0\left(\frac{1}{\tau_0}\right)}} = \frac{\Gamma^2(1+\gamma)}{\Gamma(1+2\gamma)} \Psi_{as}(\tau_0) \Psi(\tau). \quad (66)$$

Асимптотика $Q(0, \tau_0)$ была получена ранее в работе автора [11]. Заметим, что простое выражение

$$Q(\tau, \tau_0) \approx \frac{\Gamma^2(1+\gamma)}{\Gamma(1+2\gamma)} \Psi(\tau) \Psi(\tau_0 - \tau) \quad (67)$$

заключает в себе как частные случаи обе асимптотики (63) и (66) и может служить интерполяционной формулой для всех значений τ .

Ленинградский Государственный университет

TRANSFER OF RESONANCE RADIATION IN THE OPTICALLY THICK LAYER

D. I. NAGIRNER

Transfer of resonance radiation in the plane-parallel layer of optical thickness τ_0 is considered. The scattering is assumed to be conservative, with complete frequency redistribution. The rigorous asymptotic ($\tau_0 \gg 1$) formula expressing the resolvent function $\Phi(\tau, \tau_0)$ for arbitrary $\tau (0 \leq \tau \leq \tau_0)$ in terms of $\Phi(\tau) \equiv \Phi(\tau, \infty)$ is found. Hence

the solution of a general problem of conservative light scattering in the optically thick layer is found. As an illustration the mean number of scatterings of a photon born at arbitrary τ in such a layer is found.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
2. В. В. Соболев, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, 39, 1958; Астрон. ж., 36, 564, 1959.
3. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
4. Д. И. Нагирнер, Астрон. ж., 41, 669, 1964; Уч. зап. ЛГУ, № 337 (Труды Астрон. обс. ЛГУ, XXV), 3, 1968.
5. Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович, Астрофизика, 3, 459, 1967.
6. D. J. Nittner, G. Rybicki, Methods Computat. Phys., 7, 53, 1967.
7. В. В. Иванов, Астрон. ж., 40, 257, 1963.
8. В. В. Соболев, Астрон. ж., 34, 336, 1957.
9. В. В. Соболев, ДАН СССР, 155, 336, 1964.
10. В. В. Иванов, Астрон. ж., 41, 1097, 1964.
11. Д. И. Нагирнер, Астрофизика, 3, 293, 1967.
12. В. В. Иванов, J. Q. S. R. T., в печати.
13. Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович, ЖЭТФ, 56, 654, 1969; Институт атомной энергии. ИАЭ—1804, М., 1969.
14. В. В. Иванов, Астрон. ж., 41, 44, 1964.
15. В. В. Соболев, Астрофизика, 3, 137, 1967.

ОБРАЗОВАНИЕ ЛИНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
I. МАТРИЦА РАССЕЙНИЯ

Х. ДОМКЕ

Поступила 3 декабря 1968

Пересмотрена 7 июля 1969

Предложен метод вывода матрицы рассеяния для резонансных линий с любым типом расщепления уровней в магнитном поле. Матрица представляется в виде суммы диадных произведений. Правые и левые множители диад зависят только от параметров, характеризующих падающее и рассеянное излучение соответственно. Устанавливается связь между матрицами рассеяния и поглощения. При предельном переходе $H \rightarrow 0$ получается диадное разложение матрицы релеевского рассеяния, усредненной по азимуту.

Введение. Теория образования линий поглощения в атмосферах звезд при наличии магнитного поля была развита в работах В. Унно [1] и В. Е. Степанова [2] при предположении об отсутствии рассеяния излучения в линиях. В. Унно вывел матрицу поглощения для векторов Стокса. В. Е. Степанов из магнитно-оптических соображений получил коэффициенты поглощения для пучков со взаимно ортогональными поляризациями. Впоследствии было установлено [3], что результаты [1] и [2] эквивалентны. В работах В. Е. Степанова [4] рассматривалось и рассеяние, но при описании поляризованного света он ограничивался лишь двумя параметрами Стокса. Это дает правильную матрицу рассеяния только в том случае, когда верхний уровень резонансного перехода не расщеплен ($j_u = 0, j_l = 1$).

Для того же случая Д. Н. Рачковский рассмотрел образование линий при монохроматическом рассеянии [5] и при рассеянии с полным перераспределением по частотам [6]. В. Н. Обридко [7] получил матрицу рассеяния перехода $j_u = 1 \rightarrow j_l = 0$. Метод построения матрицы рассея-

ния для резонансного перехода с любым типом расщепления уровней недавно предложил Д. Н. Рачковский [8]. При этом он получил представление этой матрицы в виде суммы произведений матриц, зависящих по отдельности от параметров, характеризующих падающий и рассеянный свет.

В настоящей работе изучается рассеяние излучения двухуровневыми атомами с любым типом расщепления уровней в магнитном поле. Рассматриваются только дипольные переходы. Предполагается, что при рассеянии происходит полное перераспределение по частотам. Фазовые связи между отдельными переходами не учитываются. Считается также, что по нижним подуровням происходит полное перераспределение электронов, тогда как перераспределение по верхним подуровням отсутствует или является полным. В начале работы приводятся известные результаты относительно описания поляризованного света и матрицы поглощения. Затем получается матрица рассеяния в виде диадных произведений некоторых векторов. Устанавливается связь между матрицами рассеяния и поглощения и рассматриваются некоторые частные случаи.

Результаты настоящей работы являются основой для теории образования линий в атмосферах при наличии магнитного поля, которой будут посвящены последующие статьи.

Процесс поглощения. Приведем вначале необходимые для дальнейшего сведения, касающиеся описания поляризованного света [9, 10]. Пусть e и e' — комплексные векторы поляризации,

$$\begin{aligned} e \cdot e^* &= e' \cdot e'^* = 1, \\ e \cdot e'^* &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где e^* — вектор, комплексно сопряженный e .

Поляризованный свет характеризуется четырехмерным вектором параметров Стокса

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V \\ U \end{pmatrix},$$

$$I_1 = \overline{EE^*}, \quad I_2 = \overline{E'E'^*}, \quad (2)$$

$$V = -\sqrt{2} \operatorname{Im}(\overline{EE'^*}), \quad U = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\overline{EE'^*}),$$

где E и E' — компоненты вектора электрического поля, относящиеся к векторам e и e' соответственно, а черта сверху означает усреднение по времени. Отметим, что определение (2) отличается от обычно принятого множителем $\sqrt{2}$ при V и U , который введен из соображений симметрии.

Приведем также матрицы преобразований вектора Стокса \vec{I} при переходе от одной системы ортов $S = \{e, e'\}$ к другой $S^1 = \{e_1, e'_1\}$. Любое такое преобразование, как известно [9, 10], можно свести к двум простейшим, которые мы и рассмотрим.

а) Поворот осей линейных поляризаций на угол φ

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos \varphi e + \sin \varphi e' \\ e'_1 &= -\sin \varphi e + \cos \varphi e' \end{aligned}$$

приводит к преобразованию вектора Стокса

$$\vec{I}_{(S^1)} = \hat{L}(S^1, S) \vec{I}_{(S)} \quad (3)$$

с матрицей

$$\hat{L}(S^1, S) = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi & 0 & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \quad (4)$$

б) Переход от линейной поляризации к эллиптической. Если $S = \{e, e'\}$ — система линейных поляризаций и $S^2 = \{e_2, e'_2\}$ — система эллиптических поляризаций с главными осями по e и e' и отношениями осей эллипсов, равными $\operatorname{tg} \psi$ и $\operatorname{ctg} \psi$ соответственно, то переход $S \rightarrow S^2$ имеет вид [8]

$$\begin{aligned} e_2 &= \cos \psi e + i \sin \psi e', \\ e'_2 &= i \sin \psi e + \cos \psi e', \end{aligned}$$

а матрица преобразования

$$\hat{L}(S^2, S) = \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\psi & 0 \\ \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\psi & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\psi & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\psi & \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Важное свойство матриц \hat{L} — их ортогональность:

$$\hat{L}(S, S') = \hat{L}^{-1}(S', S) = \hat{L}^T(S', S), \quad (6)$$

где индекс T означает транспонирование. Таким образом, формально введенные векторы Стокса образуют подпространство четырехмерного векторного пространства. В частности, скалярное произведение двух векторов Стокса не зависит от представления S .

Определим вектор — „оператор“ выделения полной интенсивности

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

так, что

$$\vec{j}_{(S)}^T \cdot \vec{j}_{(S)} = (I_1 + I_2)_{(S)}. \quad (8)$$

Если считать, что при переходе к новой системе S' вектор \vec{j} преобразуется так же, как вектор Стокса \vec{I} , то из (4) и (5) видно, что \vec{j} остается неизменным. Это имеет очевидный физический смысл.

Перейдем к описанию процесса поглощения. Он полностью характеризуется оператором поглощения \hat{A} , определяемым равенством

$$d\vec{I}_a = -\hat{A} \vec{I} nds, \quad (9)$$

где \vec{I} — вектор Стокса падающего излучения, $d\vec{I}_a$ — изменение вектора Стокса на пути ds за счет поглощения, а n — концентрация поглощающих атомов.

Пусть имеется магнитное поле, заданное вектором \vec{H} и образующее угол γ с направлением распространения излучения частоты ν .

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы свет распространялся по оси z , а ось y была бы перпендикулярна \vec{H} . Если в качестве системы S взять систему $S^x = \{e_x, e_y\}$, где e_x и e_y — орты соответствующих осей, и предположить, что населенности подуровней нижнего состояния одинаковы, то оператор \hat{A} для дипольных переходов будет иметь вид [1]

$$\hat{A}(\nu, \gamma)_{(S^x)} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ b & b & 1/2(a+c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2(a+c) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$a(\nu, \gamma) = \frac{1}{2}(k_{+1}(\nu) + k_{-1}(\nu)) \cos^2 \gamma + k_0(\nu) \sin^2 \gamma,$$

$$b(\nu, \gamma) = -2^{-3/2}(k_{+1}(\nu) - k_{-1}(\nu)) \cos \gamma,$$

$$c(\nu, \gamma) = \frac{1}{2}(k_{+1}(\nu) + k_{-1}(\nu)).$$

Величины $k_i(\nu)$ определяются следующим образом. Пусть $k_i(\nu, \gamma)$ — атомный коэффициент поглощения, соответствующий переходу с $\Delta m = i$, где Δm — разность магнитных квантовых чисел m_u и m_l подсостояний верхнего (u) и нижнего (l) состояний атомов. Следуя [8], представим $k_i(\nu, \gamma)$ в виде

$$k_i(\nu, \gamma) = k_i(\nu) f_i(\gamma), \quad (11)$$

где

$$f_{+1}(\gamma) = f_{-1}(\gamma) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \gamma), \quad (12)$$

$$f_0(\gamma) = \sin^2 \gamma.$$

Коэффициенты $k_i(\nu, \gamma)$ относятся к поляризациям, заданным векторами e_i , где

$$e_{\pm 1} = \frac{e_x \cos \gamma \mp i e_y}{(1 + \cos^2 \gamma)^{1/2}}, \quad (13)$$

$$e_0 = e_x.$$

Величина же $k_i(\nu)$ есть сумма частотных частей атомных коэффициентов поглощения в отдельных компонентах линии с одинаковыми $\Delta m = i$:

$$k_l(\nu) = \sum_{k=-j_a}^{+j_a} k_{k, k-l}(\nu); \quad k_{k, r}(\nu) = 0 \quad \text{для } |r| > j_l,$$

где $k_{k, r}(\nu)$ относится к переходу между подуровнями с $m_a = k$ и $m_l = r$.

Процесс рассеяния. Как уже говорилось, мы рассматриваем атомы с двумя уровнями, из которых верхний при наличии магнитного поля расщепляется на $2j_a + 1$, а нижний на $2j_l + 1$ подуровень. Считается, что процесс рассеяния на таких атомах заключается в переходах электронов под влиянием излучения с нижнего уровня на отдельные верхние подуровни и последующих независимых переходах вниз. При этом предполагается полное перераспределение электронов по подуровням нижнего состояния и полное перераспределение по частотам в пределах линии, состоящей из совокупности зеемановских компонент, которые возникают при переходах с одного верхнего подуровня. Предположим также, что перераспределения электронов по верхним подуровням не происходит.

Число переходов z_k на верхний подуровень k под влиянием излучения за единицу времени в единице объема равно

$$z_k = \frac{n}{h\nu_c} \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty d\nu \sum_{i=-1}^{+1} k_{k, k-1}(\nu, \gamma) I_1(\nu, \gamma)_{(S^i)}, \quad (14)$$

где ν_c — центральная частота мультиплета, $I_1(\nu, \gamma)$ — первый параметр Стокса падающего излучения $\vec{I}(\nu, \gamma)$ в системе

$$S^i = \{e_i, e'_i\},$$

причем e_i определены согласно (13), а e'_i — соответствующие ортогональные векторы в смысле (1). Покажем, что подынтегральное выражение в (14) можно представить как скалярное произведение двух векторов Стокса. Для этого определим векторы $\vec{\xi}_i(\gamma)$, которые в соответствующих системах S^i имеют вид

$$\vec{\xi}_i(\gamma)_{(S^i)} = \begin{pmatrix} f_i(\gamma) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (i = -1, 0, +1). \quad (15)$$

Используя (15), формулу (14) можно переписать следующим образом:

$$z_k = \frac{n}{h\nu_c} \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty d\nu \sum_{i=-1}^{+1} k_{k, k-i}(\nu) \vec{\xi}_i^T(\gamma) \vec{I}(\nu, \gamma), \quad (16)$$

или

$$z_k = \frac{n}{h\nu_c} \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty d\nu \vec{S}_k^T(\nu, \gamma) \vec{I}(\nu, \gamma), \quad (17)$$

где

$$\vec{S}_k(\nu, \gamma) = \sum_{i=-1}^{+1} k_{k, k-i}(\nu) \vec{\xi}_i(\gamma). \quad (18)$$

При переходах электронов вниз с $\Delta m \equiv m_n - m_l = i$ излучаются кванты, которые имеют поляризацию e_i . Вероятность перехода $k \rightarrow k - i$ с излучением кванта в направлении, образующем угол γ с \vec{H}_z , пропорциональна коэффициенту поглощения $k_{k, k-i}(\nu, \gamma)$. Вклад $d\vec{I}_S(i, k; \nu, \gamma)$ такого перехода в вектор Стокса рассеянного света равен

$$d\vec{I}_S(i, k; \nu, \gamma) = \lambda_k C_k k_{k, k-i}(\nu) \vec{\xi}_i(\gamma) z_k h \nu_c ds, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} C_k &= \left[\int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty d\nu \sum_{i=-1}^{+1} k_{k, k-i}(\nu) f_i(\gamma) \right]^{-1} = \\ &= \frac{3}{8\pi} \left[\int_0^\infty d\nu \sum_{i=-1}^{+1} k_{k, k-i}(\nu) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

— нормировочные постоянные, а λ_k — вероятность выживания кванта при рассеянии через верхний подуровень k , то есть отношение числа спонтанных переходов с этого подуровня в единицу времени к полному числу переходов с него.

Так как отдельные переходы электронов вниз происходят независимо друг от друга, для всего рассеянного через подуровень k излучения мы можем написать, используя (19) и (17),

$$d\vec{I}(k; \nu, \gamma) = \lambda_k C_k \vec{S}_k(\nu, \gamma) z_k h \nu_c ds. \quad (21)$$

Полное рассеянное излучение $d\vec{I}_S(\nu, \gamma)$ получаем, суммируя (21) по всем верхним подуровням k и подставляя вместо z_k выражение (18),

$$d\vec{I}_S(\nu, \gamma) = \sum_{k=-j_a}^{+j_a} \lambda_k C_k \vec{S}_k(\nu, \gamma) \int_{4\pi} d\omega' \int_0^\infty d\nu' \vec{S}_k^T(\nu', \gamma') \vec{I}(\nu', \gamma') n ds. \quad (22)$$

Отсюда видно, что можно ввести оператор рассеяния \hat{S} , определяемый так, что

$$d\vec{I}_S(\nu, \gamma) = \int_{4\pi} d\omega' \int_0^\infty d\nu' \hat{S}(\nu, \gamma; \nu', \gamma') \vec{I}(\nu', \gamma') n ds, \quad (23)$$

причем \hat{S} представляется в виде суммы диад:

$$\hat{S}(\nu, \gamma; \nu', \gamma') = \sum_{k=-j_a}^{+j_a} \lambda_k C_k \vec{S}_k(\nu, \gamma) \vec{S}_k^T(\nu', \gamma'). \quad (24)$$

Оператор рассеяния \hat{S} можно выразить через оператор \hat{A} . В $\hat{A}(\nu, \gamma)$ входят коэффициенты поглощения всех возможных переходов между подуровнями верхнего и нижнего состояний атома. Обозначим через \hat{A}_k оператор поглощения, обусловленного переходами на верхний подуровень k . Тогда, очевидно,

$$\hat{A}(\nu, \gamma) = \sum_{k=-j_a}^{+j_a} \hat{A}_k(\nu, \gamma). \quad (25)$$

Из физических соображений ясно, что число переходов z_k может быть представлено в виде

$$z_k = \frac{n}{h\nu_c} \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty d\nu \vec{J}^T \hat{A}_k(\nu, \gamma) \vec{I}(\nu, \gamma). \quad (26)$$

Легко убедиться, что это выражение с учетом определения (7) переходит в (16). Из сравнения формул (26) и (17) видно, что

$$\vec{S}_k(\nu, \gamma) = \hat{A}_k(\nu, \gamma) \vec{J}. \quad (27)$$

Константы C_k , введенные ранее формулой (20), можно найти из условия энергетического баланса отдельных подуровней k . При этом для них получается следующее выражение:

$$C_k = \left[\int_{4\pi} d\omega \int_0^{\infty} d\nu \vec{J}^T \hat{A}_k(\nu, \gamma) \vec{J} \right]^{-1}. \quad (28)$$

Исходя из всего сказанного, матрицу рассеяния (24) можно записать в виде

$$\hat{S}(\nu, \gamma; \nu', \gamma') = \sum_{k=-j_a}^{+j_a} \lambda_k C_k \hat{A}_k(\nu, \gamma) \vec{J} \vec{J}^T \hat{A}_k(\nu', \gamma'). \quad (29)$$

В этой форме матрица \hat{S} представляется особенно наглядно. Для получения ее конкретного вида нужно знать только операторы \hat{A}_k .

Некоторые частные случаи.

1) *Полное перераспределение по верхним подуровням.* Здесь нужно рассматривать не отдельные подуровни, а верхнее состояние в целом. Тогда можно повторить все рассуждения, приведенные выше, и получить матрицу рассеяния \hat{S} . Она состоит лишь из одного слагаемого [6]

$$\hat{S}(\nu, \gamma; \nu', \gamma') = \lambda C \hat{A}(\nu, \gamma) \vec{J} \vec{J}^T \hat{A}(\nu', \gamma'), \quad (30)$$

где λ — вероятность выживания кванта при таком рассеянии, а

$$C = \left[\int_{4\pi} d\omega \int_0^{\infty} d\nu \vec{J}^T \hat{A}(\nu, \gamma) \vec{J} \right]^{-1}.$$

2) *Монохроматическое рассеяние.* Формулу (29) можно применять и к случаю монохроматического рассеяния. Если распространяется излучение частоты ν_0 , причем при рассеянии частота не меняется, то матрица рассеяния может быть представлена в виде

$$\hat{S}(\nu_0, \gamma; \nu', \gamma') = \hat{S}(\nu_0, \gamma; \nu_0, \gamma') \delta(\nu' - \nu_0),$$

где

$$\hat{S}(\nu_0, \gamma; \nu_0, \gamma') = \sum_{k=-j_a}^{+j_a} \lambda_k C_k \hat{A}_k(\nu_0, \gamma) \vec{J} \vec{J}^T \hat{A}_k(\nu_0, \gamma') \quad (31)$$

— матрица монохроматического рассеяния, а $\delta(x) - \delta$ — функция Дирака. Равенство (23) остается справедливым, если в $\vec{J}(v', \gamma')$ частоту v' заменить на v_0 , интеграл по частотам от $\hat{S}(v_0, \gamma; v', \gamma')$ на $\hat{S}(v_0, \gamma; v_0, \gamma')$, а коэффициенты C_k считать равными

$$C_k = \left[\int_{4\pi} d\omega \vec{J}^T \hat{A}(v_0, \gamma) \vec{J} \right]^{-1}.$$

В монохроматическом случае матрицу $\hat{S}(v_0, \gamma; v_0, \gamma)$ можно представить в более простом виде. Для этого подставим в (31) вместо $\hat{A}_k(v_0, \gamma) \vec{J}$, равного согласно (27) вектору $\vec{S}_k(v_0, \gamma)$, выражение (18). Тогда получим

$$\begin{aligned} \hat{S}(v_0, \gamma; v_0, \gamma') &= \sum_{k=-j_a}^{+j_a} \lambda_k C_k \sum_{t=-1}^{+1} \sum_{j=-1}^{+1} k_{k, k-t}(v_0) k_{k, k-j}(v_0) \vec{\xi}_t(\gamma) \vec{\xi}_j^T(\gamma') = \\ &= \sum_{i, j=-1}^{+1} g_{ij} \vec{\xi}_i(\gamma) \vec{\xi}_j^T(\gamma'), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$g_{ij} = \sum_{k=-j_a}^{+j_a} \lambda_k C_k k_{k, k-i}(v_0) k_{k, k-j}(v_0).$$

Найдем собственные значения p_m трехмерной симметричной матрицы с элементами g_{ij} , а также ортогональную матрицу преобразования ее к диагональному виду h_{il} . Введя линейные комбинации векторов $\vec{\xi}_i(\gamma)$,

$$\vec{\xi}_i^*(\gamma) = \sum_{m=-1}^{+1} h_{mi} \vec{\xi}_m(\gamma),$$

равенство (32) перепишем следующим образом

$$\hat{S}(v_0, \gamma; v_0, \gamma') = \sum_{m=-1}^{+1} p_m \vec{\xi}_m^*(\gamma) \vec{\xi}_m^T(\gamma'). \quad (33)$$

Таким образом, мы получили представление матрицы монохроматического рассеяния в виде суммы трех диад. При этом мы не делали никаких предположений относительно сложности рассматриваемого всемановского расщепления.

3) *Предельный переход* $H \rightarrow 0$. Посмотрим, к чему приводит предельный переход к нулевому магнитному полю. Ограничимся двумя простейшими случаями.

а) $j_a = 0, j_l = 1$, т. е. верхний уровень не расщеплен. Пусть в отсутствие магнитного поля профили $k_{0,r}(v)$ одинаковы для всех r ,

$$k_{0,r}(v) = k(v), \quad |r| \leq r.$$

Тогда оператор \hat{A} принимает простой вид

$$\hat{A}(v, \gamma) = k(v) \hat{E}, \quad (34)$$

где \hat{E} — единичный оператор. Матрица рассеяния (29) также упрощается:

$$\hat{S}(v, \gamma; v', \gamma') = \lambda \frac{k(v)k(v')}{4\pi \int_0^\infty dv'' k(v'')} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 1, 0, 0). \quad (35)$$

Полученная матрица описывает изотропное рассеяние. Этого и следовало ожидать, поскольку в этом случае рассеяние происходит через сферически-симметричное состояние.

б) $j_a = 1, j_l = 0$. Для простоты рассмотрим лишь монохроматическое рассеяние. Коэффициенты поглощения (11) в случае $H = 0$ переходят в

$$k_i(v_0, \gamma) = k_{i,0}(v_0, \gamma) = k(v_0) f_i(\gamma), \quad i = -1, 0, +1. \quad (36)$$

Подставляя их в (10), получаем согласно соотношению (27) выражения для векторов $\hat{S}_k(v_0, \gamma)$:

$$\hat{S}_{\pm 1}(v_0, \gamma) = \hat{A}_{\pm 1}(v_0, \gamma) \vec{J} = \frac{1}{2} k(v_0) \begin{pmatrix} \cos^2 \gamma \\ 1 \\ 0 \\ \mp \sqrt{2} \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\hat{S}_0(v_0, \gamma) = \hat{A}_0(v_0, \gamma) \vec{J} = \frac{1}{2} k(v_0) \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При подстановке этих выражений в (31) матрица рассеяния принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \hat{S}^0(\nu_0, \gamma; \nu_0, \gamma') = & \frac{3\lambda}{32\pi} \left\{ \begin{pmatrix} \mu^2 \\ 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \mu \end{pmatrix} (\mu'^2, 1, 0, \sqrt{2} \mu') + \right. \\
 & + \begin{pmatrix} \mu^2 \\ 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \mu \end{pmatrix} (\mu'^2, 1, 0, -\sqrt{2} \mu) + \\
 & \left. + \begin{pmatrix} 2(1 - \mu^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (2(1 - \mu'^2), 0, 0, 0) \right\}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Здесь мы предположили, что $\lambda_k = \lambda$, и обозначили $\mu = \cos \gamma$.

Эта матрица — азимутально-симметричная часть матрицы релеевского рассеяния [9]. Видим, что она представляется как сумма трех диад. Чтобы получить полную матрицу релеевского рассеяния при переходе $H \rightarrow 0$, необходимо, как показал Д. Гамильтон [11, 12], принимать во внимание фазовые связи между переходами. Так как мы их не учитывали, то смогли получить лишь усредненную по азимуту матрицу.

Астрофизическая обсерватория,
Потсдам, ГДР

LINE FORMATION IN MAGNETIC FIELD. I. SCATTERING MATRIX

H. DOMKE

A method is proposed which enables to obtain the scattering matrix of a resonance line with arbitrary type of splitting of levels in magnetic field.

The scattering matrix is represented as a sum of dyade products. The left and right factors of the dyades depend only on the parameters characterizing the incident and scattered radiation respectively.

The relation is found between the scattering and absorption matrices. In the limit $H \rightarrow 0$ the dyade expansion of the matrix of Rayleigh scattering averaged over azimuth is found.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. W. Улло, P. A. S. Jaran, 8, 108, 1967.
2. В. Е. Степанов, Изв. КрАО, 18, 136, 1958.
3. Д. Н. Рачковский, Изв. КрАО, 26, 63, 1961.
4. В. Е. Степанов, Изв. КрАО, 19, 20, 1958; 27, 140, 1962; Астроф. ж., 37, 631, 1960.
5. Д. Н. Рачковский, Изв. КрАО, 29, 97, 1963.
6. Д. Н. Рачковский, Изв. КрАО, 30, 267, 1963.
7. В. Н. Обриджко, Астроф. ж., 42, 103, 1965.
8. Д. Н. Рачковский, Изв. КрАО, 36, 3, 1967.
9. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ., М., 1953.
10. Г. В. Розенберг, УФН, 56, 77, 1955.
11. D. R. Hamilton, Phys. Rev., 58, 122, 1940.
12. D. R. Hamilton, Ap. J., 106, 457, 1947.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРИНО В АНИЗОТРОПНЫХ
КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

А. Г. ДОРОШКЕВИЧ, Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, И. Д. НОВИКОВ

Поступила 4 марта 1969

Рассмотрены вопросы о роли нейтрино и других слабо взаимодействующих частиц в анизотропной космологической модели. Методом кинетической теории показано, что при реальных свойствах нейтрино они становятся свободными на анизотропной стадии расширения, когда анизотропия расширения еще велика. После этого все процессы протекают так, как это описано в работе авторов [12].

Различные возможности выхода за рамки модели Фридмана широко обсуждаются в последнее время как в связи с вопросами ранних стадий эволюции Метагалактики и возможной анизотропии реликтового излучения, так и в связи с вопросами образования галактик [1—10].

В настоящей работе мы ограничимся анализом вопроса о поведении слабо взаимодействующих частиц в простейшей однородной, но анизотропной модели. Этот вопрос обсуждался с различных точек зрения Дорошкевичем, Зельдовичем и Новиковым (Д.З.Н.) [11, 12] и Мизнером [13, 14] (см. также Стюарт [15]).

Определяющим для физики процессов и для динамики расширения анизотропной космологической модели является поведение слабо взаимодействующих частиц (для определенности говорим о нейтрино, подразумевая нейтрино и антинейтрино всех сортов) при резко анизотропном расширении в то время, когда температура упала настолько, что процессы с нейтрино идут уже достаточно медленно по сравнению со скоростью изменения параметров системы и термодинамическое равновесие (для нейтрино) нарушается.

В работах Д.З.Н. [11, 12], с одной стороны, и в работах Мизнера [13, 14], с другой стороны, поведение нейтрино рассмотрены в двух крайних предположениях.

В [11, 12] предполагалось, что после некоторого момента $t = \tau$ вероятность взаимодействия нейтрино с другими частицами и между собой мала, нейтрино становятся свободными. При этом компонента импульса нейтрино вдоль оси x_1 , по которой происходит сжатие, возрастает в силу „синего“ смещения. Распределение импульсов нейтрино становится резко анизотропным, вытянутым в направлении сжатия: вдоль оси x_1 , энергия каждого нейтрино растет.

Часть нейтрино и летящих навстречу антинейтрино получает такую энергию, что становится заметной вероятность их необратимого превращения в электроны и позитроны. В [11, 12] предположено, что это основной процесс роста энтропии.

Мизнер [13, 14] рассматривал проблему отклонения нейтрино от термодинамического равновесия, пользуясь приближением вязкости в уравнениях гидродинамики. Две точки зрения (Мизнера [13, 14] и Д.З.Н. [11, 12]) на характер поведения слабовзаимодействующих частиц, приводят к существенно разным физическим следствиям: на равных, резко анизотропных стадиях расширения по разным законам должны меняться температура и энтропия взаимодействующих частиц. Особенно сильно отличаются число и энергия слабовзаимодействующих частиц. Разными оказываются и наблюдательные предсказания об ожидаемой сегодняшней величине анизотропии реликтового электромагнитного излучения и о энергии реликтовых нейтрино.

Это различие в выводах заставляет исследовать вопрос подробнее.

Подробный анализ анизотропной космологической модели требует решения уравнений Эйнштейна совместно с кинетическим уравнением, описывающим поведение свободных и слабовзаимодействующих частиц. Такой анализ чрезвычайно сложен и в настоящее время неосуществим как в силу математических трудностей, так и из-за недостаточности наших знаний о свойствах элементарных частиц при сверхвысоких энергиях. Однако при ряде упрощающих предположений некоторые сведения о свойствах анизотропных космологических моделей с учетом влияния свободных частиц могут быть получены. Также могут быть получены некоторые выводы, допускающие экспериментальную проверку.

Ниже мы ограничимся анализом влияния слабовзаимодействующих частиц на динамику простейшей однородной анизотропной модели с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2(t) dx_1^2 - a_2^2(t) dx_2^2 - a_3^2(t) dx_3^2 \quad (1)$$

(скорость света $c = 1$).

Модели с метрикой (1) подробно изучены [2, 3, 5, 9]. Вблизи особой точки зависимость компонент метрического тензора a_1, a_2, a_3 от времени имеет асимптотический (при $t \rightarrow 0$) вид: $a_1 = a_{10}t^{p_1}$; $a_2 = a_{20}t^{p_2}$; $a_3 = a_{30}t^{p_3}$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_1 + p_2 + p_3 = 1; \quad p_1 \leq p_2 \leq p_3. \quad (2)$$

На этом этапе сопутствующий объем меняется пропорционально $(a_1 a_2 a_3) \sim t$, плотность сохраняющихся частиц пропорциональна t^{-1} , а плотность равновесного ультрарелятивистского газа с уравнением состояния $P = \varepsilon/3$ меняется как

$$\varepsilon = K^* t^{-4/3}. \quad (3)$$

Характер расширения определяется заданием одного показателя, например, наименьшего $p_1 = -\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1/3$). При этом по соответствующей оси происходит сжатие вещества (за исключением случая $\alpha = 0$), по двум другим — расширение. Постоянная K является (наряду с α) произвольным параметром модели.

На этой стадии наличие материи не влияет на динамику расширения [3]. Эту стадию можно назвать „вакуумной“.

В дальнейшем, в ходе расширения, материя начинает влиять на динамику расширения.

Легко показать, даже без решения уравнений Эйнштейна (см. например, [12]), что конец „вакуумного“ решения в задаче с учетом лишь ультрарелятивистского газа с уравнением состояния $P = \varepsilon/3$ происходит в момент (положим $8\pi G = 1$)

$$t = \theta \approx K^*^{-3/2}. \quad (4)$$

В дальнейшем решение быстро стремится к изотропному:

$$a_1 \approx a_2 \approx a_3 \sim t^{1/2}; \quad \varepsilon \sim t^{-2}. \quad (5)$$

Ниже, в разделе 2, будут коротко изложены результаты работ Д.З.Н. [11, 12]. В следующем разделе 3 излагаются метод и основные результаты Мизнера [13, 14]. Наконец в 4 и 5 сравниваются результаты обоих методов и выясняется, в каких условиях осуществляется решение Д.З.Н. и в каких — Мизнера.

2. *Нейтрино в анизотропном решении.* Следуя работе [12] (с небольшими обобщениями), предположим, что вблизи особой точки все

частицы находятся в состоянии термодинамического равновесия, и что в ходе расширения в момент $t = \tau$ время релаксации нейтрино и гидродинамическое время сравниваются

$$\sigma n, t = 1, \quad (6)$$

где σ — сечение взаимодействия $\nu + \bar{\nu} \rightleftharpoons e^+ + e^-$, как и выше $c \equiv 1$. Будем считать $\tau \ll \theta$. Момент „освобождения“ τ нейтрино в анизотропной модели можно связать с моментом освобождения τ' нейтрино в модели Фридмана ($\tau' = 0.1$ сек),

$$\tau = \tau'^{1/4} \theta^{-3/4}. \quad (7)$$

При $t > \tau$ компонента импульса нейтрино по оси $x_1(t_1)$ растет и соответственно увеличивается сечение взаимодействия.

Для процесса рассеяния нейтрино

$$\nu_e + e^- \rightleftharpoons \nu_e + e^- \quad (8)$$

сечение пропорционально $\sigma \sim \bar{E}_\nu \bar{E}_e$. Из условия свободного движения нейтрино $\sigma n t < 1$ и соотношений (для адиабатического расширения) $n_e \sim t^{-3}$, $E_e \sim T \sim t^{-1/3}$ получаем, что этот процесс не допускает роста E_e , быстрее чем $t^{1/3}$, но поскольку $\alpha \leq 1/3$, то $E_e \sim t^\alpha$ и не может расти быстрее. Таким образом, этот процесс сам по себе не приводит к нарушению условия $\sigma n t < 1$ и к заметной перекачке энергии свободных нейтрино в пары $e^+ e^-$. (О значении этого процесса при наличии аннигиляции нейтрино см. конец раздела).

Однако это не так для процесса аннигиляции $\nu + \bar{\nu} \rightleftharpoons e^+ + e^-$. Сечение этого процесса $\sigma \sim \bar{E}^2$ и при сохранении числа нейтрино условие $\sigma n t < 1$ не будет удовлетворено. Следовательно, число нейтрино будет убывать, и процесс аннигиляции действительно ведет к необратимому переходу энергии в пары $e^+ e^-$.

Оценки, сделанные в [12], показывают, что в этом случае для роста энтропии получается формула

$$s = s(\tau) \left[1 + \frac{4\alpha}{1-\alpha} (t/\tau)^{\frac{1-\alpha}{3}} \right]^{3/\alpha}. \quad (9)$$

Средняя энергия отдельного нейтрино меняется по закону

$$E_\nu \sim t^{\alpha/3}. \quad (10)$$

Плотность энергии нейтрино и γ -квантов и пар $e^+ e^-$ из-за „подогрева“ оказывается все время одного порядка. Взаимодействие встречных потоков нейтрино и антинейтрино будет продолжаться до

тех пор, пока либо прекратится рост сечения взаимодействия нейтрино (это будет, вероятно, при $E, \sim 300$ Бэв), либо окончится вакуумная стадия, т. е. прекратится рост E . Момент окончания вакуумной стадии в рассматриваемых условиях дается соотношением

$$\theta^* = \theta (\tau/\theta)^{\frac{9}{4} \frac{1-\alpha}{3-\alpha}} \quad (11)$$

В общем случае после $t = \theta^*$ энтропия вещества постоянна, при $t > \theta^*$ нейтрино больше не исчезают. Решение быстро изотропизуется. Но чрезвычайно важно, что в момент θ энергия нейтрино, которая росла после освобождения нейтрино как $E, \sim t^{4/3}$, много больше энергии γ -квантов, которая все время уменьшалась: $\bar{E}_\gamma \sim T \sim t^{-\frac{3+\alpha}{12}}$. Для последующего времени $t > \theta^*$ отношение E_ν/E_γ сохраняется. В результате, если ранние стадии расширения Вселенной действительно были анизотропными, то сегодня энергия реликтовых нейтрино может во много раз превышать равновесную энергию $T, \approx 2^\circ\text{K}$, предсказываемую изотропной моделью. Но зато во столько же раз меньше их плотность. На сегодняшний день должно быть справедливо приближительное равенство $e_\nu \approx e_\gamma$ (может быть $e_\nu \approx 0.1 e_\gamma$).

Проведенный выше анализ основан, в частности, на предположении $\sigma_{\nu\gamma} \sim E_\nu E_\gamma^{-1}$, что, согласно современным взглядам, справедливо лишь при $E_\nu \leq 300$ Бэв. При больших энергиях сечение аннигиляции нейтрино либо остается постоянным, либо даже убывает с ростом энергии. Это условие накладывает ограничения на увеличение энтропии в рассмотренном выше процессе. Оценки показывают, что максимальное увеличение энтропии происходит в следующем случае:

$$\begin{aligned} \theta &= 10^{19} \text{ сек}; \quad \alpha \approx 0.02; \quad \tau = 10^{-26} \text{ сек}; \quad \theta^* \approx 200 \text{ сек} \\ \Sigma &= S(\theta^*)/S(\tau) \approx 10^6; \quad n_\nu/n_\gamma \approx 3 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \quad (12)$$

(n_γ — плотность фотонов реликтового излучения). Современная энергия нейтрино $E_\nu \leq 3 \cdot 10^4$ эв. В рамках рассмотренной схемы всегда $\Sigma \leq 10^6$; и энергия нейтрино сегодня $E_\nu \leq 3 \cdot 10^4$ эв*. Следует, однако, иметь в виду, что в рассматриваемых условиях $T, \sim t^{-\frac{3+\alpha}{12}}$ и по-

* В данной работе мы не останавливаемся на ограничениях на анизотропные модели, связанные с химическим составом дозвездного вещества. Эти ограничения сильно понижают оценку Σ сегодня.

этому для процесса (8) $\sigma t = \text{const}$, как и для процесса аннигиляции. Поэтому процесс (8) также даст вклад в набор энтропии. Однако, поскольку ведущим остается процесс аннигиляции, вклад процесса рассеяния (8) не может существенно изменить оценок (12).

3. *Влияние вязкости на динамику расширения анизотропных моделей.* В работах Мизнера [13, 14] развит иной подход к вопросам поведения слабовзаимодействующих частиц в анизотропных космологических моделях. Мизнер обращает внимание на то, что даже при малых отклонениях от равновесной функции распределения нейтрино вязкость приводит к росту энтропии. Этот рост тем больше, чем сильнее функция распределения отличается от равновесной, чем ближе время релаксации к гидродинамическому. Расчеты Мизнера приводят его к выводу, что из-за влияния вязкости набор энтропии всегда столь значителен, что освобождения нейтрино на вакуумной стадии не произойдет, рассмотренный в предыдущем разделе режим не будет иметь места, и вне зависимости от параметров модели изотропизация происходит при температуре $T \approx 3 M_{\text{эв}}$.

Лишь после изотропизации происходит освобождение нейтрино. Сегодня нейтрино большой энергии нет.

Рассмотрим этот процесс подробнее, следуя идеям Мизнера*.

Уравнение сохранения энергии с учетом вязкости в модели с метрикой (1) на вакуумной стадии приводится к виду

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{t} = \frac{4}{3} \frac{\eta}{t^2}, \quad (13)$$

где η — коэффициент вязкости.

Примем

$$\eta = \frac{1}{3} t \dot{\varepsilon}_0 = \frac{k}{3} \frac{\varepsilon}{\sigma n_0}, \quad (14)$$

где t — время свободного пробега, $\sigma \sim (E, E_0)^m \sim T^{2m}$ — сечение взаимодействия ($m > 0$), n_0 и E_0 — плотность и энергия рассеивателя (электронов и позитронов), $k = \varepsilon_0/\varepsilon$ в равновесии. k может быть выражено через статистические веса нейтрино и остальных частиц плазмы.

* Мизнер рассматривает точные уравнения Эйнштейна и учитывает обратное влияние материи и нейтрино на деформацию. На вакуумной стадии это влияние несущественно, поэтому мы решаем задачу на фоне заданной метрики (1), что упрощает анализ и, очевидно, не влияет на выводы.

Считаем (как и Мизнер) $k = \text{const}$, т. е. в течение всего процесса количество сортов частиц остается неизменным.

Решение уравнений (14) легко получить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_a [1 + ct^{2m/3}]^{-4/(3+2m)} = \quad (15a)$$

$$= \varepsilon_a \left[1 - k \frac{3+2m}{6m} \left(\frac{t^*}{t} \right) \right]^{-4/(3+2m)}, \quad (156)$$

где ε_a — адиабатический закон изменения плотности энергии (3). Из (15a) следует, что при $ct^{2m/3} \gg 1$.

$$\varepsilon \sim t^{-4/(3+2m)}, \quad (16)$$

независимо от начальных параметров задачи.

Мизнер рассматривал случай $m = 0.5$, $k = 1$ и получил, что на вакуумной стадии $\varepsilon \sim t^{-1}$ и нейтрино находятся в равновесии вплоть до изотропизации модели, происходящей вне зависимости от начальных параметров при $T = 3 \text{ Мэв}$.

В действительности главный вопрос заключается в обоснованности приближений, приводящих к (16). Из (156) следует, что рассматриваемый режим устанавливается при $k \frac{3+2m}{6m} \frac{t^*}{t} \rightarrow 1$. В реальных условиях в термодинамическом равновесии находится много частиц (при $T \sim 0.5 \text{ Бэв}$ в равновесии находятся e , γ , ν_e , μ , ν_μ , π ; при $T > 3 \text{ Бэв}$ необходимо учитывать также барионы, скалярные и векторные мезоны).

Повтому в зависимости от температуры $k = \varepsilon_s/\varepsilon$ лежит в пределах $0.25 \gg k \gg 0.025$. Следовательно, решение выходит на рассматриваемый режим Мизнера при $t^*/t = 4.8 + 48$ ($m = 1$) или при $t^*/t = 3 + 30$ ($m = 0.5$) в зависимости от значения k , т. е. в условиях, когда применимость понятия вязкости совершенно не очевидна. Неправомерность макроскопического описания явления с помощью понятия вязкости еще не означает, что выводы Мизнера неправильны качественно, так как возможно существование решения кинетического уравнения со свойствами, подобными свойствам полученного Мизнером решения. В этих условиях для получения достоверных результатов необходимо исследовать кинетическое уравнение. В то же время открыта и другая возможность, а именно, что осуществляются процессы, описанные в предыдущем разделе, а роль вязкости не существенна. С этой целью исследуем кинетическое уравнение. Кратко вопрос рассмотрен в [16].

4. *Кинетическая теория нейтрино в анизотропной модели, автономное решение.* Будем рассматривать вакуумную стадию; кроме того положим $a = 1/3$, т. е. $a_1 \sim t^{-1/3}$; $a_2 = a_3 \sim t^{2/3}$. Функция распределения нейтрино в импульсном пространстве, соотнесенная к ячейке, равной $(2\pi\hbar)^{-3}$, определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{i_1}{3t} \frac{\partial w}{\partial i_1} - \frac{2}{3} \frac{i_2}{t} \frac{\partial w}{\partial i_2} - \frac{2}{3} \frac{i_3}{t} \frac{\partial w}{\partial i_3} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{st}, \quad (17)$$

где $(\partial w / \partial t)_{st}$ — столкновительный член, описывающий изменение функции распределения нейтрино из-за взаимодействия с остальными частицами.

Остальные частицы находятся в термодинамическом равновесии, которое характеризуется заданием температуры T (в энергетических единицах). Предположим, что все эти частицы ультрарелятивистские, так что для них имеет место уравнение состояния $P = \bar{\varepsilon}/3$, плотность энергии $\bar{\varepsilon} = \kappa T^4$; $\kappa = b \frac{24\pi}{(2\pi\hbar)^3}$, где b — сумма статистических весов. Пренебрежем отличием Ферми и Бозе — газов от классического, т. е. заменим $(e^{E/T} \pm 1)^{-1} \equiv n$ на $e^{-E/T}$ в формулах равновесного распределения и соответственно выбросим n во множителях $(1 - n)$, $(1 + n)$ в интеграле столкновений. Тогда $b = \sum g_j$, где g_j — статистический вес j -того сорта частиц ($g = 2$ для e^\pm , μ , $g = 1$ для скалярных мезонов, $g = 1$ для двухкомпонентных нейтрино). При сделанных предположениях

$$k = \frac{g_{\nu}}{b + g_{\nu}} = \frac{2}{b + 2}.$$

Температура определяется уравнением сохранения энергии

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} + \frac{4}{3} \frac{\bar{\varepsilon}}{t} \equiv 4\kappa T^3 \left(\frac{dT}{dt} + \frac{1}{3} \frac{T}{t} \right) = Q(W, T), \quad (18)$$

где $Q(W, T)$ — член, описывающий влияние на температуру взаимодействия плазмы с нейтрино. Если предположить, что сечения взаимодействия нейтрино с остальными частицами степенным образом зависят от энергии сталкивающихся частиц в системе центра энергии ($\sigma = \sigma_0 2^{-m} E^{2m}$), то можно убедиться, что система (17), (18) допускает автономное решение вида:

$$W = W(\vec{q}); \quad T \sim t^{-1/(2m+3)}, \quad (19)$$

где $\vec{q} = \frac{\vec{i}}{T}$.

Физическими параметрами, определяющими задачу, являются (при заданной метрике) показатель m ; постоянная σ_0 (или несколько постоянных σ_{0j}) в выражении сечения взаимодействия; числа b и k , характеризующие термодинамику системы. Практически, для определения области существования автомодельного решения, удобно действовать следующим образом: задаваясь значениями σ_0 и $T = T(t)$, определять область изменения k .

Эту общую программу удалось осуществить лишь после дополнительных упрощающих предположений относительно взаимодействия нейтрино с равновесной плазмой и друг с другом.

Задачу удается решить в двух случаях:

А. Рассматривается только одиночное рождение и гибель нейтрино согласно реакции



где вместо N, P, e могут фигурировать и другие частицы, находящиеся в равновесии. Кроме них могут присутствовать и другие частицы, не взаимодействующие с нейтрино.

Б. Рассматривается только парная аннигиляция и рождение нейтрино и антинейтрино согласно реакции



с добавочным ограничением на показатель степени в выражении для сечения $m = 1$ (также допускается присутствие частиц, не взаимодействующих с нейтрино).

Учет рассеяния нейтрино, а также отказ от ограничения условием $m = 1$ в варианте Б приводит к большим техническим трудностям, и эти варианты пока не рассмотрены. В задаче только с одним рассеянием (без рождения — парного или одиночного) автомодельного решения, очевидно, нет.

Рассмотрим случай А.

Примем сечение взаимодействия реакции (20) в виде

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{2\pi} (V_1 V_2)^m \frac{d^3 V_3}{V_3^2} \frac{d^3 V_4}{V_4^2} \delta^4 (V_1 + V_2 - V_3 - V_4), \quad (22)$$

где V_1, V_2 — четырехимпульсы частиц до столкновения, V_3, V_4 — после столкновения, V^0 — нулевая компонента четырехимпульса. Интегральное сечение взаимодействия и средняя энергия вылетающей частицы равны

$$\sigma = \sigma_0 (V_1 V_2)^m; \quad \bar{V}_3^0 = \int V_3^0 d\sigma = \frac{1}{2} \sigma (V_1^0 + V_2^0), \quad (23)$$

для $\left(\frac{dW}{dt}\right)_{st}$ и $Q(W; T)$ получаем:

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{st} = \frac{f}{t} \left(\frac{E_v}{T}\right)^m (e^{-E_v/T} - W) \quad (24)$$

$$Q(W; T) = \frac{\varepsilon_v^*}{\sigma T} \frac{f}{4\pi} \left[\int W q^{m+1} d^3q - 4\pi \Gamma(m+4) \right], \quad (25)$$

где $f = \Gamma(m+3)^{2m/2+m} \sigma_0 T^{2m} n t = \text{const}$, $q = |\vec{q}| = \left| \frac{\vec{t}}{T} \right|$ и ε_v^* — плотность энергии нейтрино и антинейтрино в равновесии. Уравнение (18) с учетом (20) и (25) приводится к виду

$$\frac{b}{g_{\nu\nu}} = \frac{1-k}{k} = \frac{2m+3}{16m} \frac{f}{4\pi} \left\{ \int W q^{m+1} d^3q - 4\pi \Gamma(m+4) \right\}. \quad (26)$$

Автомодельное решение уравнения (17) с учетом (24) имеет вид

$$W(\vec{q}) = f \int_0^1 F^m(\vec{q}; x) e^{-F(\vec{q}; x) - f \int_x^1 F^m(\vec{q}; y) \frac{dy}{y}} \frac{dx}{x}, \quad (27)$$

где

$$F(\vec{q}; x) = \left\{ q_1^2 x^{\frac{4}{3} \frac{m+3}{2m+3}} + (q_2^2 + q_3^2) x^{-2 \frac{4m+3}{3(2m+3)}} \right\}^{1/2}.$$

Подставляя (27) в (26), получаем зависимость $k = k(f; m)$ и область существования автомодельного решения.

Найдем асимптотическую зависимость $k(f, m)$ при $f \gg 1$ и при $f \ll 1$. При $f \gg 1$ получаем

$$\frac{1-k}{k} \approx -\frac{2m+5}{2}, \quad (28)$$

т. е. автомодельного решения не существует при f больше некоторого критического значения f_0 . Это объясняется тем, что при больших f функция распределения нейтрино весьма близка к равновесной, и малое отклонение W от $e^{-E_v/T}$ не в состоянии поддержать изменение температуры со временем по закону $T \sim t^{-1/2m+3}$ (медленнее адiabатического закона $T \sim t^{-1/3}$).

Очевидно, что для того, чтобы обеспечить набор энтропии, необходимой для поддержания автомодельного решения, требуется до-

статочной большой длине свободного пробега. Необходимо, чтобы рост энергии нейтрино из-за синего смещения по оси x_1 (с последующей передачей этой энергии равновесным частицам) был достаточен для поддержания более медленного падения температуры с расширением, чем по адиабатическому закону.

При $f \ll 1$ получаем:

$$\frac{1-k}{k} \approx \frac{m+3}{24} f \cdot \left[\Gamma\left(\frac{m^2+m+3}{m(m+3)}\right) \Gamma\left(\frac{m^2+9m+9}{m+3}\right) \times \right. \\ \left. \times \frac{m+3}{4m+3} f^* \frac{2m-3}{m(m+3)} - \Gamma(m+4) \right], \quad (29)$$

где $f^* = \frac{3(2m+3)}{2m(m+3)} f$. Из (29) следует, что при $m > 1.5$, $\frac{1-k}{k} < 0$, т. е.

автомодельного решения нет. При $m_0 < m < 1.5$, $m_0 = \frac{6}{\sqrt{37+5}} \approx 0.545$ функция $(1-k)/k$ проходит через максимум и решение есть лишь при не слишком малых k . Лишь при $m < m_0$, $(1-k)/k \rightarrow \infty$ при $f^* \rightarrow 0$, т. е. автомодельное решение существует при любом значении k ($0 < k < 1$). При $m = m_0$ максимум функции $(1-k)/k$ достигается в точке $f^* = 0$ и минимальное значение $k_m = 6/7 \approx 0.86$.

При $m = 1$ задача исследовалась более подробно. Используя приближенную формулу (29), можно показать, что в этом случае максимум функции $(1-k)/k$ (соответственно минимум k) достигается при $f^* = 5 \cdot 10^{-3}$ и $k_m \approx 0.993$. Расчет на ЭВМ дает близкие результаты: $k_m = 0.992$ при $f^* = 8.5 \cdot 10^{-3}$.

Аналогичные результаты могут быть получены и в задаче Б, с учетом лишь парной аннигиляции и рождения нейтрино при $m = 1$ и предположениях о сечении (23). Расчеты в этом варианте сложнее, чем в варианте А, так как автомодельная функция распределения W зависит от чисел, характеризующих степень отклонения W от равновесной:

$$D_1 = \frac{1}{4\pi} \int q' W(\vec{q}') d^3 q' \\ D_2 = \frac{1}{8\pi} \int q' W(\vec{q}') P_2(\mu') d^3 q', \quad (30)$$

где $P_2(\mu')$ — второй полином Лежандра, $\mu' = q'_1/q' = i'_1/E'$. Не останавливаясь на деталях расчета (в общем аналогичного приведенному выше), приведем асимптотическую формулу, заменяющую (29):

$$\frac{1-k}{k} \approx 24 f_0 [0.28 f_0^{-2.5} - 1], \quad f_0 \ll 1, \quad (31)$$

где $f_0 = 7.5 \sigma_0 T^5 t (2 \pi \hbar)^{-3} = \text{const}$. При $f_0 \approx 10^{-2}$, $k(f_0)$ достигает минимального значения 0.97. При меньших k в рассматриваемом варианте автомодельного решения не существует.

Кратко суммируем полученные выше результаты:

1. Автомодельное решение рассматриваемого выше типа при $m = 1$ возможно лишь при $(1-k) \ll 1$. Это следует как из задачи Б, так и из задачи А. По-видимому, учет рассеяния $e + \nu \rightleftharpoons e + \nu$ не сможет заметно изменить этот результат.

2. Из анализа задачи А следует существование критических значений показателя степени $m_0 \approx 0.545$ и $m_1 = 1.5$ таких, что при $m < m_0$ автомодельное решение существует при любом значении k , $0 < k < 1$. При $m_0 < m < m_1$ автомодельное решение существует лишь при $1 > k > k_{\text{min}}$. Наконец, при $m > m_1$ автомодельного решения нет вообще.

Неясно, насколько полученные конкретные значения параметров в разделе 2 зависят от упрощений, сделанных при постановке и решении задачи А.

5. Решение кинетического уравнения в приближении Д.З.Н. Рассмотренный в разделе 2 режим осуществляется при условии $\varepsilon_{\nu} \sim E^2$, т. е. $m = 1$. Такие процессы описываются предположениями, сделанными в пункте Б раздела 4. С помощью кинетической теории можно в случае Б получить функцию распределения нейтрино в режиме Д.З.Н., уточнить соотношения между нейтрино и равновесными частицами и строго доказать возможность существования рассматриваемого режима.

Очевидно, рассматриваемый режим не будет автомодельным, т. е. функция распределения W явно зависит от времени.

Общее решение кинетического уравнения в случае Б имеет вид:

$$W(E, \mu, t) = e^{-\frac{E_0}{T_0} - \frac{2}{3} \sigma_0 \int_{t_0}^t E_\nu T n_\nu (D_1 + P_\mu(\mu) D_2) d\tau} + \\ + 4 \sigma_0 \int_{t_1}^t E_\nu T n_\nu e^{-\frac{E_\nu}{T} - \frac{2}{3} \sigma_0 \int_{\tau}^t E_\nu T n_\nu (D_1 + P_\mu(\mu) D_2) d\tau} d\tau, \quad (32)$$

где E_0 и T_0 — энергия нейтрино и температура в момент $t = t_0$. Переход к автомодельному решению соответствует пренебрежению первым членом в (32) и $t_0 \rightarrow 0$ во втором члене. Это согласуется с предположением Мизнера о том, что главную роль играют нейтрино, рождающиеся непрерывно при аннигиляции e^+e^- , что и описывается вторым членом. Напротив, в режиме Д.З.Н. главную роль играют нейтрино, присутствовавшие в момент $t = t_0$, тогда как нейтрино, возникающие при аннигиляции, влияют главным образом на низковэнергичную часть спектра. Поэтому первый член в (32) играет главную роль.

Сохранив в (32) лишь первый член, легко получить ($t \gg t_0$):

$$T \approx t^{-5/18}; \quad D_1 = \text{const}, \quad D_2 \approx \frac{1}{2} D_1; \quad \bar{E}_\nu \sim t^{1/9}; \quad n_\nu \sim t^{-11/9}, \quad (33)$$

в соответствии с результатами раздела 2. Кроме того,

$$\varepsilon_{\nu\nu} = nTD_1; \quad \bar{\varepsilon} = 2nTD_1; \quad (34)$$

(T — в энергетических единицах).

Таким образом, частицы, находящиеся в равновесии, имеют плотность энергии вдвое большую, чем нейтрино и антинейтрино.

Константа D_1 выражается через число сортов равновесных частиц N

$$D_1 = \frac{\bar{\varepsilon}}{2nT} = \frac{3}{2} N.$$

Оценить влияние рождающихся при аннигиляции e^+e^- нейтрино (второй член (32)) на рассматриваемый режим довольно сложно. Пока что можно лишь утверждать, что зависимость от времени всех величин сохранится такой же, как и в (33). Возможно, нарушится соотношение $\varepsilon_{\nu\nu} = 1/2 \bar{\varepsilon}$.

Таким образом, анализ кинетического уравнения в предположениях Б подтверждает качественные выводы, сделанные в разделе 2. Очевидно, что результаты сохраняются и при небольших отклонениях α от $1/3$.

Варианты с $\alpha \ll 1/3$ пока не рассмотрены. Также неясно, насколько сильно может повлиять на результаты учет рассеяния нейтрино на электронах.

6. *Выводы.* Анализ, проведенный в предыдущих разделах, приводит к следующим выводам.

Для наиболее важного (реального) значения $m = 1$ (т. е. $\sigma \sim E^2$) и реального $k = v_s/v < 0.25$ нет автомодельного решения кинетического уравнения, подобного вязкому решению Мизнера*.

Физический вывод заключается, в том, что когда в анизотропном космологическом решении начинается отклонение от равновесия слабовзаимодействующих частиц, то вскоре эти частицы становятся свободными, число их уменьшается, а средняя энергия растет, как это описано в [11, 12].

Возможно так выбрать параметры анизотропной космологической модели, что отклонение от равновесия нейтрино произойдет при очень большой температуре, когда показатель $m < 1$ и может быть мал. В этих условиях возможно и устанавливается автомодельное решение типа Мизнера (для ответа на этот вопрос требуются дополнительные исследования как решения кинетического уравнения, так и свойств нейтрино при высоких энергиях).

Однако в ходе дальнейшего расширения температура падает, и показатель m должен стать равным 1 еще на вакуумной стадии, так как согласно Мизнеру изотропизация решения происходит всегда при относительно низкой температуре ($T = 3 Mэв$). Начиная с этого момента ($m = 1$) решение Мизнера невозможно, и нейтрино должны стать свободными.

Таким образом, если ранние стадии расширения действительно описывались моделью Гекмана-Шюкинга [2] с метрикой (1), то сохраняются сделанные в [12, 17] наблюдательные предсказания следствий процессов с нейтрино. Согласно цитированным работам:

1. Анизотропия реликтового микроволнового космологического излучения сегодня должна быть порядка (для $\rho \approx \rho_c = 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$)

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-3} \div 10^{-4}. \quad (32)$$

В широких пределах начальных параметров анизотропной модели (θ и α) формула (32) дает ожидаемую анизотропию независимо от конкретного значения параметров. Напомним, что согласно решению Мизнера [13, 14] величина анизотропии сегодня

$$\frac{\Delta T}{T} < 3 \cdot 10^{-5} \quad (\rho \approx 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3). \quad (33)$$

* Такое решение получается при формальном применении уравнений гидродинамики с вязкостью для значений $t^*/t > 1$, что, очевидно, незаконно и приводит, как мы видим из анализа кинетического уравнения, даже к качественно неверному результату.

Сегодня должен существовать направленный поток энергичных реликтовых нейтрино с $E, \leq 10^4$ эв и плотностью $\varepsilon, \approx 10^{12} + 10^{13}$ эрг/см³.

Институт прикладной математики
АН СССР

Примечание при корректуре.

Рост энтропии происходит и в случае, когда $\alpha = 0$, что можно показать методом, аналогичным использованному в разделе 5. В этом случае $\varepsilon \sim x^{-1} (\ln x)^{-7/4}$; $\varepsilon_0 = 4/9 (\varepsilon \ln x)$, $x = t/t_0 \gg 1$.

THE KINETIC THEORY OF NEUTRINOS IN THE
ANISOTROPIC COSMOLOGICAL MODELS

A. G. DOROSHKOVICH, Y. B. ZELDOVICH, I. D. NOVIKOV

The modern situation concerning the question of the role of neutrinos and other weakly interacting particles in the anisotropic cosmological models is given. Making use of kinetic theory and the real properties of neutrinos it has been shown that neutrinos had become free as long ago as at the stage of expansion of the anisotropic cosmological models when the anisotropy is still large. Later on all the processes proceed the same way as described by authors in JETP, 53, 644 (USSR).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Л. Зельманов, Труды VI совещания по вопросам космогонии, М., 1959.
2. О. Heckmann, E. Schücking, XI Conseil de Physique Solvay, Bruxelles, 1959.
3. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН, 80, 391, 1963; ЖЭТФ, 39, 149, 800, 1960.
4. К. S. Thorne, Ap. J., 148, 51, 1967.
5. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967.
6. Л. П. Грищук, А. Г. Дорошкевич, И. Д. Новиков, ЖЭТФ, 55, 2281, 1968.
7. И. Д. Новиков, Астрон. ж., 45, 538, 1968.
8. R. V. Partridge, D. T. Wilkinson, Nature, 215, 70, 1967.
9. А. Г. Дорошкевич, Астрофизика, 1, 255, 1965.
10. Л. М. Озерной, А. Д. Чернин, Астрон. ж., 44, 1131, 1967.
11. А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Письма ЖЭТФ, 5, 119, 1967.
12. А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, ЖЭТФ, 53, 644, 1967.
13. С. W. Misner, Phys. Rev. Lett., 19, 533, 1967.
14. С. W. Misner, Ap. J., 158, 431, 1968.
15. J. M. Stewart, Astr. Lett., 2, 133, 1968; Preprint, Cambridge, 1968.
16. А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Письма ЖЭТФ, 8, 95, 1968.
17. А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Астрон. цирк., № 442, 1967.

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ
ГРАВИТАЦИИ. II. БАРИОННЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Г. С. СААКЯН, М. А. МНАЦАКАНЯН

Поступила 1 октября 1968

Пересмотрена 13 октября 1969

Настоящая работа является продолжением [1]. Приводятся дальнейшие преобразования уравнений поля релятивистской обобщенной теории гравитации внутри статического сферически-симметрического распределения масс.

Рассматриваются предельный переход к уравнениям общей теории относительности и принцип соответствия.

Обсуждаются условия на поверхности и в центре, при которых конфигурация может иметь конечное центральное давление. Дается подробное описание процесса интегрирования краевой внутренней задачи. Выводятся некоторые важные свойства гравитаров, характеризуемых условием $M/R \gg 1$.

Результаты численного интегрирования в случае несжимаемой жидкости и реального газа барионов сравниваются с соответствующими результатами других теорий.

Гравитары представляют собой модели сверхмассивных статических образований с определенным значением P_0/ρ_0 и аномально большими гравитационными дефектами масс.

1. В нашей предыдущей работе [1] были получены уравнения поля внутренней области сферически-симметрического распределения масс. Перепишем их в виде:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P+\rho}{2-r} \frac{k'}{k} r \left[8\pi k e^\lambda P + \frac{2}{r} \frac{k'}{k} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 + \frac{e^\lambda - 1}{r} \right], \quad (1)$$

$$\frac{d\lambda}{dr} = 16\pi k r e^\lambda \left[\frac{\zeta P + (1-\zeta\rho)}{3-2\zeta} + \frac{P}{2-r} \frac{k'}{k} \right] -$$

$$-2 \frac{e^\lambda - 1}{r} \frac{1 - r \frac{k'}{k}}{2 - r \frac{k'}{k}} + (2 - \zeta) \frac{r \left(\frac{k'}{k} \right)^2}{2 - r \frac{k'}{k}} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{k} \frac{dk}{dr} \right) = 8\pi k e^\lambda \left\{ (\rho - P) + \frac{2 - r \frac{k'}{k}}{3 - 2\zeta} [\zeta P + (1 - \zeta)\rho] \right\} - \frac{e^\lambda + 1}{r} \cdot \frac{k'}{k} \quad (3)$$

$$P = P(\rho), \quad (4)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = - \frac{2}{P + \rho} \cdot \frac{dP}{dr}, \quad (5)$$

$$\frac{dm}{dr} = \left\{ \frac{8\pi k}{3 - 2\zeta} [(2 - \zeta)\rho + 3(1 - \zeta)P] + \frac{k' \nu'}{2k} \right\} e^{\frac{\lambda + \nu}{2}} \cdot r^2, \quad (6)$$

$$\frac{d\mu}{dr} = 4\pi e^{\lambda/2} r^2. \quad (7)$$

Здесь r — расстояние от центра конфигурации; давление P и плотность ρ вещества связаны уравнением состояния (4); $\lambda(r)$ и $\nu(r)$ описывают метрические свойства пространства; $k(r)$ — гравитационный скаляр; величина $M = \int_0^R dm$ представляет собой активную гравитационную массу, а $M_0 = \int_0^R d\mu$ — собственную массу конфигурации.

В центре звезды, при $r = 0$, мы имеем

$$P(0) = P_0, \quad m(0) = 0, \quad \mu(0) = 0,$$

а на поверхности, при $r = R$, должны выполняться условия, определяемые внешним решением Гекмана:

$$P(R) = 0, \quad R = \frac{4hBM}{\sqrt{\tau_0} (\tau_0^{-h} - \tau_0^h)}, \quad (8)$$

$$m(R) = M,$$

$$\lambda(R) = 2 \ln \left[\frac{2h}{(h + 1/2)\tau_0^h + (h - 1/2)\tau_0^{-h}} \right],$$

$$v(R) = \frac{1}{B} \ln \tau_0,$$

$$k(R) = \tau_0^{-\beta_0/B}, \tag{8}$$

$$k'(R) = -2\beta_0 \frac{M}{R^2} e^{\lambda(R)E} \tau_0^{-\beta_0/B-1/2},$$

где $\beta_0 = 1/2\zeta - 3$, $B = 1 + 2\beta_0$, $h = \sqrt{4\zeta^2 - 10\zeta + 7/2(1 - 2\zeta)}$, τ_0 — значение переменного параметра τ , соответствующее поверхности конфигурации.

Как и в общей теории относительности, величина $m(r)$ не имеет смысла „накопленной массы“ и условие $m(0) = 0$ означает отсутствие

„точечной массы“ лишь постольку, поскольку $M \equiv m(R) = \int_0^R dm$. Од-

нако в ОТО термин „точечная масса“ является правильным, ибо величина $m(r)$ при $r \rightarrow 0$ приобретает смысл массы, заключенной в сфере радиуса r , коль скоро $e^{\lambda(r)} \rightarrow e^{\lambda(r)} \rightarrow 1$ и пространство—время в центре конфигурации оказывается инфинитезимально евклидовым. Что касается „накопленного дефекта массы“, то $\mu(r) - m(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. В обобщенной теории, как мы увидим, $e^{\lambda(r)} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, и метрика в окрестности центра крайне неевклидова. В малой области в окрестности центра конфигурации „накопленный дефект массы“ и собственная масса совпадают друг с другом. Под малостью r мы подразумеваем $r \ll r_g$, поэтому ясно, что гравитарам (так мы называем модели сверхмассивных статических конфигураций, рассчитанных на основе обобщенной теории гравитации), для которых характерно именно условие $R \ll R_g$, присущи большие значения гравитационного дефекта массы.

Уравнения (1)—(4) составляют независимую от остальных систему. Переход к переменным

$$E = e^\lambda, \quad f = r \frac{k'}{k}, \quad s = 8\pi k(r)r^3 \tag{9}$$

позволяет свести ее к системе на единицу меньшего порядка

$$\frac{dP}{ds} = \frac{P + \rho}{f + 2} \cdot \frac{\psi}{s}, \tag{10}$$

$$\frac{dE}{ds} = \frac{2E}{s(f + 2)} (sE\Phi + 1 - f - E - \psi), \tag{11}$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{E}{s(f+2)} \left\{ s[(\rho - P) + (f-2)\Phi] - f \right\}. \quad (12)$$

Здесь сделаны следующие обозначения

$$\psi = \frac{1}{f-2} \left(sEP + 2f - \frac{\zeta}{2} f^2 - 1 + E \right), \quad (13)$$

$$\Phi = \frac{\rho - \zeta(\rho - P)}{3 - 2\zeta}. \quad (14)$$

Прежде чем перейти к рассмотрению условий в центре и на поверхности конфигураций, обсудим предельный переход от уравнений обобщенной теории гравитации к соответствующим уравнениям общей теории относительности.

Как мы уже знаем [1], такой предельный переход совершается стремлением параметра $|\zeta|$ к бесконечности. При этом внешнее решение в области $r > r_g = 2M$, переходит во внешнее решение Шварцшильда, внутри же гравитационной сферы, при $r < r_g$, характер этого решения не соответствует представлениям ОТО. Причем, функция $k(r)$ стремится (при $|\zeta| \rightarrow \infty$) к постоянной $k_0 = 1$, если $r > r_g$, и к функции $k(r) = (r/r_g)^{4/3}$, если $r \leq r_g$.

Полагая в уравнениях (10) и (11) $f \equiv 0$, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ds} &= -\frac{P+\rho}{4s} (sEP + E - 1), \\ \frac{dE}{ds} &= \frac{E}{2s} (sE\rho - E + 1), \end{aligned} \quad (15)$$

которые в переменных $s = 8\pi r^2$ и $E = (1 - 2m/r)^{-1}$, совпадают с уравнениями эйнштейновской теории ($m(R) = M$):

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\frac{P+\rho}{r(r-2m)} (4\pi r^2 P + m), \\ \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho. \end{aligned}$$

Так как внешнее решение служит в качестве условий на поверхности конфигурации, то последние также переходят в соответствующие условия задачи в ОТО (понятно, для конфигураций с $R > R_g = 2M$).

Следовательно, полученные при предельном переходе функции $P(s)$, $E(s)$ и $f(s) \equiv 0$ совпадают с решениями соответствующей задачи ОТО, так как они удовлетворяют одним и тем же уравнениям с одинаковыми условиями. Сказанное в равной мере относится и к функциям ν , μ , m в (5)–(7). Что касается уравнения (12), то при $|\zeta| \rightarrow \infty$ и $f \equiv 0$ оно не обязано обращаться в тождество и при предельном переходе недействительно. Причину этого легко выяснить, если уравнение (12) записать символически в виде $Z = 0$ и вспомнить, что оно получено из вариационного принципа из требования $Z^{\delta\alpha} = 0$. Но при переходе к теории с постоянной $k(r)$, когда сама вариация $\delta x = \delta k = 0$, требование $Z = 0$ несправедливо.

Таким образом, предельный переход в уравнениях обобщенной теории к уравнениям ОТО совершается формальной подстановкой $f \equiv 0$ и $|\zeta| \rightarrow \infty$ (заметим, что $f \equiv 0$ означает, например, $|\zeta k'| = 0$). При этом уравнения, описывающие поведение $k(r)$ отбрасываются. Аналогично, в нестационарной задаче предельный переход совершается при $|\zeta| \rightarrow \infty$ и $k(r, t) \equiv k_0$.

2. Для интегрирования системы от поверхности, а также для обсуждения ниже некоторых других вопросов удобно в уравнениях (9)–(14) перейти к переменным

$$\tilde{s} = s/M^2, \quad \tilde{P} = M^2 P, \quad \tilde{\rho} = M^2 \rho, \quad (16)$$

что соответствует следующей замене: $\tilde{r} = r/M$. Имеем

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{s}} = \frac{\tilde{P} + \tilde{\rho}}{f + 2} \cdot \frac{\psi}{\tilde{s}},$$

$$\frac{dE}{d\tilde{s}} = \frac{2E}{\tilde{s}(f + 2)} (\tilde{s}E\tilde{\Phi} + 1 - f - E - \psi), \quad (17)$$

$$\frac{df}{d\tilde{s}} = \frac{E}{\tilde{s}(f + 2)} \left\{ \tilde{s} [\tilde{\rho} - \tilde{P} + (f - 2)\tilde{\Phi}] - f \right\},$$

$$\tilde{P} = M^2 P(\tilde{\rho}/M^2),$$

где

$$\psi = \frac{1}{f - 2} \left(\tilde{s}E\tilde{P} + 2f - \frac{\zeta}{2} f^2 - 1 + E \right),$$

$$\bar{\Phi} = \frac{\bar{\rho} - \zeta(\bar{\rho} - \bar{P})}{3 - 2\zeta} = M^2 \Phi.$$

Для условий на поверхности конфигурации, при $\bar{s} = \bar{S}$, получаем из (8) следующие параметрические выражения (параметром является τ_0):

$$\begin{aligned} \bar{S} &= 8 \pi k(R) R^2 / M = 8 \pi \tau_0^{-\beta/B} / \omega^2, \\ \bar{P}(\bar{S}) &= 0, \\ E(\bar{S}) &= \left[\frac{2h}{(h + 1/2) \tau_0^h + (h - 1/2) \tau_0^{-h}} \right], \\ f(\bar{S}) &\equiv F = -2 \beta_0 \omega \sqrt{E(\bar{S}) / \tau_0}, \\ \omega &\equiv M/R = \sqrt{\tau_0} (\tau_0^{-h} - \tau_0^h) / 4hB. \end{aligned} \quad (18)$$

Все эти условия, как и сама поверхность \bar{S} , однозначно определяются заданием одного параметра $\omega = M/R$. (Последнее соотношение в (18) представляет собой взаимно-однозначное соответствие между величиной ω и параметром τ_0).

Определив условия (18) для фиксированного значения ω , мы задаем некоторое значение массы M , которая входит в последнее уравнение системы (17), и проводим интегрирование к центру конфигурации. Так как для системы (17) в центре, при $\bar{s} = 0$, нет никаких условий (величина \bar{P}_0 определяется как значение функции $\bar{P}(s)$ в точке $\bar{s} = 0$), то, казалось бы, мы будем получать модели конфигураций со всевозможными массами M для каждого значения ω . Но дело в том, что, как это мы сейчас выясним, существует только одно значение $M(\omega)$, для которого давление $\bar{P}(0)$ в центре конфигурации является конечной величиной. Для любого другого значения M центральное давление будет расходиться. Для того, чтобы показать это, мы переходим к выяснению условий в центре, при которых центральное давление P_0 конечно.

Мы ограничимся только интересующим пока нас случаем $\zeta < 0$. Как видно из (10), для конечности центрального давления $P(0)$ нужно, чтобы или $|f(s)| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$, или $\psi(0) = 0$. Иначе, если $[\psi(P + \rho)/(f + 2)]_{s=0} \neq 0$, величина $(s dP/ds)_{s=0} \neq 0$ и функция $P(s)$

в центре звезды будет расходиться не слабее, чем по логарифмическому закону. Если допустить, что $|f(s)| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$, то из (13) будет следовать, что $E(s) \approx \zeta f^2/2 < 0$ при малых значениях s , так как, в противном случае, давление $P(0)$ будет бесконечным. Но функция $E(s) = e^{\lambda(s)}$ не может быть отрицательной, так что величина $f(0)$ должна быть конечной. Тогда, если $f(0)$ конечна, значение $E(0)$ тоже должно быть конечным, как это следует из выражения (13) для ψ и требования конечности центрального давления. Если это так, то должно быть $\psi(0) = 0$, что означает

$$2f(0) - \frac{\zeta}{2} f^2(0) - 1 + E(0) = 0. \quad (19)$$

Рассмотрим уравнение (11) при малых значениях s :

$$s \frac{dE}{ds} = \frac{2E(0)}{f(0) + 2} [1 - f(0) - E(0)].$$

Если правая часть этого уравнения не равняется нулю, то функция $E(s)$ расходится в точке $s = 0$, что недопустимо. Следовательно, должно быть

$$E(0) [1 - f(0) - E(0)] = 0. \quad (20)$$

Решая уравнения (19) и (20) относительно $f(0)$ и $E(0)$, получаем (для $\zeta = -30$)

$$\begin{aligned} E(0) = 0, \quad f(0) &= \frac{1 - \sqrt{1 - \zeta/2}}{\zeta/2} = 1/5, & 1a \\ E(0) = 0, \quad f(0) &= \frac{1 + \sqrt{1 - \zeta/2}}{\zeta/2} = -1/3, & 1b \\ E(0) = 1, \quad f(0) &= 0, & 1a \\ E(0) = 1 - 2/\zeta = 16/15, \quad f(0) &= 2/\zeta = -1/15. & 2b \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь мы видим, что задача определения полей внутри распределения масс в обобщенной теории гравитации представляет собой краевую задачу, то есть, условия задачи поставлены как на поверхности, так и в центре конфигурации. Последние мы нашли из физического требования конечности центрального давления.

Количество условий (18) и (21) на единицу превышает порядок системы уравнений (10)–(14). Однако, в вариантах *1a* и *1b* точка $s = 0$ является особой точкой для системы, а, как известно, в таких случаях может существовать бесчисленное множество решений гранич-

ной задачи. Одно дополнительное условие позволяет выделить из этого множества единственное решение. В вариантах же $2a$ и $2b$ система не имеет особой точки и граничная задача с одним лишним условием может не иметь решения.

Выясним поведение решений системы (10)—(14) в окрестности точки $s = 0$ для вариантов $1a$ и $1b$. Так как при $s = 0$ обращаются в нуль величины ψ и E , то уравнения (11) и (12) при малых s записываются в виде

$$\frac{dE}{ds} = \frac{2(1-f_0)}{2+f_0} \frac{E}{s}, \quad \frac{df}{ds} = -\frac{f_0}{2+f_0} \frac{E}{s}, \quad f_0 = f(0).$$

Интегрирование определяет функции $E(s)$ и $f(s)$ в первом приближении по s^l :

$$E_{(1)} = Ds, \quad l = \frac{2(1-f_0)}{2+f_0}, \quad (22)$$

$$f_{(1)} = f_0 - \frac{f_0}{2(1-f_0)} E_{(1)}$$

где D — постоянная интегрирования. Разложение происходит по степеням величины s^l . Нужно отметить, что для давления $P(s)$ выполняется условие $(dP/ds)_{s=0} = 0$. Условия (22) принимаются в качестве начального поведения функций в центре конфигурации при численном интегрировании системы, и выбором „свободного параметра“ D (методом проб) обеспечивается выполнение всех условий (18) на поверхности, а также, понятно, условий $1a$ или $1b$ из (21). Что касается условий $2a$ из (21), то здесь отсутствует „свободный параметр“: поведение всех функций определяется центральным давлением, например, $f_{(1)} = \frac{\rho_0 - 3P_0}{3(3-2\zeta)} s$.

Отметим, что кроме решений с конечным центральным давлением, существует еще целый класс решений с бесконечным давлением в центре, но конечным значением полной массы M конфигурации.

3. Имея в виду рассмотренные выше поведения неизвестных функций в центре конфигурации, мы находим целесообразным интегрирование системы (10)—(14) проводить от центра к поверхности. В качестве условия на поверхности мы будем использовать следующее очень удобное выражение

$$E(F) = 1 + (2 - \zeta) F - \frac{3}{2} (1 - \zeta) F^2. \quad (23)$$

Такое внешнее решение проще получить подстановкой $Q = 0$ во второе уравнение системы (31) и последующим интегрированием получаемого линейного уравнения

$$dE/df = 2(1 + f + E + \psi)/f, \quad \psi = \left(2f - \frac{5}{2}f^2 - 1 + E\right)/(f - 2).$$

Оно содержится и в уже имеющемся у нас решении Гекмана (18). Заметим, кстати, что само решение Гекмана получается интегрированием системы (17) с $P = \rho = 0$ и с использованием выражения (23) для функции $E(f)$.

Процесс решения внутренней задачи заключается в следующем. Задав в центре $s = 0$ давление P_0 и поведения (22), мы подбираем (методом проб) такое значение постоянной D , чтобы после численного интегрирования, на поверхности $s = S$, где $P(s) = 0$, величины E и $F \equiv f(S)$ с определенной точностью удовлетворяли условию (23). Имея значение E , мы из (18) и (8) определяем величины τ_0 , ω и $k(R)$. С помощью последних, согласно (9), находим радиус и массу конфигурации

$$R = \sqrt{\frac{S}{8\pi k(R)}}, \quad M = \omega R. \quad (24)$$

После этого, для определения собственной массы M_0 , а также внутренних решений $k(r)$, $\nu(r)$, $\lambda(r)$ и $P(r)$, переходим к интегрированию следующей, эквивалентной (1)–(7), системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{P + \rho}{r} \psi, \\ \frac{dE}{dr} &= \frac{2E}{r} (sE\Phi - E + 1 - f - \psi), \\ \frac{df}{dr} &= \frac{E}{r} \{s[\rho - P + (f - 2)\Phi] - f\}, \\ \frac{dk}{dr} &= f \frac{k}{r}, \\ \frac{d\nu}{dr} &= -2 \frac{\psi}{r}, \\ \frac{d\mu}{dr} &= 4\pi\rho \sqrt{E} r^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$s = 8\pi k(r)r^2,$$

$$\psi = \frac{1}{f-2} \left(sEP + 2f - \frac{\zeta}{2} f^2 - 1 + E \right), \quad \Phi = \frac{\rho - \zeta(\rho - P)}{3 - 2\zeta}.$$

Интегрирование опять проводим от центра, где задаем условия

$$P(0) = P_0, \quad E(v) \approx D(8\pi\gamma)^l r^{2(1-f_0)}, \quad f(0) = f_0, \quad \mu(0) = 0$$

со значением D , найденным при интегрировании системы (17), а для $k(r)$ и $v(r)$ используем следующие из уравнений поведения

$$k(r) \approx \gamma r^{f_0}, \quad v(0) = \text{const.} \quad (26)$$

Беря произвольные значения γ_1 и v_1 для γ и $v(0)$, проводим пробное интегрирование к поверхности ($P=0$), в результате чего находим значения k_2 и v_2 на поверхности. Теперь повторно интегрируем систему (25) с теми же условиями в центре, но для γ и v берем значения

$$\gamma = \gamma_1 \frac{k(R)}{k_2}, \quad v(0) = v(R) - (v_2 - v_1), \quad (27)$$

которые, как это следует из уравнений, являются уже правильными, в том смысле, что все условия на поверхности будут выполнены. (Величины $k(R)$ и $v(R)$ определены заранее из (18) и (8) одновременно с τ_0 и ω). Таким образом, мы получаем внутренние решения $P(r)$, $\rho(r)$, $E(r)$, $f(r)$, $k(r)$ и $v(r)$, а также интегральные параметры R , M , M_0 для модели с заданным значением центрального давления P_0 . (Отметим, что при численном интегрировании удобно перейти к переменным $\ln s$, $\ln r$ и $\ln E = \lambda$).

4. Займемся выводом некоторых важных свойств гравитаров — моделей, которые характеризуются большими значениями параметра $\omega = M/R$. Анализ условий (18) и уравнений (17), а также численные расчеты, показывают, что, как на поверхности, так и внутри всей модели величина $E \ll 1$ и, в этом приближении, систему уравнений (17) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ds} &= \frac{P + \rho}{f + 2} \cdot \frac{\psi}{s}, \\ \frac{dE}{ds} &= \frac{2E}{s(f + 2)} (sE\Phi + 1 - f - \psi), \\ \frac{df}{ds} &= \frac{E}{s(f + 2)} \{s[\rho - P + (f - 2)\Phi] - f\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\psi = \frac{1}{f-2} \left(sEP + 2f - \frac{\zeta}{2} f^2 - 1 \right); \quad \Phi = \frac{\rho - \zeta(\rho - P)}{3 - 2\zeta}.$$

Теперь замечаем, что написанные уравнения удовлетворяют следующему преобразованию подобия

$$s \rightarrow \alpha s, \quad E \rightarrow \alpha^{-1} E, \quad f \rightarrow f, \quad P \rightarrow P, \quad \rho \rightarrow \rho. \quad (29)$$

А это означает, что (для заданного уравнения состояния) все гравитары представляют собой подобные модели и, что важно подчеркнуть, все они имеют одинаковое центральное давление. Используя соотношения (18), (9) и (24), мы можем написать зависимость интегральных характеристик гравитаров от параметра w :

$$\begin{aligned} M &\approx w^{\frac{3hB - 3\zeta_0 - 1}{2B}j} \approx w^{22.4}, \\ R &\approx w^{\frac{hB - \zeta_0}{2B}j} \approx w^{21.4}, \\ k(R) &\approx w^{3_0j/B} \approx w^{-1.328}, \\ e^{\lambda(R)} &\approx w^{-2hj} \approx w^{-83}, \\ e^{\nu(R)} &\approx w^{-j/B} \approx w^{-83.7}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $j = 1/(h - 1/2)$, $\zeta = -30$.

Конечно, все указанные свойства являются не точными, а асимптотическими, при $w \gg 1$.

5. Для ультрарелятивистского уравнения состояния $\rho = aP$ масса M выпадает из уравнений (17) и условий (18), а это, как нетрудно показать, связано с тем, что модель, внутри которой всюду выполняется условие $\rho = aP$, не может обладать конечным радиусом. Такое уравнение состояния используется для центральных очень плотных областей модели. Введением функции

$$Q = sP$$

можно добиться понижения порядка системы (17):

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{df} &= \frac{Q}{EQ} [(a + 1)\psi + f + 2], \\ \frac{dE}{df} &= \frac{2}{G} [EQb_1 - f + 1 - E - \psi], \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\psi = \frac{1}{f-2} \left(EQ + 2f - \frac{\zeta}{2} f^2 - 1 + E \right),$$

$$G = b_2 Q + f(b_1 Q - 1),$$

$$b_1 = \frac{a - \zeta(a-1)}{4 - 2\zeta}, \quad b_2 = a - 1 - 2b_1.$$

Приводим частное решение этой системы, отвечающее давлению $P(s) = Q_0/s$, обращаемому в центре в бесконечность:

$$Q \equiv Q_0 = \frac{3 - 2\zeta}{3 + a(3 + a) - \frac{\zeta}{2}[1 + a(6 + a)]},$$

$$E = d_0 + d_1 f + d_2 f^2, \quad (32)$$

$$d_0 = \frac{a + 5}{(a + 1)(Q_0 + 1)}, \quad d_1 = -\frac{2}{Q_0 + 1}, \quad d_2 = \frac{\frac{\zeta}{2}(a + 1) - 1}{(a + 1)(Q_0 + 1)}.$$

При $|\zeta| \rightarrow \infty$ и $f \equiv 0$ (31) и (32) переходят в соответствующие выражения [3] ОТО.

Ниже приводятся результаты численных расчетов для модели, состоящей из несжимаемой жидкости. Она определяется двумя параметрами P_0 и $\rho(r) \equiv \rho_0 = \text{const}$. Можно свести задачу к однопараметрической, если ввести переменные

$$p = P/\rho_0, \quad u = 8\pi\rho_0 k(r) r^2. \quad (33)$$

Тогда уравнения (17) записываются в виде

$$\frac{dp}{du} = \frac{p + 1}{f + 2} \frac{\psi}{u},$$

$$\frac{dE}{du} = \frac{2E}{u(f + 2)} (uE\varphi + 1 - f - E - \psi), \quad (34)$$

$$\frac{df}{du} = \frac{E}{u(f + 2)} \{u[1 - p + (f - 2)\varphi] - f\},$$

где

$$\psi = \frac{1}{f-2} \left(uEp + 2f - \frac{\zeta}{2} f^2 - 1 + E \right), \quad \varphi = \frac{1 - \zeta(1 - p)}{3 - 2\zeta}.$$

Переход к уравнениям эйнштейновской теории дает

$$\frac{dp}{du} = -\frac{p+1}{4u} (uEp + E - 1),$$

$$\frac{dE}{du} = \frac{E}{2u} (uE - E + 1).$$

Последнее уравнение не содержит p и система легко интегрируется относительно неизвестных функций E^{-1} и p .

Масса и радиус модели несжимаемой жидкости

$$M = \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho_0}} w^{3/2}, \quad R = \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho_0}} w^{1/2}. \quad (35)$$

Согласно ОТО

$$w = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{p_0 + 1}{3p_0 + 1} \right)^2 \right]. \quad (36)$$

В теории Ньютона имеем выражение (35) и

$$w = 2p_0. \quad (37)$$

В нерелятивистском приближении обобщенной теории модель несжимаемой жидкости рассматривается в работе [2], где приводятся графическая зависимость $p_0(w)$ и те же выражения (35) для массы и радиуса. В релятивистской обобщенной теории аналитические соотношения $M(w)$, $R(w)$ и $w(p_0)$ отсутствуют.

6. Численное интегрирование проводилось методом Рунге-Кутты с относительной точностью 0.1% на электронно-вычислительной машине „Наири“.

На рис. 1 приведено внешнее решение $E(F)$; это парабола, определяемая выражением (23). Четыре жирные точки на плоскости (E, f) соответствуют начальным точкам интегрирования (21). Мы рассматриваем только условия в центре, определяемые $1a$ из (21). Кривые 1—7 представляют собой внутренние решения (считые со внешним) для моделей со значениями $p_0 = 0.253, 1.323, 1.886, 1.994, 2.047, 2.065$ и 2.070 . Пунктирные линии, расположенные рядом с кривой 5, изображают пробные интегрирования. (Мы фиксировали значение D в (22) и искали соответствующее значение величины p_0 . Указанные пробные решения относятся к значениям $D = 10^{-3}$ и $p_0 = 2.4, 2.2$ и 1.7).

Зависимость полной массы M конфигураций от значения параметра p_0 приведена на рис. 2 (кривая 4). Для сравнения, на этом же рисунке приведены зависимости $M(p_0)$, полученные по теории Ньютона (кривая 1), общей теории относительности (кривая 2) и в нерелятивистском варианте обобщенной теории (кривая 3). В обычной теории Ньютона увеличение массы влечет за собой неизбежный рост центрального давления. Учет релятивистских эффектов накладывает ограничение на величину массы: при $p_0 \rightarrow \infty$ масса модели несжимаемой жидкости достигает максимального значения, равного $4/9\sqrt{3\pi}$.

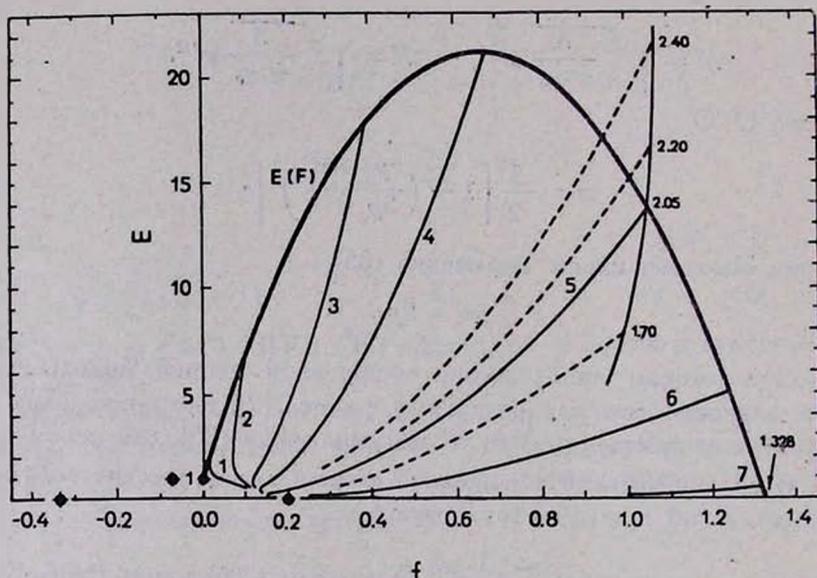


Рис. 1. Внешнее решение и внутренние решения для моделей несжимаемой жидкости.

В нерелятивистской обобщенной теории с ростом массы конфигурации давление растет до некоторого максимального значения (p_{\max}), после чего, при дальнейшем увеличении массы, оно убывает до нуля. Для каждого значения центрального давления $p_0 < p_{\max}$ существуют две статические конфигурации с существенно различными интегральными характеристиками M , R и ω . Равновесных конфигураций с $p_0 > p_{\max}$ не существует, что обусловлено следующим обстоятельством. С увеличением массы начинает сказываться ослабление гравитационного взаимодействия и для поддержания гидростатического равновесия отпадает необходимость возрастания центрального давления;

а при дальнейшем увеличении массы, при $M > M(p_{\text{max}})$, уменьшение гравитационного взаимодействия становится настолько эффективным, что центральное давление p_0 начинает даже падать.

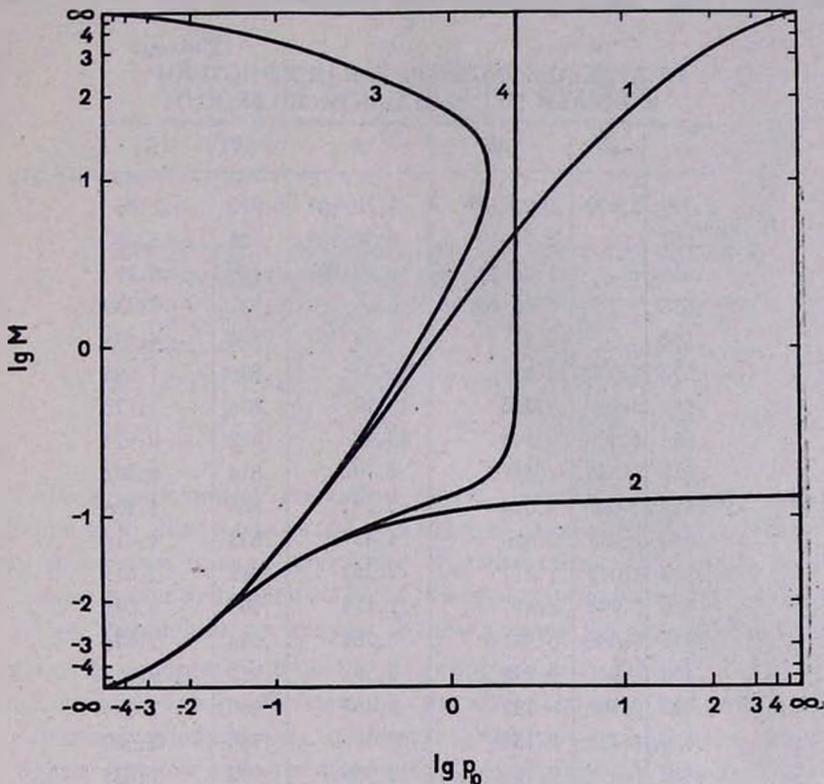


Рис. 2. Зависимости массы M от параметра $\rho_0 = P_0/\rho_0$ для модели несжимаемой жидкости: 1—по теории Ньютона, 2—по теории Эйнштейна, 3—по нерелятивистской обобщенной теории гравитации, 4—по релятивистской обобщенной теории гравитации. Шкала построена следующим образом. Если сторону квадрата принять за две единицы длины, то значение X откладывается величиной $2^{-|X|}$ от отметки $(-\infty)$, если $X < 0$, и от отметки $(+\infty)$, если $X > 0$. Такое построение графиков сохраняет непрерывность функции и ее производной. Шкала удобна тем, что она охватывает всю область изменения переменной $[-\infty, \infty]$ и изображает в сравнительно увеличенном масштабе ту область графика, которая помещается (например, сдвигом) в центральную часть квадрата.

В релятивистском варианте обобщенной теории в игру вступает также искривление пространства, что приводит к насыщению центрального давления p_0 и почти вертикальному росту массы M при определенном значении $\rho_0 = P_0/\rho_0 = 2.07$ в центре конфигурации. Этому участку кривой 4 принадлежат вышеупомянутые гравитары ($w \geq 0.5$).

В табл. 1 приводятся наиболее важные характеристики моделей идеальной жидкости по релятивистской обобщенной теории гравитации. Обратим внимание на большие значения гравитационного дефекта массы $\Delta M = M_0 - M$ для гравитаров (табл. 2).

Таблица 1

НАИБОЛЕЕ ВАЖНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
МОДЕЛЕЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ω	ρ_0	M	R	$k(R)$	$\lambda(R)$
0.729	2.070	$5.23 \cdot 10^5$	$7.16 \cdot 10^5$	0.612	-21.86
.657	"	$5.71 \cdot 10^3$	$8.70 \cdot 10^3$.703	-13.18
.635	"	$1.26 \cdot 10^3$	$1.99 \cdot 10^3$.736	-10.29
.613	"	$2.81 \cdot 10^2$	$4.59 \cdot 10^2$.771	-7.389
.592	"	62.46	$1.05 \cdot 10^2$.808	-4.495
.572	2.070	13.86	24.26	.846	-1.605
.567	2.069	9.700	17.12	.856	-1.179
.564	2.069	7.595	13.47	.862	-0.924
.558	2.068	4.851	8.702	.874	0.382
.552	2.067	3.078	5.581	.886	1.206
.548	2.065	2.426	4.427	.893	1.618
.538	2.047	1.217	2.262	.912	2.615
.526	1.994	0.617	1.174	.931	3.045
.511	1.886	0.391	0.764	.944	2.876
.498	1.761	0.298	0.598	.952	2.617
.480	1.580	0.232	0.484	.960	2.301
.456	1.323	0.185	0.406	.966	1.960
.425	1.030	0.151	0.356	.972	1.637
.388	0.752	0.125	0.322	.977	1.346
.345	0.520	0.102	0.295	.982	1.078
.301	0.365	$8.18 \cdot 10^{-2}$	0.271	.986	0.861
.255	0.254	$6.32 \cdot 10^{-2}$	0.248	.989	0.672
.210	0.178	$4.71 \cdot 10^{-2}$	0.224	.992	0.518
.135	0.092	$2.42 \cdot 10^{-2}$	0.179	.995	0.303
.081	0.048	$1.12 \cdot 10^{-2}$	0.129	.997	0.172
.047	0.026	$5.01 \cdot 10^{-3}$	0.106	.999	0.096

Качественное поведение функций $k(r)$, $E(r)$ и $\nu(r)$ следующее. В центре всех моделей $k(0) = E(0) = 0$ (см. (26) и (22)). С удалением от центра $k(r)$ монотонно растет, на поверхности переходит во внешнее решение, асимптотически приближающееся к значению $k_0 = 1$ на бесконечности. Существенное отличие $k(r)$ от единицы наблю-

дается внутри „гравитационной сферы“ $r_x = 2M$ конфигурации. Функция $E(r)$ по своему характеру напоминает продолжение соответствующего внешнего решения. $\nu(r)$ монотонно растет от центра модели к поверхности (см. (5)), причем

$$\nu(R) - \nu(0) = 2 \int_0^R \frac{dP}{P + \rho} = 2 \ln(p_0 + 1)$$

для несжимаемой жидкости.

Таблица 2

ЗАВИСИМОСТЬ ДЕФЕКТА МАССЫ ОТ ПАРАМЕТРА ω
МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ω	0.46	0.51	0.53	0.54	0.55	0.61	0.73
ΔM	0.17	1.04	2.84	11.8	77.0	$5.9 \cdot 10^5$	$1.6 \cdot 10^{12}$

7. Вышеописанным способом были рассчитаны также параметры конфигураций, состоящих из реального газа барионов. Говоря о барионах мы имеем в виду нуклоны и гипероны. Уравнение состояния было заимствовано из работы [9]. Отметим наиболее характерные свойства этого уравнения состояния. В нем учтена энергия взаимодействия барионов. В ядерной области плотностей ($\rho \approx 3.6 \cdot 10^{14}$ г.см⁻³) силы взаимодействия между барионами имеют характер притяжения, энергия, соответствующая им, отрицательна (она уменьшает давление). При более тесном сближении частиц (расстояния между барионами порядка $2 \cdot 10^{-14}$ см), когда плотности превышают ядерную, между ними появляются более мощные силы отталкивания, в соответствии с чем энергия их взаимодействия положительна (учет ее приводит к увеличению давления). Другая особенность использованного уравнения состояния заключается в том, что при чрезвычайно больших плотностях давление становится равным плотности энергии (при $\rho \rightarrow \infty$, $P \rightarrow \rho$). Такое асимптотическое поведение $P \approx \rho$ релятивистского барионного газа, как показано в работе [10], следует из требования $\lim v = c$ при $\rho \rightarrow \infty$, где v — скорость звука. В [11] оно было получено из других соображений.

Результаты расчетов приведены в табл. 3 и на рисунках 3—6. Рис. 3 изображает зависимости массы M и радиуса R конфигураций от давления P_0 в их центре. При некоторых точках на кривых указаны значения величины $q_0 = P_0/\rho_0$. Нижние кривые, отмеченные циф-

рой 1, представляют те же зависимости согласно обычной релятивистской теории гравитации [12]. Здесь могут существовать статические конфигурации с любым центральным давлением P_0 , но ограниченным значением массы и радиуса ($M \sim M_\odot$, $R \sim 10$ км); при $P_0 \rightarrow \infty$ функция $M(P_0)$ приближается к значению, также близкому к массе Солнца.

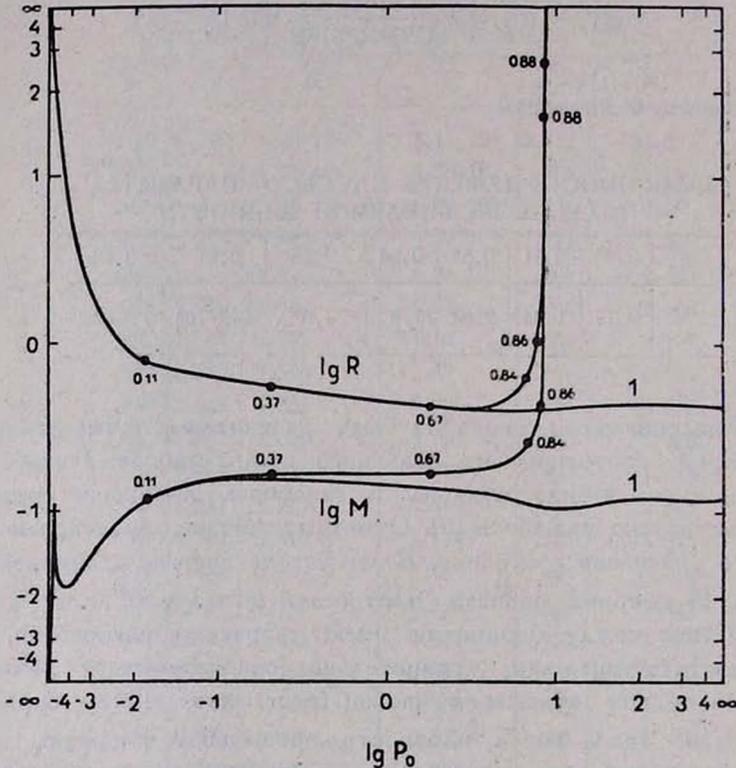


Рис. 3. Зависимость массы и радиуса от центрального давления для статических сферических конфигураций, состоящих из реального газа барьонов. Уравнение состояния заимствовано из работы [9]. По теории Эйнштейна (кривая 1) масса конфигурации порядка массы Солнца, а центральное давление может иметь любые значения. По обобщенной теории гравитации (кривая 2) давление P_0 оказывается ограниченной сверху, однако для массы допустимы любые значения, причем при $P_0 \rightarrow 7.52$ $M \rightarrow \infty$. Числами у некоторых точек отмечены значения параметра $q_0 = P_0/\rho_0$.

Из таблицы и рисунков видно, что при $q_0 \leq 0.5$ результаты нового варианта теории мало отличаются от старой, существенные отклонения появляются лишь при $q_0 \geq 0.5$. С возрастанием параметра q_0 (следовательно, и давления P_0) масса и радиус растут, по P_0 не может иметь значения, превышающие 7.52 (т. е. $4.86 \cdot 10^{37}$ дин.см⁻²).

НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНФИГУРАЦИЙ, СОСТОЯЩИХ ИЗ РЕАЛЬНОГО ГАЗА БАРИОНОВ
ПО РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

P_0	q_0	R	M	ω	M_0	$N_0 \cdot 10^{-58}$	$\nu(0)$	$\nu(R)$	λ_0	$\lambda_-(R)$	γ	$k(R)$
$2.23 \cdot 10^{-3}$	0.038	0.930	0.050	0.054	—	—	—	- 0.124	8	0.122	—	0.998
$1.59 \cdot 10^{-2}$	0.11	0.827	0.122	0.148	0.136	0.143	- 0.741	- 0.346	5	0.331	2.39	0.995
0.239	0.37	0.651	0.185	0.284	0.254	0.236	- 2.19	- 0.834	2	0.793	1.60	0.987
1.64	0.67	0.500	0.180	0.366	0.342	0.251	- 3.94	- 1.27	0	1.194	1.32	0.980
2.34	0.72	0.489	0.188	0.385	—	—	—	- 1.32	- 0.5	1.313	—	0.978
3.05	0.75	0.490	0.200	0.407	0.485	0.310	- 4.65	- 1.58	- 1	1.475	1.21	0.975
4.55	0.81	0.552	0.232	0.445	—	—	—	- 1.96	- 2	1.815	—	0.969
5.73	0.84	0.610	0.290	0.474	1.22	0.658	- 6.24	- 2.47	- 3	2.211	1.08	0.961
6.93	0.86	0.972	0.491	0.510	3.73	1.89	- 7.50	- 3.56	- 5	2.855	0.946	0.945
7.39	0.87	2.20	1.17	0.533	21.5	10.7	- 9.27	- 5.27	- 8	2.881	0.772	0.920
7.48	0.87	3.91	2.12	0.543	—	—	—	- 6.12	- 10	2.128	—	0.902
7.49	0.87	16.9	9.51	0.563	$1.36 \cdot 10^3$	$6.72 \cdot 10^3$	- 13.4	- 9.35	- 15	- 0.444	0.479	0.862
7.51	0.88	74.9	43.7	0.583	$2.63 \cdot 10^4$	$1.30 \cdot 10^4$	- 16.2	- 12.3	- 20	- 3.33	0.341	0.823
7.52	0.88	$3.27 \cdot 10^2$	197.	0.604	$5.11 \cdot 10^5$	$2.52 \cdot 10^5$	- 19.2	- 15.2	- 25	- 6.22	0.244	0.785
7.52	0.88	$1.42 \cdot 10^3$	890.	0.626	$9.95 \cdot 10^6$	$4.91 \cdot 10^6$	- 22.1	- 18.1	- 30	- 9.12	0.172	0.747
7.52	0.88	$6.18 \cdot 10^3$	4010.	0.648	$1.92 \cdot 10^8$	$9.46 \cdot 10^7$	- 25.0	- 21.0	- 35	- 12.01	0.123	0.716
7.52	0.88	$2.68 \cdot 10^4$	$1.81 \cdot 10^4$	0.671	$3.71 \cdot 10^9$	$1.83 \cdot 10^9$	- 27.9	- 23.9	- 40	- 14.91	0.087	0.684

P_0 — центральное давление, ρ_0 — плотность энергии в центре, $q_0 = P_0/\rho_0$, R — радиус, M — масса конфигураций, $\omega = M/R$, M_0 — собственная масса (масс без учета гравитации), N_0 — число барионов конфигурации, $\nu(0)$ и $\nu(R)$ — значения функции $\nu(r) = \ln g_{00}(r)$ в центре и на поверхности, $\lambda(R) = \ln |g_{rr}(R)|$ (g_{00} и g_{rr} — компоненты метрического тензора), $k(R)$ — величина гравитационного скаляра на поверхности. $\lambda_0 = \ln D$ и γ — постоянные, входящие в асимптотические выражения (22), (26), для λ и k . Масса, радиус и давление измерены в единицах $9.29M_\odot$, 13.7 км и $6.47 \cdot 10^{30}$ дн·см⁻² — соответственно. Для четырех конфигураций проведено интегрирование только системы уравнений (17).

Если говорить об обратной зависимости $P_0(M)$, то центральное давление с ростом M растет, и при $M \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к пределу $P_0 = 7.52$. При этом параметр q_0 стремится к пределу, приблизительно равному 0.88. Вертикальные ветви кривых 2 на рис. 3 представляют гравитары.

Перейдем к рассмотрению внутренних решений для функций $\nu(r)$, $\lambda(r)$ и $k(r)$. На рис. 4 приведен график функций $k/k(R)$ в зависимости от r/R . Верхняя линия представляет определенную барионную конфигурацию, интегральные параметры (масса, радиус и т. д.) которой близки к параметрам соответствующей (т. е. с одинаковым центральным давлением) конфигурации, рассчитанный по обычной релятивистской теории гравитации, а нижняя — представляет гравитары. Последняя, очевидно, является предельной, в том смысле, что нет линий, расположенных правее ее. При $q_0 \rightarrow 0$ величина $k(R)$ стремится к ньютоновскому пределу k_0 , а функция $k/k(R)$ — к единице.

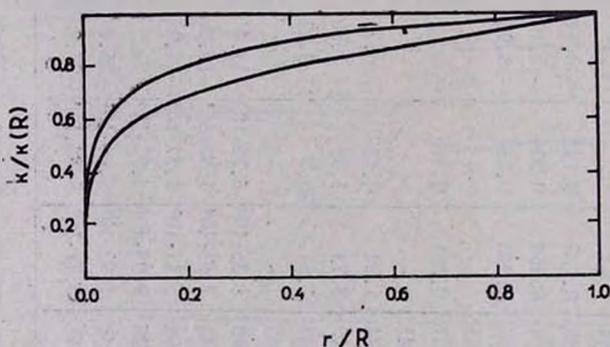


Рис. 4. Зависимость гравитационного скаляра от расстояния до центра конфигурации. Кривая 2 соответствует гравитарам, $q_0=0.88$. При переходе к моделям с малыми q_0 , $k(r)$ проходит выше, стремясь в пределе $q_0 \rightarrow 0$ к значению $k(r)=1$.

Семейство линий на рис. 5 и 6 изображает зависимости функций λ и ν от r/R для ряда конфигураций. Мы видим, что с увеличением массы конфигураций кривые $\lambda(r/R)$ и $\nu(r/R)$ спускаются все ниже и ниже. В случае гравитаров функции $\lambda(r/R)$ и $\nu(r/R)$ изображаются параллельными линиями. Этот результат, а также то, что для всех гравитаров кривые $k/k(R)$ одинаковы, если r измеряется в единицах R , следует из того, что эти конфигурации являются подобными.

Нами были рассчитаны также конфигурации, состоящие из идеального газа нейтронов. В этом случае для P_0 и q_0 предельные значения не существуют, ветвь гравитаров отсутствует. Кривые $M(P_0)$ и $R(P_0)$ с точностью до величины порядка $1/|\zeta|$ совпадают с соответствующи-

щими кривыми, рассчитанными ранее с помощью обычной теории гравитации [6—8]. В этом случае не проявляются какие-либо заметные отклонения от обычной теории и отсутствует вертикальная ветвь на линии $M(P_0)$. Дело, конечно не в химическом составе барионного газа;

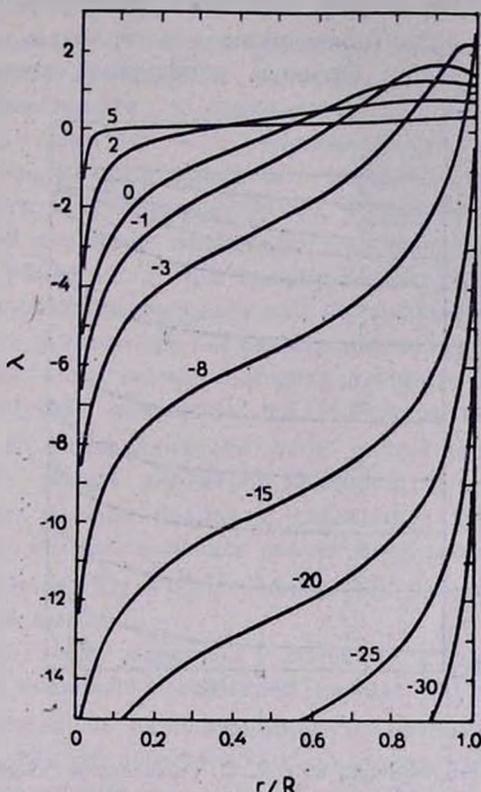


Рис. 5. Зависимость $\lambda = \ln |g_{rr}|$ от r/R . С увеличением массы конфигурации кривые проходят ниже. Для гравитаров линии $\lambda(r/R)$ параллельны друг другу. Числа на кривых указывают значения параметра $\lambda_0 \equiv \ln D$.

учет гиперонов и барионных резонансов не изменит картину результатов. Оказывается, здесь важная роль принадлежит параметру $q_0 = P_0/\rho_0$. Мы видим, что в случаях идеальной жидкости и реального газа барионов новые результаты получаются при значениях параметра $q_0 \geq 0.5$, а предельное значение q_0 , при котором получаются гравитары, равно 2.07 и 0.88 соответственно для идеальной жидкости и реального газа барионов. Для идеального газа нейтронов $q \leq 1/3$, поэтому область $q_0 \geq 0.5$, в которой следует ожидать заметные отклонения и появление вертикальной ветви, здесь никогда не достигается.

8. Интегральные характеристики сферических статических конфигураций, для которых компактность мала, $\omega \ll 1$, соответствуют обычной теории Эйнштейна. Как следует из таблицы, для таких конфигураций мала и величина $q_0 = P_0/\rho_0$. При этом незаметны также релятивистские эффекты. Таким образом q_0 является важным параметром, одновременно характеризующим как эффекты релятивистской теории гравитации, так и эффекты обобщенной теории гравитации.

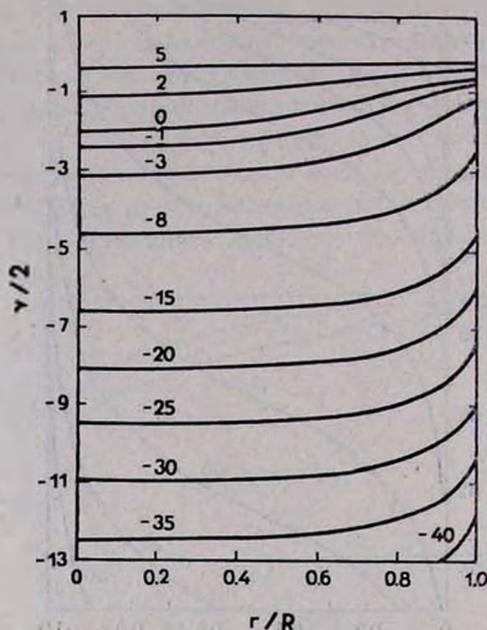


Рис. 6. Зависимость $\nu = \ln g_{00}$ от r/R . С увеличением массы конфигурации линии $\nu(r/R)$ смещаются вниз. Для гравитаров они параллельны друг другу. Числа на кривых указывают значения параметра λ_0 .

С увеличением параметра q_0 растут ω , масса, радиус и центральное давление (см. табл. 3). Одновременно происходит ослабление гравитационного взаимодействия, т. е. уменьшение скаляра $k(r)$, что способствует поддержанию гидродинамического равновесия для масс, больших, и давлений P_0 , меньших, чем это имеет место по обычной теории Эйнштейна. При массах, намного превышающих массу Солнца, уменьшение взаимного притяжения масс становится настолько эффективным, что давление в центре модели достигает насыщения и почти перестает расти при дальнейшем увеличении массы конфигурации. Для моделей звезд, состоящих из реального вырожденного газа барионов, это предельное значение P_0 приблизительно равно $4.86 \cdot 10^{37}$ дн·см⁻².

Все наши вычисления относятся к случаю $\zeta = -30$. Важным является выяснение вопроса о том, что произойдет с полученными результатами при изменении величины ζ . Качественную картину эволюции результатов при изменении ζ можно получить, не проводя новых расчетов, если изучить характер кривых на рис. 2 и 3. Мы замечаем, что в своей начальной части эти кривые касаются, или, точнее, почти совпадают с соответствующими кривыми по обычной теории, и по мере продвижения вправо, в сторону больших P_0 , загибают кверху. Далее, поскольку при $|\zeta| \rightarrow \infty$ результаты новой и обычной теории должны совпадать, то из упомянутого характера линий с очевидностью следует, что при уменьшении $|\zeta|$, максимальное значение P_0 по нерелятивистской теории и предельное значение его в релятивистской теории должны убывать, а при увеличении $|\zeta|$ — расти, при этом соответственно укоротятся или удлинятся совпадающие части линий. Таким образом, при увеличении $|\zeta|$ аномальные ветви линий $M(P_0)$, представляющие гравитары, должны смещаться вправо в сторону больших P_0 (больших значений величины q_0), и тем самым удлинятся совпадающие части. В справедливости этой закономерности в нерелятивистском варианте можно убедиться непосредственно. Действительно, здесь, при прочих равных условиях, давление в центре конфигурации и, следовательно, его максимальное значение обратно пропорциональны $\sim |\zeta|^{1/2}$ (см. формулы (32) и (33) работы [2]), что прямо подтверждает вышеприведенный вывод.

Средняя плотность вещества у гравитаров порядка ядерной. Мы видим, что при меньших плотностях (малых q_0) большие массы не получаются: обобщенный вариант теории гравитации по своим результатам не отличается от обычного. Из вышеизложенных рассуждений следует, что предельное значение q_0 , при котором получаются большие эффекты, должен зависеть от величины $|\zeta|$. При $|\zeta| < 30$ эффекты должны получиться и для меньших значений q_0 и, в частности, могут быть и в случае идеального газа барионов.

Являясь чрезвычайно компактными конфигурациями, гравитары обладают очень большим гравитационным дефектом массы (см. последние строки табл. 3). На первый взгляд, казалось бы, вследствие уменьшения гравитационного скаляра $k(r)$ с увеличением массы конфигурации, дефект массы должен уменьшиться. Но дело в том, что убывание $k(r)$ ни в коем случае не означает ослабления гравитационного поля вообще, даже можно утверждать обратное. В самом деле, нужно учесть, что у гравитаров с увеличением массы уменьшается не только функция $k(r)$ но и компоненты $|g_{rr}(r)|$ и $g_{00}(r)$ метрического тензора. Таким образом, уменьшение функции $k(r)$ не

приводит к приближению метрики пространства — времени к плоскому, а наоборот, сопровождается усилением искривления его. Это как раз и означает усиление гравитации.

Все конфигурации в обобщенной теории характеризуются одним параметром $\omega = M/R$. Если в ОТО принципиально недопустимо существование статических тел с величиной $\omega > 1/2$, то здесь возможны модели очень компактных равновесных конфигураций с $\omega \gg 1$ (гравитары). С точки зрения обобщенной теории, общая теория относительности неприменима к телам (пока это можно утверждать только для статических тел), для которых $\omega \geq 1/2$. Для менее компактных конфигураций, для которых $\omega \ll 1$ обе теории дают одинаковые результаты (принцип соответствия). Это и понятно, так как решения Шварцшильда и Гекмана, которые зависят только от отношения r/M , приводят к одинаковым условиям на поверхности при $\omega \ll 1$. При переходе от конфигураций с малыми значениями ω к более компактным конфигурациям, сначала, при $\omega \approx 0.01$, начинают сказываться релятивистские эффекты, а при $\omega \geq 0.3$ существенными становятся эффекты ослабления гравитационного взаимодействия.

Ереванский государственный университет
Бюраканская астрофизическая обсерватория

ON THE RELATIVISTIC GENERALIZED THEORY OF GRAVITY. II. BARYON CONFIGURATIONS

G. S. SAHAKIAN, M. A. MNATSAKIANIAN

This work proceeds the [1]. Further transformations of the relativistic generalized theory of equations for static spherically symmetric mass-distribution are presented.

The asymptotic transition to equations of the general theory of relativity and the conformity principle are considered.

The conditions on the surface and in the center are discussed, under which configurations can be of finite central pressures. The scrupulous description of integration of the internal problem is given. Some important properties of gravitars characterized by the condition $M/R \gg 1$ are established.

The computed results for incompressible liquid and real baryon gas are compared with those of the other theories.

Gravitars are models of supermassive static formations with definite value of P_0/ρ_0 and enormous mass-defects.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, *Астрофизика*, 4, 567, 1968.
2. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, *Астрофизика*, 3, 311, 1967.
3. В. А. Амбарцумян, Г. С. Саакян, *Вопросы космогонии*, 9, 123, 1963.
4. Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартамян, *Астрофизика*, 3, 503, 1967.
5. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, *Тезисы докладов V Международной конференции по гравитации и теории относительности*, Тбилиси, 1968, стр. 198.
9. J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, *Phys. Rev.*, 55, 374, 1939.
7. В. А. Амбарцумян, Г. С. Саакян, *Астрон. ж.*, 38, 785, 1961.
8. В. А. Амбарцумян, Г. С. Саакян, *Астрофизика*, 1, 7, 1965.
9. Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартамян, *Сообщения Бюр. обс.*, 38, 55, 1963; см. также *Nuovo Cim.*, 30, 82, 1963.
10. Г. С. Саакян, *Известия АН АрмССР, серия физ.-мат.*, 14, 117, 1961.
11. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ*, 41, 1609, 1961.
12. Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартамян, *Астрон. ж.*, 39, 193, 1964.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5

НОЯБРЬ, 1969

ВЫПУСК 4

ГАЛАКТИКИ С УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫМ КОНТИНУУМОМ. III.

Б. Е. МАРКАРЯН

Поступила 5 августа 1969

Приводится третий список галактик с ультрафиолетовым континуумом, содержащий данные о 102 объектах, обнаруженных при изучении спектров слабых галактик. В спектрах 68 из них обнаружено или заподозрено присутствие эмиссионных линий. У десяти из этих эмиссионных объектов обнаружены признаки, характерные для галактик Сейферта. Порядковые номера их отмечены одной звездочкой. Двумя звездочками отмечены порядковые номера четырех объектов, изображения которых являются звездоподобными. Эти объекты могут быть квазизвездными галактиками. Статистика данных наших трех списков показывает, что на восемь квадратных градусов приходится одна галактика ярче 17^m с сильным ультрафиолетовым излучением. Таким образом, они составляют, примерно, два процента числа галактик ярче 17^m .

Составлен третий список галактик, обладающих сильным ультрафиолетовым излучением, который является продолжением наших двух предыдущих списков [1, 2]. Объекты всех трех списков были обнаружены путем тщательного изучения спектров галактик до 17^m на снимках, полученных на 40—52" телескопе системы Шмидта Бюраканской обсерватории с полутораградусной призмой.

Методика наблюдений и исследования спектров слабых галактик подробно описана в предыдущих статьях [1, 2].

В этом списке приведены данные о 102 объектах; обозначения и содержание столбцов таблицы остались без изменения. К статье прилагаются карты (репродукции, сделанные с карт Паломарского обозрения в красных лучах) для их отождествления.

В спектрах 20 объектов этого списка обнаружены эмиссионные линии. У 48 же объектов присутствие эмиссионных линий заподозрено. Таким образом, у $2/3$ объектов нового списка присутствие эмиссии в спектре установлено или заподозрено.

У десяти из этих эмиссионных объектов, порядковые номера которых отмечены звездочкой, были обнаружены признаки, позволяющие заподозрить присутствие у них особенностей, характерных для галактик Сейферта. Принадлежность некоторых из них к типу галактик Сейферта, как например, объектов, занесенных в список под номерами 206, 279 и 290, почти не вызывает сомнения. Но, очевидно, подлинная природа этих десяти объектов окончательно выяснится после получения щелевых спектрограмм.

Четыре объекта, порядковые номера которых отмечены двумя звездочками, имеют на наших спектральных снимках звездообразное изображение. По некоторым признакам они похожи на квазизвездные галактики. Из них особый интерес представляет объект № 205. Этот объект расположен на периферии спиральной галактики NGC 4319; точнее, он находится на расстоянии, примерно, одной минуты дуги от центра этой галактики в направлении юго-востока. Как прямое, так и спектральное изображения этого объекта на снимках, полученных с 40—52" телескопом, строго звездообразные. В его спектре наблюдается необычно интенсивный ультрафиолетовый континуум. Вместе с этим, у него сильна и красная часть спектра. Таким образом, распределение энергии в спектре этого объекта точно такое, какое наблюдается у квазизвездных объектов с существенно отрицательным U—V. Помимо этого, в его спектре намечаются эмиссионные линии: H α , а также две другие, по-видимому, сильно смещенные к красному концу спектра, линии. Одна из этих линий находится в области зеленого провала, а другая — в промежутке, заключенном между 5500 Å и 6000 Å. Указанные признаки говорят в пользу того, что рассматриваемый объект является квазизвездной галактикой, и вполне возможно, что при этом он обладает особенностями галактик Сейферта.

Настоящим списком завершается исследование спектров слабых галактик в области неба, ограниченной 41 и 77 градусами склонения и 6.8 и 14.2 часами прямого восхождения.

В этот участок неба, который покрывает, примерно, 2000 квадратных градусов, входят частично или целиком области созвездий Большой Медведицы, Гончих Псов, Дракона, Жирафа и Рыси. Однако наши списки содержат также объекты, расположенные вне указанной области. Дело в том, что наряду с указанной областью проводилось исследование и в некоторых других, сравнительно небольших участках неба. Это участки Северного полюса Галактики, сверхскопления Геркулеса, скопления в Волосах Вероники и т. д. Указанные сравнительно небольшие области на небе вместе покрывают примерно 250 квадратных градусов. Но поскольку в этих областях наблюдается

высокая плотность галактик, то целесообразно при проведении статистики исключить из рассмотрения галактики, входящие в эти области. Таким образом, в трех наших списках остается 258 объектов, расположенных в области, покрывающей на небе примерно 2000 квадратных градусов. Следовательно, в среднем, на восемь квадратных градусов приходится одна галактика ярче 17^m , обладающая сильным или умеренным ультрафиолетовым континуумом.

Принимая во внимание, что на квадратный градус приходится всего 8 галактик ярче 17^m [4], а также то обстоятельство, что предельная величина* на наших снимках не всегда достигает 17^m , можно считать, что галактики ярче 17^m с сильным ультрафиолетовым излучением составляют два процента общего числа галактик.

Среди ярких галактик (ярче 13^m) процент объектов с аномальными спектральными и цветовыми признаками центральных частей значительно больше.

Рассматривая спектральные и цветовые характеристики ярких галактик, еще в 1963 году мы пришли к выводу о существовании среди них определенного класса объектов, обладающих аномальными спектральными и цветовыми особенностями. Дальнейший анализ показал, что аномальные особенности центральных частей этих галактик обуславливаются исходящим из их ядер сильным ультрафиолетовым излучением необычного происхождения [3]. Приведенный в [3] список содержит 41 такой объект. В этот список мы не включили поздние спирали типов Sc и Sd и галактики с небольшими интегральными показателями цвета, центральные части которых имеют аномальные спектральные и цветовые характеристики, ибо в этих случаях в качестве причины, обуславливающей указанные аномалии, можно рассматривать и возможность присутствия большого числа горячих гигантов в центральных частях галактик.

Теперь существование галактик с активными ядрами, обладающих сильным коротковолновым излучением нетеплового характера, стало общепризнанным. Кроме того, выявлено немало спиралей поздних типов, как например, NGC 598, 3310, 6217 и т. д., ядра которых имеют спектры, обладающие признаками относительно ранних спектральных классов (A и F). Поэтому возникла необходимость пересмотра и дополнения опубликованного списка галактик с аномальными спектральными и цветовыми признаками центральных частей.

* Предельная величина звезд на наших спектральных снимках колеблется между $16^m.5$ и $17^m.5$ в зависимости от условий наблюдений.

Таблица 1

СПИСОК ГАЛАКТИК С УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫМ КONTИНУУМОМ

№№	Галактика	Координаты		Размеры	m_{pg}	Спектр. тип
		α_{1950}	δ_{1950}			
1	2	3	4	5	6	7
201	4194	$12^{\text{h}}11^{\text{m}}.6$	$54^{\circ}48'$	$20 \times 30''$	13^{m}	ds2e
202	—	15.5	58 58	7	16.5	d2e:
203	—	15.7	44 27	10×13	15.5	sd3e:
204	—	18.5	62 17	10	16	ds3
205**	—	19.5	75 35	6	14.5	s1e
206*	—	22.0	67 41	12	15.5	s1e:
207	4384	22.8	54 47	20×30	13.5	ds2e:
208	—	23.3	47 36	9	16.5	ds3
209	—	23.9	48 46	11	15.5	d1e
210	8—23—37	24.6	48 33	10×13	14.5	sd2
211	—	25.6	44 45	8	17	d3e:
212	—	25.8	44 43	10×13	15	ds3
213	4500	29.1	58 14	20×50	13	sd2e:
214	—	29.4	66 02	10	16	d2
215*	8—23—52	30.2	46 03	13	14.5	s1e:
216	—	30.9	52 04	7×9	16.5	d3
217	—	32.8	66 37	8	16	s1e:
218	8—23—65	33.9	48 10	10×12	15.5	d3
219	—	36.1	56 11	8×20	16	ds2
220	9—21—33	41.5	55 10	10×15	14.5	sd1e
221	9—21—34	41.5	55 11	10	16	d3e:
222	—	43.4	47 21	8	16.5	d2
223*	—	43.5	71 36	12	15	s1e:
224	8—33—92	44.1	48 31	8×13	16	d3
225	—	44.9	47 24	8×11	16.5	sd2e:
226	—	45.3	72 11	7	17.5	s2
227	—	46.0	51 16	8	16	s3e:
228	8—23—94	46.5	47 58	8	17	d2e
229	—	53.0	64 31	12	16	d3
230**	10—19— 4	54.2	57 08	12	14	s1
231	—	54.9	59 17	8×11	16.5	d3e:
232	—	56.4	59 22	7	17	d3
233	—	57.4	64 43	10×13	16.5	d3e:
234	6—29—10	57.7	33 41	12×20	15	ds3e:
235	—	58.5	62 02	7×11	17	d3e:

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7
236	8—24—24	12 ^h 59 ^m 0	48°19'	10×13"	15 и 16 ^m	d3+d3
237**	—	59.1	30 19	6	16.5	s1
238	11—16— 8	59.3	65 18	8	16.5	sd2e:
239	—	13 3.3	53 52	8×11	15.5	s2
240	—	3.4	53 54	6×10	17	ds3
241	—	3.7	33 17	9×13	16	d3e:
242	—	4.0	53 46	7×11	16	d3e:
243	—	8.6	60 49	12	16	d2
244	—	10.1	50 42	8×11	17	d1e:
245	—	10.3	67 47	10	16	s1
246	—	11.0	56 19	7×9	16	d2e:
247*	—	12.3	55 05	10	15	s1e
248	—	13.0	44 40	9×12	16.5	sd3
249	875*	15.2	57 48	20×30	14	sd3e:
250	—	15.4	44 04	13	16	sd3e:
251	9—22—49	17.9	52 19	8	16	d3e:
252**	—	18.2	55 39	6	17	s2
253	—	18.7	56 43	8×18	16	d3
254	—	20.8	52 00	12×20	15.5	d2
255	—	21.0	53 12	7×10	16	d3e:
256	5144	21.4	70 47	50	13	d1e
257	5164	25.2	55 45	12×15	14.5	sd2
258	—	26.6	53 42	9	16	d3e:
259	—	26.9	44 09	7×9	16.5	ds1e
260	—	27.4	45 16	7	17	s2e:
261	—	29.2	75 53	10×15	15.5	ds2e:
262	—	29.5	75 53	7×13	16	s2
263*	—	31.6	69 10	10	16.5	sd1e
264	—	32.2	52 09	7×12	17	ds2e:
265	—	36.0	28 02	10×15	16	ds2e:
266	5256	36.2	48 32	20×25	14 и 15	d3+d3
267*	7—28—45	37.5	43 18	13×20	15	s1e:
268	--	38.9	30 38	12	15	sd3e:
269	—	39.3	66 06	8	17.5	d2e:
270	—	39.4	67 56	15	14.5	ds3e:
271	5278—79	39.8	55 57	25 и 15	14 и 15	d3e+d3e
272	—	39.9	43 02	7×11	16.5	sd3
273	—	42.8	56 08	12×20	14.5	d1e:

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7
274	—	13 ^h 44 ^m 6	29°55'	5"	17 ^m .5	sd2e:
275	—	46.3	31 43	10×15	16	ds2e:
276	—	49.4	44 05	11×15	15	d3e:
277	11—17—9	50.5	64 37	7	16.5	d1e:
278	12—13—21	51.5	72 58	15×50	15	ds1e:
279*	12—13—22	52.1	69 33	15	15	s1e
280	5—33—28 и 29	54.9	29 02	12 и 20	15 и 16	ds3e:
281	5383	55.0	42 05	50×100	13	sd2e
282*	—	14 1.2	69 45	8×12	16	sd1e
283	—	1.3	41 50	7	17 и 17	s2+d3
284	—	4.1	69 23	8×15	16	s2
285	—	8.0	71 56	8×10	16	d3e:
286	5607	18.8	71 50	20	14.5	sd2
287	—	36.7	73 50	12	16	s2
288	12—14—43	51.0	74 02	20×30	15	d2
289	—	15 31.7	58 04	8×11	16.5	d3e:
290*	—	34.7	58 05	10	15	s1e
291	—	53.0	19 20	10×13	15	sd1e
292	—	53.7	19 01	12	16.5	ds2e
293	—	57.4	18 52	6×8	17.5	d2e:
294	—	59.8	18 57	15×20	15	d3
295	—	16 1.2	19 19	8	16	d2e:
296*	—	1.2	19 18	10×25	15.5	s1e:
297	6052	3.0	20 41	30×40	14	s1e:
298	1182*	3.3	17 56	16×20	15	ds2e
299	—	3.5	17 26	10	17.5	ds3e:
300	1189*	4.0	18 19	14×20	15.5	s2e:
301	—	8.8	18 12	7	17.5	d1e:
302	—	10.6	15 55	7	17.5	ds2e:

Примечания к таблице

201* — Пекулярная, со значительным выбросом. Морфологический тип по [5] SB0p.
В спектре наблюдаются яркие эмиссионные линии; возможно, что они широкое.

* Объекты №№ 201, 212, 221 и 273 содержатся в списках компактных галактик ЦВЕННИ.

- 202 — Сферическая компактная галактика с небольшой и слабой короной. Границы резки в красных лучах и несколько размыты в синих.
- 203 — Маленькая спираль с двумя малоразвитыми рукавами и ярким расщепленным ядром. Непрерывный спектр довольно сильный.
- 204 — Компактная, сферической формы, но конденсирована слабо.
- 205 — Изображения как на прямых, так и на спектральных снимках не отличаются от звезд. Однако необычно большой ультрафиолетовый континуум и присутствие эмиссионных линий в спектре делают весьма вероятной ее принадлежность к числу квазизвездных объектов.
- 206 — Сферическая, без резких границ. Имеет слабую и малоразвитую корону. По общему виду спектра похожа на сейфертовские галактики. В спектре наблюдаются $H\alpha$ и $\lambda 3727$.
- 207 — Пекулярная, вытянутая по α . Имеет отросток, который с западной стороны загибается к северу.
- 208 — Сферическая, компактная.
- 209 — Сфероидальная, имеет веерообразный выброс, направленный к востоку. В спектре наблюдаются очень яркие эмиссионные линии; особенно сильны N_1 и N_2 , превосходящие по интенсивности $H\alpha$.
- 210 — Морфологический тип SBb. Ядро довольно конденсировано.
- 211 — Компактная, но малоcondensированная.
- 212 — Восточный компонент очень интересной взаимодействующей пары.
- 213 — Морфологический тип по [5] SBa. Центральная область очень яркая и довольно конденсированная.
- 214 — Сфероидальная, компактная, но малоcondensированная.
- 215 — Сфероидальная со слабой и небольшой короной. Границы резки только в синих лучах. Возможно присутствие спектральных особенностей галактик Сейферта.
- 216 — Форма эллиптическая, на вид компактная.
- 217 — Сферическая, компактная, с резкими границами. Имеет слабую корону.
- 218 — Имеет заметную корону и небольшой отросток.
- 219 — Вытянута по δ . Возможно, что две неразрешенные галактики, расположенные вдоль круга склонения.
- 220 — Составляет двойную систему со следующей галактикой [6]. Имеет звездоподобное ядро; в спектре заметны $H\alpha$ и $\lambda 3727$.
- 221 — Сфероидальная, имеет значительный хвост в виде извержения, тянущийся от севера к востоку.
- 222 — Кометовидная, имеет яркий хвост, направленный к югу.
- 223 — Точно сферическая, компактная. Имеет слабую корону, вид несколько пушистый. Возможно, что типа сейфертовских галактик.
- 224 — Возможно, что пара неразрешенных галактик.
- 225 — Имеет эллиптическую форму. Вытянута по δ .
- 226 — Очень компактная, почти не отличается от звезд. Спектр, однако, несколько шире и слабее спектров звезд такого же поперечника.
- 227 — Незначительно вытянутая, компактная галактика. Спектральное изображение звездобразное, но в спектре имеются слабые признаки эмиссии в $H\alpha$ и $\lambda 3727$. Это делает возможность проектирования звезды на галактику маловероятной.
- 228 — Имеет небольшой хвост, направленный к северо-востоку.
- 229 — Сфероидальная, с едва заметным выступом на севере, присутствие которого придает галактике форму, напоминающую треугольник.

- 230 — Сфероидальная, со значительным выбросом, который огибает галактику и выглядит как извержение. Спектр выглядит звездным, но вероятность проектирования звезды $13-13^m.5$ на такую уникальную галактику весьма мала. Это, скорее всего, сильно конденсированная галактика в послезеруптивном состоянии.
- 231 — Имеет эллиптическую форму. Вытянута почти вдоль прямого восхождения.
- 232 — Слегка вытянута вдоль круга склонения.
- 233 — Имеет небольшую слабую корону.
- 234 — Сфероидальная, несколько вытянутая в северо-восточном направлении.
- 235 — Имеет эллиптическую форму. Вытянута по α .
- 236 — Двойная, взаимодействующая пара.
- 237 — Изображение звездобразное. Возможно, что является квазизвездным объектом.
- 238 — Двойная система. Приведенные данные относятся к слабому по яркости компоненту, расположенному, южнее яркого компонента. Является компактной галактикой.
- 239 — Выглядит компактной.
- 240 — Вытянута по δ .
- 241 — Форма эллиптическая.
- 242 — Выглядит компактной.
- 243 — Сферическая, компактная, но мало конденсирована.
- 244 — Вид пушистый. Конденсирована не сильно.
- 245 — Сферической формы, компактная.
- 246 — Слегка вытянутая, компактная галактика.
- 247 — Очень компактная. По общему виду спектра похожа на галактики Сейферта.
- 248 — Восточный компонент тесной двойной системы.
- 249 — Линзовидная, у которой, по-видимому, имеется звездоподобное ядро 15^m .
- 250 — Сфероидальная. Весьма вероятно присутствие эмиссии в спектре.
- 251 — Западный компонент цепочки, состоящей из трех объектов.
- 252 — Изображение звездоподобное, возможно, что является квазизвездным объектом.
- 253 — Имеет эллиптическую форму, вытянута по δ .
- 254 — Имеет эллиптическую форму. Большая ось отклоняется от круга склонения примерно на 45° .
- 255 — Имеет небольшой искривленный хвост, направленный от севера к северо-западу.
- 256 — Структура не ясна, Хаббл отнес к типу иррегулярных, а де Вокулер классифицировал как Sdp. Содержит яркое сгущение, для которого и приведены спектральные характеристики. Спектр же всей галактики можно классифицировать как d2 (e).
- 257 — Яркое ядро, окруженное слабым (низкой поверхностной яркости) кольцом, которое, по-видимому, образовано слабыми спиральными рукавами.
- 258 — Компактная, с нерезко очерченными краями.
- 259 — Слегка вытянутая галактика с небольшим веерообразным хвостом. По интенсивности эмиссионные линии располагаются в следующем порядке: $\lambda 3727$, N_1 и N_2 , H_2 ; обычно последняя по яркости превосходит встречающиеся в спектрах галактик другие эмиссионные линии.
- 260 — Очень компактная, имеет едва заметную корону. В спектре заметна H_2 .
- 261 — Сфероидальная. Непрерывный спектр довольно интенсивный, но не звездоподобный.
- 262 — Форма эллиптическая, вытянута по δ .

- 263 — Незначительно вытянутая галактика с резкими границами. В спектре видны H_{α} и $\lambda 3727$. Возможно присутствие спектральных особенностей сейфертовских галактик.
- 264 — Имеет заметный хвост, направленный с востока на запад.
- 265 — Эллиптической формы. Большая ось отклонена от круга склонения примерно на 45° . В спектре заметна H_{α} .
- 266 — Пара неразрешенных сферидальных галактик.
- 267 — Имеет эллиптическую форму. Большая ось отклоняется от круга склонения к западу на $15-20^{\circ}$. Спектр по общему виду похож на спектры галактик Сейферта.
- 268 — Сферидальная, с вытянутой оболочкой, большая ось которой $\sim 25^{\circ}$. В спектре как будто замечаются $\lambda 3727$ и H_{α} .
- 269 — Сферидальная, границы очерчены нерезко, имеет слабую корону.
- 270 — Довольно яркая, сферическая галактика, окруженная заметной короной. Хотя ультрафиолет умеренный, может быть даже слабый, непрерывный спектр вообще очень интенсивный, со слабыми признаками эмиссии.
- 271 — Известная пара, компоненты которой связаны мощной дугой. Наблюдается эмиссия в H_{α} и в некоторых других линиях.
- 272 — Имеет эллиптическую форму, вытянута по δ . Имеются слабые признаки эмиссии в спектре.
- 273 — Чрезвычайно интересная галактика с большим прямолинейным выбросом, протяженность которого в два—три раза превосходит ее поперечник. Выброс кончается слабым сгущением бело-голубого цвета.
- 274 — Слабая компактная галактика.
- 275 — Вытянута по δ . Имеет выступы-выбросы. Очень интенсивна синяя часть спектра.
- 276 — Вытянута по α . В спектре как будто намечаются H_{α} и $\lambda 3727$.
- 277 — Имеет соприкасающийся голубой спутник и значительный выброс, направленный к югу. Последний кончается голубыми сгущениями $20-21^m$.
- 278 — Баред с малоразвитыми рукавами и ядром примерно 16^m .
- 279 — Сферидальная, слегка вытянутая галактика с заметной оболочкой. По спектральному изображению она похожа на галактики типа Сейферта.
- 280 — Двойная система. У яркого компонента, представляющего собой пару неразрешенных сферидальных галактик, заметны отростки—выбросы.
- 281 — Морфологический тип по [5] — SB (rs) p. Пекулярный баред с ярким ядром, состоящим из горячих пятен. К ярчайшему из них относятся указанные спектральные характеристики.
- 282 — Вытянутая, эллиптической формы. В спектре намечаются H_{α} и $\lambda 3727$. По спектральным особенностям похожа на галактики Сейферта.
- 283 — Пара сферических, на вид компактных галактик, расположенных друг от друга на расстоянии $30''$. Спектральный тип западного компонента—s 2, а восточного—d3.
- 284 — Структура неясна, возможно, что баред со звездоподобным ядром.
- 285 — Исходя из общего вида спектра, можно заподозрить присутствие эмиссионных линий в спектре.
- 286 — Структура неясна. Яркое сферидальное образование, окруженное слабой оболочкой, в которой как будто намечается структура. В спектре очень сильны красно-желтая и сине-фиолетовая части, а ультрафиолет, хотя и слабый, но тянется довольно далеко.

- 287 — Сферическая галактика, вероятно, со звездоподобным ядром. На расстоянии $20''$ от нее, в северо-восточном направлении имеется пара неразрешенных объектов, которая может быть спутником этой галактики.
- 288 — По-видимому, расstroенная спираль с плотным центральным сгущением. Имеет заметный хвост, направленный по δ к северу.
- 289 — Имеет слабый спутник в контакте. Вытянута почти по α .
- 290 — Изображение звездоподобное. В спектре намечаются эмиссионные линии; H_{α} , как будто, присутствует определенно. Спектр по общему виду похож на спектры ядер галактик Сейферта.
- 291 — Слегка вытянутая. В спектре намечается эмиссия в линии H_{α} и еще в какой-то линии в ультрафиолете.
- 292 — Сфероидальная галактика без резких границ. В спектре, как будто, присутствуют H_{α} и $\lambda 3727$.
- 293 — Сфероидальная, с небольшим хвостом. В спектре, как будто, намечаются эмиссионные линии.
- 294 — Объект необычной треугольной формы, возможно, что состоит из двух—трех образований.
- 295 — Сферическая, компактная. По-видимому, она связана со следующим объектом, расположенным к югу от нее, на расстоянии всего одной минуты дуги.
- 296 — Сильно вытянутое по δ образование. Имеет заметный хвост, направленный к северу. Это образование, по-видимому, состоит из двух тесно расположенных, весьма конденсированных компактных объектов. Объект, расположенный к западу, необычно голубой. Возможно присутствие спектральных особенностей галактик Сейферта.
- 297 — Имеет сложную структуру, ее считают двойной системой. В ней имеется три—четыре тесно расположенных компактных образования. Одно из них, расположенное к востоку, является звездоподобным; к нему и относятся указанные спектральные характеристики.
- 298 — Сфероидальная, имеет большой прямолинейный выброс, кончающийся двумя соприкасающимися голубыми сгущениями 19^m . На необычную структуру этой галактики, в известной степени похожую на радиогалактику M87, впервые обратил внимание В. А. Амбардумян [7]. В спектре заметны H_{α} и $\lambda 3727$.
- 299 — На вид сфероидальная, но возможно, что тесно-двойная система.
- 300 — Судя по спектральным изображениям, имеет звездоподобное ядро 16^m .
- 301 — Очень слабая, получился лишь след спектра, вид которого точно такой же, как у галактик типа d1.
- 302 — Очень компактная, хотя вид несколько пушистый. Вокруг заметна слабая корона.

Новый список, который мы намерены опубликовать в ближайшем будущем, содержит более 100 объектов, выбранных из числа примерно 600 галактик ярче 13^m , для которых в литературе имеются более или менее подробные спектральные и колориметрические данные. В ряде случаев эти данные проверялись и дополнялись собственными наблюдениями, проведенными с объективной призмой. Приведенные выше цифры показывают, что количество объектов с аномальными спектральными и цветовыми характеристиками центральных частей среди галак-

тик ярче 13^m превышает пятнадцать процентов. Таким образом, мы приходим к выводу, что относительное количество галактик ярче 13^m с аномальными физическими особенностями почти на порядок больше относительного количества галактик слабее 13^m с сильным ультрафиолетовым излучением.

Причина столь сильного расхождения весьма интересна и заслуживает особого внимания. Мы намерены вернуться к этому вопросу в другой статье, а пока отметим следующее. Присутствие у части ярких галактик относительно равных спектральных признаков, по-видимому, не сочетается с присутствием сильного ультрафиолетового излучения. Такие объекты при наших исследованиях среди слабых галактик, очевидно, остались невыявленными, так как из-за исключительно низкой дисперсии использованной нами объективной призмы удается выделять только галактики с сильными эмиссионными линиями и галактики с сильным ультрафиолетовым излучением. Помимо этого, галактики ярче 13^m с аномальными спектральными и цветовыми признаками центральных частей в подавляющем большинстве являются спиралями, в то время как среди слабых галактик (13^m-17^m) с ультрафиолетовым континуумом спирали встречаются редко. В подавляющем большинстве случаев обнаруженные нами галактики с сильным ультрафиолетовым излучением являются компактными и конденсированными образованиями сферической или сфероидальной формы. У них часто наблюдаются выбросы в виде выступов и струй или слабой короны и оболочки, свидетельствующих как будто о нахождении этих объектов в послезеруптивной стадии. Таким образом, можно констатировать, что подавляющее большинство обнаруженных в Бюраканской обсерватории объектов с ультрафиолетовым континуумом еще не приобрело регулярную морфологическую форму. Как по своим физическим, так и по морфологическим особенностям они как будто занимают промежуточное положение между квазизвездными объектами и нормальными галактиками.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

GALAXIES WITH ULTRAVIOLET CONTINUUM. III

B. E. MARKARIAN

The third list of galaxies with ultraviolet continuum is presented. It is the sequel of our previous two lists [1, 2].

Data for 102 objects, detected during the investigation of spectra of faint galaxies are given in the list. The method of observation and investigation of spectra are described in the mentioned papers.

Twenty objects from this list definitely show emission lines in their spectra, whereas 48 other objects are suspected in having them.

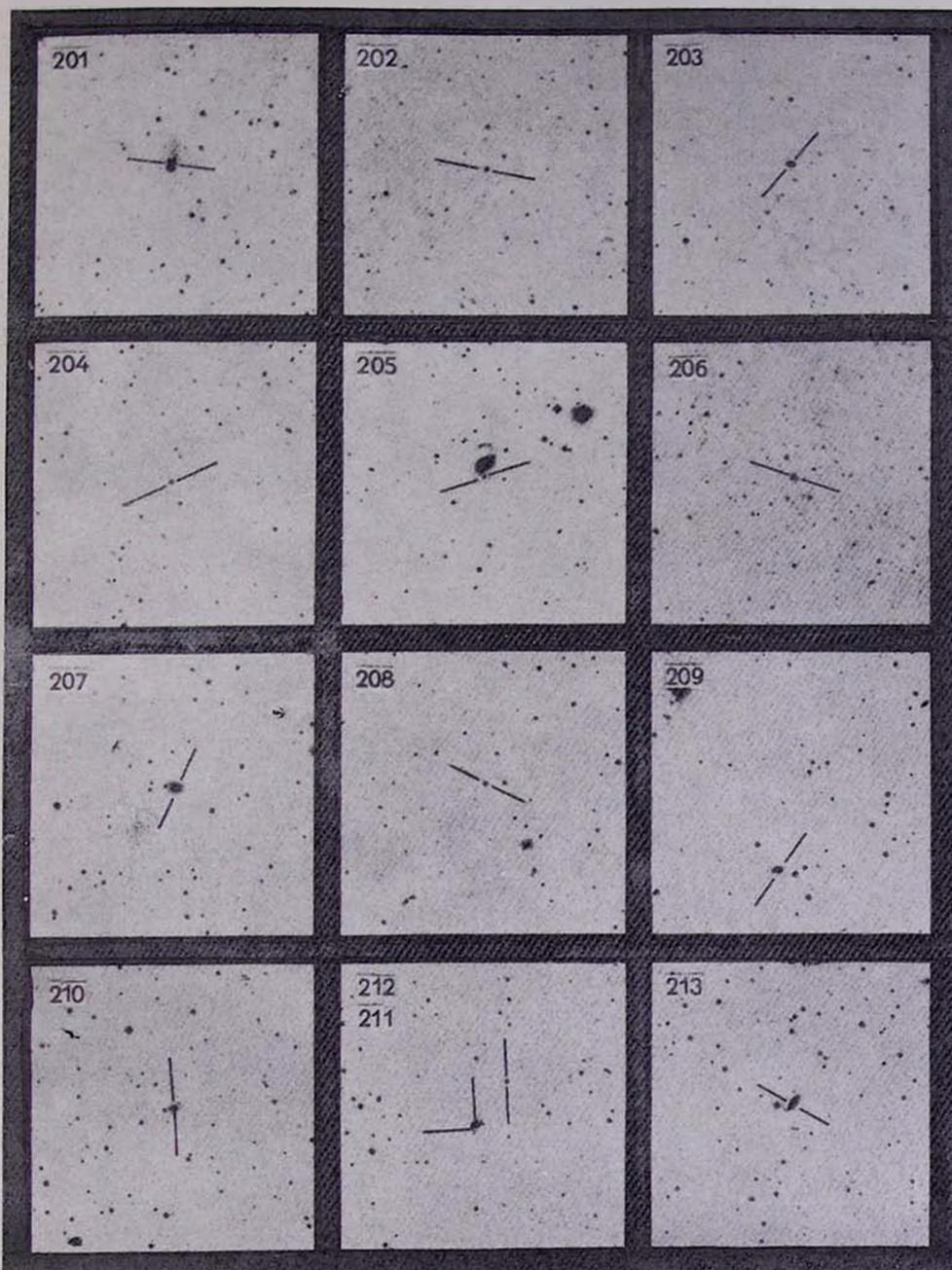
The data of our three lists show that the mean rate of appearance on the sky of galaxies brighter than 17^m with ultraviolet continuum is one galaxy per eight square degrees. From here one can conclude, that among the galaxies brighter than 17^m , only 2 percent pass a strong ultraviolet radiation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. Е. Маркарян, *Астрофизика*, 3, 55, 1967.
2. Б. Е. Маркарян, *Астрофизика*, 5, 443, 1969.
3. Б. Е. Маркарян, *Сообщ. Бюр. обс.*, 34, 3, 1963.
4. С. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, London, 1955.
5. G. de Vaucouleurs, *Ap. J.*, Suppl. ser., 8, 31, 1963.
6. E. Holmberg, *Lund. Medd.*, II, № 136, 1958.
7. V. A. Ambartsumian, *Transactions of the IAU*, XIB, 145, 1962.

КАРТЫ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ

(в красных лучах). Каждая карта покрывает область $16' \times 16'$.
Север сверху. Восток слева.



214



215



216



217



218



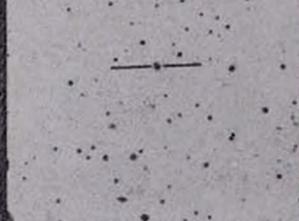
219

221
220

222



223



224



225



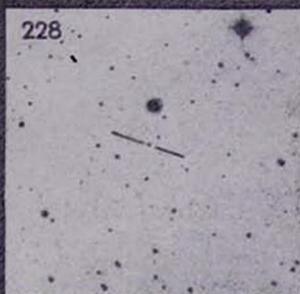
226



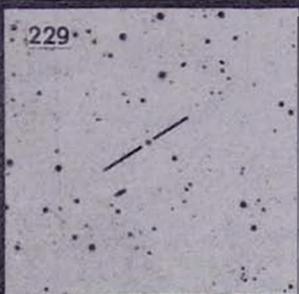
227



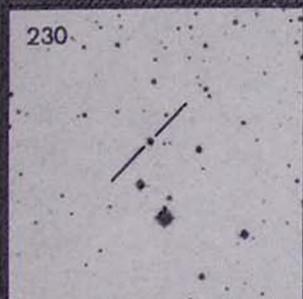
228



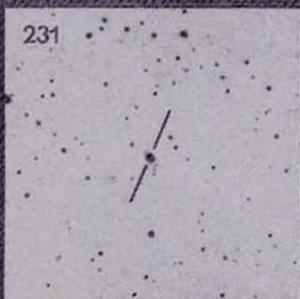
229



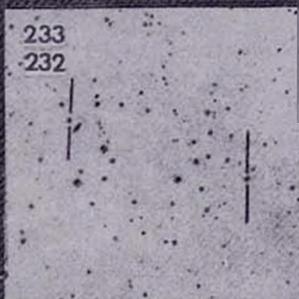
230



231

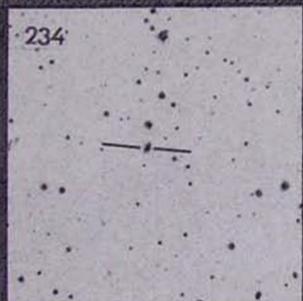


233

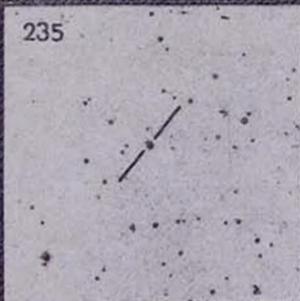


232

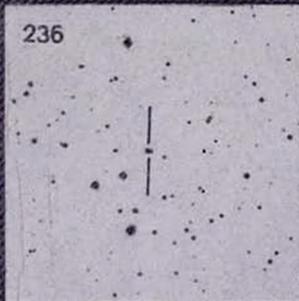
234



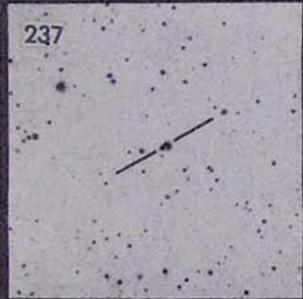
235



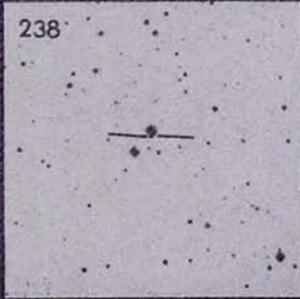
236



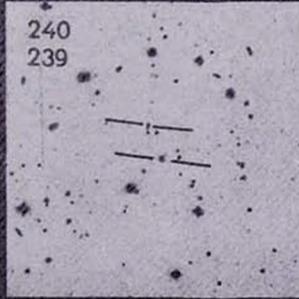
237



238



240



239

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253



254



255



256



257



258



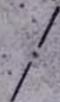
259



260

262
261

263



264



265



266



267



268



269



270



271



272



273



274



275



276



277



278



279



280



281



282



283



284



285



286



287



288



289



290



291



292



293



294

295
296

297



298



299



300



301



302



АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5

НОЯБРЬ, 1969

ВЫПУСК 4

О ЦЕНТРАЛЬНЫХ СГУЩЕНИЯХ Sa ГАЛАКТИК

К. А. СААКЯН

Поступила 23 июня 1949

Пересмотрена 23 июля 1969

Представлены результаты классификации центральных сгущений 51 Sa галактик. Около 40% наблюдаемых галактик имеют звездообразные ядра. Приведены гистограммы распределения центральных частей галактик согласно пятибалльной классификации Бюраканской обсерватории и фотометрические данные для классов „5“, „4“ и „3“. Представлены результаты сравнения с данными других авторов.

В настоящей работе представлены результаты наблюдений центральных частей 51 галактики типа Sa. Эти наблюдения составляют часть общей программы по наблюдениям ядер галактик разных морфологических типов. Наблюдения проводились на 20—21" телескопе системы Шмидта, в период 1963—1968 гг. с целью определения структуры центральных частей галактик. Описание бюраканской классификации центральных частей галактик и результаты изучения ядер типов SB, Sb и Sc опубликованы в работах [1—7].

Выбор галактик, методика наблюдений, оценки яркостей ядер, использованные пластинки и цветовая система подробно описаны в вышеупомянутых работах.

Об оценках ядерных областей галактик. Оценки структуры ядерных областей производились по пятибалльной системе. Результаты приведены на рис. 1.

Около 40% всех наблюдаемых галактик имеют звездообразные ядра классов „4“ и „5“. Примерно такой же процент составляют звездообразные ядра у галактик Sb [6] и Sc [7]. Фактически получается, что процент звездообразных ядер не меняется вдоль классификационной последовательности Хаббла.

Среди изученных Sa галактик нет таких, в центральных частях которых вовсе не наблюдались бы какие-либо сгущения (класс „1“) и мал процент галактик, у которых наблюдались аморфные сгущения (класс „2“). Галактики, оцененные классом „3“, составляют больше половины. В этом отношении интересен рассмотр рис. 2, где приведено

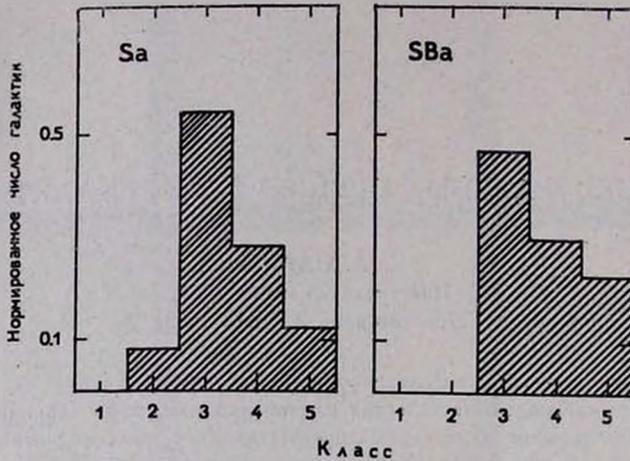


Рис. 1. Распределение классов Sa и SBa галактик в фотографических лучах.

распределение классов галактик в зависимости от угла наклона их экваториальной плоскости, кроме класса „2“. Ядра всех типов почти одинаково часто встречаются у галактик с разными экваториальными

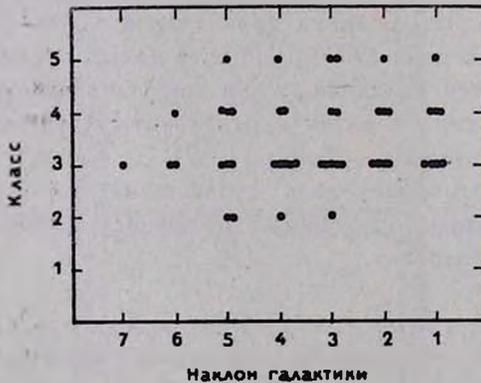


Рис. 2. Распределение классов ядер Sa галактик в зависимости от угла наклона экваториальной плоскости.

наклонами. По-видимому, этот факт говорит о том, что спиральные системы типа Sa сами по себе являются не столь плоскими, как более поздние спирали типа Sb и Sc. Это видно еще и из того факта, что

вообще мал процент галактик, которые имели бы наклон 6 и 7 по Моргану [8]. Но с другой стороны очевидно, что классифицировать спиральные галактики ранних типов с очень большими наклонами труднее, чем более поздних, так как разложение в краях спиральных ветвей не всегда можно четко отличать. Слабая зависимость распределения ядер по классам от величины наклона может быть еще результатом того, что в Sa системах сравнительно мало пыли и даже значительный наклон галактики не может повлиять на классификацию центральных частей. Конечно, у Sa галактик, так же как и у Sb среди ядер, отнесенных к классу „3“, могут встречаться слабые, звездообразные ядра, которые настолько теряются в общем ярком фоне центральных частей, что с помощью 21" телескопа их выявить очень трудно.

Интересно сопоставление распределений классов ядер у Sa, Sb с Sc. У Sc фактически не наблюдаются ядра с оценкой „3“. Их центральные части либо звездообразные, либо не показывают сильной концентрации.

У части галактик оценки типа ядер в фотографических и фотовизуальных лучах заметно отличаются. Галактика NGC 2681 в синих лучах имеет ядро класса „3“, а в желтых лучах ядро звездообразное (класс „4“). Так же обстоит дело и с галактикой NGC 3190. Особый интерес представляет галактика NGC 3898, ядро которой в синих лучах классифицировано как „3“, а в желтых лучах как „5“. Галактика же NGC 7727 имеет более высокий класс ядра в синих лучах, нежели в желтых.

Таблица 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Sa ГАЛАКТИК ПО КЛАССАМ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПОДТИПОВ ВОКУЛЕРА

Тип	S0	SA0+	SA0/a	SAa	Sa	SAab	SAB0/a	SABa	SABab	SABb	SB0+	SB0'a	SBa	SBab	SBb
Число	2	7	5	5	4	5	2	6	3	1	1	2	2	4	2
„5“	1	—	1	—	—	—	—	2	1	1	—	—	—	—	—
„4“	—	2	—	2	—	2	1	3	—	—	1	1	—	—	1
„3“	—	3	4	3	4	2	1	4	2	—	—	—	2	2	1
„2“	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	2	—
„1“	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Если же рассмотреть распределение классов галактик по классификации Вокулера, то видим, что разные классы разбросаны по всем подтипам. Эти данные приведены в табл. 1. Сделать какое-либо

заклучение из этой таблицы невозможно, так как число галактик, входящих в отдельные подтипы, очень мало.

Сравнение распределения классов галактик типа Sa и SBa [3] показывает, что они очень похожи друг на друга (рис. 1). У SBa галактик так же отсутствуют галактики классов „1“ и „2“, а процент звездообразных ядер чуть больше пятидесяти процентов общего числа всех галактик.

Влияние расстояния на классификацию. На рис. 3 приведена зависимость классов центральных областей галактик от их расстояния. Звездообразные ядра классов „5“ и „4“ встречаются в основном на расстоянии до 35 Мпс. Класс „3“ встречается как до, так и далее 35 Мпс. По-видимому, после 35 Мпс у Sa галактик сильный околоядерный фон мешает выявлению звездообразных ядер.

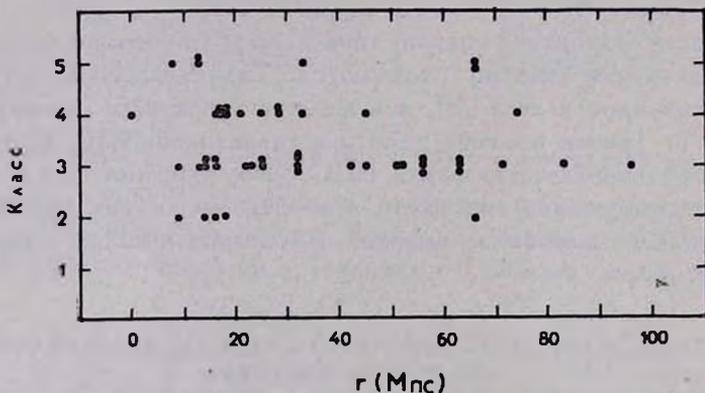


Рис. 3. Распределение классов ядер в зависимости от расстояния.

Глазомерные оценки яркостей ядер. Известно, что в центральных частях Sa галактик поверхностная яркость выше, чем у более поздних спиралей и помимо этого градиент плотности от центра к краям меньше. И так как у нас специально не производились измерения поверхностных яркостей околоядерного фона, то глазомерные оценки могут дать более точное представление о яркостях ядер. Сопоставление звездных величин ядер, определенных по снимкам глазомерным способом и фотометрически дает следующие результаты. Для всех 44 измеренных ядер средняя разность глазомерных и фотометрических величин в фотографических лучах распределяется по классам „5“, „4“ и „3“ следующим образом: $+0^m.2$, $+0^m.4$ и $+0^m.5$. Та же разность в фотовизуальных лучах составляет: $+0^m.1$, $+0^m.2$ и $+0^m.6$.

Уже у класса „4“ в фотографических лучах эта разность достигает $+0.^m4$, у класса „3“ в обоих лучах эта разность порядка $0.^m5$ звездной величины. Для класса „3“, глазомерные оценки рассматриваются как верхние пределы яркости возможных звездообразных ядер.

При выводе окончательных фотографических и фотовизуальных величин ядер классов „4“ и „5“ глазомерным и фотометрическим определениям приписывался одинаковый вес.

Результаты фотометрии. Результаты классификации центральных частей по пятибалльной классификации, принятой в Бюракане, и двухцветной фотометрии, приведены в табл. 2. В столбцах таблицы приведены соответственно: 1) порядковый номер, 2) номер галактики по NGC, 3) класс центральной части в фотографических лучах,

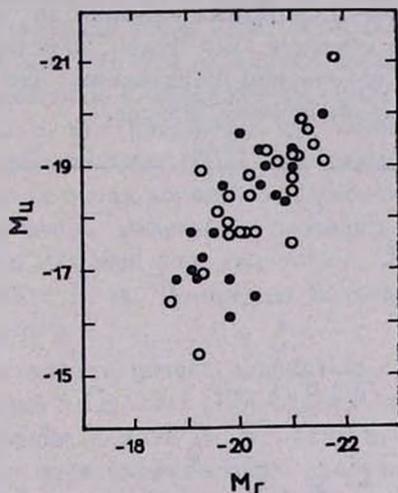


Рис. 4. Зависимость между абсолютной интегральной величиной галактики и интегральной величиной ядра: для классов „4“ и „5“ (черные кружки) и „3“ (светлые кружки).

4) интегральная фотографическая звездная величина галактики [9, 10], 5) фотографическая звездная величина ядерной конденсации; для классов „3“ число указывает верхний предел яркости, 6) показатель цвета в международной системе, 7) абсолютная фотографическая величина галактики с учетом галактического поглощения, при постоянной Хаббла $H = 75 \text{ км/сек на Мпс}$, 9) расстояние галактики в мегапарсеках. Просмотр данных, приведенных в таблице, дает возможность делать некоторые заключения.

Светимости ядер. Существует очень большой разброс в светимостях ядер. Звездообразные ядра обладают абсолютными светимо-

стями с -16^m до -20^m звездных величин. Между светимостями галактик и их ядер существует положительная корреляция. Эта зависимость имеет место у всех галактик классов „5“, „4“ и „3“ (рис. 4). Средняя разность между абсолютными фотографическими величинами галактик и их ядер для классов „4“ и „5“ составляет две звездные величины. Та же разность только для звездообразных ядер галактик типа Sb и Sa равна 3^m и 4^m соответственно. То есть, по мере передвижения по классификационной схеме Хаббла от ранних к поздним спиральям, разность между интегральными светимостями ядер и галактик в среднем постепенно увеличивается.

На рис. 5 по оси ординат отложены разности между абсолютными величинами галактик и их ядер, а по оси абсцисс — расстояния галактик. Из диаграммы видно, что нет определенной зависимости между этими двумя величинами для разных классов, за исключением, может быть, класса „3“, при котором, как будто, заметна слабая тенденция убывания ($M_L - M_{Я}$) с увеличением расстояния, что и следовало ожидать, исходя из определения этого класса.

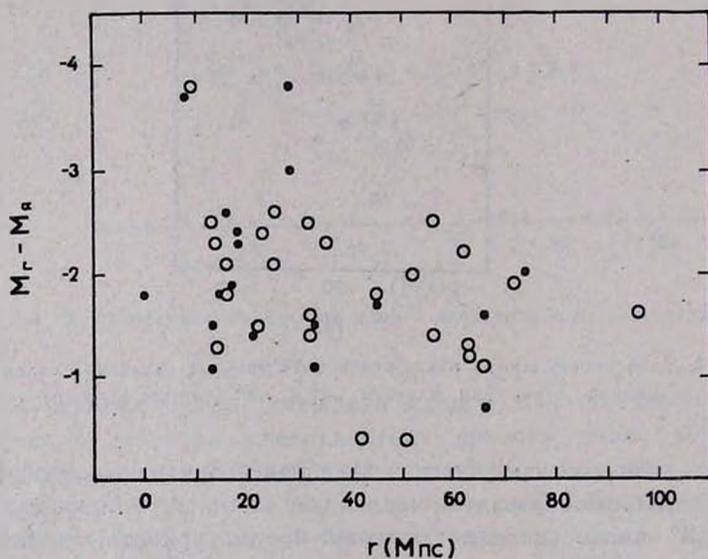


Рис. 5. Зависимость $M_L - M_{Я}$ от расстояния галактик (см. обозначения на рис. 4).

Цвет ядер, отнесенных к классу „4“ и „5“, меняется в пределах от $+0^m.2$ до $+1^m.2$.

Сейфертовские галактики. Оставимся несколько подробнее на галактиках Сейферта. Среди изученных нами галактик типа Sa

четыре галактики являются вместе с тем галактиками Сейферта: NGC 2782, 4151, 5548 и 7469. Ядро галактик NGC 2782 отнесено к классу „4“, а других трех галактик к классу „5“. Абсолютные величины этих ядер в фотографических лучах такие: — 19^m0 , — 18^m6 , — 20^m0 и — 21^m1 и по своим светимостям не уступают гигантским галактикам. Интересно, что разности звездных величин ядер и галактик очень малы: 1^m5 , 1^m1 , 1^m6 и 0^m7 , а цвета варьируют в широком диапазоне: $+1^m1$, $+0^m2$, $+0^m6$ и $+0^m2$.

Сравнение с наблюдениями других авторов. Среди изученных нами Sa галактик находятся 13 галактик, ядерные области которых были изучены Б. А. Воронцовым-Вельяминовым [11]. Оценки ядерных областей, приписываемые в [11] и нами, значительно отличаются друг от друга. Так, ядра галактик NGC 2551, 3166, 3368, 4138 и 5377 в [11] оценены как N, а у нас все эти галактики принадлежат к классу „3“. Может быть эти галактики и обладают резкими образованиями в центральной части, однако, они незаметны как таковые на снимках $21''$ камеры Шмидта. Ядро галактик NGC 3623 оценено как линза — L, однако на наших снимках очень хорошо выделяется звездообразное ядро, с резкими краями и очень маленьких размеров, несмотря на околоядерный, достаточно сильный фон галактики. Звездные величины у ядерных образований у Б. А. Воронцова-Вельяминова систематически ярче, чем у нас на 0^m4 .

13 галактик из нашего списка совпадают с галактиками, исследованными А. Н. Дейчем в Пулкове [12]. Оценки, характеризующие ядерные образования, данные нами и А. Н. Дейчем, довольно близки друг к другу и отличие не превосходит одного класса. Однако, звездные величины в [12] примерно на одну величину систематически слабее наших.

Причины расхождения наших данных с данным [11] и [12] обуславливаются расхождением нашей методики исследования ядер от методики, примененной в упомянутых работах. На этом более подробно мы остановились в нашей предыдущей работе [6].

Среди галактик нашего списка 8 ранее отмечались Б. Е. Маркаряном [13] как с сильным ультрафиолетовым излучением. Это галактики: NGC 2146, 2608, 2681, 2782, 3277, 4151, 5548, 7469. Все эти галактики имеют звездообразные ядра, кроме NGC 2146, у которой ядро отнесено к классу „2“. Галактики, у которых центральные части имеют более ранний спектральный класс A и AF, обладают цветами от $+0^m2$ до $+0^m4$, а если имеют спектральный класс F, то им соответствуют цвета от $+0^m6$ до $+1^m1$. Показатели цвета, приведенные нами, не исправлены за наклон галактики.

ДАННЫЕ О ЦЕНТРАЛЬНЫХ СГУЩЕНИЯХ S_n ГАЛАКТИК

№№	NGC	Класс	m_{pg} галактики	m_{pg} ядра	Cl_{int} ядра	M_{pg} ядра	M_{pg} галактики	r (Мпс)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	160	4	13. ^m 7	15. ^m 7	+1. ^m 0	-19. ^m 0	-21. ^m 0	74
2	182	3	13.4	15.3	0.8	19.2	21.1	71
3	681	3:	12.8	15.2	0.9	16.9	19.3	23
4	718	3:	12.4	14.5	0.5	17.8	19.9	25
5	788	3	12.4	14.9	0.9	19.1	21.6	56
6	1441	3	13.9	15.3	1.0	18.8	20.2	56
7	2146	2	11.3	15.4	1.2	15.7	19.8	16
8	2551	3:	13.2	14.6	0.8	18.4	19.8	32
9	2562	3:	14.0	15.2	1.5	19.3	20.5	63
10	2608	4	12.8	15.8	0.8	16.8	19.8	28
11	2639	3:	12.6	14.4	1.2	19.2	21.0	45
12	2654	3	12.8	15.1	1.4	17.7	20.0	32
13	2681	4	11.0	12.8	0.4	18.6	20.4	1
14	2716	4	12.7	14.4	1.1	19.3	21.0	45
15	2775	3:	11.1	13.2	0.9	17.7	19.8	16
16	2782	4	12.5	14.0	0.9	19.0	20.5	33
17	2811	3	12.4	14.0	1.3	19.1	20.7	32
18	2914	3:	14.2	14.6	0.6	18.9	19.3	42
19	3166	3	11.2	13.0	0.8	18.4	20.2	16
20	3169	3	11.2	13.5	0.5	17.7	20.0	14
21	3190	4	12.1	14.2	1.0	17.0	19.1	16
22	3277	4	12.4	14.8	0.9	16.8	19.2	18
23	3301	4	12.2	14.1	0.8	17.3	19.2	17
24	3368	3	9.9	13.4	1.1	17.5	21.0	13
25	3611	4	12.8	14.2	0.9	17.7	19.1	21
26	2623	5	9.9	13.6	0.8	16.1	19.3	8
27	3626	4	11.0	13.4	0.8	18.4	20.7	18
28	3898	4	11.7	13.5	0.5	17.7	19.5	15
29	3900	3:	12.4	13.9	0.6	18.1	19.6	22
30	4102	5	12.3	14.1	1.1	16.8	18.6	13
31	4138	3	12.4	14.7	1.3	16.4	18.7	14
32	4151	5	11.2	12.3	0.2	18.6	19.7	13
33	4220	2	12.2	14.4	0.6	16.6	18.8	14
24	4274	3	10.8	14.6	1.0	15.4	19.2	8
35	4293	2	11.0	15.4	1.3	14.7	19.1	9

Таблица 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
36	5377	3:	12. ^m 0	14. ^m 6	+1.0	-17. ^m 7	-20. ^m 3	25
37	5448	4	12.2	15.0	1.2	16.5	20.3	28
38	5493	5	12.5	13.6	0.5	19.3	20.4	33
39	5548	5	12.8	14.4	0.6	20.0	21.6	66
40	5614	3	12.5	14.5	1.3	19.4	21.4	52
41	6027	3		15.5	1.0			56
42	6314	3	14.0	15.6	1.5	19.7	21.3	96
43	6340	3	12.0	14.5	1.0	18.5	21.0	32
44	6710	3	14.2	15.4	1.2	18.8	21.0	63
45	6921	3	14.7	15.9	0.8	19.9	21.2	63
46	6928	2	13.8	14.9	0.9	20.0	21.1	66
47	7335	3		15.8	1.2			83
48	7469	5	12.7	13.4	0.2	21.1	21.8	66
49	7576	3	13.8	14.2	0.7	19.6	20.0	51
50	7727	4	11.4	14.0	0.6	18.3	20.9	25
51	7814	2	11.5	15.0	0.7	17.7	20.2	18

Примечание к таблице 2

- NGC 160 — Как будто из центральной части выходит струя, в синих лучах ядро более звездообразное.
- NGC 1441 — Центральная часть имеет вытянутый вид.
- NGC 2562 — Центральная часть вытянута и резко выделяется; на изображении при длинной экспозиции видна перемычка.
- NGC 2681 — Ядро резко выделяется, имеет большие размеры, фон сильный.
- NGC 2716 — Ядро имеет вытянутый вид.
- NGC 2775 — Галактика имеет хорошо обозначенную линзу.
- NGC 2811 — В желтых лучах центральная часть более резкая.
- NGC 2914 — Центральная часть резко выделяется на очень сильном фоне галактики.
- NGC 3301 — Через ядро проходит перемычка, в желтых лучах ядро более звездообразное.
- NGC 3368 — Имеет резко очерченное, больших размеров центральное сгущение.
- NGC 3623 — В желтых лучах ядро имеет очень маленькие размеры, но низкую поверхностную яркость.
- NGC 3626 — Ядро больших размеров, но резкое.
- NGC 3898 — В желтых лучах ядро очень звездообразное.
- NGC 3900 — Центральное сгущение больших размеров, но резкое.
- NGC 4102 — Имеет ядро очень маленьких размеров и вместе с тем более крупное компактное образование вокруг ядра.
- NGC 4138 — Центральное сгущение больших размеров, резко выделяется, но имеет низкую поверхностную яркость.

- NGC 5493 — Имеет ядро очень маленьких размеров и более крупное, компактное образование. Через звездообразное ядро проходит перемычка.
 NGC 7727 — В синих лучах заметно очень компактное, звездообразное ядро.
 NGC 7814 — Через центральную часть проходит перемычка.

Автор признателен академику В. А. Амбарцумяну и член-корр. АН АрмССР Б. Е. Маркарян за обсуждение результатов работы.

Бюраканская астрофизическая
 обсерватория

ON THE CENTRAL CONDENSATIONS IN Sa GALAXIES

K. A. SAHAKIAN

The results of the classification of central condensations of 51 Sa galaxies are presented. Observations have shown that about 40% of the Sa galaxies have starlike and semi-stellar nuclei. The histograms of distribution of the central parts according to the five mark classification of the Byurakan Observatory and two color photometric data for the classes „5“, „4“ and „3“ are given. Comparison with the results obtained by other authors is presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. V. Ambartsumian, Transaction of the IAU, 12B, 578, 1966.
2. А. Т. Каллолян, Г. М. Товмасян, Сообщ. Бюр. обс., 36, 31, 1964.
3. Г. М. Товмасян, Астрофизика, 1, 197, 1965.
4. Г. М. Товмасян, Астрофизика, 2, 317, 1966.
5. К. А. Саакян, С. Г. Искусдарян, Г. М. Товмасян, А. Т. Каллолян, Труды симпозиума „Нестационарные явления в галактиках“, Ереван, 1968, стр. 125.
6. К. А. Саакян, Астрофизика, 4, 41, 1968.
7. С. Г. Искусдарян, Астрофизика, 4, 385, 1968.
8. W. W. Morgan, Publ. A. S. P., 70, 364, 1958.
9. M. L. Huxton, N. U. Mayall, A. H. Sandage, A. J., 61, 97, 1956.
10. G. de Vaucouleurs, A. de Vaucouleurs, Reference Catalogue of Bright Galaxies, 1964.
11. Б. А. Воронцов-Вельяминов, Астрон. ж., 42, 1168, 1965.
12. А. Н. Дэйч, Известия ГАО, № 179, 95, 1966.
13. Б. Е. Маркарян, Сообщ. Бюр. обс., 34, 3, 1963.

О ХАРАКТЕРЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ, СВЯЗАННЫХ С КВАЗИЗВЕЗДНЫМИ РАДИОИСТОЧНИКАМИ. II.

М. А. АРАКЕЛЯН

Поступила 15 сентября 1969

Приведены полученные по данным Паркского обзора результаты исследования эволюционных эффектов, связанных с квазизвездными радиоисточниками. Подтверждается сделанный в [1] вывод о равномерном распределении квазизвездных радиоисточников в сопутствующем объеме, их постоянной оптической светимости и эволюционирующей радиосветимости.

В предыдущем сообщении [1] были приведены результаты, полученные применением метода исследования эволюционных эффектов, использованного ранее М. Шмидтом [2], к двум выборкам квазизвездных радиоисточников из каталога 4С. При исследовании одной из них принимались во внимание лишь оптические светимости объектов, а в другом случае — лишь их радиосветимости. При исследовании оптических светимостей в [1] эволюционные эффекты выявлены не были, в то время как радиосветимости проявляют этот эффект совершенно отчетливо. Это обстоятельство было интерпретировано как результат равномерного распределения квазизвездных радиоисточников в сопутствующем пространстве, их постоянной средней оптической светимости и эволюционирующей радиосветимости.

В настоящей статье приводятся результаты аналогичного исследования квазизвездных радиоисточников с известными красными смещениями из Паркского [обзора между скоплениями -20° и $+27^\circ$ [3—5]. Хотя три четверти использованных объектов содержатся в каталоге 4С, повторение работы на этом материале является целесообразным, так как здесь имеется возможность исследования радиосветимостей на больших частотах.

1. Исследование эволюционных эффектов с помощью оптических данных. В табл. 1 приведены данные о тех 67 квазизвездных радиосточниках Паркского обозрения с $-20^\circ < \delta < +27^\circ$ и плот-

Таблица 1

PKS	z	S_{408}	S_{1410}	α_1	$\lg f(1410)$	V	B-V	U-B	$\lg f(2500)$	V'
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0003+15	0.450	2.6	0.9	-0.86	-26.07	16.40	0.11	-0.70	-29.07	0.0103
0003-00	1.037	8.3	4.7	-0.59	-25.52	19.35	0.79	-0.96	-30.51	0.0480
0017+15	2.012	6.6	2.1	-0.92	-25.71	18.21	0.24	-0.76	-29.99	0.1172
0056-00	0.717	3.9	2.2	-0.46	-25.78	17.33	0.20	-0.70	-29.55	0.0257
0106+01	2.107	3.5	1.4	-0.74	-25.98	18.39	0.15	-0.70	-30.08	0.1234
C115+02	0.672	(4.5)	1.5	-0.89	-25.85	—	—	—	—	0.0228
0119-04	1.955	2.2	1.3	-0.42	-26.16	16.88	0.46	-0.72	-29.47	0.1134
0133+20	0.425	13.1	3.5	-1.07	-25.45	18.10	0.05	-0.65	-29.74	0.0091
0155-10	0.616	6.5	2.0	-0.95	-25.71	17.09	0.23	-0.41	-29.56	0.0193
0159-11	0.669	6.5	2.9	-0.65	-25.62	16.40	0.14	-0.73	-29.12	0.0226
0214+10	0.408	2.3	1.3	-0.46	-25.97	—	—	—	—	0.0083
0229+13	2.065	(2.3)	1.2	-0.52	-26.15	17.71	0.25	-0.73	-29.78	0.1207
0232-04	1.436	3.2	1.5	-0.61	-25.97	16.46	0.15	-0.89	-29.28	0.0771
0549-14	0.614	11.6	2.9	-1.12	-25.51	16.24	0.11	-0.65	-29.05	0.0192
0350-07	0.962	9.9	3.1	-0.94	-25.53	16.49	0.50	-0.65	-29.29	0.0426
0403-13	0.574	8.7	3.3	-0.78	-25.52	17.09	0.28	-0.57	-29.46	0.0169
0405-12	0.567	9.3	2.8	-0.97	-25.56	—	—	—	—	0.0165
0518+06	0.760	17.5	9.3	-0.51	-25.15	18.84	0.53	-0.16	-29.92	0.0285
0710+11	0.768	8.6	2.7	-0.93	-25.58	16.60	0.45	-0.50	-28.99	0.0290
0725+14	1.382	6.3	2.1	-0.89	-25.72	18.92	0.43	-1.02	-30.07	0.0732
0736+01	0.191	2.9	2.9	-0.00	-25.61	17.47	0.43	-0.77	-29.17	0.0014
0802+10	1.956	7.7	2.0	-1.09	-25.66	18.40	0.25	-0.84	-29.96	0.1135
0812+02	0.402	6.0	2.0	0.89	-25.72	—	—	—	—	0.0081
0837-12	0.200	5.7	1.8	-0.93	-25.75	—	—	—	—	0.0016
0838+13	0.684	7.3	2.6	-0.83	-25.62	18.15	0.43	-0.42	-29.91	0.0236
0850+14	1.11	(10.0)	2.6	-1.09	-25.56	17.42	0.34	-1.00	-29.62	0.0533
0859-14	1.327	5.4	3.1	-0.45	-25.71	16.59	0.20	-0.85	-29.20	0.0692
0903+16	0.411	4.6	1.4	-0.96	-25.86	18.27	0.21	-0.66	-29.85	0.0085
0922-14	0.895	2.8	0.7	-1.12	-26.12	17.96	0.54	-0.52	-29.89	0.0378
0932+02	0.659	3.1	0.8	-1.09	-26.08	17.39	0.13	-0.45	-29.52	0.0220
0957+00	0.906	3.1	1.0	-0.91	-26.02	17.57	0.47	-0.71	-29.71	0.0386
1004+13	0.240	3.3	1.3	-0.75	-25.91	15.15	0.13	-0.82	-28.56	0.0024

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1040+12	1.029	7.6	3.0	-0.75	-25.60	17.25	0.45	-0.83	-29.61	0.0474
1049-09	0.344	5.8	1.7	-0.99	-25.77	16.79	0.06	-0.49	-29.31	0.0057
1055+20	1.110	7.2	2.2	-0.95	-25.67	17.07	0.44	-0.81	-29.54	0.0533
1116+12	2.118	5.5	1.9	-0.86	-25.79	19.25	0.14	-0.76	-30.43	0.1241
1127-14	1.187	5.0	6.2	0.17	-25.61	16.90	0.27	-0.70	-29.43	0.0589
1136-13	0.554	12.8	4.1	-0.92	-25.40	—	—	—	—	0.0157
1148-00	1.982	3.5	2.9	-0.15	-25.94	17.60	0.17	-0.97	-29.76	0.1152
1222+21	0.434	3.5	1.5	-0.69	-25.87	17.50	0.06	-0.69	-29.54	0.0095
1226+02	0.158	55.1	41.2	-0.23	-24.43	12.80	0.21	-0.85	-27.63	0.0008
1229-02	0.388	4.6	1.7	-0.80	-25.80	16.75	0.48	-0.66	-29.41	0.0075
1241+16	0.557	9.4	2.9	-0.95	-25.55	19.00	0.23	-0.43	-30.29	0.0159
1252+11	0.871	(2.8)	1.2	-0.68	-26.01	16.64	0.35	-0.75	-29.35	0.0361
1253-05	0.538	13.5	10.4	-0.21	-25.13	17.75	0.26	-0.56	-29.75	0.0148
1317-00	0.890	5.4	1.8	-0.89	-25.78	17.32	0.52	-0.62	-29.66	0.0374
1328+254	1.055	16.2	7.0	-0.68	-25.26	17.67	0.63	-0.65	-29.81	0.0493
1335-06	0.626	10.1	3.2	-0.93	-25.51	17.68	0.14	-0.66	-29.65	0.0199
1354+19	0.720	6.0	2.3	-0.77	-25.69	16.02	0.18	-0.55	-29.03	0.0259
1416+06	1.439	24.4	6.2	-1.10	-25.16	16.79	0.33	-0.70	-29.41	0.0773
1453-10	0.940	10.2	3.7	-0.82	-25.48	17.37	0.44	-0.76	-29.63	0.0410
1510-08	0.361	3.0	3.0	0.00	-25.66	16.52	0.17	-0.74	-29.13	0.0064
1545+21	0.264	6.5	2.3	-0.84	-25.65	16.69	0.11	-0.85	-29.17	0.0031
1618+17	0.555	6.3	2.2	-0.85	-25.69	16.41	0.12	-0.59	-29.11	0.0158
1622+23	0.927	8.6	2.7	-0.94	-25.59	17.47	0.44	-0.79	-29.67	0.0401
1634+26	0.561	3.4	1.3	-0.77	-25.93	17.75	0.26	—	-29.66	0.0161
2120+16	1.805	8.0	1.7	-1.25	-25.66	17.96	0.22	-0.79	-29.79	0.1032
2135-14	0.200	10.0	3.0	-0.97	-25.53	15.54	0.10	-0.83	-28.67	0.0016
2146-13	1.800	5.6	1.5	-1.06	-25.80	—	—	—	—	0.1029
2216-03	0.901	2.8	0.9	-0.92	-26.07	16.93	0.55	-0.62	-29.49	0.0382
2223-05	1.403	10.3	6.0	-0.44	-25.44	18.39	0.44	-0.90	-30.04	0.0747
2230+11	1.037	7.1	6.7	-0.05	-25.47	17.32	0.42	-0.79	-29.60	0.0480
2249+18	1.757	4.6	2.4	-0.52	-25.83	18.40	0.12	-0.95	-30.03	0.0999
2251+15	0.859	15.8	12.8	-0.17	-25.12	16.10	0.47	-0.66	-29.12	0.0353
2251+11	0.323	3.7	1.6	-0.68	-25.84	15.80	0.20	-0.84	-28.84	0.0049
2344+03	0.677	2.7	2.1	-0.20	-25.86	15.97	0.25	-0.60	-29.02	0.0231
2354+14	1.810	3,7	1.4	-0.78	-25.95	—	—	—	—	0.1036

ностью потока $S_{408} > 2 \times 10^{-26} \text{ вт м}^{-2} \text{ цу}^{-1}$, для которых известны красные смещения. Спектральные индексы z_1 вычислены сравнением плотностей потока на 408 Мц и 1410 Мц ; плотность потока в $\text{вт м}^{-2} \text{ цу}^{-1}$, отнесенная к частоте 1410 Мц , вычислена по формуле

$$f(1410) = S_{1410} \times 10^{-26} (1 + z)^{-(1+z_1)} \quad (1)$$

и значения $\lg f(1410)$ приведены в шестом столбце таблицы. Для источников со склонениями между $+20^\circ$ и $+27^\circ$ в [5] приведены плотности потока не на 408 Мц , а на 635 Мц . Спектральные индексы для этих источников вычислены сравнением плотностей потока на 635 Мц и 1410 Мц , а приведенные в таблице плотности потока на 408 Мц — в предположении, что полученный спектральный индекс сохраняется постоянным до этой частоты. Вычисление плотности потока, отнесенной к длине волны 2500 \AA , произведено, как и в [1], по методике М.Шмидта [2]. Соответствующие значения $\lg f(2500)$ приведены в десятом столбце табл. 1. В одиннадцатом столбце даны значения безразмерного объема

$$V' = \frac{V}{4\pi} \left(\frac{c}{H} \right)^{-3}, \quad (2)$$

где V — объем сферы с радиусом, соответствующим красному смещению данного объекта. Как и в [1], все вычисления произведены для модели Вселенной с нулевым давлением, нулевой космологической постоянной, постоянной Хаббла $100 \text{ км сек}^{-1} \text{ Мпс}^{-1}$ и параметром ускорения $q_0 = +1$.

В табл. 2 приведены абсолютные светимости в вт цу^{-1} и значения (V/V_m) , где V_m — объем сферы, находясь внутри которой данный источник имел бы плотность потока, превосходящую некоторое предельное значение. Во втором столбце приведены логарифмы светимостей на длине волны 2500 \AA , $F(2500)$, а в третьем-шестом столбцах — значения $(V/V_m)_{\text{opt}}$ при предельных значениях $\lg f(2500)$, равных соответственно -30.0 , -29.8 , -29.6 , -29.4 . Средние значения $(V/V_m)_{\text{opt}}$ при этих четырех значениях предельной плотности оптического потока приведены в табл. 3. (Через l в табл. 3—6 обозначены числа объектов, на которых основаны соответствующие средние значения).

Как видим, эти средние практически не отличаются от значения 0.5, соответствующего случаю равномерного распределения квазизвездных радиоисточников в сопутствующем пространстве и отсутствию систематического изменения их оптических светимостей с красным смещением. Несколько заниженное значение этой величины при $\lg f(2500) = -30.0$

Таблица 2

PKS	lgF(2500)	$(V/V)_{opt}$				lgF(1410)	$(V/V_m)_{rad}$				
		-30.0	-29.0	-29.4	-29.2		S=2	S=3	S=4	S=5	S=6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0003+15	23.26	0.15	0.21	0.31	0.47	26.27	0.76	—	—	—	—
0003-00	22.55	—	—	—	—	27.54	0.35	0.45	0.55	0.66	0.76
0017+15	23.65	0.99	—	—	—	27.92	0.55	0.66	0.76	0.86	0.95
0056-00	23.19	0.43	0.61	0.90	—	26.96	0.52	0.77	—	—	—
0106+01	23.60	—	—	—	—	27.69	0.73	0.91	—	—	—
0115+02	—	—	—	—	—	26.84	0.49	0.69	0.89	—	—
0119-04	24.14	0.55	0.68	0.85	—	27.46	0.94	—	—	—	—
0133+20	22.55	0.53	0.85	—	—	26.84	0.18	0.25	0.32	0.38	0.46
0155-10	23.05	0.41	0.61	0.92	—	26.90	0.36	0.50	0.64	0.78	0.93
0159-11	23.56	0.21	0.28	0.39	0.57	27.07	0.35	0.48	0.63	0.77	0.92
0214+10	—	—	—	—	—	26.29	0.85	—	—	—	—
0229+13	23.88	0.77	0.98	—	—	27.51	0.91	—	—	—	—
0232-04	24.07	0.40	0.50	0.63	0.83	27.37	0.71	0.95	—	—	—
0349-14	23.56	0.18	0.24	0.34	0.49	27.09	0.25	0.33	0.40	0.48	0.56
0350-07	23.70	0.33	0.44	0.59	0.83	27.47	0.33	0.42	0.51	0.59	0.68
0403-13	23.08	0.33	0.49	0.73	—	27.02	0.27	0.37	0.48	0.58	0.69
0405-12	—	—	—	—	—	26.98	0.27	0.36	0.46	0.56	0.66
0518+06	22.87	0.85	—	—	—	27.64	0.18	0.23	0.28	0.33	0.38
0710+11	23.81	0.20	0.26	0.34	0.46	27.22	0.32	0.43	0.53	0.63	0.73
0725+14	23.24	—	—	—	—	27.59	0.49	0.62	0.74	0.85	0.97
0736+01	22.42	0.11	0.18	0.30	0.52	25.98	0.60	—	—	—	—
0802+10	23.65	0.95	—	—	—	27.95	0.53	0.62	0.71	0.79	0.87
0812+02	—	—	—	—	—	26.52	0.32	0.48	0.55	0.82	1.00
0837-12	—	—	—	—	—	25.88	0.28	0.45	0.64	0.85	—
0838+13	22.79	0.82	—	—	—	27.08	0.33	0.46	0.58	0.70	0.83
0850+14	23.50	0.54	0.73	—	—	27.56	0.37	0.46	0.54	0.62	0.70
0859-14	24.08	0.36	0.44	0.56	0.74	27.56	0.48	0.63	0.79	0.94	—
0903+16	22.41	0.69	—	—	—	26.40	0.43	0.64	0.86	—	—
0922+14	23.04	0.82	—	—	—	26.81	0.77	—	—	—	—
0932+02	23.15	0.39	0.56	0.84	—	26.59	0.68	0.97	—	—	—
0957+00	23.23	0.60	0.85	—	—	26.92	0.70	0.97	—	—	—
1004+13	23.23	0.04	0.05	0.08	0.12	25.88	0.54	0.89	—	—	—
1040+12	23.44	0.53	0.72	—	—	27.46	0.38	0.49	0.61	0.71	0.82
1049-09	22.79	0.20	0.31	0.49	0.80	26.33	0.32	0.49	0.66	0.85	—
1055+20	23.58	0.49	0.66	0.90	—	27.45	0.43	0.55	0.66	0.77	0.87

Таблица 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1116+12	23.25	—	—	—	—	27.89	0.60	0.72	0.84	0.95	—
1127-14	23.74	0.44	0.57	0.76	—	27.57	0.41	0.59	0.79	1.00	—
1136-13	—	—	—	—	—	27.11	0.21	0.28	0.35	0.42	0.49
1148-00	23.87	0.74	0.95	—	—	27.68	0.66	0.89	—	—	—
1222+21	22.76	0.35	0.54	0.89	—	26.43	0.54	0.84	—	—	—
1226+02	23.80	0.01	0.01	0.01	0.01	26.99	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
1229-02	22.80	0.26	0.40	0.63	—	26.41	0.41	0.62	0.84	—	—
1241+16	22.23	—	—	—	—	26.97	0.26	0.36	0.45	0.55	0.65
1252+11	23.56	0.34	0.46	0.83	0.91	26.90	0.74	—	—	—	—
1253-05	22.74	0.57	0.89	—	—	27.36	0.15	0.21	0.27	0.34	0.41
1317-00	23.27	0.55	0.77	—	—	27.15	0.47	0.62	0.78	0.94	—
1328+254	23.26	0.73	—	—	—	27.82	0.25	0.31	0.36	0.42	0.47
1335-06	22.97	0.49	0.73	—	—	27.11	0.26	0.35	0.44	0.53	0.62
1354+19	23.71	0.20	0.26	0.35	0.49	27.05	0.39	0.54	0.69	0.84	1.00
1416+06	23.93	0.46	0.58	0.76	—	28.18	0.30	0.35	0.39	0.43	0.47
1453-10	23.35	0.53	0.73	—	—	27.49	0.31	0.40	0.49	0.57	0.65
1510-08	23.14	0.14	0.21	0.32	0.51	26.49	0.60	1.00	—	—	—
1545+21	22.70	0.13	0.20	0.32	0.54	26.22	0.26	0.40	0.56	0.73	0.90
1618+17	23.41	0.19	0.26	0.36	0.54	26.83	0.35	0.49	0.64	0.79	0.95
1622+23	23.29	0.56	0.79	—	—	27.38	0.35	0.46	0.55	0.65	0.75
1634+26	22.87	0.48	0.73	—	—	26.60	0.60	0.89	—	—	—
2120+16	23.75	0.77	0.99	—	—	27.88	0.52	0.61	0.70	0.78	0.85
2135-14	22.97	0.04	0.06	0.09	0.14	26.11	0.15	0.24	0.33	0.43	0.53
2146-13	—	—	—	—	—	27.74	0.58	0.71	0.83	0.94	—
2216-03	23.45	0.42	0.58	0.82	—	26.87	0.76	—	—	—	—
2223-05	23.29	—	—	—	—	27.89	0.34	0.42	0.50	0.58	0.66
2230+11	23.46	0.52	0.71	—	—	27.59	0.32	0.44	0.57	0.70	0.84
2249+18	23.49	—	—	—	—	27.69	0.59	0.75	0.91	—	—
2251+15	23.78	0.25	0.33	0.43	0.60	27.78	0.18	0.23	0.28	0.34	0.40
2251+11	23.21	0.08	0.11	0.17	0.25	26.21	0.49	0.78	—	—	—
2344+09	23.68	0.19	0.25	0.33	0.47	26.83	0.72	—	—	—	—
2354+14	—	—	—	—	—	27.59	0.69	0.88	—	—	—

вероятно обусловлено эффектом селекции. Однако при $\lg f(2500) = -29.8$ и далее эффект селекции не проявляется.

Рассмотрим теперь поведение $(V/V_m)_{\text{opt}}$ в различных интервалах плотности радиопотока. Соответствующие данные о $(V/V_m)_{\text{opt}}$ для

предельных значений $\lg f(2500)$, равных -30.0 и 29.8 , приведены в табл. 4.

Данные таблицы показывают, что с переходом к объектам с меньшими плотностями радиопотока среднее значение $(V/V_m)_{opt}$ систематического изменения не претерпевает.

Таблица 3

Предельное значение $\lg f(2500)$	-30.0	-29.8	-29.6	-29.4
$(V/V_m)_{opt}$	0.43	0.51	0.52	0.51
n	52	45	31	20

Таким образом, как следует из табл. 3 и 4, близость среднего значения $(V/V_m)_{opt}$ к 0.5 обусловлена не наблюдательной селекцией в оптическом или радиодиапазоне, а реальным отсутствием эволюционных эффектов. В противном случае следовало ожидать систематиче-

Таблица 4

Пределы S_{408}		$8 < S$	$4 < S < 8$	$2 < S < 4$
$\lg f(2500) = -30.0$	$(V/V_m)_{opt}$	0.41	0.48	0.40
	n	16	19	17
$\lg f(2500) = -29.8$	$(V/V_m)_{opt}$	0.51	0.51	0.50
	n	14	15	16

ского хода средних значений этой величины при переходе к объектам с меньшей плотностью оптического или радиопотока. Влияние селекции на данные Паркского обзора несомненно имеется. Однако в силу отсутствия корреляции между оптическими и радиосветимостями рассмотренная нами выборка квазизвездных радиоисточников с точки зрения оптических светимостей является представительной вплоть до предельной для Паркского обзора плотности радиопотока.

2. Влияние эволюционных эффектов на радиосветимости квазизвездных радиоисточников. Приведенные в табл. 2 значения $(V/V_m)_{rad}$ определенно свидетельствуют о влиянии эволюционных эффектов на радиосветимости квазизвездных радиоисточников. Радиосветимости источников, $F(1410)$, приведены в седьмом столбце этой таблицы, а значения $(V/V_m)_{rad}$ при предельных значениях S_{408} , равных соответственно 2, 3, 4, 5 и 6 единиц потока — в восьмом-двенад-

цатом столбцах. Средние значения $(V/V_m)_{\text{rad}}$ при различных радиопотоках приведены в табл. 5.

Таблица 5

Предельное значение S_{408}		6	5	4	3	2
Все объекты	$(V/V_m)_{\text{rad}}$	0.70	0.65	0.57	0.56	0.45
	n	35	42	46	57	67
Объекты с $\lg f(2500) > -30.0$	$(V/V_m)_{\text{rad}}$	0.69	0.65	0.56	0.54	0.45
	n	31	36	40	51	60
Объекты с $\lg f(2500) > -29.8$	$(V/V_m)_{\text{rad}}$	0.69	0.64	0.54	0.57	0.45
	n	23	27	28	37	45

Следует иметь в виду, что при спектральном индексе ~ 0.7 плотность потока на $408 M_{\text{Гц}}$ примерно в два раза меньше значения, соответствующего $178 M_{\text{Гц}}$. Учитывая это, легко видеть, что данные табл. 5 находятся в хорошем согласии с аналогичными данными из [1].

В [1] отмечалось, что уменьшение среднего значения $(V/V_m)_{\text{rad}}$ с уменьшением предельного значения радиопотока может быть обусловлено как ростом влияния наблюдательной селекции, так и реальным уменьшением числа объектов относительно низкой радиосветимости с ростом красного смещения.

С другой стороны, табл. 5 иллюстрирует тот факт, что с переходом к объектам с меньшей плотностью оптического потока среднее значение $(V/V_m)_{\text{rad}}$ практически не меняется. Это обстоятельство также свидетельствует об отсутствии корреляции между оптическими и радиосветимостями квазизвездных радиоисточников.

Таким образом, статистическое исследование квазизвездных радиоисточников Паркского обзора, так же, как и произведенное в [1] и [6] исследование объектов из каталога 4C, не выявляет эволюционных эффектов, когда рассматриваются лишь оптические светимости, и обнаруживают значительный эффект при рассмотрении радиосветимостей. Это обстоятельство, как отмечалось в [1], может рассматриваться как свидетельство того, что эволюционные эффекты обусловлены ростом с красным смещением радиосветимости квазизвездных радиоисточников.

3. *Отношение радиосветимости и оптической светимости как функция красного смещения.* В статье [6] на материале каталога 4C показано, что среднее значение логарифма радиосветимости любого числа квазизвездных радиоисточников в шаровом слое с $0.735 < z < 1.12$

систематически выше среднего значения, соответствующего тому же числу объектов, заключенных в имеющей тот же объем сфере с $z < 0.735$. Поскольку для оптических светимостей подобный эффект не наблюдается, то избыток средней радиосветимости объектов с большим красным смещением может быть объяснен лишь эволюцией радиосветимости.

Аналогичная картина наблюдается при использовании данных Паркского обзора. На рис. 1 и 2 нанесены соответственно радио- и оптические светимости квазизвездных радиоисточников в функции безразмерного объема V' . Кривые на рис. 1 соответствуют положению объектов с $S_{408} = 2 \times 10^{-26} \text{ вт м}^{-2} \text{ цу}^{-1}$, вычисленному в предположении $z_1 = -0.73$ — среднему по всем использованным объектам.

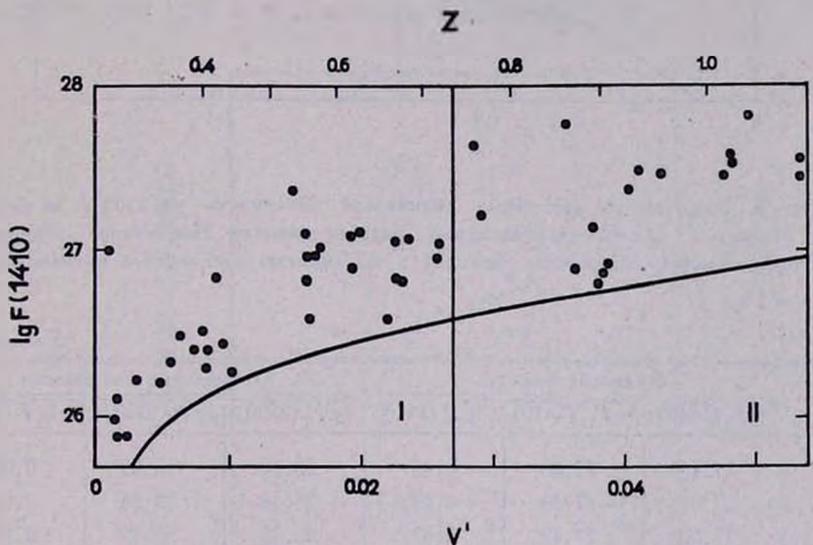


Рис. 1. Зависимость логарифма радиосветимости на 1410 Мц от безразмерного объема V' для 50 квазизвездных радиоисточников Паркского обзора. Кривая представляет положения объектов с предельной для этого каталога плотностью потока на 408 Мц.

Кривая на рис. 2 представляет положение источников с $\lg f(2500) = -30.0$. Вертикальная линия на обоих рисунках проведена таким образом, чтобы частям I и II соответствовали одинаковые объемы. Как и в [1] части I соответствует сфера с $z < 0.735$, а части II — шаровой слой с $0.735 < z < 1.12$. Легко видеть, что радиосветимость ярчайших квазизвездных радиоисточников в II систематически выше, чем в I. В табл. 6 приведены средние значения $\lg F(1410)$ и $\lg F(2500)$ для ярчайших источников в I и II. Из таблицы следует, что средние

значения $\lg F(1410)$ и $\lg F(2500)$ в шаровом слое II систематически выше, чем в сфере I. Однако это различие в радиосветимостях выражено гораздо отчетливее, чем в оптических светимостях.

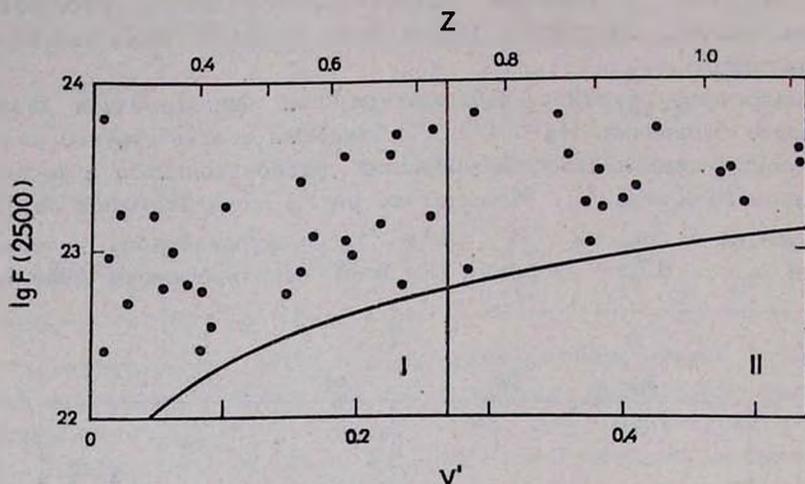


Рис. 2. Зависимость логарифма оптической светимости на 2500 Å от безразмерного объема V' для 42 квазизвездных радиисточников Паркского обозрения. Кривая представляет положения объектов с плотностью оптического потока, равной 10^{-30} вт м $^{-2}$ μ $^{-1}$.

Таблица 6

n	Радиосветимости			Оптические светимости		
	$\lg F_I(1410)$	$\lg F_{II}(1410)$	$\Delta \lg F(1410)$	$\lg F_I(2500)$	$\lg F_{II}(2500)$	$\Delta \lg F(2500)$
5	27.15	27.68	0.43	23.66	23.69	0.03
10	27.09	27.58	0.49	23.46	23.56	0.10
15	27.00	27.42	0.42	23.32	23.42	0.10

По объектам с $\lg F(1410) > 26.0$ и $z < 1.12$, т. е. находящимся в области, где влияние селекции должно отсутствовать, методом наименьших квадратов была найдена следующая зависимость между $\lg F(1410)$ и $\lg(1+z)$.

$$\lg F(1410) = (3.0 \pm 0.7) \lg(1+z) + (26.5 \pm 0.2). \quad (3)$$

Аналогичная зависимость для оптических светимостей, найденная по объектам с $\lg F(2500) > 24.0$, имеет вид

$$\lg F(2500) = (0.4 \pm 0.6) \lg(1+z) + (23.3 \pm 0.2). \quad (4)$$

Коэффициенты при $\lg(1+z)$ в уравнениях (3) и (4) существенно отличаются. Между тем, если бы эволюционные эффекты были обусловлены изменением пространственной плотности квазизвездных радиоисточников или неправильным выбором модели Вселенной, то эти коэффициенты должны были бы совпадать. Различие же между ними может быть приписано лишь эволюции светимости. Соотношение между независимым от принятой модели Вселенной логарифмом отношения радиосветимости и оптической светимости и $\lg(1+z)$ (рис. 3), полученное по 44 объектам с известными оптическими данными и $z < 1.12$, имеет вид

$$\lg F(1410) - \lg F(2500) = (3.3 \pm 0.9) \lg(1+z) + (3.1 \pm 0.2). \quad (5)$$

В аналогичном соотношении, полученном по данным каталога 4С, коэффициент при $\lg(1+z)$ получился равным 3.4 [6].

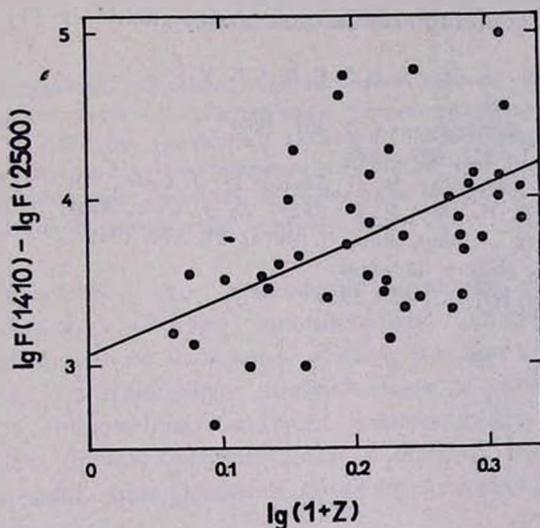


Рис. 3. Разность логарифмов радио- и оптической светимости как функция $\lg(1+z)$. Прямая получена методом наименьших квадратов.

Предполагая, что оптические светимости не эволюционируют, для темпа эволюции радиосветимости получим

$$F_{\text{rad}} \sim (1+z)^{3.3} \sim t^{-2.2}. \quad (6)$$

Таким образом, по данным Паркского обозрения, так же, как и по данным каталога 4С, темп эволюции радиосветимости получается совпадающим с тем, что следует из наблюдаемой зависимости $\lg N$,

$\lg S$ в предположении, что вид этой зависимости обусловлен именно эволюцией радиосветимости [7].

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

ON THE NATURE OF EVOLUTIONARY EFFECTS, ASSOCIATED WITH QUASI-STELLAR RADIO SOURCES. II.

M. A. ARAKELIAN

The results of the investigation of evolutionary effects associated with quasi-stellar radio sources based on the data of the Parkes Survey are presented. The conclusion about the uniform distribution of quasi-stellar radio sources in the co-moving volume, their constant optical luminosity and evolving radio luminosity made in [1] is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. А. Аракелян, *Астрофизика*, 5, 461, 1969.
2. M. Schmidt, *Ap. J.*, 151, 393, 1968.
3. G. A. Day, A. J. Shimmins, R. D. Ekers, D. J. Cole, *Aust. J. Phys.*, 19, 35, 1966.
4. A. J. Shimmins, G. A. Day, R. D. Ekers, D. J. Cole, *Austr. J. Phys.*, 19, 837, 1966.
5. A. J. Shimmins, G. A. Day, *Aust. J. Phys.*, 21, 377, 1968.
6. M. A. Arakelian, *Nature*, in press.
7. M. S. Longair, *M. N.*, 133, 421, 1966.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА
КОНВЕКЦИЮ В ПОЛИТРОПНОЙ АТМОСФЕРЕ

Н. С. ПЕТРУХИН

Поступила 20 ноября 1968

Методом возмущений, аналитически исследовано влияние излучения на конвективную неустойчивость политропной атмосферы. Рассматриваются оптически нетонкие возмущения ($\tau > 1$). Найдены матричные элементы, позволяющие определить в первом приближении для любой моды инкремент нарастания возмущений и функции, характеризующие конвективное движение. В явном виде получено и исследовано выражение для скорости роста возмущений основной моды.

Хорошо известно, что атмосферы молодых звезд (например, типа Т Тау) обладают сильной динамической активностью, природа которой окончательно не выяснена. Можно предполагать, что эта активность связана с интенсивным конвективным движением в звездах. В частности, в современных моделях сжимающихся протозвезд [11] конвекция играет определяющую роль. Поэтому необходим физический анализ условий возникновения конвекции, влияния на нее магнитного поля и излучения.

Влияние излучения на конвекцию в политропной атмосфере рассматривалось в [1, 2]. В работе [1] Бём и Рихтер исследовали численно крупномасштабную конвекцию для частного случая, когда коэффициент непрозрачности, рассчитанный на грамм вещества, пропорционален газовому давлению. В работе [2] Шпигель провел аналитические исследования некоторых предельных случаев. Так, им рассмотрены неустойчивость возмущений в тонком слое жидкости, а также поведение оптически тонких ($\tau \ll 1$) возмущений в политропном слое произвольной толщины.

Особенно важны аналитические исследования, так как они дают наиболее полную информацию о характере процесса и, кроме того, их результаты, вероятно, могут быть использованы в качестве начальных условий для нелинейных задач [3].

В настоящей работе аналитически исследовано влияние высвечивания на конвективную неустойчивость оптически нетонких ($\tau \geq 1$) возмущений, распространяющихся в политропной атмосфере.

Исходными уравнениями задачи являются обычные уравнения газодинамики без учета вязкости. В уравнение энергии входит член, характеризующий обмен энергией между движущимся элементом газа и окружающей средой. Пользуясь методом Ламба [7] линеаризации исходной системы, после довольно сложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \left(\frac{dc^2}{dz} + \gamma g \right) \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} + c^2 \Delta_1 \chi + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial Q}{\partial z} + \Delta_1 Q \right] \right\} = \Delta_1 \left\{ g \left[\frac{dc^2}{dz} - g(\gamma - 1) \right] \chi - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} Q \right\}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где: χ — дивергенция скорости, Q — функция, определяющая неадиабатичность движения, γ — отношение удельных теплоемкостей, g — ускорение силы тяжести, z — вертикальная координата, c и ρ_0 — скорость звука и невозмущенная плотность газа, функции от глубины, и $\Delta_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

В уравнении (1) переменные разделяются. Так как его коэффициенты не зависят от x , y и t , можно положить, что функции χ и Q изменяются со временем как e^{nt} , где n — постоянная, и гармоничны в горизонтальной плоскости, т. е.

$$\chi/u(z) = Q/q(z) = \exp \{ \pi t + i(k_x x + k_y y) \},$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, k — горизонтальное волновое число и $u(z)$ и $q(z)$ — амплитуды возмущений, функции только от z . Учитывая это, получаем основное уравнение для амплитуд. Так как теперь коэффициенты и функции уравнения зависят только от одной переменной z , можно перейти к полным производным:

$$\begin{aligned}
 & c^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \left(\frac{dc^2}{dz} + \gamma g \right) \frac{du}{dz} - \left\{ k^2 c^2 + n^2 - \frac{gk^2}{n^2} \left[\frac{dc^2}{dz} - g(\gamma - 1) \right] \right\} u = \\
 & = \frac{1}{\rho_0} \left\{ - \frac{d^2 q}{dz^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{dq}{dz} + \left[k^2 + \frac{gk^2}{n^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right] q \right\}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Уравнение (2) описывает поведение возмущений в атмосфере с произвольной стратификацией. Применим его к политропной атмосфере. Как известно, в такой атмосфере невозмущенные давление P_0 и плотность ρ_0 связаны соотношением $P_0 \sim \rho_0^\Gamma$, где Γ — показатель политропы — постоянная величина, и скорость звука $c = \left(\gamma \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} g z \right)^{1/2}$. Подставляя в (2) значения ρ_0 и c и вводя новые переменные $\xi = 2kz$ и $\psi(\xi) = u \cdot e^{\xi/2}$, получаем в самосопряженном виде

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left[\xi^{\alpha+1} e^{-\xi} \frac{d\psi}{d\xi} \right] - \lambda \xi^\alpha e^{-\xi} \psi = \\ & = - \frac{2\alpha k \xi^\alpha e^{-\xi/2}}{\gamma \rho_0 g} \left\{ \frac{d^2 q}{d\xi^2} - \frac{\alpha - 1}{\xi} \frac{dq}{d\xi} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\alpha - 1}{2\sigma^2 \xi} \right] q \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^2 \alpha}{\gamma} + \alpha + 1 - \frac{\alpha - \gamma(\alpha - 1)}{\gamma \sigma^2} \right]; \quad \sigma^2 = \frac{n^2}{gk}; \quad \alpha = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}. \quad (4)$$

Уравнение (3) совместно с подходящими граничными условиями представляет собой задачу на собственные значения. На одном из концов (при $\xi = 0$) она имеет особенность, которая появляется из-за обращения в нуль невозмущенных функций (ρ_0, c) на поверхности звезды. Учитывая это, потребуем конечности функций $\psi(\xi)$ при ξ — стремящейся к нулю и при ξ — стремящейся к бесконечности. Нетрудно показать, что в адиабатическом случае ($q \equiv 0$) решением уравнения (3) с такими граничными условиями являются собственные значения $\lambda_n = -n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ и собственные функции $\psi_n = L_n^\alpha(\xi)$, где $L_n^\alpha(\xi)$ — обобщенные полиномы Лагерра.

Решим задачу (3) методом возмущений. В качестве нулевого приближения возьмем решение для адиабатического случая, собственные функции которого, как известно [4], образуют на положительном, полубесконечном интервале полную ортонормированную систему с весовой функцией $[e^{-\xi} \xi^n / \Gamma(\alpha + n + 1)]^{1/2}$. Разложение в ряд проведем по степеням параметра ϵ , явный вид которого определим ниже.

Из теории возмущений получаем в первом приближении поправки к собственным значениям и собственным функциям задачи (3):

$$\lambda_n^1 = d_{nn}; \quad \psi_n^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{nk}}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0} \psi_k^0, \quad n \neq k, \quad (5)$$

где нижний индекс величин λ и ψ показывает номер моды (номер собственного значения) и верхний — порядок приближения. Матричные элементы d_{nk} находятся из соотношения

$$d_{nk} = \binom{n+\alpha}{n} \frac{\sqrt{n! k!}}{\sqrt{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\alpha+k+1)}} \int_0^{\infty} r_n(\xi) L_k^{\alpha}(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где функция $r_n(\xi)$ равна первой части уравнения (3), поделенной на параметр ε .

Для вычисления матричных элементов (6) необходимо определить явный вид функции $r_n(\xi)$. В $r_n(\xi)$, в свою очередь, входит функция q , характеризующая неадиабатичность движения. В астрофизической конвекции наиболее эффективным механизмом обмена энергией является излучение, поэтому в уравнении сохранения энергии учтем лишь лучистый перенос энергии. Будем рассматривать возмущения с оптической толщиной $\tau \geq 1$, для которых решение уравнения переноса можно проводить в эддингтоновском приближении. Коэффициент непрозрачности, рассчитанный на грамм вещества, возьмем в виде $\kappa = \kappa_0 T^b \rho^l$, где κ_0 , b и l — постоянные величины. В этом приближении функция q для политропной атмосферы определена в [1] (формула (36), в которой функции q соответствует $(\gamma - 1) \operatorname{div} F$, где F — лучистый поток). В q входят в нулевом приближении возмущения температуры и плотности. Их выражения через дивергенцию скорости можно вычислить соответственно из уравнения сохранения энергии для адиабатического случая и уравнения непрерывности. Подставляя функции T и ρ в q и затем в $r_n(\xi)$, после довольно громоздких преобразований находим матричные элементы (6). В явном виде они определяются формулой (П. 1), приведенной ниже в приложении. Из нее можно найти любые матричные элементы, а, следовательно, поправки первого приближения (5) к любой собственной функции и собственному значению. Определим поправки к решению основной моды. При $n = 0$ обобщенные полиномы Лагерра равны единице, поэтому в фигурных скобках в (П. 1) останется только последний член. Интеграл от оставшейся функции легко вычисляется [6] и окончательно получаем

$$d_{0k} = -\frac{D_0}{\alpha + k} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{k!}}. \quad (7)$$

Здесь D_0 — постоянная, равная:

$$D_0 = \frac{(\gamma - 1)(\alpha - 1)^2 \left[l(\alpha + 1) + \frac{\alpha(\gamma - 1)}{\gamma^2} + \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha} \right]}{4\sqrt{2} \Gamma(\alpha) \sqrt{\Gamma(\alpha + 1)} \alpha_0^0} \xi_0^{\alpha + \frac{1}{2}}, \quad (8)$$

где $\xi_0 = 2kd$, d — глубина конвективной зоны и σ_0^0 — безразмерный инкремент адиабатических возмущений. Из (5) замечаем, что диагональный матричный элемент d_{00} дает поправку к собственному значению основной моды. Таким образом, учитывая (4), получаем в первом приближении дисперсионное соотношение для основной моды:

$$\frac{\sigma_0^2 \Gamma}{\gamma} + 2\Gamma - 1 - \frac{\Gamma - \gamma}{\gamma \sigma_0^2} = -\varepsilon m \xi_0^{\alpha+1/2}. \quad (9)$$

Здесь

$$m = \frac{(\gamma - 1) \left[1 + \frac{\alpha(\gamma - 1)}{\gamma^2(\alpha - 1)} + \frac{\alpha + 1}{\alpha} \right]}{2\sqrt{2} \Gamma (\alpha + 2) \sigma_0^0}; \quad (10)$$

$$\varepsilon = \frac{32\sigma \left(\frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \right)^{3-b} g^{2.5-b} \mu^{4-b}}{3\chi A^{l+2} R^{4-b} d^{(3\Gamma-1)/2(\Gamma-1)'}}$$

где σ — постоянная Стефана-Больцмана, A — постоянная, определяющая масштаб шкалы плотностей, μ — молекулярный вес, R — газовая постоянная, ε — параметр, в ряды по степеням которого проводились разложения отыскиваемых решений. В работе [10] показано, что эта постоянная пропорциональна отношению лучистого потока к потоку механической энергии газа, имеющего давление $P_0(d)$ и движущегося со скоростью звука $c(d)$, где d — глубина конвективной зоны.

Выражение (9) определяет два типа волн — акустические и гравитационные. Рассмотрим гравитационные волны, неустойчивость которых приводит к конвекции. Как показали Шпигель и Унво [9], в адиабатическом случае σ_0^0 — малая величина. Излучение, как известно, понижает степень неустойчивости, поэтому безразмерный инкремент в неадиабатическом случае будет меньше адиабатического или одного порядка с ним. Поэтому, отбрасывая в (9) малый член, пропорциональный σ_0^2 , находим

$$\sigma_0^2 = \frac{\Gamma - \gamma}{\gamma [2\Gamma - 1 + \varepsilon m \xi_0^{\alpha+1/2}]}. \quad (11)$$

Из этого выражения замечаем, что в первом приближении излучение не меняет критерий конвективной неустойчивости ($\Gamma > \gamma$). При $\varepsilon = 0$ (11) переходит в соотношение, полученное для основной моды в адиабатическом приближении Шпигелем и Унво [9]. Как известно, в этом случае σ_0^2 не зависит от масштаба возмущений. При $\varepsilon \neq 0$, как видно из (11), σ_0^2 является монотонно убывающей функцией от ξ_0 .

Подставляя в (11) вместо σ_0^2 ее значения из (4), получаем выражение для квадрата инкремента

$$\frac{n^2 d}{g} = \frac{(\Gamma - \gamma) \xi_0}{2\gamma [2\Gamma - 1 + \varepsilon m \xi_0^{\alpha+1/2}]} \quad (12)$$

При $\varepsilon = 0$ функция $n^2(\xi_0)$ — линейная. Высвечивание уменьшает инкремент, причем этот эффект заметнее для больших волновых чисел. Далее, из (12) замечаем, что с увеличением параметра α скорость роста возмущений уменьшается. Большие значения α соответствуют меньшим показателям политропы Γ . Параметр Γ , как известно, характеризует неоднородность атмосферы, а именно, чем меньше Γ , тем неоднородность атмосферы более резкая. Таким образом, зависимость n^2 от α показывает, что при прочих равных условиях в атмосферах с более резкой зависимостью плотности (а следовательно, и давления) от глубины влияние излучения на конвекцию более заметно. Наименее эффективно в этом смысле излучение в однородной атмосфере $\alpha = 1$.

Определим, при каком значении ξ_0 функция (12) принимает наибольшее значение. Другими словами, найдем волновое число самого неустойчивого возмущения. Дифференцируя (12) по ξ_0 и приравнявая производную к нулю, получаем:

$$\xi_{0 \max} = \left[\frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1) \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \varepsilon m} \right]^{\frac{2}{2\alpha+1}} \quad (13)$$

Как известно [9], в политропной атмосфере без учета излучения наиболее неустойчивыми являются возмущения бесконечно малых масштабов (коротковолновая „катастрофа“). Этот эффект легко получить из (13). Действительно, если ε стремится к нулю, $\xi_{0 \max}$ стремится к бесконечности. Если $\varepsilon \neq 0$, максимальное значение функции (12) достигается при конечном безразмерном волновом числе, причем при возрастании параметра ε , $\xi_{0 \max}$ сдвигается в сторону меньших ξ_0 . Так как коэффициент ε пропорционален лучистому потоку, можно сказать, что чем больше поток энергии, тем больше масштаб наиболее неустойчивых возмущений. Этот эффект имеет простое физическое объяснение. Как известно, возрастание потока эквивалентно уменьшению коэффициента непрозрачности, а следовательно, усилению высвечивания. С уменьшением коэффициента непрозрачности эффект лучистого затухания захватывает возмущения все больших масштабов.

Найдем, как меняется значение наиболее неустойчивых масштабов при изменении параметра α . Из (13) можно заметить, что в однородной атмосфере ($\alpha = 1$) наиболее неустойчивыми являются возмущения бесконечно малых масштабов. С возрастанием α , $\xi_{0\max}$ смещается в длинноволновую область.

В заключение оценим интервал изменения безразмерных волновых чисел ξ_0 , для которого применимы результаты данной задачи. Как известно [5], теория возмущений дает хорошее приближение, если матричные элементы (П. 1) малы по сравнению с отношением соответствующих разностей невозмущенных собственных значений к постоянной ε . Будем рассматривать случаи, когда невозмущенный коэффициент непрозрачности не уменьшается с глубиной. Можно показать [10], что это будет иметь место, если показатель $\Gamma > 4/3$ (или $\alpha \leq 4$). При таких α теория возмущений применима к возмущениям с ξ_0 , подчиняющимся условию

$$\xi_0 < [\varepsilon m]^{-\frac{2}{2\alpha+1}}. \quad (14)$$

Сравнивая (14) с (13), замечаем, что практически полученные результаты применимы к возмущениям с ξ_0 вплоть до $\xi_{0\max}$. К сожалению, поведение функции при больших значениях ξ_0 остается неизвестным. Для очень малых масштабов, когда влияние излучения велико и применим ньютоновский закон высвечивания, эта зависимость была исследована Шпигелем [2]. Он показал, что с возрастанием волнового числа инкремент продолжает расти. Возможно, функция $n_0^2(\xi)$ при значениях аргумента немного больших $\xi_{0\max}$ вначале будет убывать с ростом ξ_0 и затем, войдя в область оптически тонких возмущений, где применимы результаты исследований [2], начнет вновь возрастать. На уменьшение инкремента после максимума указывают численные исследования [1].

Работа выполнена под руководством С. А. Каплана, которому автор выражает глубокую благодарность.

Приложение

Матричные элементы d_{nk}^{*r} (6) определяются выражением:

$$d_{nk} = \frac{\alpha \sqrt{nlkl}}{\sqrt{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+k+1)}} \int_0^\infty e^{-\xi} \left\{ -2l\xi \frac{d^3}{d\xi^3} L_n^{\alpha}(\xi) + \right. \\ \left. + [(3l + \beta_n)\xi + l(\alpha - 1)] \frac{d^2}{d\xi^2} L_n^{\alpha}(\xi) + \right. \quad (П.1)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[(\alpha - 1) \left(\frac{l}{\sigma_n^2} - 2l - \beta_n \right) - (l + \beta_n) \xi \right] \frac{d}{d\xi} L_n^{\alpha}(\xi) + \\
 & + \frac{1}{2} (\alpha - 1) (l + \beta_n) \left[1 - \frac{1}{\sigma_n^2} \right] L_n^{\alpha}(\xi) \left\{ L_k^{\alpha}(\xi) d\xi, \right.
 \end{aligned} \tag{П.1}$$

где

$$\alpha = \frac{[\alpha - (\alpha - 1) \gamma] (\gamma - 1)}{2 \sqrt{2} \alpha \gamma \sigma_n^2} \xi_0^{\alpha + \frac{1}{2}} \tag{П. 2}$$

и

$$\beta_n = \frac{\alpha (\gamma - 1)}{\gamma^2 (\alpha + 2n + 1)} + \frac{\alpha + 2n + 1}{\alpha}. \tag{П. 3}$$

Горьковский политехнический
институт

THE INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF RADIATION ON THE CONVECTION IN POLYTROPIC ATMOSPHERE

N. S. PETRUCHIN

The effect of radiation on convection of an unstable polytropic atmosphere are analytically investigated by the method of disturbance. Disturbances with optical thickness $\tau > 1$ are considered. Some matrix elements which allow to determine the growth-rate and the functions characterizing convective motions for any mode at the first approximation are found. The expression for the growth-rate of the main mode is received and investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. K. H. Böhm, E. Richter, Z. Astrophys., 48, 231, 1959.
2. E. Spiegel, Ap. J., 139, 959, 1964.
3. P. Ledoux, M. Schwarzschild, E. Spiegel, Ap. J., 133, 184, 1961.
4. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики. 1, ГИТТЛ, М., 1951.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
6. Н. С. Градштейн, И. Н. Рыжик, Таблицы интегралов, Физматгиз, М., 1963.
7. Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
8. Г. Бейтмен, Н. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 2, Наука, М., 1966.
9. E. Spiegel, W. Unno, Publ. Astr. Soc. Japan, 14, 28, 1962.
10. Н. С. Петрухин, Диссертация, Горький, 1968.
11. S. Nagashi, Publ. Astr. Soc. Japan, 13, 450, 1961.

ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ В
КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ

Т. А. АГЕКЯН, И. М. МИХЭИЛЭ

Поступила 1 апреля 1969

Получена система уравнений, описывающая состояние и эволюцию вращающейся квазистационарной системы гравитирующих тел. В отличие от ранее полученных результатов теория свободна от предположения о равенстве компонентов дисперсии остаточных скоростей. Показано, что существует вращающаяся квазистационарная система, эволюционирующая гомологично. Для нее избыточный момент вращения, уносимый диссипирующими звездами, в среднем по системе равен $3/2$ среднего момента вращения этих звезд.

1. *Введение.* В ходе эволюции вращающаяся система гравитирующих тел достигает квазистационарного состояния в каждой точке и и затем переходит в состояние квазистационарное в целом [1]. Иррегулярные силы стремятся выровнять угловые скорости центроидов и компоненты тензора дисперсии скоростей. Вследствие диссипации тел полное выравнивание недостижимо. В результате, в системе квазистационарной в целом устанавливается некоторое определенное, не зависящее от предыдущих состояний, распределение угловых скоростей центроидов и компонентов тензора дисперсии скоростей. Если бы диссипация отсутствовала, то система достигла бы твердотельного вращения [2].

Для исследования квазистационарных вращающихся систем можно применить гидродинамический метод [3, 4]. В работе [4] уравнения состояния были получены при упрощающем предположении, что в квазистационарной системе распределение остаточных скоростей является сферическим.

Как известно, во вращающихся системах, в частности в Галактике, распределение остаточных скоростей не является сферическим. В настоящей работе покажем, что задача может быть решена без предположения о сферичности распределения остаточных скоростей.

После этого обобщения система уравнений, описывающая состояние вращающейся квазистационарной системы, позволит построить правильную теоретическую модель вращающейся системы.

Будем считать, что система обладает ротационной симметрией и ограничимся случаем равенства масс тел. Предположим, что компоненты скорости являются независимыми переменными.

2. Уравнения состояния вращающейся квазистационарной системы. Напишем уравнение Больцмана для фазовой плотности в системе цилиндрических координат

$$\frac{\partial f}{\partial t} + R \frac{\partial f}{\partial r} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\theta^2}{r} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial R} - \frac{R\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial Z} = \chi, \quad (1)$$

где R , θ и Z — компоненты скорости вдоль линий координат, U — потенциал, χ — функция сближений.

Для вывода уравнений начальных моментов до второго порядка распределения скоростей помножим уравнение (1) поочередно на $d\Omega$, $Rd\Omega$, $\theta d\Omega$, $Zd\Omega$, $R^2 d\Omega$, $\theta^2 d\Omega$, $Z^2 d\Omega$ ($d\Omega$ — элемент объема в пространстве скоростей) и проинтегрируем по всему пространству скоростей. Получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (v\bar{R})}{\partial r} + \frac{\partial (v\bar{Z})}{\partial z} + \frac{v\bar{R}}{r} = A, \quad (2)$$

$$\frac{\partial (v\bar{R})}{\partial t} + \frac{\partial (v\bar{R}^2)}{\partial r} \frac{\partial (v\bar{R}\bar{Z})}{\partial z} - v \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{v\bar{\theta}^2}{r} + \frac{v\bar{R}^2}{r} = B_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial (v\bar{\theta})}{\partial t} + \frac{\partial (v\bar{R}\bar{\theta})}{\partial r} + \frac{\partial (v\bar{\theta}\bar{Z})}{\partial z} + \frac{2v\bar{R}\bar{\theta}}{r} = B_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial (v\bar{Z})}{\partial t} + \frac{\partial (v\bar{R}\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial (v\bar{Z}^2)}{\partial z} + \frac{v\bar{R}\bar{Z}}{r} - v \frac{\partial U}{\partial z} = B_3, \quad (5)$$

$$\frac{\partial (v\bar{R}^3)}{\partial t} + \frac{\partial (v\bar{R}^3)}{\partial r} + \frac{\partial (v\bar{R}^2\bar{Z})}{\partial z} - 2v\bar{R} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2v\bar{R}\bar{\theta}^2}{r} + \frac{v\bar{R}^3}{r} = C_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial (v\bar{\theta}^3)}{\partial t} + \frac{\partial (v\bar{R}\bar{\theta}^3)}{\partial r} + \frac{\partial (v\bar{\theta}^2\bar{Z})}{\partial z} + \frac{3v\bar{R}\bar{\theta}^2}{r} = C_2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\nu\bar{Z}^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu R\bar{Z}^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\bar{Z}^3)}{\partial z} + \frac{\nu R\bar{Z}^2}{r} - 2\nu\bar{Z}\frac{\partial U}{\partial z} = C_3, \quad (8)$$

где ν — плотность, а черта означает усреднение.

Пусть R' , θ' и Z' компоненты остаточной скорости. Если пренебрежем центральными моментами третьего порядка и также \bar{R}^3 и \bar{Z}^3 (компоненты \bar{R} и \bar{Z} в квазистационарной системе малы), то получим

$$\begin{aligned} \bar{R}^2 &= \bar{R}^2 + \overline{R'^2}, & \overline{R\theta} &= \bar{R}\bar{\theta}, \\ \bar{\theta}^2 &= \bar{\theta}^2 + \overline{\theta'^2}, & \overline{RZ} &= \bar{R}\bar{Z}, \\ \bar{Z}^2 &= \bar{Z}^2 + \overline{Z'^2}, & \overline{\theta Z} &= \bar{\theta}\bar{Z}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}^3 &= 3\bar{R}\bar{R}^2, & \overline{RZ^2} &= \bar{R}\bar{Z}^2, \\ \bar{R}^2\bar{Z} &= \bar{R}^2\bar{Z}, & \overline{\theta^2 Z} &= \bar{\theta}^2\bar{Z}, \\ \overline{R\theta^2} &= \bar{R}\bar{\theta}^2, & \bar{Z}^3 &= 3\bar{Z}\bar{Z}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Равенства (9) определяют дисперсии компонентов скоростей \bar{R}^2 , $\bar{\theta}^2$ и \bar{Z}^2 , если известны начальные моменты \bar{R}^3 , $\bar{\theta}^3$ и \bar{Z}^3 и компоненты скорости центроида \bar{R} , $\bar{\theta}$, \bar{Z} .

В квазистационарной в целом системе все изменения в конечном счете вызваны диссипацией тел из системы. Диссипация же тел является результатом действия иррегулярных сил. Поэтому величины A , B_1, \dots, C_3 , стоящие в правых частях уравнений (2)–(8), должны быть равны изменению в единичном объеме соответствующей уравнению характеристики вследствие диссипации из этого объема тел и дополнительного действия иррегулярных сил, вызванного явлением диссипации.

Для определения правых частей уравнений используем шварцшильдовское распределение скоростей. Это естественное в настоящее время приближение.

Вводя сферическую систему координат (V', θ, φ) , напомним шварцшильдовское распределение остаточных скоростей в виде

$$\Psi(V', \eta, \varphi) = \frac{\nu}{(2\pi)^{3/2} (R'^2 \theta'^2 Z'^2)^{1/2}} e^{-(QV')^2} V'^2, \quad (11)$$

где

$$Q^2 = \frac{(1 - \eta^2) \cos^2 \varphi}{2R'^2} + \frac{\eta^2}{2\theta'^2} + \frac{(1 - \eta^2) \sin^2 \varphi}{2Z'^2}, \quad (12)$$

$$\eta = \cos \theta. \quad (13)$$

Уравнение (2) описывает изменение плотности. Если a выражает долю тел единичного объема, диссипирующих за время релаксации τ , то получаем

$$A = -\frac{\nu}{\tau} a. \quad (14)$$

Будем считать, что доля a равна доле тел, имеющих при шварцшильдовском распределении скорости, большие критической V_* . Тогда получим

$$a = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} [\bar{R}^2 (\bar{\theta}^2 - \bar{\theta}'^2) \bar{Z}^2]^{1/2}} \int_{-1}^{+1} d\eta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{Q^3} \int_{QV_*}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi, \quad (15)$$

если пренебрежем \bar{R}'^2 и \bar{Z}'^2 . В дальнейшем мы всегда будем пренебрегать этими величинами и также $\bar{R}\bar{Z}$, поскольку компоненты \bar{R} и \bar{Z} малы по сравнению с компонентой $\bar{\theta}$.

Для вычисления интеграла нужно выразить критическую остаточную скорость V_* через искомые функции. Имеем

$$V_*^2 = V_*'^2 + 2\bar{\theta} \times V_*' + \bar{\theta}^2 = 2U, \quad (16)$$

где

$$x = \frac{\bar{R}}{\bar{\theta}} \sqrt{1-\eta^2} \cos \varphi + \eta + \frac{\bar{Z}}{\bar{\theta}} \sqrt{1-\eta^2} \sin \varphi, \quad (17)$$

и, следовательно,

$$V_*' = \bar{\theta} \left(\sqrt{x^2 + \frac{2U}{\bar{\theta}^2} - 1 - x} \right). \quad (18)$$

Время релаксации в данном единичном объеме определяется формулой

$$\tau = \frac{(\bar{V}'^2)^{3/2}}{LG^2 m^2 \nu} = \frac{(\bar{R}^2 + \bar{\theta}^2 + \bar{Z}^2 - \bar{\theta}'^2)^{3/2}}{LG^2 m^2 \nu}, \quad (19)$$

где G — гравитационная постоянная, m — масса тела, а величина L слабо зависит от положения точки системы.

Правые части уравнений (3)—(5) выражают изменения импульса единичного объема вдоль осей координат в пространстве скоростей под влиянием иррегулярных сил. Эти изменения вызваны диссипацией и внутренним трением.

Будем считать, что скорости диссипирующих тел равны критической скорости [4, 5]. Тогда импульсы (на единицу массы), уносимые в направлениях осей, равны

$$\begin{aligned} R &= \bar{R} + V_* \sqrt{1 - \tau^2} \cos \varphi, \\ \Theta &= \bar{\Theta} + V_* \tau, \\ Z &= \bar{Z} + V_* \sqrt{1 - \tau^2} \sin \varphi. \end{aligned} \tag{20}$$

Для получения импульсов, уносимых диссипирующими телами за время релаксации из единичного объема, помножим (20) на $\psi d\eta d\varphi dV'$ и проинтегрируем по области $[-1, +1] \times [0, 2\pi] \times [V_*, \infty)$. Получим импульсы, уносимые в направлениях осей в единицу времени

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\bar{R}}}{\tau} a + \frac{\sqrt{\bar{\Theta}}}{\tau} p_1, \\ \frac{\sqrt{\bar{\Theta}}}{\tau} a + \frac{\sqrt{\bar{\Theta}}}{\tau} p_2, \\ \frac{\sqrt{\bar{Z}}}{\tau} a + \frac{\sqrt{\bar{\Theta}}}{\tau} p_3, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} [\bar{R}^2 (\bar{\Theta}^2 - \bar{\Theta}^2) \bar{Z}^2]^{1/2}} \int_{-1}^{+1} d\eta \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{x^2 + \frac{2U}{\bar{\Theta}^2} - 1 - x} \right) \frac{V \sqrt{1 - \tau^2} \cos \varphi d\varphi}{Q^3} \int_{QV_*}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi, \\ p_2 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} [\bar{R}^2 (\bar{\Theta}^2 - \bar{\Theta}^2) \bar{Z}^2]^{1/2}} \int_{-1}^{+1} d\eta \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{x^2 + \frac{2U}{\bar{\Theta}^2} - 1 - x} \right) \frac{\eta d\varphi}{Q^3} \int_{QV_*}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi, \end{aligned} \tag{22}$$

$$p_3 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} [R^2 (\bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^2) \bar{Z}^2]^{1/2}} \int_{-1}^{+1} d\eta \times \quad (22)$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{x^2 + \frac{2U}{\bar{\theta}^2}} - 1 - x \right) \frac{\sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi d\varphi}{Q^3} \int_{QV'}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi.$$

Нетрудно видеть, что p_1 и p_3 очень малы в сравнении с p_2 и в случае сферического распределения остаточных скоростей равны нулю. Поэтому импульс, уносимый вдоль оси θ , гораздо больше импульсов, уносимых вдоль других двух направлений.

Внутреннее трение вызывает сглаживание угловой скорости центра в соседних точках системы. Будем считать, что компонента ω угловой скорости по оси z гораздо больше, чем другие две компоненты, и пренебрежем внутренним трением вдоль них. Тогда [4] B_2 содержит также член

$$\frac{1}{3} \frac{r_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu r^2}{\tau} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} \frac{z_0^2 r}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right), \quad (23)$$

где r_0 и z_0 — наибольшие значения r и z в системе. Учитывая формулы (21) и (23), получим

$$\bar{B}_1 = -\frac{\nu \bar{R}}{\tau} a - \frac{\nu \bar{\theta}}{\tau} p_1,$$

$$B_2 = -\frac{\nu \bar{\theta}}{\tau} a - \frac{\nu \bar{\theta}}{\tau} p_2 + \frac{1}{3} \frac{r_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu r^2}{\tau} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} \frac{z_0^2 r}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right), \quad (24)$$

$$B_3 = -\frac{\nu \bar{Z}}{\tau} a - \frac{\nu \bar{\theta}}{\tau} p_3.$$

В уравнениях (6)–(8) правые части выражают изменение кинетической энергии, вызванное иррегулярными силами.

Удвоенная кинетическая энергия (на единицу массы) диссипирующего тела по осям координат в пространстве скоростей равна соответственно

$$R^2 = 2\bar{R}V_*' \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi + V_*'^2 (1 - \eta^2) \cos^2 \varphi,$$

$$\theta^2 = \bar{\theta}^2 + 2\bar{\theta}V_*' \eta + V_*'^2 \eta^2, \quad (25)$$

$$Z^2 = 2\bar{Z}V_*' \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi + V_*'^2 (1 - \eta^2) \sin^2 \varphi.$$

Поступая как в случае получения импульса, уносимого диссипирующими телами, найдем удвоенную энергию, уносимую в направлениях осей в единицу времени

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{\sqrt{R\bar{\theta}}}{\tau} p_1 + \frac{\sqrt{\bar{\theta}^2}}{\tau} q_1, \\
 & \frac{\sqrt{\bar{\theta}^2}}{\tau} (\alpha + 2p_2 + q_2), \\
 & 2 \frac{\sqrt{\theta\bar{Z}}}{\tau} p_3 + \frac{\sqrt{\bar{\theta}^2}}{\tau} q_3.
 \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} [R^2 (\bar{\theta}^2 - \theta^2) \bar{Z}^2]^{1/2}} \int_{-1}^{+1} d\eta \times \\
 & \times \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{x^2 + \frac{2U}{\bar{\theta}^2} - 1 - x} \right)^2 \frac{(1 - \eta^2) \cos^2 \varphi d\varphi}{Q^3} \int_{QV'_e}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi, \\
 q_2 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} [R^2 (\bar{\theta}^2 - \theta^2) \bar{Z}^2]^{1/2}} \int_{-1}^{+1} d\eta \times \\
 & \times \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{x^2 + \frac{2U}{\bar{\theta}^2} - 1 - x} \right)^2 \frac{\eta^2 d\varphi}{Q^3} \int_{QV'_e}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi, \\
 q_3 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} [R^2 (\bar{\theta}^2 - \theta^2) \bar{Z}^2]^{1/2}} \int_{-1}^{+1} d\eta \times \\
 & \times \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{x^2 + \frac{2U}{\bar{\theta}^2} - 1 - x} \right)^2 \frac{(1 - \eta^2) \sin^2 \varphi d\varphi}{Q^3} \int_{QV'_e}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Кроме диссипации происходит также процесс выравнивания кинетической энергии в соседних точках. Этот процесс аналогичен теплопроводности [4]. Учитывая и этот процесс, получим

$$C_1 = -2 \frac{\sqrt{R}\bar{\Theta}}{\tau} p_1 - \frac{\sqrt{\Theta}^2}{\tau} q_1 + \frac{1}{3} \frac{r_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu r}{\tau} \frac{\partial \bar{R}^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} z_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{\partial \bar{R}^2}{\partial z} \right),$$

$$C_2 = -\frac{\sqrt{\Theta}^2}{\tau} (a + 2p_2 + q_2) + \frac{1}{3} \frac{r_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu r}{\tau} \frac{\partial \bar{\Theta}^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} z_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{\partial \bar{\Theta}^2}{\partial z} \right), \quad (28)$$

$$C_3 = -2 \frac{\sqrt{\Theta}\bar{Z}}{\tau} p_3 - \frac{\sqrt{\Theta}^2}{\tau} q_3 + \frac{1}{3} \frac{r_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu r}{\tau} \frac{\partial \bar{Z}^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} z_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{\partial \bar{Z}^2}{\partial z} \right).$$

Если подставить найденные выражения для правых частей и опустить малые члены, содержащие \bar{R}^2 , \bar{Z}^2 и $\bar{R}\bar{Z}$, то уравнения (2)–(8) принимают вид

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{R})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\bar{Z})}{\partial z} + \frac{\nu\bar{R}}{r} = -\frac{\nu}{\tau} a, \quad (29)$$

$$\frac{\partial(\nu\bar{R})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{R}^2)}{\partial r} - \nu \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\nu\bar{\Theta}^2}{r} + \frac{\nu\bar{R}^2}{r} = -\frac{\nu\bar{R}}{\tau} a - \frac{\nu\bar{\Theta}}{\tau} p_1, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\nu\bar{\Theta})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{R}\bar{\Theta})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\bar{\Theta}\bar{Z})}{\partial z} + \frac{2\nu\bar{R}\bar{\Theta}}{r} = \\ & = -\frac{\nu\bar{\Theta}}{\tau} (a + p_2) + \frac{1}{3} \frac{r_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu r^2}{\tau} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} z_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{\partial(\nu\bar{Z})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{Z}^2)}{\partial r} - \nu \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\nu\bar{Z}}{\tau} a - \frac{\nu\bar{\Theta}}{\tau} p_3, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\nu\bar{R}^2)}{\partial t} + 3 \frac{\partial(\nu\bar{R}\bar{R}^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\bar{R}^2\bar{Z})}{\partial z} - 2\nu\bar{R} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2\nu\bar{R}\bar{\Theta}^2}{r} + \frac{3\nu\bar{R}\bar{R}^2}{r} = \\ & = -2 \frac{\nu\bar{R}\bar{\Theta}}{\tau} p_1 - \frac{\nu\bar{\Theta}^2}{\tau} q_1 + \frac{1}{3} \frac{r_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu r}{\tau} \frac{\partial \bar{R}^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} z_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{\partial \bar{R}^2}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\nu\bar{\Theta}^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{R}\bar{\Theta}^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\bar{\Theta}^2\bar{Z})}{\partial z} + \frac{3\nu\bar{R}\bar{\Theta}^2}{r} = \\ & = -\frac{\nu\bar{\Theta}^2}{\tau} (a + 2p_2 + q_2) + \frac{1}{3} \frac{r_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu r}{\tau} \frac{\partial \bar{\Theta}^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} z_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{\partial \bar{\Theta}^2}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\nu\bar{Z}^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{R}\bar{Z}^2)}{\partial r} + 3 \frac{\partial(\nu\bar{Z}\bar{Z}^2)}{\partial z} + \frac{\nu\bar{R}\bar{Z}^2}{r} - 2\nu\bar{Z} \frac{\partial U}{\partial z} = \\ & = -2 \frac{\nu\bar{\Theta}\bar{Z}}{\tau} p_3 - \frac{\nu\bar{\Theta}^2}{\tau} q_3 + \frac{1}{3} \frac{r_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu r}{\tau} \frac{\partial \bar{Z}^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} z_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\tau} \frac{\partial \bar{Z}^2}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

В правых частях уравнений (30) и (32) все члены, а в левых $\partial(\sqrt{R})/\partial t$ и $\partial(\sqrt{Z})/\partial t$ очень малы. Также очень малы члены $2\sqrt{R}\bar{\theta}p_1/c$ и $\sqrt{\bar{\theta}}\bar{Z}p_3/c$ в уравнениях (33) и (35). Поэтому в дальнейшем будем пренебрегать этими членами.

Потенциал $U(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi Gm\gamma. \quad (36)$$

Система уравнений (29)—(36) определяет строение и эволюцию вращающейся квазистационарной системы. Искомыми функциями являются плотность и потенциал γ и U , компоненты скорости центроида \bar{R} , $\bar{\theta}$ и \bar{Z} и начальные моменты второго порядка распределения скоростей \bar{R}^2 , $\bar{\theta}^2$ и \bar{Z}^2 .

3. Уравнения состояния гомологичной вращающейся квазистационарной системы. Решение уравнений состояния (29)—(36) является сложной задачей. Поэтому большое значение имеет возможность гомологичной эволюции вращающейся системы. Существование такой эволюции было уже доказано в случае изотропного распределения скоростей [4, 6].

Если система эволюционирует гомологично, то это означает, что изменение ее масштабов во всех направлениях происходит одинаковым образом и функции, описывающие ее состояние, должны иметь вид

$$\gamma = \alpha x(\lambda r, \lambda z), \quad (37)$$

$$\sqrt{\bar{R}} = \beta y(\lambda r, \lambda z), \quad \frac{\bar{\theta}}{r} = \gamma l(\lambda r, \lambda z), \quad \sqrt{\bar{Z}} = \delta h(\lambda r, \lambda z), \quad (38)$$

$$\bar{R}^2 = \varepsilon g(\lambda r, \lambda z), \quad \bar{\theta}^2 = \iota j(\lambda r, \lambda z), \quad \bar{Z}^2 = \mu k(\lambda r, \lambda z), \quad (39)$$

$$U = \sigma w(\lambda r, \lambda z), \quad (40)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \iota, \mu, \sigma$ и λ зависят только от времени.

Можно считать, что в начальный момент, например, в момент наблюдения $\alpha(t_0) = \dots = \lambda(t_0) = 1$ и, следовательно,

$$\gamma = x(r, z), \quad (41)$$

$$\sqrt{\bar{R}} = y(r, z), \quad \frac{\bar{\theta}}{r} = l(r, z), \quad \sqrt{\bar{Z}} = h(r, z) \quad (42)$$

$$\bar{R}^2 = g(r, z), \quad \bar{\theta}^2 j = (r, z), \quad \bar{Z}^2 = k(r, z), \quad (43)$$

$$U = w(r, z). \quad (44)$$

Если система гомологична, то после подстановки выражений (37)—(40) в уравнения состояния и перехода к независимым переменным $\rho = \lambda r$, $\xi = \lambda z$ все множители, зависящие от t , сокращаются. Таким образом, система уравнений приводится к системе уравнений с переменными ρ и ξ .

Для определения выражений функций a, \dots, λ поступим как в случае сферической квазистационарной системы [7].

Из условий постоянства потенциальной энергии и кинетической энергии системы находим

$$a = \lambda^{5/2}, \quad (45)$$

$$e = \iota = \mu = \lambda^{1/2}. \quad (46)$$

Далее, из условия выполнения уравнения Пуассона в любой момент времени вытекает, что

$$\sigma = \lambda^{1/2}, \quad (47)$$

а из выражения времени релаксации следует, что

$$\gamma = \lambda^{5/4}. \quad (48)$$

Наконец, подставим условие равенства множителей, зависящих от времени во всех членах уравнения плотности (29). Так как в квазистационарной вращающейся системе компонента $\bar{\theta}$ скорости центроида гораздо больше двух других, будем считать, что согласно (18)

$$V'_i = \bar{\theta} \left(\sqrt{\gamma^2 + \frac{2U}{\bar{\theta}^2}} - 1 - \eta \right). \quad (49)$$

Тогда функции a , p_i и q_i ($i = 1, 2, 3$) не зависят явно от времени. Получим

$$\beta = \delta = \lambda^{13/4}, \quad (50)$$

$$\lambda = b \lambda^{11/4}, \quad (51)$$

где b — постоянная.

Интегрируя уравнение (51) с начальным условием $\lambda(t_0) = 1$, находим

$$\lambda = \left[1 - \frac{7}{4} b (t - t_0) \right]^{-4/7}. \quad (52)$$

Видно, что λ возрастает со временем и при

$$t - t_0 = \frac{4}{7} b^{-1} \quad (53)$$

становится бесконечно большим. В ходе эволюции система сжимается.

Опуская в уравнениях (29)–(36) малые члены, подставляя в них (37)–(40) и используя выражения (45)–(48), (50) и (51), получаем

$$\frac{5}{2} bx + b\rho \frac{\partial x}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial h}{\partial \zeta} + \frac{y}{\rho} = -\frac{sx^2}{u^{3/2}} \alpha, \quad (54)$$

$$\frac{\partial(xg)}{\partial \rho} - x \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{xj}{\rho} + \frac{xg}{\rho} = 0, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{11}{4} b\rho xl + b\rho \frac{\partial(\rho xl)}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial(\rho xl)}{\partial \zeta} + \frac{\partial(\rho yl)}{\partial \rho} + \frac{\partial(\rho hl)}{\partial \zeta} + yl = \\ -\frac{s\rho x^2 l}{u^{3/2}} (\alpha + p_2) + \frac{s}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho^2 x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial l}{\partial \rho} \right) + \frac{s}{3} \zeta_0^2 \rho \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial l}{\partial \zeta} \right), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\frac{\partial(xh)}{\partial \zeta} - x \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} 3bxg + b\rho \frac{\partial(xg)}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial(xg)}{\partial \zeta} + 3 \frac{\partial(yg)}{\partial \rho} + \frac{\partial(hg)}{\partial \zeta} - 2y \frac{\partial w}{\partial \rho} - 2 \frac{yj}{\rho} + \\ + 3 \frac{yg}{\rho} = -\frac{s\rho^2 x^2 l^2}{u^{3/2}} q_1 + \frac{s}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial g}{\partial \rho} \right) + \frac{s}{3} \zeta_0^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} 3bxj + b\rho \frac{\partial(xj)}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial(xj)}{\partial \zeta} + \frac{\partial(yj)}{\partial \rho} + \frac{\partial(hj)}{\partial \zeta} + 3 \frac{yj}{\rho} = \\ = -\frac{s\rho^2 x^2 l^2}{u^{3/2}} (\alpha + 2p_2 + q_2) + \frac{s}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial j}{\partial \rho} \right) + \frac{s}{3} \zeta_0^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial j}{\partial \zeta} \right), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} 3bxc + b\rho \frac{\partial(xc)}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial(xc)}{\partial \zeta} + \frac{\partial(yc)}{\partial \rho} + 3 \frac{\partial(hc)}{\partial \zeta} + \frac{yc}{\rho} - 2h \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \\ = -\frac{s\rho^2 x^2 l^2}{\rho} q_3 + \frac{s}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right) + \frac{s}{3} \zeta_0^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right), \end{aligned} \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = -cx, \quad (61)$$

где

$$u = g + j + k - \rho^2 \bar{F}, \quad (62)$$

$$c = 4\pi Gm, \quad (63)$$

$$s = \frac{Lc^2}{16\pi^2}. \quad (64)$$

В уравнениях (54)–(60) произошло полное сокращение всех множителей, содержащих λ . Уравнения соответственно сократились на $\lambda^{17/4}$, $\lambda^{16/4}$, $\lambda^{16/4}$, $\lambda^{18/4}$, $\lambda^{19/4}$, $\lambda^{19/4}$ и $\lambda^{19/4}$. Эти множители характеризуют скорости изменения членов уравнений в ходе эволюции. Так как члены, которыми мы пренебрегли в уравнениях (29)–(36), очень малы в сравнении с другими членами, то можно считать, что гомологичность системы фактически полная.

Для определения постоянной b , входящей в уравнения, помножим уравнения (54) на элемент объема $dv^* = 2\pi\rho d\rho d\bar{\kappa}$ и проинтегрируем по всему пространству. Получим

$$\frac{b}{2} = \frac{\int \frac{sx}{u^{3/2}} axdv^*}{\int xdv^*}, \quad (65)$$

т. е. $b/2$ есть скорость диссипации системы.

Для гомологичности необходимо также равенство изменения кинетического момента системы относительно центра кинетическому моменту, уносимому диссипирующими телами (внутреннее трение приводит только к перераспределению кинетического момента внутри системы).

Кинетический момент единицы объема системы относительно центра равен

$$\vec{k} = m\nu [r^2 \bar{Z}^2 + z^2 (\bar{R}^2 + \bar{\Theta}^2) - 2rz\bar{R}\bar{Z}]^{1/2} \frac{\vec{r}}{r} + m\nu \bar{\Theta} r \frac{\vec{z}}{z}, \quad (66)$$

а кинетический момент уносимого диссипирующего тела

$$\vec{k}_* = (\vec{r} + \vec{z}) \times m\vec{V}_* = (\vec{r} + \vec{z}) \times m\vec{V} + (\vec{r} + \vec{z}) \times m\vec{V}_*. \quad (67)$$

Поступая как в случае получения импульса, уносимого диссипирующими телами, находим кинетический момент, уносимый из единичного объема в единицу времени

$$m \frac{\nu}{\tau} \bar{\Theta} \left\{ (a + p_2)^2 + \left[\left(\frac{\bar{R}}{\bar{\Theta}} a + p_1 \right) - \frac{r}{z} \left(\frac{\bar{Z}}{\bar{\Theta}} a + p_3 \right) \right]^2 \right\}^{1/2} z \frac{\bar{r}}{r} +$$

$$+ m \frac{\nu}{\tau} \bar{\Theta} (a + p_2) r \frac{\bar{z}}{z}. \quad (68)$$

Из условия равенства изменения кинетического момента моменту, уносимому диссипирующими телами, вытекают условия

$$\frac{d}{dt} \int \nu \bar{\Theta} z dv = - \int \frac{\nu}{\tau} \bar{\Theta} \left[(a + p_2)^2 + \left(p_1 - \frac{r}{z} p_3 \right)^2 \right]^{1/2} z dv, \quad (69)$$

$$\frac{d}{dt} \int \nu \bar{\Theta} r dv = - \int \frac{\nu}{\tau} \bar{\Theta} (a + p_2) r dv, \quad (70)$$

если опустить малые величины.

Используя (19), (37)–(39), находим

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\alpha \gamma}{\lambda^5} \right) \int x l \rho^2 dv^* = - \frac{\alpha^2 \gamma}{\varepsilon^{3/2} \lambda^5} \int \frac{s x^2 l}{u^{3/2}} \left[(a + p_2)^2 + \left(p_1 - \frac{\rho}{\zeta} p_3 \right)^2 \right]^{1/2} \rho^2 dv^*, \quad (71)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\alpha \gamma}{\lambda^5} \right) \int x l \rho^2 dv^* = - \frac{\alpha^2 \gamma}{\varepsilon^{3/2} \lambda^5} \int \frac{s x^2 l}{u^{3/2}} (a + p_2) \rho^2 dv^* \quad (72)$$

или, после сокращения множителя $\lambda^{1/2}$,

$$\frac{5}{2} b \int x l \rho^2 dv^* = \int \frac{s x^2 l}{u^{3/2}} \left[(a + p_2)^2 + \left(p_1 - \frac{\rho}{\zeta} p_3 \right)^2 \right]^{1/2} \rho^2 dv^*, \quad (73)$$

$$\frac{5}{2} b \int x l \rho^2 dv^* = \int \frac{s x^2 l}{u^{3/2}} (a + p_2) \rho^2 dv^*. \quad (74)$$

Условие (74) является основным, а условие (73) не играет существенной роли, так как момент системы относительно оси, перпендикулярной оси симметрии, близок к нулю и в случае существования плоскости симметрии равен нулю.

Как показали Г. М. Идлис [8] и Г. Г. Кузмин [9], вращающаяся система, стационарная в регулярном поле, обладает плоскостью симметрии. Поэтому для гомологичной системы каждая часть равенства (73) должна быть равна нулю.

Если подставим выражение (65) в (74) и поделим на квадрат числа тел системы, то получим

$$\frac{5}{2} \left(\frac{\alpha}{\tau^*} \right) \overline{(l \rho^2)} = \overline{\left(\frac{a + p_2}{\tau^*} l \rho^2 \right)}, \quad (75)$$

где черта означает усреднение по всей системе. Из (75) следует, что

$$\frac{5}{2}\bar{a} \approx \bar{a} + \bar{p}_2 \quad (76)$$

или

$$\bar{p}_2 \approx \frac{3}{2}\bar{a}. \quad (77)$$

Следовательно, если система гомологична, то средняя величина избыточного кинетического момента относительно оси симметрии, уносимого при диссипации, равна $3/2$ величины уносимого среднего момента относительно той же оси.

Решение системы дифференциальных уравнений с частными производными (54)—(61), полученное численными методами при заданных граничных условиях, опишет состояние гомологичной системы.

Ленинградский Государственный
университет
Бухарестский университет

THE ROTATING SYSTEMS OF GRAVITATING BODIES IN QUASI-STATIONARY STATE

T. A. AGEKIAN, I. M. MICHEILE

The system of equations describing the state and the evolution of rotating quasi-stationary system of gravitating bodies is given. Unlike the previous results the theory is free from the assumption of equality of components of peculiar velocity dispersion. It is shown that there exists a rotating quasi-stationary system the evolution of which is homological. The superfluous rotating momentum carried out by dissipating stars in such the system is equal in average to $3/2$ of the mean rotating momentum of the stars.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Т. А. Агекян, Астрон. ж., 37, 317, 1960.
2. К. Ф. Огородников, Астрон. ж., 34, 770, 1957.
3. Г. Г. Кузмин, Труды Астрофиз. ин-та АН Кав.ССР, 5, 70, 1965.
4. Т. А. Агекян, Астрон. ж., 43, 425, 1966.
5. Л. Э. Гуревич, Б. Ю. Левин, ДАН СССР, 70, 781, 1950.
6. Т. А. Агекян, Астрон. ж., 35, 26, 1958.
7. Т. А. Агекян, Астрон. ж., 40, 318, 1963; 41, 523, 1964.
8. Г. М. Идлис, Известия Астрофиз. ин-та АН Кав.ССР, 13, 3, 1962.
9. Г. Г. Кузмин, Публ. Тартуской астрон. обс., 34, 9, 1964.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5

НОЯБРЬ, 1969

ВЫПУСК 4

ОБРАЗОВАНИЕ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ
ТРОЙНЫХ СБЛИЖЕНИЯХ

Т. А. АГЕКЯН, Ж. П. АНОСОВА, В. Н. БЕЗГУБОВА

Поступила 16 апреля 1969

Рассмотрен вопрос о вероятности образования двойных систем при случайном сближении трех гравитирующих тел. Численные решения уравнений движения выполнены на ЭВМ. В рассмотренной случайной выборке 1600 тройных сближений, 656 сближений завершились образованием двойных систем. Вероятность образования двойной звезды зависит от характеристики H — отношения полной энергии системы к абсолютному значению потенциальной энергии в момент наибольшего тройного взаимодействия. Кроме того, наибольшая вероятность образования двойных систем соответствует случаю, когда расстояния между телами в момент наибольшего тройного взаимодействия сравнимы между собой.

Проблема образования двойной системы при сближении трех гравитирующих тел, хотя и является классической по своему характеру, еще мало изучена. В 1937 году В. А. Амбарцумян [1] указал на реальность такого процесса. Тем не менее существовало и, основывающееся главным образом на работах Шази, убеждение в невозможности захвата при сближении трех тел. В 1947 году О. Ю. Шмидт [2] привел численный пример, иллюстрирующий возможность захвата. В работах Г. Ф. Хильми [3], Г. А. Мермана [4, 5] и В. Ф. Проскурина [6] эта возможность была теоретически обоснована.

Вопрос о вероятности образования двойной системы при случайном сближении трех гравитирующих тел был рассмотрен Р. А. Саакяном [7], показавшим, что эта вероятность отлична от нуля. В работе [7] ввиду сложности аналитического изучения задачи рассматривался лишь случай, когда при сближении трех тел одно из расстояний во много раз меньше двух других расстояний между телами.

В настоящее время благодаря использованию ЭВМ имеется возможность исследовать поставленную задачу, не делая каких-либо ограничений.

Характеристика тройного сближения, определяющая вероятность образования двойной системы. В работах [8—10] было установлено, что распад тройной системы с отрицательной энергией практически всегда происходит после тесного *тройного* сближения тел, то есть такого сближения, когда все три расстояния между телами сравнимы между собой. Практически не было случаев распада после тесного двойного сближения при присутствии на некотором отдалении третьего тела. Можно поэтому предвидеть что и в задаче образования двойных систем при тройных сближениях более эффективны сближения, характеризующиеся сильным *тройным* взаимодействием.

В процессе тройного сближения потенциальная энергия тройной системы по абсолютной величине сначала растет, достигает максимума (максимумов может быть два), а затем, если не образовалась двойная система, убывает, стремясь к нулю.

Взаимодействие между двумя телами тем сильнее, чем больше в данный момент по абсолютной величине их взаимная потенциальная энергия. Однако, было бы неправильным утверждать, что и *тройное* взаимодействие тем сильнее, чем больше в данный момент по абсолютной величине потенциальная энергия тройной системы. Часто максимум абсолютной величины потенциальной энергии будет достигаться в момент тесного сближения двух тел при относительной отдаленности третьего тела. В этот момент будет сильное двойное взаимодействие, а не тройное.

Уместно считать, что наиболее сильное тройное взаимодействие при сближении происходит в момент, когда достигает минимума сумма квадратов расстояний между телами

$$\lambda = \sum_{i+j} r_{i,j}^2 \quad (1)$$

Так как образованию двойной системы способствует сильное тройное взаимодействие, то естественно предполагать, что образование двойной системы при тройном сближении тем более вероятно, чем больше абсолютная величина потенциальной энергии

$$-U_1 = Gm^2 \sum_{i+j} \frac{1}{r_{i,j}} \quad (2)$$

в момент, когда λ достигает минимума.

С другой стороны, чем больше полная положительная энергия E тройной системы сближающихся тел, тем меньше должна быть вероятность образования двойной системы.

Поэтому можно предвидеть, что основной характеристикой сближения, определяющей вероятность образования двойной системы, является величина H — отношение полной энергии системы к абсолютной величине потенциальной энергии системы в момент, когда λ достигает минимума.

$$H = \frac{E}{-U_1} = \frac{T_0 + U_0}{-U_1}. \quad (3)$$

Здесь T_0 и U_0 — соответственно, кинетическая и потенциальная энергии системы в некоторый момент, который можно принять за начальный.

Чем больше H , тем вероятность образования двойной системы должна быть меньше.

Примем массы тел равными единице. Если единицы расстояния и времени принять равными отвлеченным единицам, то $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$.

Применение метода Монте-Карло и результаты. Для получения представительной случайной выборки начальных условий рассмотрим с некоторого (начального) момента прицельные движения сближающихся тел, т. е. движения, которые происходили бы при отсутствии сил взаимодействия. Начало координат совместим с центром инерции системы. Точку на прицельной прямой, ближайшую к началу координат, назовем прицельной точкой тела. Проведем плоскость XOY через прицельные точки первого и второго тела, а ось OX через прицельную точку первого тела. Расстояние этой точки от начала координат примем за единицу длины. Полярные координаты прицельной точки второго тела обозначим ρ и φ . Скорость прицельного движения первого и второго тела обозначим, соответственно, v и $k \cdot v$, углы между векторами скоростей первого и второго тела и плоскостью XOY — α_1 и α_2 , а моменты прохождения первым и вторым телом своих прицельных точек — t_1 и $t_1 + \tau$.

Уравнения прицельного движения первой звезды имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1, \\ y_1 &= -v \cos \alpha_1 \cdot (t - t_1), \\ z_1 &= -v \sin \alpha_1 \cdot (t - t_1), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

второй звезды —

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \rho \cos \varphi + kv \cos \alpha_2 \cdot \sin \varphi \cdot (t - t_1 - \tau), \\ y_2 &= \rho \sin \varphi - kv \cos \alpha_2 \cdot \cos \varphi \cdot (t - t_1 - \tau), \\ z_2 &= -kv \sin \alpha_2 (t - t_1 - \tau), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и третьей —

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= -x_1 - x_2, \\ y_3 &= -y_1 - y_2, \\ z_3 &= -z_1 - z_2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Величины α_1 , α_2 и φ задавались как случайные, равномерно распределенные в промежутке $[0, 2\pi]$. Величина k получалась при помощи равенства $\beta = \ln k$, в котором β принималось случайным равномерно распределенным в промежутке $[-1, +1]$. Случайная величина ρ задавалась в промежутке $[0, 1]$ с плотностью вероятности 2ρ , а τ как равномерно распределенная в промежутке $[-1/2v, +1/2v]$.

Чтобы получить достаточный диапазон значений H , вводилась вспомогательная величина

$$L = \frac{T_0}{2G}.$$

Так как в начальный момент счета тела находятся еще далеко друг от друга, то $|-U_0| \ll T_0$. В момент же, когда λ достигает минимума, тела находятся недалеко от своих прицельных точек. Поэтому величина L не должна намного отличаться от H . Если значения L выбирать в достаточно широком интервале, то будет обеспечен и достаточный ранг значений H .

Значения L задавались равными $L = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.40, 0.50, 0.75, 1.00, 2.00, 3.00, 4.00, 6.00, 8.00, 10.00$. Для каждого из этих значений L рассматривалось 100 случайных начальных условий. Таким образом всего были выполнены вычисления для 1600 случайных тройных сближений.

После получения случайных величин α_1 , α_2 , ρ , φ , k знание фиксированной L определяло по очевидной формуле

$$v^2 = \frac{8GL}{3(1+k^2)}$$

скорость первой звезды, после чего можно было получить значение случайной величины τ .

За начальный момент интегрирования принимается момент t_0 , когда до сближения расстояние между наиболее медленно движущимся телом и его прицельной точкой равно 10. Начальные координаты и компоненты скорости определялись при помощи равенств (4)—(6). Всякий раз для начального момента производилась проверка знака полной энергии тройной системы и знаков энергий каждой из трех пар тел, которые можно выделить в системе. Если хоть одна из этих энергий оказывалась отрицательной, вычисление с данными начальными условиями не выполнялось.

Численное интегрирование уравнений истинных движений тел выполнялось с контролями: постоянство полной энергии и главного момента количества движения системы и неподвижность ее центра инерции. Вычисление заканчивалось в момент, когда после сближения тел расстояние одного из них от центра инерции становилось равным 15 единицам расстояния. В момент, когда в ходе истинного движения величина λ достигала минимума, определялась потенциальная энергия U_1 , что позволяло найти H .

Из общего числа 1600 случайных тройных сближений 656 завершились образованием двойной системы. Табл. 1 показывает число рассмотренных сближений N , имеющих данное значение H , число образовавшихся при этом двойных систем n и относительную частоту образования двойных систем n/N , которая должна быть близка к вероятности образования двойных систем при данном H .

Таблица 1

H	N	n	n/N
<0.2	278	208	0.75
0.2— 0.4	165	108	0.66
0.4— 0.6	147	88	0.60
0.6— 0.8	100	57	0.57
0.8— 1.2	159	85	0.54
1.2— 2.0	169	62	0.37
2.0— 3.0	98	26	0.27
3.0— 4.0	104	14	0.14
4.0— 6.0	122	5	0.14
6.0—23.0	258	3	0.01
	<u>1600</u>	<u>656</u>	

Таблица показывает, что вероятность захвата, действительно, сильно зависит от значения характеристики H . Наиболее интересным, по-видимому, результатом является большая вероятность захвата. Она

не очень мала даже в тех случаях, когда полная энергия сближения в несколько раз превосходит абсолютную величину потенциальной энергии в момент сильного тройного взаимодействия.

Табл. 2 дает распределение N , n и n/N в зависимости от отношения наибольшего расстояния к наименьшему — r_{\max}/r_{\min} в момент сильного тройного взаимодействия.

Таблица 2

r_{\max}/r_{\min}	N	n	n/N
1.0—1.4	118	39	0.33
1.4—1.8	290	114	0.39
1.8—2.2	338	152	0.45
2.2—2.6	231	108	0.47
2.6—3.0	154	74	0.48
3.0—3.4	135	66	0.49
3.4—3.8	62	26	0.42
3.8—4.6	93	30	0.32
4.6—6.0	84	27	0.32
6.0—10.0	70	16	0.23
10.0—20.0	25	4	0.16

Наибольшая относительная частота и, следовательно, вероятность образования двойных систем приходится на область значений $r_{\max}/r_{\min} = [1,8—3,4]$, что соответствует случаю, когда расстояния между телами в момент наибольшего тройного взаимодействия сравнимы, но не почти равны. Интересно, что в тех случаях, когда расстояния наибольшего взаимодействия почти одинаковы, относительная

Таблица 3

e	n	e	n
0.0—0.1	2	0.5—0.6	56
0.1—0.2	7	0.6—0.7	84
0.2—0.3	17	0.7—0.8	70
0.3—0.4	26	0.8—0.9	123
0.4—0.5	39	0.9—1.0	231

частота захватов несколько меньше. Еще меньше она в тех случаях, когда одно из расстояний между телами намного уступает двум другим.

Табл. 3, дающая распределение эксцентриситетов в образовав-

шихся двойных, показывает, что плотность вероятности монотонно и сильно растет с увеличением e .

Таблица 4

a	n	a	n
<1.0	12	7.0— 8.0	27
1.0—2.0	59	8.0— 10.0	37
2.0—3.0	99	10.0— 14.0	27
3.0—4.0	128	14.0— 20.0	20
4.0—5.0	93	20.0— 30.0	17
5.0—6.0	66	30.0— 100.0	19
6.0—7.0	38	100.0—2510.0	14

В табл. 4 представлено распределение больших полуосей у образовавшихся пар.

Обнаруживается отчетливый максимум в области $3 < a < 4$.

Астрономическая обсерватория
ЛГУ

FORMATION OF BINARY SYSTEMS IN TRIPLE ENCOUNTERS

T. A. AGEKIAN, J. P. ANOSOVA, B. N. BEZGUBOVA

The probability of formation of binary systems as a result of triple encounters of stars is investigated. The numerical solutions of equations of motion is obtained using a computer in the sample of 1600 chance initial conditions. 656 encounters were accomplished with the formation of binary systems. The probability of binary system formation depends on value H —the ratio of the system total energy to the absolute value of potential energy in the moment of the strongest triple interaction. Besides the greatest probability of binary system formation corresponds to the cases when three distances between the stars in the moment of the strongest triple interaction are comparable.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, *Астрон. ж.*, 14, 3, 1937.
2. О. Ю. Шмидт, *ДАН СССР*, 58, № 2, 1947.
3. Г. Ф. Хильми, *Проблема n тел в небесной механике и космогонии*. Изд. АН СССР, 1951.
4. Г. А. Мерман, *Бюлл. ИТА*, 5, 325, 1953.
5. Г. А. Мерман, *Бюлл. ИТА*, 5, 373, 1953.
6. В. Ф. Проскурин, *Бюлл. ИТА*, 5, 429, 1953.
7. Р. А. Саакян, *О вероятности захвата в задаче трех тел*, АН АрмССР, 1961.
8. Т. А. Агекян, Ж. П. Аносова, *Астрон. ж.*, 44, 126, 1967.
9. Т. А. Агекян, Ж. П. Аносова, *Астрофизика*, 4, 31, 1968.
10. Ж. П. Аносова, *Астрофизика*, 5, 161, 1969.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5

НОЯБРЬ, 1969

ВЫПУСК 4

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПОЛИТРОПНЫЕ МОДЕЛИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ
ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В нерелятивистском приближении обобщенной теории политропные модели рассматривались в [1]. Ниже мы приводим некоторые результаты, полученные для политропных моделей с уравнением состояния

$$P = A\rho^{1+1/n} \quad (n \neq \infty) \quad (1)$$

в релятивистской обобщенной теории гравитации. Последняя составляет содержание работ [2] и [3], где сформулирована внутренняя задача для статической сферически-симметрической конфигурации и исследована модель несжимаемой жидкости ($n = 0$). Мы пользуемся обозначениями [3] и во многих вопросах ссылаемся на эту работу опускаем.

Величина A в (1) называется политропной температурой модели. Мы оставляем вне рассмотрения вопрос о выборе этой температуры, замечая, что модель со значением $A = A_*$ переходит в другую, с $A = \alpha A_*$ (но с тем же индексом n), при следующем преобразовании подобия:

$$s \rightarrow \alpha s_*, \quad \rho \rightarrow \alpha^{-n} \rho_*, \quad P \rightarrow \alpha^{-n} P_*, \quad E \rightarrow E_*, \quad f \rightarrow f_*, \quad (2)$$

причем

$$\omega = \omega_*, \quad M = \alpha^{n/2} M_*, \quad R = \alpha^{n/2} R_*, \quad P_0 = \alpha^{-n} P_{0*}. \quad (3)$$

Потому численное интегрирование проводилось для значения $A_* = 1$, а на рис. 1 и в табл. 1 представлены интегральные параметры

$$p_0 = P_0 A^n, \quad M_* = MA^{-n/2}, \quad R_* = RA^{-n/2}, \quad w = \frac{M_*}{R_*} = \frac{M}{R} \quad (4)$$

для наиболее важных политроп с индексами $n = 1.5$ и 3 . Для сравнения на рис. 1 приведена зависимость $M_*(p_0)$ для несжимаемой жидкости ($\rho = 1$).

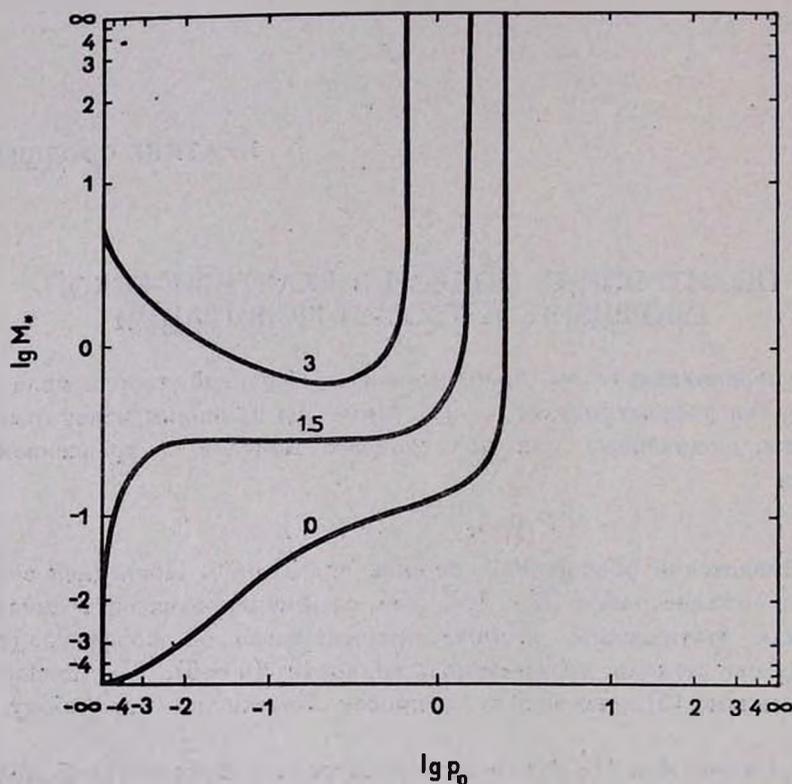


Рис. 1. Зависимость массы M_* от центрального давления p_0 (см. (4)) политропных моделей с индексами, отмеченными на кривых.

В области малых значений p_0 (малые w) справедливы как теория Эйнштейна, так и (при еще меньших p_0) соответствующие нерелятивистские приближения. Область $p_0 \sim 1$ (большие w) принадлежит гравитарам. Максимально допустимые значения центрального „давления“ p_0 равны 2.070 ($n = 0$), 1.372 ($n = 1.5$) и 0.734 ($n = 3$). Представленное на рис. 1 явление насыщения центрального давления является результатом наложения эффектов искривления пространства и ослаб-

ления гравитационного взаимодействия, связанных с большими концентрациями масс.

Таблица 1

НАИБОЛЕЕ ВАЖНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПОЛИТРОПНЫХ МОДЕЛЕЙ В
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

$n=1.5$				$n=3$			
w	ρ_0	M_*	R_*	w	ρ_0	M_*	R_*
0.652	1.372	$1.12 \cdot 10^4$	$1.71 \cdot 10^4$	0.571	0.734	104.9	$1.83 \cdot 10^2$
.631	1.372	$2.79 \cdot 10^3$	$4.43 \cdot 10^3$	0.568	0.734	85.16	$1.49 \cdot 10^2$
.610	1.372	$6.97 \cdot 10^2$	$1.14 \cdot 10^3$	0.565	0.734	64.41	$1.14 \cdot 10^2$
.583	1.372	87.59	$1.50 \cdot 10^2$	0.562	0.734	52.28	93.01
.564	1.372	21.81	38.66	0.553	0.734	26.19	47.31
.555	1.370	10.90	19.64	0.546	0.734	13.16	24.10
.546	1.368	5.458	9.998	0.541	0.734	6.691	12.37
.535	1.363	2.733	5.106	0.515	0.729	3.285	6.378
.521	1.328	1.380	2.652	0.473	0.686	1.677	3.548
.490	1.212	0.715	1.459	0.356	0.555	0.890	2.503
.416	0.880	0.407	0.978	0.125	0.205	0.677	5.416
.264	0.140	0.321	1.217	$7.76 \cdot 10^{-2}$	$5.62 \cdot 10^{-4}$	1.963	25.29
.220	$4.61 \cdot 10^{-2}$	0.332	1.511	$5.62 \cdot 10^{-2}$	$3.64 \cdot 10^{-5}$	2.770	49.30
.155	$7.64 \cdot 10^{-3}$	0.324	2.088	$3.06 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^{-8}$	3.619	$1.18 \cdot 10^2$
.037	$7.18 \cdot 10^{-5}$	0.149	4.010	$1.75 \cdot 10^{-2}$	$8.50 \cdot 10^{-8}$	3.911	$2.23 \cdot 10^2$
.012	$4.48 \cdot 10^{-6}$	$6.78 \cdot 10^{-2}$	5.473	$9.00 \cdot 10^{-3}$	$5.22 \cdot 10^{-9}$	4.126	$4.58 \cdot 10^2$
.003	$1.37 \cdot 10^{-7}$	$2.35 \cdot 10^{-2}$	7.833	$2.10 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-11}$	4.216	$2.04 \cdot 10^3$

Величина

$$q = \frac{P}{\rho}, \tag{5}$$

называемая локальным параметром релятивизма, в центре модели равна

$$q_0 = \rho_0^{n+1}. \tag{6}$$

Близость максимально возможных значений q_0 к единице (см. табл. 2) в какой-то мере гармонирует с фундаментальным выводом статистической физики об ограниченности $P/\rho < 1$.

Ввиду того, что локальное условие $q_0 \sim 1$ неизбежности релятивистского рассмотрения известным образом (табл. 1) перекрывается с интегральным условием относительно w ($w \geq 0.5$), то в обобщенной

теории применимость того или иного приближения однозначно определяется степенью компактности $w = M/R$ конфигурации.

Таблица 2
МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА $q_0 = P_0/\rho_0$ ДЛЯ ПОЛИТРОПНЫХ МОДЕЛЕЙ ПО ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

n	max q_0	
	нерелятивистская теория	релятивистская теория
0	1.51	2.070
1.5	1.18	1.135
3	1.02	0.925

Мы не приводим значения гравитационного дефекта массы — наглядное представление о порядке величины можно получить на примере несжимаемой жидкости [3], а также поведения функций $\lambda(r)$ и $\nu(r)$ внутри распределения масс. Значения последних на поверхности даются внешним решением Гекмана, а в центре конфигурации $\lambda(0) = -\infty$, $\nu(0) = \nu(R) - 2(n+1) \ln(q_0 + 1)$.

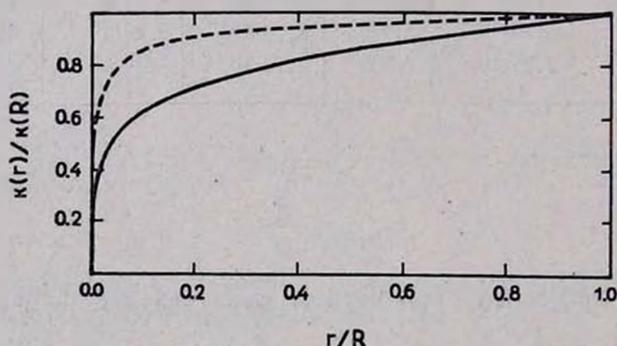


Рис. 2. Поведение гравитационного скаляра $k(r)$ внутри гравитара.

Пунктирная линия на рис. 2 описывает качественное изменение гравитационного скаляра $k(r)$ внутри конфигураций. При малых w она примыкает к левой и верхней сторонам рамки, а с увеличением w асимптотически приближается к жирной линии. Такие предельные поведения при $w \rightarrow \infty$ характерны и для остальных функций, что соответствует тому обстоятельству, что гравитары суть подобные друг

другу модели. Более того, указанные асимптотические поведения слабо зависят от индекса n политропы. Изображенная на рис. 2 функция относится к значению $n = 1.5$; соответствующие функции для $n = 0$ и $n = 3$ расположены снизу и сверху от нее, но настолько близко, что чертить их в данном масштабе не имело бы смысла.

Важно заметить, что область расстояний, в которой заметно существенное отклонение внутренних решений от соответствующих в общей теории относительности, порядка гравитационного радиуса $R_g = 2M$ конфигурации.

Автор выражает благодарность Г. С. Саакяну за обсуждения.

Polytropic models by the relativistic generalized theory of gravity. The polytropic models ($n = 0, 1.5, 3$) by the relativistic generalized theory of gravity are investigated. The central value of the parameter of relativity P_0/ρ_0 for gravitars is shown to be limited. This fact is due to the generalized theory.

1 октября 1968

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

М. А. МНАЦАКАНЯН

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. А. Мнацаканян, Р. М. Авакян, *Астрофизика*, 4, 646, 1968.
2. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, *Астрофизика*, 4, 567, 1968.
3. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, *Астрофизика*, 5, 569, 1969.

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ИОРДАНА-ДИКЕ И НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Известно, что наряду с уравнениями гравитационного поля Эйнштейна развивается релятивистская тензорно-скалярная теория Иордана-Дике [1-3], которая не противоречит имеющимся наблюдательным данным. В этой теории помимо метрического тензора вводится переменный скаляр, фигурирующий в виде гравитационной постоянной в уравнениях поля Эйнштейна. Сама идея переменности „гравитационной постоянной“ гармонирует с рядом, главным образом, геофизических данных [2, 4, 5].

В данном сообщении приводятся некоторые космологические следствия уравнений Иордана-Дике.

1. Автором было получено точное однородное и изотропное решение при ультрарелятивистском уравнении состояния ($P = \rho c^2/3$):

$$G = C_3 \left[\left| 2 \sqrt{-\frac{2\zeta-3}{3} \left(C_1 \theta - \frac{2\zeta-3}{3} \theta^2 - 4k \right)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{3} (2\zeta-3) \theta + C_1 \right| \right]^{\pm \sqrt{-\frac{3}{2\zeta-3}}}, \quad R = C_4 \sqrt{\frac{G}{|\theta|}}$$

$$\eta + C_2 = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{C_1 - 8^{1/\theta}}{\sqrt{C_1^2 - \frac{16}{3} (2\zeta-3)}} & \text{при } k = +1 \\ \mp \frac{2 \sqrt{C_1 \theta - \frac{2\zeta-3}{3} \theta^2}}{C_1 \theta} & \text{при } k = 0 \\ \mp \frac{1}{2} \ln \left| \frac{8 + C_1 \theta + 2 \sqrt{4 \left(C_1 \theta - \frac{2\zeta-3}{3} \theta^2 + 4 \right)}}{\theta} \right| & \text{при } k = -1 \end{cases}$$

при $\zeta < 3/2$,

где ζ — безразмерная постоянная теории, оцениваемая Г. С. Саакяном и М. А. Мнацаканяном [1] неравенством $\zeta \leq -30$; η — временная координата, связанная с собственным временем соотношением $d\tau = (R/c)d\eta$; $k = 0, \pm 1$ — показатель знака кривизны трехмерного пространства, G — гравитационный скаляр, R — радиус кривизны трехмерного пространства, θ — параметр, изменяющийся в пределах

$$\left[-\infty, \frac{3}{2(3-2\zeta)} \left(C_1 - \sqrt{C_1^2 - \frac{16(2\zeta-3)}{3} k} \right) \right],$$

C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования.

Это решение имеет особенность при $\tau = 0$. В окрестности этой точки решение записывается приближенно так (случай $\zeta = -36$)

$$G \cong \text{const}_1 \tau^{-17}, \quad R \cong \text{const}_2 \tau^{27}, \quad \rho \cong \text{const}_3 \tau^{-87}. \quad (2)$$

В случае же уравнений поля Эйнштейна в окрестности особой точки получается:

$$G = \text{const}_1, \quad R \cong \text{const}_2 \tau^{1/2}, \quad \rho \cong \frac{3c^2}{32\pi G} \tau^{-2}. \quad (3)$$

2. Произведен качественный анализ однородной изотропной задачи при нулевом давлении и разработан способ выделения частного решения, отвечающего наблюдениям. При нулевом давлении задача имеет 7 типов решений: два плоских, три закрытых с положительной кривизной и два открытых с отрицательной кривизной. Все решения имеют особенность во времени.

Плоское решение найдено аналитически в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} G &= C_1 u^{\alpha_1} |u - u^*|^{\beta_1}, \\ R &= C_3 u^{\alpha_2} |u - u^*|^{\beta_2}, \\ \tau &= C_4 \frac{12 - u}{u - u^*} + C_2, \\ \rho &= \frac{3 - 2\zeta}{12c^3} \frac{C_2^3}{C_3^2 C_1} \frac{1}{R^3}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ и u^* — постоянные, выражаемые через ζ , параметр u может изменяться либо в пределах $[0, u^*]$, либо в пределах $[u^*, \infty]$. В случае интервала изменения $u - [u^*, \infty]$ радиус кривизны монотонно возрастает, начиная с момента сингулярности. Гравитационный скаляр в момент сингулярности имеет бесконечно большое значение. Затем он монотонно убывает, асимптотически приближаясь к нулю.

Все неплоские решения асимптотически приближаются к плоскому (в смысле зависимости G, R, ρ от времени) при τ , стремящемся к нулю. В случае положительной кривизны изменение R ограничено сверху, в случае отрицательной — R неограниченно увеличивается.

Из уравнений поля получены формулы, позволяющие выделять частное решение по имеющимся 4 наблюдательным величинам: современному значению G_0 („гравитационная постоянная“), ρ — средней плотности материи, H_0 — постоянной Хаббла, q_0 — параметра замедления. Из этих формул получается ограничение, налагаемое на параметр замедления

$$q_0 > \frac{\zeta - 3}{2\zeta - 3} \frac{8\pi G_0}{3H_0^2} \rho_0 + \frac{1}{4\zeta}. \quad (5)$$

При $H_0 = 75 \text{ км/сек/Мпс}$, $\rho_0 = 10^{-31} \text{ г/см}^3$, $G_0 = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ CGS}$ получаем $q_0 \gtrsim -0.02$. При приведенных выше H_0 и ρ_0 и при q_0 в пределах

от 0 до 1 (такая оценка q_0 соответствует современным представлениям [6—8]) однородная изотропная задача в рамках теории Иордана-Дике приводит к открытой модели мира с отрицательной кривизной. Решение имеет особенность $R = 0$ в прошлом, причем радиус кривизны монотонно возрастает. Гравитационный скаляр бесконечен в момент особенности. Далее он монотонно уменьшается, асимптотически приближаясь к некоторой постоянной, отличной от нуля. Современное G близко к этому предельному значению. В настоящее время относительное изменение G порядка 10^{-11} в год.

Численно были найдены решения для ряда значений q_0 в интервале $0 + 1$ и при вышеприведенных значениях H_0 и ρ_0 . На рис. 1 приведен результат численного интегрирования для случая $q_0 = -0.2$.

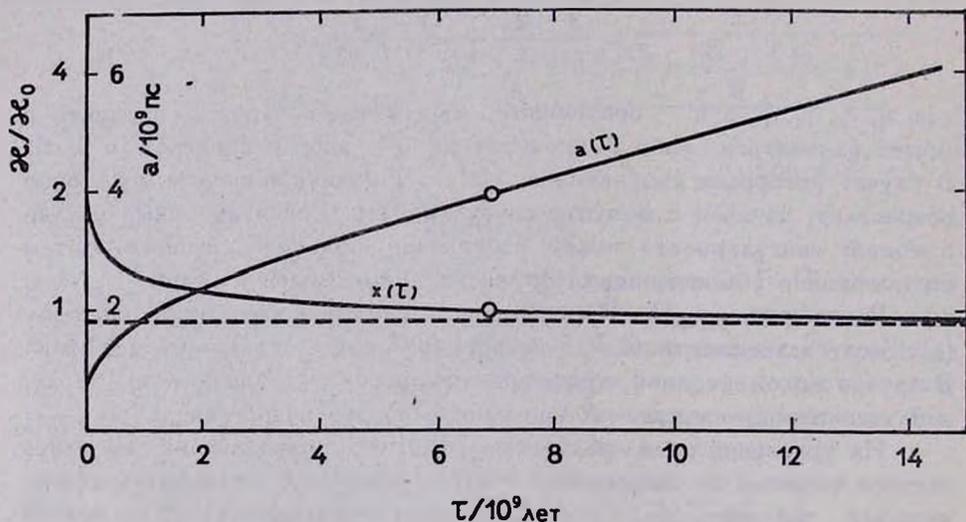


Рис. 1. Зависимость радиуса кривизны и гравитационного скаляра от времени в случае $q_0 = -0.2$. Кружками отмечен настоящий момент.

Время, прошедшее с момента сингулярности до настоящего момента, в пределах возможных значений q_0 от 0 до 1, изменяется соответственно от 8.6 до 5.0 млрд. лет, что хорошо согласуется с оценкой Эволюционного возраста старейших звезд при условии переменности G [2]. Как известно, в случае уравнений поля Эйнштейна в этом отношении имеются трудности (см., например, [6]). На рис. 2 приведены графики космологических временных шкал для случаев уравнений поля Эйнштейна и Иордана-Дике.

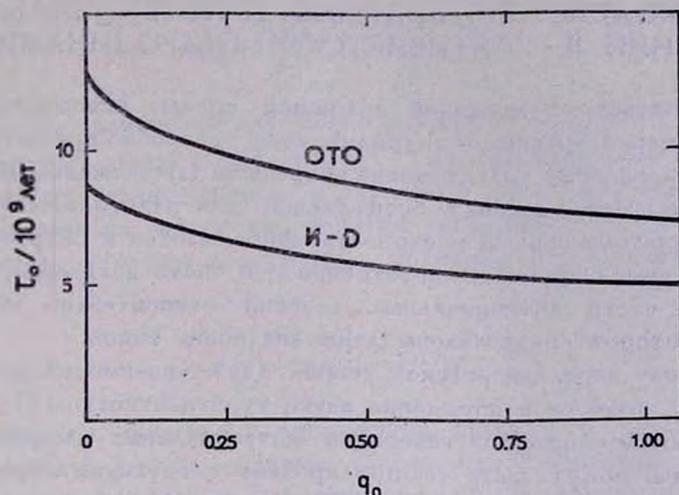


Рис. 2. Время расширения как функция параметра замедления в случае уравнений Иордана-Дике (нижняя кривая) и уравнений Эйнштейна.

Автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук А. Ф. Богородскому и член-корр. АН АрмССР Г. С. Саакяну за внимание, проявленное к работе.

The cosmological solutions of the Jordan-Dicke field equations and the observed data. The results of the cosmological researches of the Jordan-Dicke field equations are given.

25 января 1968

Исправлена 1 июля 1969

Астрономическая обсерватория

КГУ

А. В. МАНДЖОС

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, *Астрофизика*, 4, 567, 1968.
2. Р. Дикк, сб. „Гравитация и относительность“, М., 1965, стр. 251.
3. С. Вригс, Р. Н. Дикк, *Phys. Rev.*, 124, 925, 1961.
4. Р. Н. Дикк, *Science*, 138, 653, 1962.
5. А. Ф. Богородский, *Вестн. КГУ, сер. астрономии*, 11, 46, 1969.
6. А. Р. Сандейдж, сб. „Наблюдательные основы космологии“, М., 1965, стр. 46.
7. А. Р. Сандейдж, *Ap. J.*, 134, 3, 1961.
8. Н. Спитнард, *Publ. A. S. P.*, 78, 367, 1966.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ I.

Взаимодействие движений сплошной среды, описываемое нелинейными членами уравнений гидродинамики, способно привести к генерации потенциальных (p) движений вихревыми (s) движениями и наоборот. Этот эффект особенно существенен для релятивистских движений, когда макроскопическая скорость приближается к скорости света, и может служить причиной неустойчивости чисто вихревых (бездивергентных) и чисто потенциальных течений относительно перехода в режим, в котором представлены движения обоих типов.

В рамках нерелятивистской теории (sp) — взаимодействие исследовалось на примере возбуждения звука турбулентностью [1, 2].

Рассмотрим процесс генерации потенциальных движений вихревыми. Задача может быть сформулирована следующим образом. Считаем, что в некоторый момент среде сообщено s -движение с полем скоростей v_s в масштабах от некоторого минимального до максимального. Нужно ожидать, что по прошествии определенного времени τ , разного для разных масштабов, нелинейное взаимодействие вихрей приведет, вообще говоря, к возникновению поля потенциальных скоростей v_p с соответствующими возмущениями плотности $\delta\rho$. Требуется найти связь v_p и $\delta\rho$ с начальным полем v_s .

Хотя полное и математически строгое рассмотрение нелинейных эффектов является весьма сложной задачей, некоторые результаты качественного характера могут быть получены весьма просто — без интегрирования дифференциальных уравнений, если воспользоваться распространенным в гидродинамике методом приближенной оценки и сравнения по порядку величины различных членов гидродинамических уравнений.

Пусть пространственная часть 4-скорости в некотором масштабе R изменилась за время τ на величину $\sim U_s$; тогда различные члены релятивистского уравнения движения [3]

$$w U^k \frac{\partial U_a}{\partial x^k} = - \frac{\partial p}{\partial x^a} - U_a U^k \frac{\partial p}{\partial x^k}$$

можно оценить следующим образом:

$$U^0 \frac{\partial U_a}{\partial ct} \sim U^0 \frac{U_a}{c\tau} \sim \gamma^2 \frac{v}{c^2\tau};$$

$$U^a \frac{\partial U_a}{\partial x^a} \sim \gamma^2 \frac{v^2}{c^2 R}; \quad \frac{\partial p}{\partial x^a} \sim \frac{\delta p}{R} \sim u^2 \frac{\delta\rho}{R};$$

$$U_1 U^0 \frac{\partial p}{\partial ct} \sim \gamma^2 \frac{v}{c} \frac{\partial p}{c\tau} \sim \gamma^2 v \frac{u^2}{c^2} \frac{\partial \rho}{\tau};$$

$$U_1 U^2 \frac{\partial p}{\partial x^2} \sim \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} u^2 \frac{\partial \rho}{R}.$$

Здесь ∂p , $\partial \rho$ — изменение давления и плотности за время τ в масштабе R , u — скорость звука, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, w — энтальпия ($\rho c^2 < w < 2\rho c^2$). Точно так же можно оценить и слагаемые уравнения неразрывности. Не выписывая их полностью, обратим внимание на то, что в члене, содержащем операцию дивергенции, сохраняется лишь потенциальная скорость

$$w \frac{\partial U^2}{\partial x^2} \sim w \gamma \frac{v_p}{cR} \sim \rho c \gamma \frac{v_p}{R}.$$

Выберем в качестве τ промежуток времени, за который изменение скорости в данном масштабе таково, что нелинейный „инерциальный“ член $\sim v^2/R$ близок к линейному $\sim v/\tau$. Этому условию отвечает $\tau \sim R/v$. Тогда сравнение членов в обоих указанных выше уравнениях приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{v_p}{v} \sim \frac{v_p}{v_s} \sim \frac{v_s^2}{u^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\rho} \sim \frac{v_p}{v_s}. \quad (2)$$

В нерелятивистском ($v \ll c$) случае (1)–(2) совпадают с формулами, выведенными тем же способом из классических уравнений [4].

Аналогичным образом легко получить приближенные соотношения, описывающие обратный процесс — порождение вихрей потенциальными движениями. Для трехмерной скорости генерируемых вихревых движений выполняется зависимость

$$\frac{v_s}{u} \sim \frac{v_p^2}{u^2}. \quad (3)$$

Как видно из (1)–(3), рассмотренные нелинейные процессы тем эффективнее, чем больше скорости, чем ближе исходное движение к релятивистскому режиму.

Мы благодарны за обсуждения Л. Э. Гуревичу.

Interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics. I. Approximative formulas for a generation of a potential motion by a vortex one (and on the contrary) are found on the basis of relativistic hydrodynamics.

17 июля 1968

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

А. Д. ЧЕРНИН
Е. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. M. J. Lighthell, Proc. Roy. Soc., A 211, № 1107, 564, 1952; A 222, № 1148, 1, 1954.
2. В. И. Кляцкин, Изв. АН, Физика атмосферы и океана, 2, 474, 1966.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1953, стр. 599.
4. Л. М. Озерной, А. Д. Чернин, Астрон. ж., 45, 1137, 1968.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ. II

Как известно, в гравитирующей системе существует четыре типа возмущений, не взаимодействующих между собой в линейном приближении: 1) продольные (потенциальные) волны, 2) поперечные (вихревые) волны, 3) волны энтропии, 4) гравитационные волны. Взаимодействие различных мод появляется во втором порядке теории возмущений благодаря нелинейностям уравнений общей теории относительности. Эти нелинейности можно разделить на гидродинамические (которые имеются и в классической теории) и гравитационные, специфичные для теории относительности. Как и в [1], нас будет интересовать нелинейное взаимодействие первых двух из указанных выше возмущений.

Если нелинейные эффекты малы, то величина гидродинамического эффекта определяется, вообще говоря, квадратом отношения v/u (u — скорость звука), а гравитационного — квадратом отношения v/c и отношением φ/c^2 (φ — ньютоновский потенциал). В соответствии с этим для процесса генерации потенциальных движений вихревыми находим следующие соотношения (основанные на оценке и сравнении по порядку величины различных слагаемых в уравнениях постньютоновской гидродинамики [2]):

$$\left(\frac{v_p}{v_s}\right)_1 \sim \frac{v_s^2}{u^2} \frac{1}{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{v_p}{v_s}\right)_2 \sim \frac{\varphi}{c^2}. \quad (2)$$

(v_p , v_s — потенциальная и вихревая скорости).

Для этих случаев относительная величина возмущений плотности есть

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{v_p}{v_s}. \quad (3)$$

Первое соотношение вытекает из релятивистской гидродинамики без учета гравитации [1], а второе описывает процесс генерации потенциальных движений вихревыми, обязанный гравитационной нелинейности.

Для анализа (2) рассмотрим одну конкретную задачу, относящуюся к космологической модели с вихревыми движениями [3, 4]. Пусть в ограниченной части фридмановского расширяющегося мира существуют вихревые движения с полем скорости v , в масштабах вплоть до максимального L . Если рассматриваемая область достаточно мала, то в течение ограниченного промежутка времени метрику внутри нее можно считать в нулевом приближении галилеевой. Кинематика расширения с наложенным на него вихревым движением описывается тогда классической гидродинамикой и линейной теорией тяготения. Нас будут интересовать ранние фазы эволюции „горячей“ вселенной, когда скорость звука близка к скорости света ($u = c/\sqrt{3}$). В этих условиях малость возмущений плотности, способных возникнуть из-за гидродинамической нелинейности, требует $v^2/c^2 \ll 1$.

В следующем приближении нужно учитывать возмущения галилеевой метрики, малые потенциальные скорости v_p и соответствующие им возмущения плотности. Для последних, согласно (2)–(3), находим

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_2 \sim \left(\frac{v_p}{v_s}\right)_2 \sim \frac{\varphi}{c^2} \sim \frac{r^2}{(ct)^2}. \quad (4)$$

Мы учли здесь, что

$$\varphi \sim \frac{GM}{r} \sim G\rho r^2 \sim H^2 r^2, \quad (5)$$

$$H = \frac{da}{dt} \sim \frac{1}{t}$$

(H — фактор Хаббла, a — фридмановский радиус).

Возмущения плотности особенно велики в наибольшем масштабе вихревых движений

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{2,L} \sim \left(\frac{L}{ct}\right)^2. \quad (6)$$

Отсюда следует, что условия малости возмущений плотности, создаваемых в расширяющемся фридмановском мире вихревыми движениями, есть

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1, \quad \left(\frac{L}{ct}\right)^2 \ll 1. \quad (7)$$

Поскольку $L \sim a \sim t^{1/2}$, то $\left(\frac{L}{ct}\right)^2 \sim t^{-1}$ и второе из условий (7) не может выполняться при $t \rightarrow 0$. Это означает, что ранние стадии эволюции горячей вселенной с „фотонными вихрями“ в общем случае обязаны быть нефридмановскими, как и предполагалось в [3, 4].

Благодарю А. Г. Дорошкевича, Я. Б. Зельдовича, И. Д. Новикова, Л. М. Озерного за обсуждения, приведшие к этой заметке.

Interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics. II. The hydrodynamical interaction of motions due to nonlinearity of gravitation equations in General Relativity is analysed in the Post-Newtonian approximation.

25 марта 1969

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

А. Д. ЧЕРНИН

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Чернин, Е. Д. Эйдельман, *Астрофизика*, 5, 668, 1969.
2. S. Chandrasekhar, *Ap. J.*, 142, 1488, 1965.
3. Л. М. Озерной, А. Д. Чернин, *Астрон. ж.*, 44, 1131, 1967; 45, 1137, 1968; *Письма ЖЭТФ*, 7, 436, 1968.
4. А. Д. Чернин, в сб. „Труды 5-ой школы по космофизике“, Апатиты, 1968, стр. 29.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЖУРНАЛА „АСТРОФИЗИКА“ ТОМ 5 за 1969 год

<i>Абрамов Ю. Ю., Напартович А. П.</i> Перенос резонансного излучения от точечного источника в полупространстве	187
<i>Азелян Т. А., Аносова Ж. П., Безубова В. Н.</i> Образование двойных систем при тройных сближениях	637
<i>Азелян Т. А., Баранов А. С.</i> Построение моделей звездных систем при помощи численного эксперимента	305
<i>Азелян Т. А., Михлиэ И. М.</i> Вращающиеся системы гравитирующих тел в квазистационарном состоянии	623
<i>Аносова Ж. П.</i> Исследование динамики тройных систем методом статистических испытаний. III. Случай различных масс компонентов	161
<i>Аносова Ж. П.</i> (см. <i>Азелян Т. А.</i>)	637
<i>Антонова Т. Д., Виткевич В. В., Панаджян В. Г.</i> Оценка интенсивности мерцающей компоненты источника ЗС 273 на частотах 86 и 60 Мц	283
<i>Аракелян М. А.</i> Кривая роста для расширяющейся атмосферы	75
<i>Аракелян М. А.</i> О характере эволюционных эффектов, связанных с квазизвездными радиисточниками. I.	461
<i>Аракелян М. А.</i> О характере эволюционных эффектов, [связанных с квазизвездными радиисточниками. II.	603
<i>Баранов А. С.</i> (см. <i>Азелян Т. А.</i>)	305
<i>Безубова В. Н.</i> (см. <i>Азелян Т. А.</i>)	637
<i>Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б.</i> Модели скоплений точечных масс с большим красным смещением в центре	223
<i>Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б.</i> О равновесных состояниях системы гравитирующих частиц	425
<i>Бисноватый-Коган Г. С., Свидов Э. Ф.</i> О связи белых карликов со вспышками сверхновых I типа	243
<i>Вандакуров Ю. В., Зельдович Я. Б.</i> Взаимодействие низкочастотного радиального и высокочастотного колебаний звезд	235

<i>Варданян Р. С., Емишбарян Н. Б.</i> К нелинейной нестационарной задаче переноса излучения в спектральной линии	203
<i>Видман Д. В., Хачикян Э. Е.</i> Спектральные наблюдения галактик Маркаряна с ультрафиолетовым континуумом. I.	113
<i>Виткевич В. В.</i> (см. <i>Антонова Т. Д.</i>)	283
<i>Витязев В. В.</i> О расширении планетарных туманностей	83
<i>Гринин В. П.</i> Об относительных интенсивностях водородных линий в спектрах туманностей	213
<i>Гринин В. П.</i> Интенсивности водородных линий в спектре оптически толстой плазмы	371
<i>Гудкова Г. А.</i> (см. <i>Шулов О. С.</i>)	477
<i>Гурзаян Г. А.</i> О световых кривых вспыхивающих звезд	383
<i>Гусейнзаде А. А.</i> Фотоэлектрическая фотометрия двойной звезды типа Вольф-Райе HD 211853	502
<i>Дагкесаманский Р. Д.</i> О зависимости спектрального индекса внегалактических радионисточников от плотности потока	297
<i>Дибай Э. А.</i> Спектры звезд в кометообразных туманностях	249
<i>Домке Х.</i> Образование линий при наличии магнитного поля. I. Матрица рассеяния	525
<i>Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.</i> Кинетическая теория нейтрино в анизотропных космологических моделях	539
<i>Емишбарян Н. Б.</i> (см. <i>Варданян Р. С.</i>)	203
<i>Зельдович Я. Б.</i> (см. <i>Бисноватый-Коган Г. С.</i>)	223
<i>Зельдович Я. Б.</i> (см. <i>Бисноватый-Коган Г. С.</i>)	425
<i>Зельдович Я. Б.</i> (см. <i>Вандакуров Ю. В.</i>)	235
<i>Зельдович Я. Б.</i> (см. <i>Дорошкевич А. Г.</i>)	539
<i>Калиберда В. С.</i> Функция распределения скоростей тел малых масс в скоплениях	433
<i>Каплан С. А., Цытович В. Н.</i> Рассеяние излучения в спектральной линии турбулентной плазмы	21
<i>Килпер Т. А.</i> Спектрофотометрия F-звезд. IV. Контуры линий в спектрах ϵ Boo, ν Her и 41 Sgr	123
<i>Колесов А. К., Соболев В. В.</i> О некоторых асимптотических формулах в теории неанзотропного рассеяния света	175

<i>Жорвяковский Ю. П.</i> О движении газа в тесных двойных системах	67
<i>Латышев И. Н.</i> Массы цефеид	331
<i>Леонов В. В.</i> Свечение Новых в предмаксимальный период	55
<i>Манджос А. В.</i> Космологические решения уравнений поля Иордана-Дике и наблюдательные данные	649
<i>Миркирян Б. Е.</i> Галактики с ультрафиолетовым континуумом. II.	443
<i>Миркирян Б. Е.</i> Галактики с ультрафиолетовым континуумом. III.	581
<i>Марочник Л. С.</i> О релаксации звезд плоских подсистем галактики на спиральной структуре	487
<i>Михэилэ И. М.</i> (см. <i>Атэкиан Т. А.</i>)	623
<i>Мнацаканян М. А.</i> К работе Салмона о моделях статических конфигураций	169
<i>Мнацаканян М. А.</i> Политропные модели в релятивистской обобщенной теории гравитации	645
<i>Мнацаканян М. А.</i> (см. <i>Саакян Г. С.</i>)	555
<i>Наирнер Д. И.</i> Нестационарное поле излучения в бесконечных средах	31
<i>Наирнер Д. И.</i> Перенос резонансного излучения в оптически толстом слое	507
<i>Нипартович А. П.</i> (см. <i>Абримов Ю. Ю.</i>)	187
<i>Новиков И. Д.</i> (см. <i>Дорошкевич А. Т.</i>)	539
<i>Панаджян В. Г.</i> Оценка угловых размеров радиоисточника 3С 49 на частоте 60 Мцц по наблюдениям мерцаний	291
<i>Панаджян В. Г.</i> (см. <i>Антонова Т. Д.</i>)	283
<i>Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э. В.</i> Медленное вращение релятивистских политроп	97
<i>Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э. В.</i> Медленное вращение белых карликов и барионных звезд	415
<i>Парсамян Э. С., Чавушян О. С.</i> Две замечательные вспыхивающие звезды в Плеядах	499
<i>Петрухин Н. С.</i> Исследование влияния излучения на конвекцию в политропной атмосфере	615
<i>Порфирьев В. В., Редкобородый Ю. Н.</i> Эффект электронного экранирования в ядерных реакциях при высоких плотностях	398
<i>Редкобородый Ю. Н.</i> (см. <i>Порфирьев В. В.</i>)	393
<i>Родригес М. Г.</i> Общее поглощение в линиях и полосах в спектрах звезд классов F—M	269
<i>Саакян Г. С., Мнацаканян М. А.</i> К релятивистской обобщенной теории гравитации. II. Барионные конфигурации	555

<i>Саакян К. А.</i> О центральных сгущениях Sa галактик	593
<i>Седракян Д. М.</i> (см. Папоян В. В.)	97
<i>Седракян Д. М.</i> (см. Папоян В. В.)	415
<i>Свидов Э. Ф.</i> Эллиптичность слабо вращающихся конфигураций	503
<i>Свидов Э. Ф.</i> (см. Бисноватый-Коган Г. С.)	243
<i>Сизиков В. С.</i> Модель распределения масс в М 31. II.	317
<i>Соболев В. В.</i> Диффузное отражение и пропускание света атмосферой при неизотропном рассеянии	5
<i>Соболев В. В.</i> Неизотропное рассеяние света в атмосфере конечной оптической толщины	343
<i>Соболев В. В.</i> (см. Колесов А. К.)	175
<i>Таранов В. И.</i> О возможной природе короткопериодических пульсаций блеска звезды DQ Геркулеса	337
<i>Теребиж В. Ю.</i> Полярохроматическое рассеяние света в полупространстве	359
<i>Хачикян Э. Е.</i> (см. Видман Д. В.)	113
<i>Цытович В. Н.</i> (см. Каплан С. А.)	21
<i>Чавушян О. С.</i> (см. Парсамян Э. С.)	499
<i>Чернин А. Д.</i> , Взаимодействие вихревых и потенциальных движений в реля- тивистской гидродинамике. II.	656
<i>Чернин А. Д.</i> , <i>Эйдельман Е. Д.</i> Взаимодействие вихревых и потенциальных движений в релятивистской гидродинамике. I.	654
<i>Чубарян Э. В.</i> (см. Папоян В. В.)	97
<i>Чубарян Э. В.</i> (см. Папоян В. В.)	415
<i>Шулов О. С.</i> , <i>Гудкова Г. А.</i> О собственной поляризации излучения RY Персея	477
<i>Эйдельман Е. Д.</i> (см. Чернин А. Д.)	654
<i>Эйнасто Я. Э.</i> Галактика Андромеды М 31. I. Предварительная модель	137

СОДЕРЖАНИЕ

ЖУРНАЛА „АСТРОФИЗИКА“ ТОМ 5 за 1969 год

Выпуск 1

Диффузное отражение и пропускание света атмосферой при неанзотропном рассеянии	<i>В. В. Соболев</i>	5
Рассеяние излучения в спектральной линии турбулентной плазмой <i>С. А. Каплан, В. Н. Цытович</i>		21
Нестационарное поле излучения в бесконечных средах	<i>Д. И. Нагирнер</i>	31
Свечение Новых в предмаксимальный период	<i>В. В. Леонов</i>	55
О движении газа в тесных двойных системах	<i>Ю. П. Коровяковский</i>	67
Кривая роста для расширяющейся атмосферы	<i>М. А. Аракелян</i>	75
О расширении планетарных туманностей	<i>В. В. Витязев</i>	83
Медленное вращение релятивистских политроп <i>В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян</i>		97
Спектральные наблюдения галактик Маркаряна с ультрафиолетовым континуумом. II.	<i>Д. В. Видман, Э. Е. Хачикян</i>	113
Спектрофотометрия F-звезд. IV. Контуры линий в спектрах α Boo, γ Her и 41 Cyg	<i>Т. А. Киппер</i>	123
Галактика Андромеды M 31. I. Предварительная модель	<i>Я. Э. Эйншто</i>	13
Исследование динамики тройных систем методом статистических испытаний. III. Случай различных масс компонентов	<i>Ж. П. Аюсова</i>	161
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ		
К работе Салмона о моделях статических конфигураций	<i>М. А. Мнацаканян</i>	169

Выпуск 2

О некоторых асимптотических формулах в теории неанзотропного рассеяния света	<i>А. К. Колесов, В. В. Соболев</i>	175
--	-------------------------------------	-----

Перенос резонансного излучения от точечного источника в полупространстве <i>Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович</i>	187
К нелинейной нестационарной задаче переноса излучения в спектральной линии <i>Р. С. Варданян, Н. Б. Енишбарян</i>	203
Об относительных интенсивностях водородных линий в спектрах туманностей <i>В. П. Гринин</i>	213
Модели скоплений точечных масс с большим красным смещением в центре <i>Г. С. Бисноватый-Козан, Я. Б. Зельдович</i>	223
Взаимодействие низкочастотного радиального и высокочастотного колебаний звезд <i>Ю. В. Вандакуров, Я. Б. Зельдович</i>	235
О связи белых карликов со вспышками сверхновых I типа <i>Г. С. Бисноватый-Козан, Э. Ф. Свилов</i>	243
Спектры звезд в кометобразных туманностях <i>Э. А. Дибай</i>	249
Общее поглощение в линиях и полосах в спектрах звезд <i>М. Г. Родригес</i>	269
Оценка интенсивности мерцающей компоненты источника 3С 273 на частотах 86 и 60 $M\mu$ <i>Т. Д. Антонова, В. В. Виткевич, В. Г. Панаджян</i>	293
Оценка угловых размеров радиоисточника 3С 48 на частоте 60 $M\mu$ по наблюдениям мерцаний <i>В. Г. Панаджян</i>	291
О зависимости спектрального индекса внегалактических радиоисточников от плотности потока <i>Р. Д. Дагвесаманский</i>	297
Построение моделей звездных систем при помощи численного эксперимента <i>Т. А. Азелян, А. С. Баранов</i>	305
Модель распределения масс в М 31. II. <i>В. С. Сизиков</i>	317
Массы цефеид <i>И. Н. Латышев</i>	331
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
О возможной природе короткопериодических пульсаций блеска звезды DQ Геркулеса <i>В. И. Таранов</i>	337

В ы п у с к 3

Неизотропное рассеяние света в атмосфере конечной оптической толщины <i>В. В. Соболев</i>	343
Полихроматическое рассеяние света в полупространстве <i>В. Ю. Терещук</i>	359
Интенсивности водородных линий в спектре оптически толстой плазмы <i>В. П. Гринин</i>	371
О световых кривых вспыхивающих звезд <i>Г. А. Гурздян</i>	383
Эффект электронного экранирования в ядерных реакциях при высоких плотностях <i>В. В. Порфирьев, Ю. Н. Редкобородый</i>	393

Медленное вращение белых карликов и барионных звезд <i>В. В. Паполин, Д. М. Седракин, Э. В. Чубарян</i>	415
О равновесных состояниях системы гравитирующих частиц <i>Г. С. Бисноватый-Козан, Я. Б. Зельдович</i>	425
Функция распределения скоростей тел малых масс в скоплениях <i>В. С. Калиберда</i>	433
Галактики с ультрафиолетивым континуумом. II.	<i>Б. Е. Маркарян</i> 443
О характере эволюционных эффектов, связанных с квазизвездными радиоисточниками. I	<i>М. А. Аракелян</i> 461
О собственной поляризации излучения RY Персея <i>О. С. Шулов, Г. А. Гудкова</i>	477
О релаксации звезд плоских подсистем галактики на спиральной структуре <i>Л. С. Марочник</i>	487
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
Две замечательные вспыхивающие звезды в Плеядах <i>Э. С. Парсамян, О. С. Чавушян</i>	499
Фотоэлектрическая фотометрия двойной звезды типа Вольф-Раје HD 211853 <i>А. А. Гусейнзаде</i>	502
Эллиптичность слабо вращающихся конфигураций	<i>Э. Ф. Свилов</i> 503
В ы п у с к 4	
Перенос резонансного излучения в оптически толстом слое	<i>Д. И. Назирнер</i> 507
Образование линий при наличии магнитного поля. I. Матрица рассеяния <i>Х. Домке</i>	525
Кинетическая теория нейтрино в анизотропных космологических моделях <i>А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков</i>	539
К релятивистской обобщенной теории гравитации II. Барионные конфигурации <i>Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян</i>	555
Галактики с ультрафиолетовым континуумом. III.	<i>Б. Е. Маркарян</i> 581
О центральных сгущениях Sa галактик	<i>К. А. Саакян</i> 593
О характере эволюционных эффектов, связанных с квазизвездными радиоисточниками. II.	<i>М. А. Аракелян</i> 603
Исследование влияния излучения на конвекцию в политропной атмосфере <i>Н. С. Петрухин</i>	615
Вращающиеся системы гравитирующих тел в квазистационарном состоянии <i>Т. А. Азгян, И. М. Михэилэ</i>	623

Образование двойных систем при тройных сближениях <i>Т. А. Азелян, Ж. П. Аносова, В. Н. Безубова</i>	637
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
Политропные модели в релятивистской обобщенной теории гравитации <i>М. А. Мнацаканян</i>	645
Космологические решения уравнений поля Иордана-Дикке и наблюдательные данные	<i>А. В. Манджос</i> 649
Взаимодействие вихревых и потенциальных движений в релятивистской гидродинамике. I.	<i>А. Д. Чернин, Е. Д. Эйдельман</i> 654
Взаимодействие вихревых и потенциальных движений в релятивистской гидродинамике. II.	<i>А. Д. Чернин</i> 656

INDEX OF AUTHORS

<i>Abramov Y. Y., Napartovtch A. P.</i> The resonance line radiation transfer from point source in semi-infinite medium	187
<i>Agekian T. A., Anosova J. P., Bezgubova V. P.</i> Formation of binary systems in triple encounters	637
<i>Agekian T. A., Baranov A. S.</i> The construction of stellar system models by numerical experiment	305
<i>Agekian T. A., Michelle I. M.</i> The rotating systems of gravitating bodies in quasi-stationary state	623
<i>Anosova J. P.</i> The investigation of the dynamics of triple system by the method of statistic tests. III. Case of components of different masses	161
<i>Anosova J. P.</i> (see <i>Agekian T. A.</i>)	637
<i>Antonova T. D., Vitkevitch V. V., Panajtan V. G.</i> Estimation of intensities of fluctuating component of radio source 3C 273 at frequencies 86 and 60 Mhz	283
<i>Arakeltian M. A.</i> The curve of growth for an expanding atmosphere	75
<i>Arakeltian M. A.</i> On the nature of evolutionary effects associated with quasi-stellar radio sources. I.	461
<i>Arakeltian M. A.</i> On the nature of evolutionary effects associated with quasi-stellar radio sources. II.	603
<i>Baranov A. S.</i> (see <i>Agekian T. A.</i>)	305
<i>Bezgubova V. P.</i> (see <i>Agekian T. A.</i>)	637
<i>Bisnovaty-Kogan G. S.</i> (see <i>Seldov Z. F.</i>)	243
<i>Bisnovaty-Kogan G. S.</i> (see <i>Zeldovitch Y. B.</i>)	223
<i>Bisnovaty-Kogan G. S.</i> (see <i>Zeldovitch Y. B.</i>)	425
<i>Chavushtian O. S.</i> (see <i>Parsamian E. S.</i>)	499
<i>Chernin A. D.</i> Interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics. II.	656
<i>Chernin A. D., Eldelman E. D.</i> Interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics. I.	654

<i>Chubartan E. V. (see Papoyan V. V.)</i>	97
<i>Chubartan E. V. (see Papoyan V. V.)</i>	415
<i>Dagkesamanski R. D. On the dependence of the spectral index of extragalactic radio sources from flux density</i>	297
<i>Dibay E. A. The spectra of stars in comet-like nebulae</i>	249
<i>Domke H. Line formation in magnetic field. I. Scattering matrix</i>	525
<i>Doroshkevich A. G., Zeldovitch Y. B., Novikov I. D. The kinetic theory of neutrons in the anisotropic cosmological models</i>	539
<i>Eidelman E. D. (see Cherntn A. D.)</i>	654
<i>Elnasto J. E. The Andromeda galaxy M 31. I. Preliminary model</i>	137
<i>Goudkova G. A. (see Shoulov O. S.)</i>	477
<i>Grntn V. P. On the relative intensities of the hydrogen lines in the spectra of nebulae</i>	213
<i>Grntn V. P. Intensities of the hydrogen lines emitted by an optically thick plasma</i>	371
<i>Gurzadian G. A. On the light-curves of flare stars</i>	383
<i>Guseinzade A. A. The photoelectric photometry of the Wolf-Rayet type binary star HD 211853</i>	502
<i>Kaliberda V. S. The velocity distribution function for stars of small mass in star-clusters</i>	433
<i>Kaplan S. A., Tsitovich V. N. The scattering of radiation in the spectral line of the turbulent plasma</i>	21
<i>Khachikyan E. Y. (see Weedman D. W.)</i>	113
<i>Kipper T. A. Spectrophotometry of the F-stars. IV. Line profiles in the spectra α Boo, ν Her and 41 Cyg</i>	123
<i>Kolesov A. K., Sobolev V. V. On some asymptotic formulae in the theory of anisotropic light scattering</i>	175
<i>Latyshev I. N. The masses of cepheids</i>	331
<i>Leonov V. V. The radiation of Novae before the light maximum</i>	55
<i>Manjós A. V. The cosmological solutions of the Jordan-Dicke field equations and the observed data</i>	663
<i>Markartan B. E. The galaxies with ultraviolet continuum. II.</i>	443
<i>Markartan B. E. The galaxies with ultraviolet continuum. III.</i>	595
<i>Marochntc L. S. On the relaxation of stars of flat subsystems of galaxy on spiral structure</i>	487

<i>Micheile I. N.</i> (see <i>Agektan T. A.</i>)	623
<i>Mnatsakantian M. A.</i> On Salmona's paper on the model of static configuration .	169
<i>Mnatsakantian M. A.</i> Polytropic models by the relativistic generalised theory of gravity	645
<i>Mnatsakantian M. A.</i> (see <i>Sahaktan G. S.</i>)	555
<i>Nagtrner D. I.</i> Nonstationary radiation field in infinite media	31
<i>Nagtrner D. I.</i> Transfer of resonance radiation in the optically thick layer .	507
<i>Napartovitch A. P.</i> (see <i>Abramov Y. Y.</i>)	187
<i>Novikov I. D.</i> (see <i>Doroshkevitch A. A.</i>)	539
<i>Panajtan V. G.</i> An estimation of angular dimensions of radio source 3C 48 at 60 Mhz from interplanetary scintillations	291
<i>Panajtan V. G.</i> (see <i>Antonova T. D.</i>)	283
<i>Papoyan V. V., Sedraktan D. M., Chubartan E. V.</i> Slowly rotating relativistic polytropic models	97
<i>Papoyan V. V., Sedraktan D. M., Chubartan E. V.</i> Slow rotation of white dwarf and barionic stars	415
<i>Parsamian E. S., Chavushtan O. S.</i> Two remarkable flare stars in Pleiades . .	499
<i>Petruchin N. S.</i> The investigations of the influence of radiation on the convection in polytropic atmosphere	615
<i>Porfirtev V. V., Redcoborody Yu. N.</i> The effect of electron screening on thermonuclear reactions under high densities	393
<i>Redcoborody Yu. N.</i> (see <i>Porfirtev V. V.</i>)	393
<i>Rodriguez M. H.</i> The total line and band absorption in spectra of F—M stars	269
<i>Sahaktan K. A.</i> On the central condensations in Sa galaxies	593
<i>Sahaktan G. S., Mnatsakantian M. A.</i> On the relativistic generalized theory of gravity. II. Baryon configurations	555
<i>Sedraktan D. M.</i> (see <i>Papoyan V. V.</i>)	97
<i>Sedraktan D. M.</i> (see <i>Papoyan V. V.</i>)	415
<i>Seidov Z. F.</i> The ellipticity of slowly rotating configurations	503
<i>Seidov Z. F.</i> (see <i>Bisnovaty-Kogan G. S.</i>)	243
<i>Sizikov V. S.</i> A model of the distribution of mass in M 31. II.	317
<i>Sobolev V. V.</i> Diffuse reflection and transmission of light by an atmosphere with anisotropic scattering	6
<i>Sobolev V. V.</i> Anisotropic light scattering in the atmosphere of finite optical thickness	343

<i>Sobolev V. V.</i> (see <i>Kolesov A. K.</i>)	175
<i>Shoulov O. S., Goudkova G. A.</i> On the intrinsic polarization of the RY Persei radiation	477
<i>Taranov V. I.</i> About the possible nature of short-period variations of light of the star DQ Her	337
<i>Terebizh V. Yu.</i> The polychromatic light scattering in a semi-infinite medium .	359
<i>Tsitovich V. N.</i> (see <i>Kaplan S. A.</i>)	21
<i>Vandakurov Y. V., Zeldovitch Y. B.</i> The interaction between low frequency and high frequency stellar pulsations	235
<i>Vardantan R.S., Yengibartan N. B.</i> On the nonlinear nonstationary problem of radiation transfer in spectral line	203
<i>Vitkevitch V. V.</i> (see <i>Antonova T. D.</i>)	283
<i>Vityasev V. V.</i> On the expansion of planetary nebulae	83
<i>Wesdman D. W., Khachikyan E. Ye.</i> Spectral observations of Markarian galaxies with ultraviolet continuum	113
<i>Yengibartan N. B.</i> (see <i>Vardantan R. S.</i>)	203
<i>Zeldovitch Y. B.</i> (see <i>Bisnovaty-Kogan G. S.</i>)	223
<i>Zeldovitch Y. B.</i> (see <i>Bisnovaty-Kogan G. S.</i>)	425
<i>Zeldovitch Y. B.</i> (see <i>Vandakurov Y. V.</i>)	235

On the nonlinear nonstationary problem of radiation transfer in spectral line <i>R. S. Vardantan, N. B. Yengibartan</i>	203
On the relative intensities of the hydrogen lines in the spectra of nebulae <i>V. P. Grinin</i>	213
Models of clusters of point masses with great central red shift <i>G. S. Btsnovaty-Kogan, Z. F. Seidov</i>	243
The spectra of stars in comet-like nebulae	<i>E. A. Dibay</i> 249
The total line and band absorption in spectra of F—M stars	<i>M. H. Rodriguez</i> 269
Estimation of intensities of fluctuating component of radio source 3C 2713 at frequencies 86 and 60 Mhz <i>T. D. Antonova, V. V. Vitkevich, V. G. Panajian</i>	283
An estimation of angular dimensions of radio source 3C 48 at 60 Mhz from interplanetary scintillations	<i>V. G. Panajian</i> 291
On the dependence of the spectral index of extragalactic radio sources from flux density	<i>R. D. Dagesamanski</i> 297
The construction of stellar system models by numerical experiment <i>T. A. Agskian, A. S. Baranov</i>	305
A model of the distribution of mass in M 31.II	<i>V. S. Sizikov</i> 317
The masses of cepheids	<i>I. N. Latyshev</i> 331
NOTES	
About possible nature of short-period variations of the light of the star DQ Her <i>V. I. Taronov</i>	337
Number 3	
Anisotropic light scattering in the atmosphere of finite optical thickness <i>V. V. Sobolev</i>	343
The polychromatic light scattering in a semi-infinite medium	<i>V. Yu. Terebizh</i> 359
Intensities of hydrogen lines emitted by an optically thick plasma	<i>V. P. Grinin</i> 371
On the light-curves of flare stars	<i>G. A. Gurzadjan</i> 383
The effect of electron screening on thermonuclear reactions under high densities <i>V. V. Porfiriev, Yu. N. Redcoborodiy</i>	393
Slow rotation of white dwarfs and barionic stars <i>V. V. Papogyan, D. M. Sedraktan, E. V. Chubarlan</i>	415
On the equilibrium states of the system of gravitating particles <i>G. S. Btsnovaty-Kogan, Y. B. Zeldovich</i>	425
The velocity distribution function for stars of small mass in starclusters <i>V. S. Kaliberda</i>	433
The galaxies with ultraviolet continuum. II	<i>B. E. Markartan</i> 443

- On the nature of evolutionary effects associated with quasi-stellar radio sources. I *M. A. Arakel'tan* 461
- On the intrinsic polarization of the Persei radiation
O. S. Shoulov, G. G. Goudkova 477
- On the relaxation of stars of flat subsystems of galaxy on spiral structure
L. S. Marochnik 487

NOTES

- Two remarkable flare stars in Pleiades . . . *E. S. Parsamian, O. S. Chavushian* 503
- The photoelectric photometry of the binary star of the Wolf-Rayet type HD 211853
A. A. Guseinzade 503
- The ellipticity of slowly rotating configurations *Z. F. Setdov* 504

Number 4

- Transfer of resonance radiation in the optically thick layer . . . *D. I. Nagtner* 507
- Line formation in magnetic field. I. Scattering matrix *H. Domke* 525
- The kinetic theory of neutrinos in the anisotropic cosmological models
A. G. Doroshkevitch, Y. B. Zeldovitch, I. D. Novtkov 539
- On the relativistic generalized theory of gravity. II. Baryon configurations
G. S. Sahakian, M. A. Mnatsakanian 555
- Galaxies with ultraviolet continuum. III. *B. E. Markarian* 581
- On the central condensations in Sa galaxies *K. A. Sahakian* 593
- On the nature of evolutionary effects associated with quasi-stellar radio sources. II. *M. A. Arakel'tan* 603
- The investigations of the influence of radiation on the convection in polytropic atmosphere *N. S. Petruchin* 615
- The rotating systems of gravitating bodies in quasi-stationary state
T. A. Agekian, I. N. Mitchell 623
- Formation of binary systems in triple encounters
T. A. Agekian, J. P. Anosova, V. P. Bezgubova 637

NOTES

- Polytropic models by the relativistic generalized theory of gravity
M. A. Mnatsakanian 645
- The cosmological solutions of the Jordan-Dicke field equations and the observed data *A. V. Manjós* 649
- Interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics. I
A. D. Chernin, E. D. Eidelman 654
- Interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics. II
A. D. Chernin 656

CONTENTS

TRANSFER OF RESONANCE RADIATION IN THE OPTICALLY THICK LAYER	<i>D. I. Nagtner</i> 507
LINE FORMATION IN MAGNETIC FIELD. I. SCATTERING MATRIX	<i>H. Domke</i> 525
THE KINETIC THEORY OF NEUTRINOS IN THE ANISOTROPIC COSMOLOGICAL MODELS	<i>A. G. Doroshkevich, Y. B. Zeldovich, I. D. Novikov</i> 539
ON THE RELATIVISTIC GENERALIZED THEORY OF GRAVITY. II. BARYON CONFIGURATIONS	<i>G. S. Sahakian, M. A. Mnatsakanian</i> 555
GALAXIES WITH ULTRAVIOLET CONTINUUM. III.	<i>B. E. Markartan</i> 581
ON THE CENTRAL CONDENSATIONS IN S_a GALAXIES .	<i>K. A. Sahakian</i> 593
ON THE NATURE OF EVOLUTIONARY EFFECTS, ASSOCIATED WITH QUASI-STELLAR RADIO SOURCES. II.	<i>M. A. Arakelian</i> 603
THE INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF RADIATION ON THE CONVECTION IN POLYTROPIC ATMOSPHERE . . .	<i>N. S. Petruchin</i> 615
THE ROTATING SYSTEMS OF GRAVITATING BODIES IN QUASI-STATIONARY STATE	<i>T. A. Agektan, I. N. Michelle</i> 623
FORMATION OF BINARY SYSTEMS IN TRIPLE ENCOUNTERS	<i>T. A. Agektan, J. P. Anosova, V. N. Bezgubova</i> 637
NOTES	
POLYTROPIC MODELS BY THE RELATIVISTIC GENERALIZED THEORY OF GRAVITY	<i>M. A. Mnatsakanian</i> 645
THE COSMOLOGICAL SOLUTIONS OF THE JORDAN-DICKE FIELD EQUATIONS AND THE OBSERVED DATA	<i>A. V. Manjos</i> 649
INTERACTION OF VORTEX AND POTENTIAL MOTIONS IN RELATIVISTIC HYDRODYNAMICS. I.	<i>A. D. Chernin, E. D. Eidelman</i> 654
INTERACTION OF VORTEX AND POTENTIAL MOTIONS IN RELATIVISTIC HYDRODYNAMICS. II.	<i>A. D. Chernin</i> 656