

# ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ

## АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5

ФЕВРАЛЬ, 1969

ВЫПУСК 1

ДИФФУЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ И ПРОПУСКАНИЕ СВЕТА АТМОСФЕРОЙ ПРИ НЕИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ . . . . .	<i>В. В. Соболев</i>	5
РАССЕЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМОЙ . . . . .	<i>С. А. Каплан, В. Н. Цытович</i>	21
НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНЫХ СРЕДАХ <i>Д. И. Наирнер</i>		31
СВЕЧЕНИЕ НОВЫХ В ПРЕДМАКСИМАЛЬНЫЙ ПЕРИОД . . . . .	<i>В. В. Леонов</i>	55
О ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ <i>Ю. П. Коровяковский</i>		67
КРИВАЯ РОСТА ДЛЯ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ АТМОСФЕРЫ <i>М. А. Аракелян</i>		75
О РАСШИРЕНИИ ПЛАНЕТАРНЫХ ТУМАННОСТЕЙ . . . . .	<i>В. В. Витязев</i>	83
МЕДЛЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОЛИТРОП <i>В. В. Паполян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян</i>		97
СПЕКТРАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ ГАЛАКТИК МАРКАРЯНА С УЛЬТРА- ФИОЛЕТОВЫМ КОНТИНУУМОМ. II. . . . .	<i>Д. В. Видман, Э. Е. Хачикян</i>	113
СПЕКТРОФОТОМЕТРИЯ F-ЗВЕЗД. IV. КОНТУРЫ ЛИНИЙ В СПЕКТРАХ $\sigma$ Boo, $\gamma$ Her и 41 Cyg . . . . .	<i>Т. А. Киппер</i>	123
ГАЛАКТИКА АНДРОМЕДЫ M 31. I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ <i>Я. И. Эйнасто</i>		137
ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СТАТИ- СТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ. III. СЛУЧАЙ РАЗЛИЧНЫХ МАСС КОМ- ПОНЕНТОВ . . . . .	<i>Ж. П. Аносова</i>	161
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ К РАБОТЕ САЛМОНА О МОДЕЛЯХ СТАТИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ <i>Р. М. Авакян, М. А. Мнацаканян</i>		169

## Խ Մ ր ա գ ր ա կ ա ն կ ղ լ Ե գ ի ա

Ա. Ա. Բոյարչուկ, Վ. Ա. Դոմբրովսկի, Յա. Բ. Ջելդովիչ, Հ. Մ. Թովմասյան,  
Ս. Ա. Կապլան, Վ. Հ. Համբարձումյան (գլխավոր խմբագիր), Բ. Ե. Մարգարյան,  
Լ. Վ. Միրզոյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Վ. Սորոլև

## Редакционная коллегия

В. А. Амбарцумян (главный редактор), А. А. Боярчук, В. А. Домбровский,  
Я. Б. Зельдович, С. А. Каплан, Б. Е. Маркарян, Л. В. Мирзоян (зам. главного  
редактора), В. В. Соболев, Г. М. Товмасын

„АСТРОФИЗИКА“ — научный журнал, издаваемый Академией наук Армянской ССР. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой.

Журнал предназначается для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал выходит 4 раза в год, цена одного номера 1 рубль, подписная плата за год 4 рубля. Подписку можно произвести во всех отделениях Союзпечати, а за границей через агентство „Международная книга“, Москва, 200.

«Աստրոֆիզիկա»-ն գիտական հանդես է, որը հրատարակվում է Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի կողմից: Հանդեսը տպագրում է ինֆնատիվ հոդվածներ աստղերի ֆիզիկայի, միզամոծությունների ու միջաստղային միջավայրի ֆիզիկայի, աստղային և արտագալակտիկական աստղագիտության, ինչպես նաև աստրոֆիզիկային սամանակից քննարկմանների գծով:

Հանդեսը նախատեսված է գիտական աշխատակիցների, ասպիրանտների և բարձր կուրսների ուսանողների համար:

Հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան 4 անգամ, 1 համարի արժեքն է 1 ուրլի, բաժանորդագիրը 4 ուրլի մեկ տարվա համար: Թաժանորդագրվել կարելի է «Սոյուզպեչատ»-ի բոլոր բաժանմունքներում, իսկ արտասահմանում «Մեյդունարոդնայա կնիգա» գործակալության միջոցով, Մոսկվա, 200:

ДИФFUЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ И ПРОПУСКАНИЕ СВЕТА  
АТМОСФЕРОЙ ПРИ НЕИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 16 декабря 1968

Продолжается начатое ранее [1] изучение линейных интегральных уравнений для коэффициентов отражения и пропускания  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$  и для вспомогательных функций  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$ . Найдены дополнительные соотношения для указанных величин. Дается общий метод получения выражений для функций  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  через функции  $X(\eta)$  и  $Y(\eta)$  Чандрасекара. В качестве примера рассматривается случай двухчленной индикатрисы рассеяния. Приводятся формулы для альbedo атмосферы и освещенности поверхности.

В последние годы вследствие увеличения значения планетных исследований сильно возрос интерес к теории неізотропного рассеяния света. Эта теория необходима для понимания физических процессов в атмосферах планет и для интерпретации различного рода наблюдательных данных (фотометрических, спектроскопических и др.). Некоторые результаты этой теории были получены уже давно, но лишь теперь находят свое применение. Желательна также дальнейшая разработка теории.

Цель настоящей статьи — рассмотрение проблемы диффузного отражения и пропускания света атмосферой конечной оптической толщины при произвольной индикатрисе рассеяния. В основу исследования положены линейные интегральные уравнения для коэффициентов отражения и пропускания, полученные автором еще в 1949 году [1] (см. также [2]). При помощи этих уравнений могут быть найдены линейные интегральные уравнения для вспомогательных функций  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$ , через которые выражаются коэффициенты отражения и пропускания. Раньше [1] упомянутые уравнения для функций  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  были даны для простейших случаев, здесь же они даются при лю-

бом законе рассеяния. Получены также дополнительные соотношения как для коэффициентов отражения и пропускания, так и для вспомогательных функций.

Далее предлагается общий метод определения функций  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$ , если известны функции  $X(\eta)$  и  $Y(\eta)$  Чандрасекара. Для примера этот метод применяется к случаю двухчленной индикатрисы рассеяния. В конце статьи приводятся формулы для альбеда атмосферы и освещенности поверхности планеты.

Недавно в статье автора [3] было выполнено аналогичное исследование для полубесконечной атмосферы. Можно считать, что полученные в ней результаты теперь обобщаются на атмосферу любой оптической толщины.

*Коэффициенты отражения и пропускания.* Пусть атмосфера состоит из плоскопараллельных слоев и имеет оптическую толщину  $\tau_0$ . Обозначим через  $x(\gamma)$  индикатрису рассеяния ( $\gamma$  — угол между направлениями рассеянного и падающего излучения) и через  $\lambda$  — альбеда частицы, то есть отношение коэффициента рассеяния к сумме коэффициентов рассеяния и истинного поглощения.

Будем считать, что атмосфера освещена параллельными лучами, падающими под углом  $\arcsin \zeta$  к нормали и создающими освещенность перпендикулярной к ним площадки, равную  $\pi S$ . Усредненные по азимуту интенсивности излучения, диффузно отраженного и диффузно пропущенного атмосферой, обозначим соответственно через  $I_1(\eta, \zeta)$  и  $I_2(\eta, \zeta)$ , понимая под  $\eta$  косинус угла отражения или пропускания. Эти величины представим в виде

$$I_1(\eta, \zeta) = S \rho(\eta, \zeta) \zeta, \quad I_2(\eta, \zeta) = S \sigma(\eta, \zeta) \zeta, \quad (1)$$

где  $\rho(\eta, \zeta)$  — коэффициент отражения и  $\sigma(\eta, \zeta)$  — коэффициент пропускания.

Предположим, что индикатриса рассеяния разложена в ряд по полиномам Лежандра, то есть

$$x(\gamma) = \sum_0^n x_l P_l(\cos \gamma). \quad (2)$$

Как известно, в таком случае интенсивность излучения разлагается в ряд по  $\cos m\varphi$ , где  $\varphi$  — азимут и  $0 \leq m \leq n$ . Ранее [1, 2] учитывалась зависимость интенсивности излучения от азимута, теперь же для простоты мы усредняем ее по азимуту, то есть принимаем  $m = 0$ .

Согласно [1, 2] при  $m = 0$  имеем

$$\rho(\eta, \zeta) = \sum_0^n u_i(\eta, \zeta) P_i(\eta), \quad \sigma(\eta, \zeta) = \sum_0^n v_i(\eta, \zeta) P_i(\eta), \quad (3)$$

где функции  $u_i(\eta, \zeta)$  и  $v_i(\eta, \zeta)$  определяются из системы линейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_i(\eta, \zeta) = & \frac{\lambda}{2} x_i \int_{-1}^1 \frac{\eta \rho(\eta, \zeta) - \eta' \rho(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} P_i(\eta') d\eta' - \\ & - \frac{\lambda}{2} x_i \sum_{j=i+1}^n u_j(\eta, \zeta) c_{ij}(\eta) - \\ & - \frac{\lambda}{2} x_i e^{-\frac{\zeta}{\eta}} \int_0^1 \frac{\eta' \sigma(\eta', \zeta)}{\eta + \eta'} P_i(-\eta') d\eta' + x_i P_i(-\zeta) \rho_1(\eta, \zeta), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_i(\eta, \zeta) = & \frac{\lambda}{2} x_i \int_{-1}^1 \frac{\eta \sigma(\eta, \zeta) - \eta' \sigma(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} P_i(\eta') d\eta' - \\ & - \frac{\lambda}{2} x_i \sum_{j=i+1}^n v_j(\eta, \zeta) c_{ij}(\eta) - \\ & - \frac{\lambda}{2} x_i e^{-\frac{\zeta}{\eta}} \int_0^1 \frac{\eta' \rho(\eta', \zeta)}{\eta + \eta'} P_i(-\eta') d\eta' + x_i P_i(\zeta) \sigma_1(\eta, \zeta). \end{aligned} \quad (5)$$

В этих уравнениях считается, что  $\rho(\eta', \zeta) = 0$  и  $\sigma(\eta', \zeta) = 0$  при  $\eta' < 0$  и обозначено

$$c_{ij}(\eta) = \int_{-1}^1 P_i(\eta') \frac{P_j(\eta) - P_j(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta', \quad (6)$$

$$\rho_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{1 - e^{-\zeta(1/\eta + 1/\zeta)}}{\eta + \zeta}, \quad \sigma_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{e^{-\zeta/\eta} - e^{-\zeta/\zeta}}{\eta - \zeta}. \quad (7)$$

Уравнения (4) и (5) можно рассматривать как системы линейных алгебраических уравнений относительно функций  $u_i(\eta, \zeta)$  и  $v_i(\eta, \zeta)$ . Решая эти уравнения, то есть выражая указанные функции через величины  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$ , и подставляя найденные выражения в соот-

ношения (3), мы приходим к двум уравнениям для определения величин  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$ . Раньше эта процедура применялась для полубесконечной атмосферы (см. [4] и [2], стр. 152). Для атмосферы конечной оптической толщины применение ее дает

$$\begin{aligned} \rho(\eta, \zeta) T(\eta) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\eta' \rho(\eta', \zeta)}{\eta' - \eta} A(\eta, \eta') d\eta' - \\ &- \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\zeta}{\eta}} \int_0^1 \frac{\eta' \sigma(\eta', \zeta)}{\eta' + \eta} A(\eta, -\eta') d\eta' + A(\eta, -\zeta) \rho_1(\eta, \zeta). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\eta, \zeta) T(\eta) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\eta' \sigma(\eta', \zeta)}{\eta' - \eta} A(\eta, \eta') d\eta' - \\ &- \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\zeta}{\eta}} \int_0^1 \frac{\eta' \rho(\eta', \zeta)}{\eta' + \eta} A(\eta, -\eta') d\eta' + A(\eta, \zeta) \sigma_1(\eta, \zeta), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$T(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \int_{-1}^1 \frac{A(\eta, \eta')}{\eta' - \eta} d\eta' = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 \frac{A(\eta', \eta')}{\eta' - \eta} d\eta', \quad (10)$$

$$A(\eta, \zeta) = \sum_0^n x_i R_i(\eta) P_i(\zeta), \quad (11)$$

а полиномы  $R_i(\eta)$  определяются рекуррентным соотношением

$$R_i(\eta) = P_i(\eta) - \frac{\lambda}{2} \eta \sum_{k=0}^{i-1} x_k c_{ki}(\eta) R_k(\eta) \quad (12)$$

при  $R_0(\eta) = 1$ .

Легко показать (см. [3]), что из (12) вытекает также следующая рекуррентная формула для функций  $R_i(\eta)$ :

$$iR_i(\eta) + (i-1)R_{i-2}(\eta) = (2i-1 - \lambda x_{i-1}) \eta R_{i-1}(\eta) \quad (13)$$

при

$$R_0(\eta) = 1, \quad R_1(\eta) = (1 - \lambda) \eta. \quad (14)$$

Таким образом, для определения коэффициента отражения  $\rho(\eta, \zeta)$  и коэффициента пропускания  $\sigma(\eta, \zeta)$  служат линейные интегральные уравнения (8) и (9). К этим уравнениям для получения решений, имеющих необходимый физический смысл, надо еще добавить некоторые условия. Такие условия найдены в следующем разделе.

Дополнительные условия для функций  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$ . С целью получения дополнительных соотношений, которым должны удовлетворять функции  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$ , мы применим следующий прием. Допустим, что рассматриваемая атмосфера расположена в глубоких слоях полубесконечной среды, обладающей теми же оптическими свойствами, что и данная атмосфера. Тогда можно получить зависимость между функциями  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$  и интенсивностью излучения в указанных слоях, определенной впервые В. А. Амбарцумяном [5].

При сделанном допущении атмосфера будет освещена сверху излучением интенсивности  $i(\eta)$  и снизу — излучением интенсивности  $i(-\eta)e^{-k\tau_0}$ , а функция источников для нее будет равна  $b(\eta)e^{-k\tau}$ . Величины  $i(\eta)$  и  $b(\eta)$  связаны между собой соотношением

$$i(\eta) = \frac{b(\eta)}{1 - k\eta}, \quad (15)$$

а функция  $b(\eta)$  определяется интегральным уравнением

$$b(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 p(\eta, \eta') \frac{b(\eta')}{1 - k\eta'} d\eta', \quad (16)$$

в котором

$$p(\eta, \eta') = \sum_0^n x_i P_i(\eta) P_i(\eta'). \quad (17)$$

Функции  $b(\eta)$  и  $i(\eta)$  считаются нормированными согласно формуле

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 b(\eta) d\eta = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 i(\eta) d\eta = 1. \quad (18)$$

Величина  $k$  находится из условия разрешимости уравнения (16).

Обозначим через  $B(\tau, \eta, \zeta)$  функцию источников для атмосферы, освещенной параллельными лучами, падающими под углом  $\arcs \cos \zeta$  к нормали. Очевидно, что должно существовать соотношение

$$\begin{aligned} b(\eta) e^{-k\tau} &= \frac{2}{S} \int_0^1 B(\tau, \eta, \eta') i(\eta') d\eta' + \\ &+ \frac{2}{S} e^{-k\tau_0} \int_0^1 B(\tau_0 - \tau, -\eta, \eta') i(-\eta') d\eta'. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как

$$S\rho(\eta, \zeta)\zeta = \int_0^{\zeta} B(\tau, -\eta, \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \quad (20)$$

$$S\sigma(\eta, \zeta)\zeta = \int_0^{\zeta} B(\tau, \eta, \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \quad (21)$$

то из (19) следует

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \rho(\eta, \eta') i(\eta') \eta' d\eta' + 2e^{-k\zeta_0} \int_0^1 \sigma(\eta, \eta') i(-\eta') \eta' d\eta' = \\ = [1 - e^{-(k+1)\eta\zeta_0}] i(-\eta), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \sigma(\eta, \eta') i(\eta') \eta' d\eta' + 2e^{-k\zeta_0} \int_0^1 \rho(\eta, \eta') i(-\eta') \eta' d\eta' = \\ = (e^{-k\zeta_0} - e^{-\zeta_0/\eta}) i(\eta) \end{aligned} \quad (23)$$

Формулы (22) и (23) и представляют собой искомые условия, которые необходимо присоединить к линейным интегральным уравнениям (8) и (9).

Заслуживает внимания также другой способ получения формул (22) и (23). Из сравнения выражения (11) для функции  $A(\eta, \zeta)$  с выражением, вытекающим из (16) для функции  $b(\eta)$ , находим

$$b(\eta) = A\left(\frac{1}{k}, \eta\right), \quad (24)$$

а значит

$$i(\eta) = \frac{A\left(\frac{1}{k}, \eta\right)}{1 - k\eta}. \quad (25)$$

Поэтому из (10) и (18) следует

$$T\left(\frac{1}{k}\right) = 0. \quad (26)$$

Полагая в (8) и (9)  $\eta = 1/k$  и учитывая (26), мы снова приходим к формулам (22) и (23).

В случае чистого рассеяния для получения соотношений между величинами  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$  надо принять во внимание, что при малых  $k$

$$i(\eta) = 1 + \frac{3k\eta}{3 - x_1}. \quad (27)$$

Поэтому, полагая в (22) и (23)  $k = 0$ , находим

$$2 \int_0^1 \rho(\eta, \eta') \eta' d\eta' + 2 \int_0^1 \sigma(\eta, \eta') \eta' d\eta' = 1 - e^{-\frac{\eta}{\eta}}. \quad (28)$$

Дифференцируя же (22) и (23) по  $k$  и полагая  $k = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x_1}{3}\right) \tau_0 \left[ 1 - 2 \int_0^1 \rho(\eta, \eta') \eta' d\eta' \right] - 2 \int_0^1 \rho(\eta, \eta') \eta'^2 d\eta' + \\ + 2 \int_0^1 \sigma(\eta, \eta') \eta'^2 d\eta' = \eta \left(1 - e^{-\frac{\eta}{\eta}}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Легко видеть, что соотношения (28) и (29) вытекают из „интеграла потока“ и так называемого „K-интеграла“, имеющих место при  $\lambda = 1$ .

*Вспомогательные функции.* Для полубесконечной атмосферы В. А. Амбарцумян [6] выразил коэффициент отражения  $\rho(\eta, \zeta)$  через вспомогательные функции, зависящие только от одного аргумента, и получил для определения этих функций систему нелинейных интегральных уравнений. В дальнейшем С. Чандрасекар [7] обобщил этот результат на атмосферу конечной оптической толщины.

В последнем случае для коэффициентов отражения и пропускания имеем

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \sum_0^n (-1)^l x_l \frac{\varphi_l(\eta) \varphi_l(\zeta) - \psi_l(\eta) \psi_l(\zeta)}{\eta + \zeta}, \quad (30)$$

$$\sigma(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \sum_0^n x_l \frac{\varphi_l(\eta) \psi_l(\zeta) - \varphi_l(\zeta) \psi_l(\eta)}{\zeta - \eta}. \quad (31)$$

В свою очередь вспомогательные функции  $\varphi_l(\eta)$  и  $\psi_l(\eta)$  выражаются через величины  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$  при помощи формул

$$\varphi_t(\eta) = P_t(\eta) + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \zeta) P_t(-\zeta) d\zeta, \quad (32)$$

$$\psi_t(\eta) = P_t(\eta) e^{-\frac{\zeta_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta) P_t(\zeta) d\zeta. \quad (33)$$

Подстановка (30) и (31) в соотношения (32) и (33) дает систему нелинейных интегральных уравнений для определения функций  $\varphi_t(\eta)$  и  $\psi_t(\eta)$ .

Однако для определения этих функций могут быть получены также линейные интегральные уравнения. Такая возможность была указана в статье автора [1], в которой были даны упомянутые уравнения при простейших индикатрисах рассеяния.

При произвольной индикатрисе рассеяния линейные интегральные уравнения для функций  $\varphi_t(\eta)$  и  $\psi_t(\eta)$  легко получаются из уравнений (8) и (9) при использовании соотношений (32) и (33). Умножая (8) на  $P_t(\zeta)$ , интегрируя по  $\zeta$  в пределах от 0 до 1 и применяя (32) и (33), находим

$$\begin{aligned} [\varphi_t(\eta) - P_t(\eta)] T(\eta) &= \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, \eta')}{\eta' - \eta} [\varphi_t(\eta') - P_t(\eta')] d\eta' - \\ &- (-1)^t \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\zeta_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, -\eta')}{\eta + \eta'} \psi_t(\eta') d\eta' + \\ &+ (-1)^t \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, -\zeta)}{\eta + \zeta} P_t(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (34)$$

Это уравнение при помощи формул (10)–(12) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \varphi_t(\eta) T(\eta) &= \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, -\eta')}{\eta' - \eta} \varphi_t(\eta') d\eta' - \\ &- (-1)^t \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\zeta_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, -\eta')}{\eta + \eta'} \psi_t(\eta') d\eta' + R_t(\eta). \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогично из уравнения (9) получаем

$$\begin{aligned} \psi_i(\eta) T(\eta) &= \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, \eta')}{\eta' - \eta} \psi_i(\eta') d\eta' - \\ &- (-1)^i \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, -\eta')}{\eta + \eta'} \tau_i(\eta') d\eta' + e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} R_i(\eta). \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, вспомогательные функции  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  удовлетворяют линейным интегральным уравнениям (35) и (36). Важно подчеркнуть, что пара функций  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  при данном  $i$  определяется независимо от других функций.

Так как уравнения (35) и (36) имеют не единственное решение, то к ним надо добавить некоторые условия для получения решения с нужным физическим смыслом. Эти условия находятся путем умножения соотношений (22) и (23) на  $P_i(\eta)$ , интегрирования по  $\eta$  в пределах от 0 до 1 и использования формул (32) и (33). К тем же условиям мы придем, если положим  $\eta = 1/k$  в уравнениях (35) и (36) и применим формулы (25) и (26). В результате имеем

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 i(\eta) \varphi_i(\eta) d\eta + (-1)^i \frac{\lambda}{2} e^{-k\tau_0} \int_0^1 i(-\eta) \psi_i(\eta) d\eta = R_i\left(\frac{1}{k}\right), \quad (37)$$

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 i(\eta) \psi_i(\eta) d\eta + (-1)^i \frac{\lambda}{2} e^{-k\tau_0} \int_0^1 i(-\eta) \varphi_i(\eta) d\eta = e^{-k\tau_0} R_i\left(\frac{1}{k}\right). \quad (38)$$

В случае чистого рассеяния из соотношений (37) и (38) при учете формулы (27) находим

$$\int_0^1 [\varphi_i(\eta) + (-1)^i \psi_i(\eta)] d\eta = 2 \delta_{i0}, \quad (39)$$

$$\int_0^1 \varphi_i(\eta) \left[ \left(1 - \frac{x_1}{3}\right) \tau_0 + \eta \right] d\eta - \int_0^1 \psi_i(\eta) \eta d\eta = 2 \left(1 - \frac{x_1}{3}\right) \tau_0 \delta_{i0}, \quad (40)$$

(при четном  $i$ )

$$\int_0^1 \varphi_i(\eta) \left[ \left(1 - \frac{x_1}{3}\right) \tau_0 + \eta \right] d\eta + \int_0^1 \psi_i(\eta) \eta d\eta = \frac{2}{3} \delta_{ii}. \quad (41)$$

(при нечетном  $i$ )

Соотношения (39)–(41) легко также получить путем использования формул (28), (29), (32) и (33).

Уравнения (35) и (37) нашел также Малликин [8]. Вместе с тем он рассмотрел проблему единственности решения этих уравнений и в качестве дополнительных условий дал соотношения (37) и (38). Условия (39)–(41) были получены раньше в работах Малликина [8] и Басбридж [9].

Следует отметить, что через функции  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  выражаются интенсивности излучения, выходящего из атмосферы, не только при освещении ее параллельными лучами, но и при внутренних источниках энергии (см. работу И. Н. Минина [10]).

Выражения функций  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  через функции  $X(\eta)$  и  $Y(\eta)$ . Для простейших индикатрис рассеяния Чандрасекару [7] удалось выразить функции  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  (а значит и величины  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$ ) только через две функции  $X(\eta)$  и  $Y(\eta)$ , определенные уравнениями

$$X(\eta) = 1 + \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta + \eta'} [X(\eta) X(\eta') - Y(\eta) Y(\eta')] d\eta', \quad (42)$$

$$Y(\eta) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta - \eta'} [Y(\eta) X(\eta') - X(\eta) Y(\eta')] d\eta', \quad (43)$$

где  $\Psi(\eta)$  — „характеристическая функция“, зависящая от  $x(\eta)$  и  $\lambda$ .

Однако Чандрасекар не показал, какой формулой определяется функция  $\Psi(\eta)$  и каким способом можно выразить функции  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  через функции  $X(\eta)$  и  $Y(\eta)$  при произвольной индикатрисе рассеяния. Очевидно, что получение ответов на эти вопросы представляет значительный интерес для теории неизотропного рассеяния света.

В дальнейшем (см. [11], [8] и [3]) было найдено, что

$$\Psi(\eta) = \frac{\lambda}{2} A(\eta, \eta), \quad (44)$$

где функция  $A(\eta, \zeta)$  определяется формулой (11).

Теперь мы дадим общий метод получения выражений функций  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  через функции  $X(\eta)$  и  $Y(\eta)$ .

Чтобы сделать это, воспользуемся уравнениями (35) и (36) для функций  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$ , а также следующими линейными интегральными уравнениями для функций  $X(\eta)$  и  $Y(\eta)$ :

$$X(\eta) T(\eta) = 1 + \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta' - \eta} X(\eta') d\eta' - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta + \eta'} Y(\eta') d\eta', \quad (45).$$

$$Y(\eta) T(\eta) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta' - \eta} Y(\eta') d\eta' - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta + \eta'} X(\eta') d\eta', \quad (46).$$

вытекающими из уравнений (42) и (43).

Будем искать функции  $\varphi_i(\eta)$  и  $\psi_i(\eta)$  в виде

$$\varphi_i(\eta) = X(\eta) q_i(\eta) + Y(\eta) r_i(\eta), \quad (47).$$

$$\psi_i(\eta) = X(\eta) s_i(\eta) + Y(\eta) t_i(\eta), \quad (48)$$

где  $q_i(\eta)$ ,  $r_i(\eta)$ ,  $s_i(\eta)$ ,  $t_i(\eta)$  — некоторые полиномы.

Подставляя выражения (47) и (48) в уравнения (35) и (36), пользуясь уравнениями (45) и (46) и приравнявая отдельно члены, содержащие множитель  $e^{-\tau_0/\eta}$  и не содержащие его, получим

$$q_i(\eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 X(\eta') \frac{A(\eta, \eta') q_i(\eta') - A(\eta', \eta) q_i(\eta)}{\eta' - \eta} d\eta' + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 Y(\eta') \frac{A(\eta, \eta') r_i(\eta') - A(\eta', \eta) r_i(\eta)}{\eta' - \eta} d\eta' + R_i(\eta), \quad (49).$$

$$r_i(\eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 X(\eta') \frac{A(\eta', \eta) r_i(\eta) - (-1)^i A(\eta, -\eta') s_i(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta' + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 Y(\eta') \frac{A(\eta', \eta) q_i(\eta) - (-1)^i A(\eta, -\eta') t_i(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta', \quad (50).$$

$$s_t(\eta) + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 X(\eta') \frac{A(\eta, \eta') s_t(\eta') - A(\eta', \eta) s_t(\eta)}{\eta' - \eta} d\eta' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 Y(\eta') \frac{A(\eta, \eta') t_t(\eta') - A(\eta', \eta) t_t(\eta)}{\eta' - \eta} d\eta', \quad (51)$$

$$t_t(\eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 X(\eta') \frac{A(\eta', \eta) t_t(\eta) - (-1)^t A(\eta, -\eta') q_t(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 Y(\eta') \frac{A(\eta', \eta) s_t(\eta) - (-1)^t A(\eta, -\eta') r_t(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta' + R_t(\eta). \quad (52)$$

Легко видеть, что если положить

$$s_t(\eta) = (-1)^t r_t(-\eta), \quad t_t(\eta) = (-1)^t q_t(-\eta), \quad (53)$$

то уравнение (50) переходит в (51), а уравнение (52) — в (49).

Следовательно, уравнения (35) и (36) будут удовлетворены, если функции  $\varphi_t(\eta)$  и  $\psi_t(\eta)$  даются формулами (47) и (48), в которых полиномы  $n$ -ой степени  $q_t(\eta)$ ,  $r_t(\eta)$ ,  $s_t(\eta)$ ,  $t_t(\eta)$  определяются уравнениями (49) и (51) вместе с соотношениями (53).

Очевидно, что этот результат можно сформулировать еще так: функции  $\varphi_t(\eta)$  и  $\psi_t(\eta)$ , являющиеся решением уравнений (35) и (36), имеют вид

$$\varphi_t(\eta) = X(\eta) q_t(\eta) + (-1)^t Y(\eta) s_t(-\eta), \quad (54)$$

$$\psi_t(\eta) = X(\eta) s_t(\eta) + (-1)^t Y(\eta) q_t(-\eta), \quad (55)$$

где полиномы  $n$ -ой степени  $q_t(\eta)$  и  $s_t(\eta)$  определяются уравнениями

$$q_t(\eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 X(\eta') \frac{A(\eta, \eta') q_t(\eta') - A(\eta', \eta) q_t(\eta)}{\eta' - \eta} d\eta' +$$

$$+ (-1)^t \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 Y(\eta') \frac{A(\eta, \eta') s_t(-\eta') - A(\eta', \eta) s_t(-\eta)}{\eta' - \eta} d\eta' + R_t(\eta), \quad (56)$$

$$s_i(\eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 X(\eta') \frac{A(\eta, \eta') s_i(\eta) - A(\eta', \eta) s_i(\eta)}{\eta' - \eta} d\eta' +$$

$$+ (-1)^i \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 Y(\eta') \frac{A(\eta, \eta') q_i(-\eta') - A(\eta', \eta) q_i(-\eta)}{\eta' - \eta} d\eta'. \quad (57)$$

Заметим, что нулевые члены полиномов  $q_i(\eta)$  и  $s_i(\eta)$  на основании (56), (57) и (12) равны

$$q_i(0) = P_i(0), \quad s_i(0) = 0. \quad (58)$$

Полученные выше результаты справедливы при любой индикатрисе рассеяния, представленной формулой (2). Сейчас мы рассмотрим пример применения этих результатов.

*Случай двухчленной индикатрисы рассеяния.* Предположим, что индикатриса рассеяния имеет вид

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma. \quad (59)$$

Коэффициенты отражения и пропускания при такой индикатрисе получил Чандрасекар [7]. Мы найдем их в качестве примера применения общей теории.

В данном случае

$$A(\eta, \zeta) = 1 + x_1(1 - \lambda)\eta\zeta \quad (60)$$

и

$$\Psi(\eta) = \frac{\lambda}{2} [1 + x_1(1 - \lambda)\eta^2]. \quad (61)$$

Поэтому функции  $X(\eta)$  и  $Y(\eta)$  должны быть найдены из уравнений (42) и (43) при характеристической функции (61).

Полиномы  $q_i(\eta)$  и  $s_i(\eta)$  при учете (58) следует искать в виде

$$q_0(\eta) = 1 + C_0 \eta, \quad s_0(\eta) = D_0 \eta, \quad (62)$$

$$q_1(\eta) = C_1 \eta, \quad s_1(\eta) = D_1 \eta. \quad (63)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (56) и (57), получаем

$$C_0 = -\frac{\lambda}{\Delta} (1 - \lambda) x_1 [(2 - \lambda \alpha_0) \alpha_1 - \lambda \beta_0 \beta_1], \quad (64)$$

$$D_0 = -\frac{\lambda}{\Delta} (1 - \lambda) x_1 [(2 - \lambda \alpha_0) \beta_1 - \lambda \beta_0 \alpha_1], \quad (65)$$

$$C_1 = \frac{2}{\Delta} (1 - \lambda) (2 - \lambda a_0), \quad (66)$$

$$D_1 = \frac{2}{\Delta} (1 - \lambda) \lambda \beta_0, \quad (67)$$

где введены обозначения

$$\Delta = (2 - \lambda a_0)^2 - (\lambda \beta_0)^2, \quad (68)$$

$$a_k = \int_0^1 X(\eta) \eta^k d\eta, \quad \beta_k = \int_0^1 Y(\eta) \eta^k d\eta. \quad (69)$$

На основании формул (54), (55), (62) и (63) имеем

$$\varphi_0(\eta) = (1 + C_0 \eta) X(\eta) - D_0 \eta Y(\eta), \quad (70)$$

$$\psi_0(\eta) = D_0 \eta X(\eta) + (1 - C_0 \eta) Y(\eta), \quad (71)$$

$$\varphi_1(\eta) = C_1 \eta X(\eta) + D_1 \eta Y(\eta), \quad (72)$$

$$\psi_1(\eta) = D_1 \eta X(\eta) + C_1 \eta Y(\eta). \quad (73)$$

Подстановка выражений (70) — (73) в формулы (30) и (31) (при  $n = 1$ ) дает искомые величины  $\rho(\eta, \zeta)$  и  $\sigma(\eta, \zeta)$ .

*Альbedo атмосферы и освещенность поверхности.* Для практических применений большой интерес представляет альbedo атмосферы, т. е. ее полная отражательная способность. Так называемое „плоское альbedo“ определяется формулой

$$A_p(\zeta) = 2 \int_0^1 \rho(\eta, \zeta) \eta d\eta, \quad (74)$$

а „сферическое альbedo“ равно

$$A_s = 2 \int_0^1 A_p(\zeta) \zeta d\zeta. \quad (75)$$

Другой величиной, важной для практики, является освещенность поверхности, к которой примыкает атмосфера. Если альbedo поверхности равно нулю, то для ее освещенности имеем

$$E(\zeta) = V(\zeta) = S\zeta, \quad (76)$$

где

$$V(\zeta) = e^{-\frac{\zeta}{\Delta}} + 2 \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta) \eta d\eta, \quad (77)$$

Сравнивая между собой формулы (74) и (32), получаем

$$A_p(\zeta) = 1 - \frac{1}{\zeta} \varphi_1(\zeta), \quad (78)$$

а значит

$$A_s = 1 - 2 \int_0^1 \varphi_1(\zeta) d\zeta. \quad (79)$$

Сравнение (77) с (33) дает

$$V(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \psi_1(\zeta). \quad (80)$$

Таким образом, для нахождения альbedo атмосферы и освещенности поверхности при любой индикатрисе рассеяния достаточно знать лишь вспомогательные функции  $\varphi_1(\eta)$  и  $\psi_1(\eta)$ .

При индикатрисе рассеяния (59) на основании формул (78) — (80) и приведенных выше выражений для функций  $\varphi_1(\eta)$  и  $\psi_1(\eta)$  получаем

$$A_p(\zeta) = 1 - 2 \frac{1-\lambda}{\Delta} [(2 - \lambda a_0) X(\zeta) + \lambda \beta_0 Y(\zeta)], \quad (81)$$

$$A_s = 1 - 4 \frac{1-\lambda}{\Delta} [(2 - \lambda a_0) a_1 + \lambda \beta_0 \beta_1], \quad (82)$$

$$V(\zeta) = 2 \frac{1-\lambda}{\Delta} [\lambda \beta_0 X(\zeta) + (2 - \lambda a_0) Y(\zeta)]. \quad (83)$$

При  $\lambda = 1$  неопределенность в этих формулах устраняется при помощи соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{1-\lambda} = & 4 \left( 1 - \frac{\lambda}{3} x_1 + \lambda x_1 a_2 \right) - \\ & - \lambda x_1 [2(a_0 a_2 - \beta_0 \beta_2) + (1-\lambda) x_1 (a_2^2 - \beta_2^2)], \end{aligned} \quad (84)$$

которое легко находится из уравнения (42).

## DIFFUSE REFLECTION AND TRANSMISSION OF LIGHT BY AN ATMOSPHERE WITH ANISOTROPIC SCATTERING

V. V. SOBOLEV

The investigation started in [1] of the linear integral equations for the reflection and transmission coefficients  $\rho(\eta, \zeta)$  and  $\sigma(\eta, \zeta)$  and for the auxiliary functions  $\varphi_i(\eta)$  and  $\psi_i(\eta)$  is continued. The complementary relations for these quantities are found. The general method is given which enables one to obtain the functions  $\varphi_i(\eta)$  and  $\psi_i(\eta)$  in terms of Chandrasekhar's functions  $X(\eta)$  and  $Y(\eta)$ . As an example the case of the two-term scattering indicatrix is considered. The formulae are given for the albedo of the atmosphere and the illuminance of the surface.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, ДАН СССР, 69, 353, 547, 1949.
2. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
3. В. В. Соболев, Астрон. ж., 45, 528, 1968.
4. В. В. Соболев, Астрон. ж., 26, 22, 1949.
5. В. А. Амбарцумян, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3, 97, 1942.
6. В. А. Амбарцумян, ЖЭТФ, 13, 224, 1943.
7. S. Chandrasekhar, Radiative Transfer, Oxford, 1950. (Русск. перевод: С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953).
8. T. W. Malliktn, Ap. J. 139, 379, 1267, 1964; 147, 858, 1967.
9. I. W. Vasbridge, Ap. J. 149, 195, 1967.
10. И. Н. Минин, Астрон. ж., 43, 1244, 1966.
11. I. Kuscov, J. Math. Phys., 34, 256, 1956.

РАССЕЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ  
ЛИНИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМОЙ

С. А. КАПЛАН, В. Н. ЦЫТОВИЧ

Поступила 9 июля 1968

Рассматривается образование сателлитов и расширение спектральных линий при переносе излучения в турбулентной плазме. Предлагается механизм накачки излучения в спектральных линиях, который в принципе может дать „лазер-эффект“ в естественных условиях.

В нашей работе [1] был рассмотрен эффект рассеяния электромагнитных волн в турбулентной плазме при их слиянии (или распадах) с волнами плазменной турбулентности. При этом оказалось, что если фазовые скорости плазменных волн малы по сравнению со скоростью света, то упругое рассеяние (то есть пренебрежение изменением частоты) преобладает над неупругим рассеянием. Поэтому изменение частоты при рассеянии в работе [1] не учитывалось. Однако так можно делать только в том случае, когда рассматривается рассеяние электромагнитного излучения в непрерывном спектре. Даже небольшое изменение частоты кванта спектральной линии, идущего в турбулентной плазме, может вывести его из контура спектральной линии. В настоящей работе, являющейся второй из серии статей, посвященных рассеянию электромагнитных волн в турбулентной плазме, мы рассмотрим влияние плазменных волн на перенос излучения в спектральной линии. Поскольку в работе [1] был подробно изложен метод расчета эффектов рассматриваемого рассеяния, мы здесь ограничимся записью окончательных формул. Обозначения в этой работе такие же, как и в [1], причем и здесь мы будем опускать численные множители порядка единицы.

В дальнейшем нам понадобится выражение для атомарного коэффициента рассеяния в спектральной линии. Ради простоты мы

предположим, что контур линии, центрированной на частоте  $\omega_*$ , можно аппроксимировать прямоугольником с шириной линии  $\Delta\omega_*$ . Если концентрацию атомов (или молекул), имеющих линию  $\omega_*$  и находящихся на нижнем и верхнем уровнях, обозначить через  $n'_*$  и  $n''_*$  соответственно, то коэффициент рассеяния в линии есть

$$\alpha(\omega_*) = \frac{\omega_{0e}^2 f_*}{c \Delta\omega_*} \frac{n'_* - n''_*}{n_e}, \quad (1)$$

где, напомним,  $\omega_{0e} = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$  — плазменная ленгмюрова частота,  $n_e$  — концентрация электронов плазмы. Здесь  $f_*$  — сила осциллятора линии поглощения.

1. *Появление спутников линии.* Если частотная ширина линии заметно меньше частоты плазменной турбулентности (обозначаемой в общем случае через  $\omega_1$ , как и в [1]), то есть если выполнено условие  $\Delta\omega_* \ll \omega_1$ , то в результате слияний и распадов плазменных и электромагнитных волн появляются кванты с частотами:

$$\omega = \omega_* \pm \omega_1. \quad (2)$$

Если пределы частот плазменной турбулентности тоже ограничены, как например в случае ленгмюровской турбулентности с малыми фазовыми скоростями, то этот эффект приводит к образованию спутников линий — расщеплению линии на три компоненты. Подобный процесс подробно изучен для случая слияния электромагнитных волн с тепловыми флуктуациями электронной концентрации плазмы [2]. Здесь приводятся результаты расчета этого эффекта для случая слияния с волнами развитой плазменной турбулентности.

Используя результаты работы [1] и учитывая, что при  $\omega_* \gg \omega_1$  мы по-прежнему можем считать изменение частоты в процессе распадного взаимодействия небольшим, легко убедиться, что отношение коэффициентов излучения на частотах (2) к интенсивности излучения в основной линии с частотой  $\omega_*$  по-прежнему равно величине коэффициента рассеяния  $\sigma(\omega_*)$ , определенного формулами (5) и (6) работы [1]. В табл. 1 настоящей работы приведены выражения для коэффициентов

$$\sigma(\omega_* \pm \omega_1) = \frac{j(\omega_* \pm \omega_1)}{I(\omega_*)}. \quad (3)$$

Отличие этих коэффициентов от коэффициентов рассеяния в непрерывном спектре, приведенных в [1], в том, что здесь нет необходимости переходить к диффузионному приближению (то есть нет раз-

## КОЭФФИЦИЕНТЫ РАССЕЙЯНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Тип волны и частота плазменных пульсаций	Отношение коэффициента получения п сателлитах линий к интенсивности самой линии (формула (3))	Коэффициент диффузии по оси частот $\chi(\omega)$ (формула (4))
Электронные (ленгмюровские) плазменные волны $\omega_1 \approx \omega_{0e}$	$\frac{\omega_{0e}^2}{\omega_p^2 n_e m_e c^2} \int_0^{k_{\max}} k_1 F^l(k_1) dk_1$	$\frac{\omega_{0e}^4}{\omega_p^2 n_e m_e c^2} \int_0^{k_{\max}} k_1 F^l(k_1) dk_1$
Ионные плазменные волны $\omega_1 \approx \omega_{0i}$	$\frac{\omega_{0e}^6}{\omega_p^2 n_e m_e c^2 V_{Te}^4} \int_0^{k_{\max}} F^l(k_1) \frac{dk_1}{k_1^3}$	$\frac{\omega_{0e}^6}{\omega_p^2 n_e m_e V_{Te}^4} \int_0^{k_{\max}} F^l(k_1) \frac{dk_1}{k_1}$
Ионный плазменный звук и медленные магнитозвуковые волны $\omega_1 \approx k_1 V_s \ll \omega_{0i}$ $\omega_1 \approx k_1 V_s \cos \vartheta \ll \omega_{Hi}$	$\frac{\omega_{0e}^4 \lambda_p W^s}{\omega_p^2 n_e m_e c^2 V_{Te}^2}$	$\frac{\omega_{0e}^6}{\omega_p^2 n_e m_e V_{Te}^4} \int_0^{k_{\max}} F^s(k_1) k_1 dk_1$
Быстрые магнитозвуковые волны $\omega_1 \approx k_1 V_a \cos \vartheta \ll \omega_{Hi}$	$\frac{\omega_{0e}^4 W^m}{\omega_p^2 n_e m_e c^2 V_a^2}$	
Альвеновские волны $\omega_1 \approx k_1 V_a$	$\frac{\omega_{0e}^2 W^a}{\omega_p^2 n_e m_e V_a^2 \lambda_p}$	$\frac{\omega_{0e}^6}{\omega_p^2 n_e m_e c^2} \int_0^{k_{\max}} F^a(k_1) \frac{dk_1}{k_1}$

В последних трех формулах учтено, что сателлиты линий образуются лишь при узких спектрах волновых чисел плазменной турбулентности.  $\lambda_p$  — длина волны плазменных пульсаций.

ложения по малому параметру  $(k_1/k)^2$ . В формуле (3)  $I(\omega_*)$  есть средняя (по направлениям) интенсивность излучения в основной линии  $\omega_*$ , а  $j(\omega_* \pm \omega_1)$  есть коэффициенты излучения в частотах (2). Заметим, что волновые векторы спутников совпадают с волновыми векторами основной линии, если  $k_1 \ll k$ .

2. *Расширение спектральных линий.* Если выполнено обратное неравенство  $\Delta\omega_* \gtrsim \omega_1$ , то многократные слияния и распады квантов электромагнитных волн приведут к расширению линий, которые теперь могут стать не только шире своей первоначальной частотной ширины, но и много шире, чем область частот плазменной турбулентности. Этот эффект учитывается сохранением члена  $D_c k_i k_j / k^2$  в формуле (11) работы [1], что приведет к появлению в уравнении переноса в диффузионном приближении (13) работы [1] дополнительного члена

$$\chi(\omega_*) \frac{\partial^2 I(\omega)}{\partial \omega^2}, \quad (4)$$

где коэффициент диффузии по оси частот  $\chi(\omega) = c^2 D_c$  определяется формулами (10), (11) работы [1]. Полученные таким образом значения коэффициентов  $\chi(\omega_*)$  также приведены в табл. 1 настоящей работы.

Для ориентировки удобна следующая оценка величины  $\chi'$  для процессов слияния и распадов электромагнитных волн с волнами ленгмюровской плазменной турбулентности:

$$\chi'(\omega_*) \approx \frac{\omega_{ce}^4 W^l}{\omega_*^2 n_e m_e c^2 \lambda_p}, \quad (5)$$

где  $W^l$  и  $\lambda_p$  — плотность энергии и длина волны этой турбулентности.

Учитывая расширение спектральных линий плазменными механизмами, нужно иметь в виду следующее. При решении уравнений переноса в линии обычно делается оправданное результатами предположение о полном перераспределении излучения по частотам. Иными словами, излученный атомом или молекулой квант почти „забывает“ о частоте поглощенного кванта. Поэтому, если изменение частоты за счет распадных взаимодействий на пути свободного пробега кванта не выводит его из атомарного (например доплеровского) контура, то все „приобретенное“ им расширение исчезает при поглощении и переизлучении. Сравнивая (4) с членом атомарного рассеяния в уравнении переноса  $\alpha(\omega_*) I(\omega_*)$  находим, что при выполнении неравенства

$$\chi(\omega_*) \ll \alpha(\omega_*) (\Delta\omega_D)^2, \quad (6)$$

где  $\Delta\omega_D$  — допллерова ширина линии, в рамках предположения о полном перераспределении по частотам член (4) в уравнении переноса можно вообще опустить. Подставляя в (6) соотношения (1) и (5), находим условие пренебрежения расширением линии в случае распадного взаимодействия с ленгмюровской турбулентностью

$$W' \ll \left( \frac{\omega_*}{\omega_{0a}} \right)^3 \frac{\Delta\omega_D f_*}{\omega_*} (n'_* - n''_*) m_e c v_p. \quad (7)$$

С другой стороны, если вместо (6) и (7) имеют место обратные неравенства, то взаимодействие плазменных и электромагнитных волн настолько велико, что кванты спектральных линий очень быстро уходят из контуров и рассеянием этих квантов на атомах или молекулах можно вообще пренебречь, то есть опустить в уравнении переноса члены с  $\alpha(\omega_*)$ .

Тогда уравнение переноса сведется к обычному уравнению диффузии (в том числе и по оси частот) и его легко решить обычными методами теории диффузии при довольно общих предположениях о распределении излучающих атомов в рассеивающей среде. В частности, согласно известному результату об увеличении дисперсии, имеем для характерной частотной ширины линии, образующейся при прохождении квантом пути  $r$ ,

$$\sqrt{(\Delta\omega_*)^2} \approx 2 \sqrt{\chi(\omega_*)} r \approx \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_*} \sqrt{\frac{r}{i_p} \frac{W'}{n_e m_e c^2}}. \quad (8)$$

Последнее равенство записано только для случая расширения линии ленгмюровской турбулентностью,  $i_p$  — ее длина волны.

Указанное расширение линии сопровождается и увеличением дисперсии направлений волновых векторов:  $\Delta\theta$ . Имеем

$$\frac{(\Delta\omega_*)^2}{(\Delta\theta)^2} \approx \frac{\chi(c_*)}{\sigma(\omega_*)} \approx \omega_*^2 \frac{D_c}{D_*}. \quad (9)$$

Для ленгмюровских волн  $D_c/D_* \approx (v_{p1}/c)^2$ , для ионнозвуковых —  $D_c \approx D_*$ . Если, например, линия создается точечным источником, то на пути к наблюдателю наряду с расширением линии должно наблюдаться и увеличение угловых размеров, что может служить известной проверкой утверждений о расширении линии турбулентностью в данных случаях.

Соотношения (8) и (9) справедливы при  $(\Delta\theta)^2 \ll 1$ , то есть при относительно небольшом упругом рассеянии. Если оно велико, то есть, если выполнено неравенство  $(\Delta\theta)^2 \gg 1$ , а также неравенство, об-

ратное (7), то квант электромагнитной волны проводит в среде значительно больше времени. Теперь уже имеет место и диффузия по оси частот, и диффузия квантов в пространстве. В первом приближении можно считать, что увеличение дисперсии по оси частот теперь пропорционально квадрату размеров среды, то есть

$$\sqrt{(\Delta\omega_*)^2} \approx r \sqrt{\gamma(\omega_*) \chi(\omega_*)} \approx \frac{\omega_{0e}^3 W^2 r}{\omega_*^3 n_e m_e c^2 l_p^2} \quad (10)$$

Также и здесь последнее равенство относится к случаю расширения линии ленгмюровской турбулентностью.

Подобным образом можно рассмотреть расширение линии плазменной турбулентностью любого типа. Однако здесь надо иметь в виду следующее. Эффективность распадных взаимодействий очень быстро падает с увеличением отношения  $\omega_*/\omega_1$ . Поэтому практически заметный эффект может быть от турбулентности с наибольшими частотами (то есть ленгмюровской) в случае линий с наименьшими частотами (то есть в радиодиапазоне). Это видно, в частности, и в формуле (8). Примеры использования полученных здесь формул будут приведены в разделе 4.

**3. Раскачка излучения в спектральных линиях.** Турбулентную плазму сравнительно легко можно привести в неустойчивое состояние по отношению к раскачке электромагнитного излучения. Например, если через турбулентную плазму проходит пучок релятивистских электронов, то конверсия плазменных волн в электромагнитные при их рассеянии на этих электронах может привести к раскачке электромагнитного поля в довольно широком интервале частот. Необходимым условием для этого, помимо анизотропии в распределении скоростей частиц, должен быть и большой размер системы, а именно такой, чтобы произведение пространственного инкремента на размер было бы больше единицы (иными словами, оптическая толщина для раскачки излучения должна быть велика). Однако в работе [1] было показано, что в случае, когда в системе наряду с неустойчивостью имеет место и рассеяние электромагнитных волн, то условия для раскачки менее жесткие, так как упругое рассеяние задерживает кванты в среде и поэтому здесь раскачка возможна и при меньших размерах.

Коэффициенты раскачки электромагнитных волн при конверсии плазменной турбулентности были получены в [3]. Для того, чтобы получить заметный инкремент раскачки на частотах, значительно больше плазменных, необходимо большое количество быстрых частиц.

Поэтому раскачка поля излучения в непрерывном спектре вероятно встречается лишь в объектах типа квазаров или пульсаров [4]. Однако наличие в плазме примеси атомов или молекул может привести к изменению положения. В самом деле, в спектральных линиях резко увеличивается коэффициент упругого рассеяния (по сравнению с непрерывным спектром). Поэтому, если объект имеет недостаточный размер для того, чтобы раскачать излучение в непрерывном спектре, то в пределах контура спектральной линии кванты задерживаются и раскачиваются. Для этого необходимо следующее условие: размер объекта должен быть больше, чем обратная величина квадратного корня из произведения пространственного инкремента раскачки на коэффициент упругого рассеяния. Если это условие выполнено, то практически вся конверсия сосредотачивается в частотах контура спектральной линии. При этом, однако, необходимо иметь в виду, что плазменная турбулентность не должна расширять линию настолько, чтобы вывести кванты из пределов контура — тогда рассеяние уменьшится и эффект исчезнет.

Инкремент раскачки при конверсии ленгмюровских волн в электромагнитные при рассеянии на пучке электронов есть [3]

$$\mu(\omega_*) \approx \frac{\omega_{0e} W^l}{n_e m_e c^3} \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega_*} \frac{v_p}{c} \right)^{3/2} \frac{N_e}{n_e}, \quad (11)$$

где  $N_e$  — концентрация релятивистских электронов пучка. Используя неравенство (7) — требование отсутствия расширения линии, получаем для инкремента накачки в частотах линии:

$$\mu(\omega) \ll f_* \frac{\Delta\omega_D}{c} \left( \frac{\omega_*}{\omega_{0e}} \right)^{1/2} \left( \frac{v_p}{c} \right)^{3/2} \frac{n'_e - n_e}{n_e} \frac{N_e}{n_e}. \quad (12)$$

С другой стороны, поскольку при раскачке поля излучения релятивистскими частицами почти вся энергия переходит в излучение, можно использовать условие:  $N_e \approx W(\omega_*)/\varepsilon_{\min} \approx [W(\omega_*)/m_e c^2] \times \times (2c\omega_{0e}/v_p \omega_*)^{1/2}$ , где  $W(\omega_*)$  — наблюдаемая плотность излучения в спектральной линии, а  $\varepsilon_{\min}$  — минимальная энергия электронов, конвертирующих плазменные волны в электромагнитные волны частоты  $\omega_*$ . Окончательно получаем (сильное неравенство (7) здесь можно ослабить):

$$\mu(\omega_*) \lesssim \frac{f_* W(\omega_*)}{n_e m_e c^2} \frac{\Delta\omega_D v_p^2}{c^3} \frac{n'_e - n_e}{n_e}. \quad (13)$$

Условие раскачки теперь будет выглядеть так:

$$r \sqrt{\mu(\omega_*) \alpha(\omega_*)} \approx r \frac{V \sqrt{4\pi r_0 W(\omega_*)}}{m_e c^2} \frac{v_p}{c} \frac{n_e - n_c}{n} f^* \gg 1, \quad (14)$$

где по-прежнему  $r$  — характерный размер среды. Здесь  $r_0 = e^2/m_e c^2$  — классический радиус электрона. Величины  $W(\omega_*)$  и  $r$  в принципе наблюдаемы,  $v_p/c$  вероятно не слишком отличается от единицы (в пределах точности известных параметров). Формула (14) тогда определяет необходимую концентрацию рассеивающих атомов и молекул, в спектральные линии которых происходит накачка излучения. Пример оценки будет приведен в следующем разделе.

В заключение этого раздела отметим еще одну особенность накачки излучения в линиях. В инкременте раскачки (11), да и вообще во всех коэффициентах, описывающих взаимодействия плазменных и электромагнитных волн (в том числе и распадные), в знаменателе имеется множитель

$$\frac{1}{2\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon(\omega)],$$

определяющий плотность электромагнитного излучения в диспергирующей среде, который во всех приведенных расчетах принят равным единице. Здесь  $\varepsilon(\omega)$  — диэлектрическая проницаемость. Это условие действительно вполне оправдано в непрерывном спектре. Но вблизи линии диэлектрическая проницаемость меняется быстрее, и хотя там по-прежнему (в космических условиях)  $\varepsilon(\omega)$  мало отличается от единицы, но

$$\frac{1}{2\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon(\omega)] = 1 + \frac{f_{\omega} \omega_{pe}^2}{(\Delta\omega_*)^2} \frac{n_e - n_c}{n_e} \quad (15)$$

и в случае достаточно узкого контура и инверсной заселенности ( $n_c > n_e$ ) эта величина может не только заметно отличаться от единицы по абсолютной величине, но и стать отрицательной. Изменение знака величины (15) эквивалентно смене декремента на инкремент и обратно, то есть в том случае, когда при положительном (15) имело место лишь затухание излучения, в случае отрицательного (15) появляется раскачка. Правда, для этого необходимо прежде создать инверсную заселенность.

Если, например, в линии уже имеется инверсная заселенность, то благодаря распадным взаимодействиям электромагнитное излучение из соседних участков спектра в случае отрицательного (15) бу-

дет перекачиваться в область спектральной линии — таким образом рассматриваемый механизм может, по крайней мере, поддерживать накачку излучения в линии [5].

#### 4. Некоторые примеры использования полученных соотношений.

Приводимые ниже примеры являются только иллюстрациями и отнюдь не претендуют на объяснение соответствующих явлений.

Как известно, наблюдаются очень узкие линии „мистерия“ (четыре линии гидроксила с длиной волн около 18 см), относительная частотная ширина которых не превышает  $10^{-7}$ . По-видимому, эти линии не расширяются и не образуют сателлитов при распространении их в межзвездной среде. Пользуясь формулой (8), можно оценить верхний предел плотности энергии плазменных волн в межзвездной среде. Примем:  $\omega_* = 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ ,  $\Delta\omega_* = 10^3 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega_{0*} = 10^5 \text{ сек}^{-1}$ , отношение  $r/\lambda_p = 10^{15}$  (величина выбрана несколько произвольно, но у нас нет оценки длины плазменных волн  $\lambda_p$  в межзвездном пространстве). Тогда получим  $W' < 10^{-9} \text{ н.т.с}^2 \approx 10^{-15} \text{ эрг/см}^3$  при  $n_* \approx 1 \text{ см}^{-3}$ . Вероятно действительная плотность энергии плазменных волн много меньше этого предела.

Теперь предположим, что сами линии „мистерия“ возбуждаются рассмотренным в разделе 3 механизмом. Размер этих источников порядка  $10^{15} \text{ см}$ , плотность излучения в линиях достигает величины  $W(\omega_*) \approx 10^{-2} \text{ эрг/см}^3$ . Учитывая, что сила осциллятора линий ОН равна  $4 \cdot 10^{-8}$ , находим из (14) критерий накачки:

$$10^4 \frac{n_*' - n_*}{n_*} \gg 1$$

условие, которому, вероятно, не трудно удовлетворить. Разумеется, для того, чтобы утверждать, что возбуждение линий „мистерия“ действительно связано с этим механизмом, надо рассмотреть все особенности этих источников — их поляризацию, объяснить, почему разные линии возбуждаются по-разному. Указанный механизм требует большой плотности релятивистских электронов, но это прямое следствие очень большой плотности излучения. Мы надеемся, что в интерпретации линий „мистерия“ окажутся полезными и соображения, приведенные в конце предыдущего раздела.

НИРФИ, Горький,  
ФИАН СССР, Москва

THE SCATTERING OF RADIATION IN THE SPECTRAL LINE  
OF THE TURBULENT PLASMA

S. A. KAPLAN, V. N. TSITOVICH

The formation of satellites and the broadening of spectral lines during transfer of radiation in a turbulent plasma is considered. The mechanism on pumping radiation in the spectral lines is proposed which can in principal give a „maser-effect“ in natural conditions.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, *Астрофизика*, 4, 3, 1968.
2. А. И. Ахиезер и др., *Коллективные колебания в плазме*, Атомиздат, 1964.
3. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, *УФН*, 97, 77, 1969.
4. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, *Астрон. ж.*, 46, 199, 1969.
5. В. Н. Цытович, *Нелинейные процессы в плазме*, „Наука“, 1967.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В  
БЕСКОНЕЧНЫХ СРЕДАХ

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 5 мая 1968

Рассматривается нестационарное поле излучения в линии в стационарных бесконечной или полубесконечной средах. Считается, что однократное рассеяние происходит без изменения частоты или с полным перераспределением по частоте. Неизотропность рассеяния, а также конечность скорости света не учитываются, но принято во внимание поглощение в непрерывном спектре. Найдены точные выражения для резольвент основных интегральных уравнений и для интенсивности выходящего излучения. Из точных формул выведены асимптотики, отражающие поведение поля излучения в крыле линии и степени возбуждения атомов на далеких расстояниях от источников излучения и через большие промежутки времени после их действия.

1. *Введение.* Обычно в астрофизике изучаются процессы рассеяния, при которых оптические свойства среды, где распространяется излучение, и источники этого излучения можно считать стационарными. Но встречаются случаи, когда они меняются за время, сравнимое со временем установления лучистого равновесия, и тогда необходимо решать нестационарную задачу рассеяния. Мы не будем касаться рассеяния в изменяющейся со временем среде, в исследовании которого сделаны пока только первые шаги, то есть ограничимся рассмотрением нестационарного поля излучения в стационарной среде.

Изучение нестационарного поля излучения современными методами теории переноса было начато в работах В. В. Соболева [1, 2]. Им было подробно исследовано нестационарное монохроматическое рассеяние в одномерной среде. При этом был применен вероятностный метод, предложенный им ранее. Результаты В. В. Соболева были обобщены И. Н. Мининым [3]. Им же получены решения некоторых частных задач о свечении полубесконечного плоского слоя [4].

Математические вопросы, связанные с уравнениями нестационарной теории монохроматического рассеяния (спектр, полнота собственных функций), рассмотрены в книге Винга [5]. В книге [6] предлагается метод решения нестационарных задач путем нахождения преобразования Лапласа искомым функций и численного обращения его, а также приводится большой численный материал. В работе [7] численно найдены распределения, характеризующие распыление по времени выходящего из плоского слоя излучения, когда на границу перпендикулярно падает импульс параллельных лучей. В [6] и [7] рассматривалось рассеяние без изменения частоты, причем в [7] считалось, что квант все время проводит в пути, а рассеяние происходит мгновенно.

В последние годы большое распространение получил метод Кейса [8] решения задач переноса. Этим методом была решена нестационарная задача о диффузном отражении при монохроматическом рассеянии в трехмерной плоскопараллельной среде. Кушчер и Цвайфель [9] нашли представление в виде контурного интеграла для функции источника, а также выражение для интенсивности выходящего излучения и получили асимптотики для больших времен.

Теории нестационарного переноса резонансного излучения посвящено всего несколько работ. Холстейн [10] нашел асимптотическое поведение при больших временах поля излучения в плоском слое большой оптической толщины. В этой работе было сделано предположение о полном перераспределении по частоте при рассеянии. При том же предположении Б. А. Векленко [11] было найдено точное решение задачи о вспыхивающем точечном источнике в бесконечной среде, а В. В. Ивановым [12] о высвечивании равномерно возбужденной в начальный момент бесконечной среды. Недавно Ю. Ю. Абрамов и А. П. Напартович [13] изучили асимптотические свойства поля излучения в линии в бесконечной и полубесконечной средах и дали интересную физическую интерпретацию результатов.

В настоящей статье также рассматривается нестационарный перенос излучения в бесконечной и полубесконечной средах. Рассеяние может быть как монохроматическим, так и с полным перераспределением по частоте в линии. При этом при рассеянии в линии принято во внимание поглощение и в непрерывном спектре. Считается, что квант все время проводит в поглощенном состоянии, пролетая путь между двумя рассеяниями мгновенно. После постановки задачи следует несколько пунктов, имеющих чисто математический характер. В них находятся точные решения интегральных уравнений задачи. Затем получаются результаты, относящиеся непосредственно к нестационарному переносу излучения.

ционарному рассеянию. Основное внимание уделено выводу из точных решений различных асимптотик. При этом используются терминология и обозначения, принятые в работах ленинградской группы теоретиков-астрофизиков. Для облегчения чтения этой статьи полезно ознакомиться со статьей автора [14].

2. *Постановка задачи.* Пусть в бесконечной или полубесконечной плоскопараллельной среде распространяется излучение в изолированной линии, которая возникает при переходах между уровнями атомов одного сорта. Атомы имеют лишь эти два уровня и континуум. В среде имеются также другие частицы, ответственные за непрерывное поглощение, не зависящее от частоты в пределах рассматриваемой линии.

Пусть геометрия среды и плотность вещества неизменны. Напротив, мощность источников, то есть количество энергии, излучаемой атомами, возбужденными каким-нибудь посторонним агентом (внешним облучением, электронным ударом), изменяется со временем известным образом.

Вероятность, что квант, поглощенный в момент  $t = 0$ , излучится в момент между  $t$  и  $t + dt$ , будем считать равной  $e^{-\frac{t}{t_1}} dt/t_1$ . В  $t_1$  включено влияние столкновений. Мы рассмотрим лишь случай, когда время пролета кванта любой частоты в линии между рассеяниями пренебрежимо мало по сравнению с  $t_1$ . Положим  $t_1 = 1$ , то есть измеряем время в единицах среднего времени, проводимого квантом в поглощенном состоянии.

Оптические характеристики среды считаются заданными. Требуется рассчитать поле излучения и степень возбуждения в среде, а для полубесконечной среды найти выходящее излучение. При решении поставленной задачи достаточно рассмотреть лишь источники в линии, то есть такие, распределение мощности которых по частоте пропорционально коэффициенту поглощения в линии. Если имеются источники каких-либо других видов, то, учтя их один раз непосредственно, то есть сделав одну итерацию, мы придем к указанному простейшему случаю. Основными в стационарной теории являются задачи о диффузном отражении и о светящейся плоскости [2]. Им соответствуют временные задачи о падающем на границу полубесконечной среды потоке параллельных лучей, имеющем характер импульса, и о вспыхивающей плоскости.

Пусть на полубесконечную среду падает параллельный поток излучения в некоторой безразмерной частоте  $x_0$  под углом  $\arccos \mu_0$

к нормали. Распределение его по времени пропорционально  $\delta(t)$  ( $\delta$  — функции). Примем, что полная мощность падающего на единичную перпендикулярную площадку излучения равна 1. Тогда задача сводится к следующему уравнению (мы пишем все аргументы):

$$S(\tau, \mu_0, x_0, t, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi} A a(x_0) e^{-\frac{\beta + \alpha(x_0)}{\mu_0} \tau - t} + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|, \beta) d\tau' \int_0^t e^{-t'} S(\tau', \mu_0, x_0, t - t', \lambda, \beta) dt'. \quad (1)$$

Здесь использованы обычные обозначения (см., например, [14]);  $\tau$  — оптическая глубина в центре линии,  $\alpha(x)$  — контур коэффициента поглощения, причем  $\alpha(0) = 1$ ,  $A \int_{-\infty}^\infty \alpha(x) dx = 1$ ,  $\lambda$  — вероятность выживания кванта при рассеянии,  $\beta$  — доля непрерывного поглощения от поглощения в центре линии. Наконец,

$$K(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^\infty \alpha^2(x) E_1[\tau(\beta + \alpha(x))] dx, \quad (2)$$

а  $S(\tau, \mu_0, x_0, t, \lambda, \beta)$  — функция источников задачи. В силу обычного принципа взаимности эта величина совпадает с вероятностью выхода кванта, введенной В. В. Соболевым [15, 2]. Именно,  $S(\tau, \mu, x, t, \lambda, \beta) \times \times dt 2\pi d\mu dx$  есть вероятность того, что квант, поглощенный на глубине  $\tau$  в начальный момент, выйдет затем из среды в момент времени от  $t$  до  $t + dt$ , имея частоту в пределах от  $x$  до  $x + dx$ , внутри телесного угла  $2\pi d\mu$  около направлений, образующих угол  $\arcs \cos \mu$  с нормалью. Положим

$$S(\tau, \mu, x, t, \lambda, \beta) = A a(x) p\left(\tau, \frac{\mu}{\beta + \alpha(x)}, t, \lambda, \beta\right). \quad (3)$$

Функция  $p(\tau, z, t, \lambda, \beta)$  удовлетворяет более простому уравнению

$$p(\tau, z, t, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z} - t} + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|, \beta) d\tau' \int_0^t e^{-t'} p(\tau', z, t - t', \lambda, \beta) dt'. \quad (4)$$

Важную роль играет также задача о распространении излучения, если в начальный момент равномерно возбуждаются атомы на плос-

кости  $\tau = 0$ . Обозначим соответствующие функции источников через  $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda, \beta)$  для бесконечной среды и  $\Phi(\tau, t, \lambda, \beta)$  для полубесконечной. Они характеризуют происходящее со временем изменение степени возбуждения атомов в среде. Легко видеть, что  $\Phi(\tau, t, \lambda, \beta)$  связана с вероятностью выхода кванта из среды так же, как соответствующие стационарные функции, а именно

$$\Phi(\tau, t, \lambda, \beta) = 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} p\left(\tau, \frac{\mu}{\beta + \alpha(x)}, t, \lambda, \beta\right). \quad (5)$$

Функция  $\Phi(\tau, t, \lambda, \beta)$  удовлетворяет уравнению (4) со свободным членом  $(\lambda/2) K(\tau, \beta) e^{-t}$ . Ниже мы покажем, как, зная функцию  $\Phi$ , найти резольвенту уравнения (4). Для случая бесконечной среды резольвентная функция  $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda, \beta)$  также удовлетворяет уравнению вида (4), но со свободным членом  $(\lambda/2) K(|\tau|, \beta) e^{-t}$ , а интеграл по  $\tau'$  берется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Все эти уравнения легко получить из вероятностных соображений, как и в стационарном случае. Отметим, что монохроматическое рассеяние является частным случаем. Этот случай получается при прямоугольном контуре коэффициента поглощения. При этом можно считать  $\beta = 0$ , так как учет непрерывного поглощения ведет лишь к изменению масштаба оптических глубин.

3. *Метод решения основных уравнений.* Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$S(\tau, t) = g(\tau, t) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) d\tau' \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')} S(\tau', t') dt'. \quad (6)$$

Здесь  $g(\tau, t)$  — известная, а  $S(\tau, t)$  — искомая функции. В задачах теории переноса  $K(\tau)$  определяется формулой (2), а  $g(\tau, t)$  характеризует полную мощность источников в линии на глубине  $\tau$  в момент  $t$ . Сейчас мы не будем предполагать какого-либо конкретного вида для  $K(\tau)$ . В связи с этим в разделах 3—6 мы не будем писать аргумента  $\beta$ . Предположим лишь, что ядро  $K(\tau)$  может быть представлено в виде суперпозиции экспонент

$$K(\tau) = \int_a^b A(y) e^{-y\tau} dy, \quad (7)$$

где  $0 \leq a < b \leq +\infty$ ,  $A(y) \geq 0$  и удовлетворяет условию Гельдера в  $(a, b)$ , а

$$\int_a^b \frac{A(y)}{y} dy \leq 1. \quad (8)$$

Таким образом, мы рассматриваем уравнения более общие, чем сформулированные в разделе 2. Тем не менее мы будем по-прежнему придерживаться терминологии теории переноса.

Для нахождения решения (6) изучим частный случай его (здесь  $t \geq 0$ )

$$\Phi(\tau, t, \lambda) = \frac{\lambda}{2} K(\tau) e^{-t} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) d\tau' \int_0^t e^{-(t-t')} \Phi(\tau', t', \lambda) dt'. \quad (9)$$

Обозначим

$$\bar{\Phi}(\tau, s, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \Phi(\tau, t, \lambda) dt. \quad (10)$$

В дальнейшем все преобразования Лапласа по времени будем отмечать чертой сверху. Применяя это преобразование к уравнению (9), находим

$$\bar{\Phi}(\tau, s, \lambda) = \Phi\left(\tau, \frac{\lambda}{1+s}\right), \quad (11)$$

где  $\Phi(\tau, \lambda)$  — ограниченное решение уравнения

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} K(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau', \lambda) d\tau'. \quad (12)$$

Функция  $\Phi(\tau, \lambda)$  имеет большое значение в теории. Через нее выражается резольвента уравнения (12), то есть может быть найдено решение стационарного уравнения вида (12) с произвольным свободным членом [16]. Аналогичную роль играет  $\Phi(\tau, t, \lambda)$  для (6).

Тот факт, что преобразования Лапласа основных функций временной задачи получаются из соответствующих функций стационарной путем замены  $\lambda$  на  $\lambda/(1+s)$ , широко известен в физике и астрофизике [11, 3]. Из него следует, что все соотношения между стационарными функциями могут быть переписаны и для нестационарных, если использовать известные теоремы из теории преобразования Лапласа. В частности, с помощью теоремы о свертке из выражения резольвенты уравнения (12) через  $\Phi(\tau, \lambda)$  [16] легко получить, что резольвента (6)  $\Gamma(\tau, \tau', t - t', \lambda)$  выражается через функцию  $\Phi(\tau, t, \lambda)$  следующим образом:

$$\Gamma(\tau, \tau', t, \lambda) = \Phi(|\tau - \tau'|, t, \lambda) + \int_0^{\min\{\tau, \tau'\}} d\tau'' \int_0^t \Phi(\tau'' + \tau, t', \lambda) \Phi(\tau'' + \tau', t - t', \lambda) dt'. \quad (13)$$

Другой важной величиной в стационарной теории является  $H$ -функция. Она по существу есть преобразование Лапласа от  $\Phi(\tau, \lambda)$  по  $\tau$  [16]:

$$H(z, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\tau}} \Phi(\tau, \lambda) d\tau + 1. \quad (14)$$

$H(z, \lambda)$  удовлетворяет уравнению

$$H\left(\frac{1}{y}, \lambda\right) = 1 + \frac{\lambda}{2} H\left(\frac{1}{y}, \lambda\right) \int_a^b \frac{A(y') H(1/y', \lambda)}{y + y'} dy'. \quad (15)$$

Это уравнение имеет решение [17]

$$H(z, \lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln[1 - \lambda V(u)] \frac{z du}{1 + z^2 u^2} \right\}, \quad (16)$$

где

$$V(u) = \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \tau u d\tau = \int_a^b A(y) \frac{y dy}{y^2 + u^2}. \quad (17)$$

(Функция  $V(u)$  является четной, поэтому мы впредь будем считать  $u \geq 0$ ). Через  $H(z, \lambda)$  выражается интенсивность выходящего излучения в стационарной задаче о диффузном отражении [16, 17]. Соответствующую временную  $H$ -функцию обозначим  $H(z, t, \lambda)$ .

Нестационарная функция  $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda)$  связана с  $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$  точно так же, как и в случае полубесконечной среды. Эти функции являются ограниченными решениями уравнений (6) и (12), но с интегрированием по  $\tau'$  по промежутку  $(-\infty, +\infty)$ . Резольвентой для бесконечной среды служит  $\Phi_{\infty}(|\tau - \tau'|, t - t', \lambda)$ .

Для нахождения временных функций мы воспользуемся выражениями для стационарных и обратим преобразования Лапласа по времени. Заметим, что достаточно найти искомые функции при  $\lambda = 1$  [9]. Действительно, выражение  $\lambda/(1 + s)$  можно преобразовать к виду

$\frac{1}{1 + \frac{s+1-\lambda}{\lambda}}$ . Отсюда с помощью свойств преобразования Лапласа

находим, что, например,

$$\Phi(\tau, t, \lambda) = \lambda e^{-(1-\lambda)t} \Phi(\tau, \lambda t, 1). \quad (18)$$

Для рассеяния света это соотношение может быть получено и из физических соображений.

4. *Нахождение функции  $H(z, t, \lambda)$ .* Для обращения преобразования Лапласа необходимо исследовать особенности аналитической функции  $H(z, \lambda)$  на комплексной плоскости  $\lambda$ , считая  $z > 0$ . Преобразуем выражение (16), интегрируя по частям, к виду

$$\ln H(z, \lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V'(u) du}{\frac{1}{\lambda} - V(u)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} zu. \quad (19)$$

С помощью (19) функция  $H(z, \lambda)$  может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость  $\lambda$ . Правая часть (19) представляет собой интеграл типа Коши от  $1/\lambda$ . Он регулярен при всех  $\lambda$ , за исключением тех, для которых  $1/\lambda = V(u)$ , где  $u \in [0, +\infty)$ . Из предположений относительно функции  $A(y)$  легко видеть, что  $V(u)$  строго убывает [14] от значения  $V(0)$ , равного левой части (8), до 0 при  $u = +\infty$ . Таким образом,  $H(z, \lambda)$  имеет линию ветвления по  $\lambda$ —часть вещественной оси  $[1/V(0), +\infty)$ . Теперь найдем поведение этой функции вблизи линии ветвления. Сделаем в (19) подстановку  $\zeta = V(u)$ , обратную функцию обозначим  $u = \Lambda(\zeta)$ . Тогда

$$\ln H(z, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{V(0)} \frac{d\zeta}{\frac{1}{\lambda} - \zeta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z\Lambda(\zeta). \quad (20)$$

Пользуясь формулами для граничных значений интеграла типа Коши, находим при  $\lambda \in [1/V(0), +\infty)$

$$\begin{aligned} \ln H(z, \lambda \pm i0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{V(0)} \frac{d\zeta}{\frac{1}{\lambda} - \zeta \mp i0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z\Lambda(\zeta) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln |1 - \lambda V(u)| \frac{z du}{1 + z^2 u^2} \pm i \operatorname{arc} \operatorname{tg} z\Lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

В результате мы получаем основные формулы: при  $u \in [0, +\infty)$

$$H\left(z, \frac{1}{V(u)} \pm i0\right) = H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) (1 \pm izu), \quad (22)$$

где

$$H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln\left|1 - \frac{V(u')}{V(u)}\right| \frac{zdu'}{1+z^2u'^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{1+z^2u^2}}. \quad (23)$$

Теперь нам известны особенности по  $s$  преобразования Лапласа  $\bar{H}(z, s, \lambda) = H(z, \lambda/(1+s))$  — линия ветвления  $[-1, -1 + \lambda V(0)]$  — и поведение его вблизи нее. Обходя линию ветвления при обращении преобразования Лапласа сверху и снизу и учитывая, что  $H(z, 0) = 1$ , находим

$$H(z, t, \lambda) = \delta(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{-1+\lambda V(0)} e^{ts} \left[ H\left(z, \frac{\lambda}{1+s-i0}\right) - H\left(z, \frac{\lambda}{1+s+i0}\right) \right] ds. \quad (24)$$

Сделаем замену  $s = -[1 - \lambda V(u)]$  и воспользуемся (22). Тогда получим искомую формулу

$$H(z, t, \lambda) = \delta(t) + \frac{\lambda}{\pi} z \int_0^{\infty} e^{-[1-\lambda V(u)]t} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) [-uV'(u)] du. \quad (25)$$

Как уже говорилось, достаточно найти

$$H(z, t, 1) = \delta(t) + \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-[1-V(u)]t} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) [-uV'(u)] du. \quad (26)$$

Аналогичные рассуждения и использование (см. [16])

$$p(0, z, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} H(z, \lambda) \quad (27)$$

приводят к формуле

$$\begin{aligned} p(0, z, t, 1) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t e^{-(t-t')} H(z, t', 1) dt' = \\ &= \frac{z}{4\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-[1-V(u)]t} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) \frac{-uV'(u)}{V(u)} du. \end{aligned} \quad (28)$$

5. Уравнения, которым удовлетворяют функции  $H(z, t, \lambda)$  и  $H(z, \lambda)$ . При нахождении функции  $H(z, t, \lambda)$  мы исходили из явного выражения для  $H(z, \lambda)$ . Но для полноты приведем некоторые уравнения, решения которых мы уже знаем. Подставляя в (15) вместо  $\lambda$  величину  $\lambda/(1+s)$ , обращая преобразование Лапласа и пользуясь теоремой о свертке, находим основное уравнение для  $H(z, t, \lambda)$ :

$$H\left(\frac{1}{y}, t, \lambda\right) = \delta(t) + \frac{\lambda}{2} \int_a^b \frac{A(y')}{y+y'} dy' \int_0^t e^{-(t-t')} dt' \int_0^{t'} H\left(\frac{1}{y}, t'', \lambda\right) H\left(\frac{1}{y}, t'-t'', \lambda\right) dt'' \quad (29)$$

Несколько более простое уравнение получается для  $p(0, z, t, \lambda)$ :

$$p\left(0, \frac{1}{y}, t, \lambda\right) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-t} + 2\pi \int_a^b \frac{A(y')}{y+y'} dy' \int_0^t p\left(0, \frac{1}{y}, t', \lambda\right) p\left(0, \frac{1}{y}, t-t', \lambda\right) dt' \quad (30)$$

Уравнение вида (30) было получено И. Н. Мининим [4] для монохроматического рассеяния.

Отметим, что соотношения [16, 17]

$$H(\infty, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda V(0)}}, \quad (31)$$

$$\frac{\lambda}{2} \int_a^b H\left(\frac{1}{y}, \lambda\right) \frac{A(y)}{y} dy = 1 - \sqrt{1-\lambda V(0)}$$

могут быть продолжены на все  $\lambda$  и тогда получаются следующие равенства:

$$H(\infty, t, \lambda) = \delta(t) + \frac{\lambda V(0)}{2} e^{-t+t'} [I_0(t') + I_1(t')],$$

$$p(0, \infty, t, \lambda) = \frac{\lambda V(0)}{4\pi} e^{-t+t'} I_0(t'), \quad (32)$$

$$\int_a^b H\left(\frac{1}{y}, t, \lambda\right) \frac{A(y)}{y} dy = V(0) z(t) + \frac{\lambda V(0)}{4} e^{-t+t'} [I_0(t') - I_2(t')],$$

$$\int_a^b p\left(0, \frac{1}{y}, t, \lambda\right) \frac{A(y)}{y} dy = \frac{\lambda V(0)}{2} e^{-t+t'} [I_0(t') - I_1(t')].$$
(32)

Здесь  $t' = \frac{\lambda V(0)}{2} t$ , а  $I_k$  — бesselовы функции чисто мнимого аргумента. Эти равенства можно вывести и непосредственно из формул (25) и (28). Они верны при любых видах рассеяния. Первое из них было найдено в [4], а третье в [9] для монохроматического рассеяния.

Перейдем теперь к уравнениям для  $H(z, \lambda)$ , где  $\lambda$  — произвольное комплексное число. Интегрируя (25) по времени от 0 до  $+\infty$ , находим

$$H(z, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{\pi} z \int_0^{\infty} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) \frac{-uV'(u)}{1 - \lambda V(u)} du.$$
(33)

Это линейное интегральное уравнение, в котором  $z$  является параметром, а интегрирование идет по  $\lambda$ . Оно справедливо для всех  $\lambda$ , в том числе и для лежащих на линии ветвления. При  $\lambda \in [1/V(0), +\infty)$  нужно брать полусумму уравнений для  $\lambda \pm i0$ . Из (33) следуют и формулы (22).

Если перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow 1/V(u)$  в равенствах (31) и (15), то получается

$$\frac{1}{2} \int_a^b \frac{A(y)}{y} H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right) dy = V(u),$$
(34)

$$\frac{u}{2} \int_a^b \frac{A(y)}{y^2} H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right) dy = \sqrt{V(u) [V(0) - V(u)]},$$
(35)

$$\frac{1}{2} \int_a^b \frac{A(y')}{y+y'} H\left(\frac{1}{y'}, \frac{1}{V(u)}\right) \frac{dy'}{y'} = \frac{y}{y^2+u^2} \cdot \frac{V(u)}{H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)}$$
(36)

Кроме того из (23) вытекает, что при  $z \rightarrow \infty$

$$zH\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) \rightarrow \frac{1}{u} \sqrt{\frac{V(u)}{V(0) - V(u)}}.$$
(37)

6. *Интенсивность выходящего излучения и резольвентные функции.* В этом разделе мы сначала получим выражение для преобразования Лапласа по  $\tau$  от  $p(\tau, z, t, \lambda)$ , с помощью которого может быть найдено выходящее излучение в задаче о диффузном отражении мгновенного импульса параллельных лучей от полубесконечной среды. В стационарном случае

$$\int_0^{\infty} p(\tau, z, \lambda) e^{-\frac{\tau}{z_0}} d\tau = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{H(z, \lambda) H(z_0, \lambda)}{z + z_0} z_0 z. \quad (38)$$

Пользуясь (26) и (28), теоремой о свертке и соотношениями (34) и (27), можно получить

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} p(\tau, z, t, 1) e^{-\frac{\tau}{z_0}} d\tau = \\ & = \frac{z_0 z}{4\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-[1-V(u)]t} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) H\left(z_0, \frac{1}{V(u)}\right) \frac{-uV'(u)}{V(u)} du. \end{aligned} \quad (39)$$

Эту же формулу легко вывести и непосредственно из (38) деформированием контура интегрирования по  $s$  с использованием (22)

Отметим, что интенсивность выходящего излучения в задаче о возбуждаемой граничной плоскости выражается через

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau, t, \lambda) e^{-\frac{\tau}{z}} d\tau = H(z, t, \lambda) - \delta(t). \quad (40)$$

Чтобы получить из преобразований Лапласа от функций источников (38), (39) и (40) интенсивности выходящего излучения, надо эти формулы умножить на  $A\alpha(x)/\mu$  и подставить  $z = \mu/[\beta + \alpha(x)]$ ,  $z_0 = \mu_0/[\beta + \alpha(x_0)]$ .

Для  $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda)$  легко выводится выражение [11]

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} V(u) e^{-[1-\lambda V(u)]t} \cos \tau u du. \quad (41)$$

Здесь аргумент  $t$  стоит в убывающей экспоненте, а  $\tau$  входит через колеблющуюся функцию. В том случае, когда функция  $V(u)$  ограничена при всех  $u$ , можно деформировать контур интегрирования в (41) к линии ветвления  $V(u)$ , лежащей на верхней части мнимой оси (отрезок от  $ia$  до  $ib$ ). Тогда получим формулу для  $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda)$ , где в колеблющийся множитель входит лишь  $t$ , поэтому она удобна при больших  $\tau$ :

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1) = \frac{1}{\pi} \int_a^b e^{-y - [1 - V(y)]t} dy [U(y) \sin tv + v \cos tv], \quad (42)$$

где введены обозначения

$$v = \frac{\pi A(y)}{2}, \quad U(y) = V(iy) = \int_a^b A(y') \frac{y' dy'}{y'^2 - y^2}, \quad (43)$$

причем в (43) берется главное значение интеграла.

Найти функцию  $\Phi(\tau, t, \lambda)$  удобнее всего, исходя из уравнения, связывающего  $\Phi(\tau, \lambda)$  с  $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$  (см. [18])

$$\Phi(\tau, \lambda) = \Phi_{\infty}(\tau, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \Phi_{\infty}(\tau + \tau', \lambda) d\tau' \int_a^b A(y) H\left(\frac{1}{y}, \lambda\right) e^{-\tau' y} dy. \quad (44)$$

Переходя от преобразований к оригиналам, получим из (44)

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, t, \lambda) = & \Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda) - \\ & - 2\pi \int_0^{\infty} d\tau' \int_a^b A(y) e^{-\tau' y} dy \int_0^t \Phi_{\infty}(\tau + \tau', t', \lambda) p\left(0, \frac{1}{y}, t - t', \lambda\right) dt'. \end{aligned} \quad (45)$$

Подставляя (41) и (28) в (45), выполняя интегрирование по  $\tau'$  и  $t'$  и учитывая соотношения (33) и (34), найдем окончательную формулу для  $\Phi(\tau, t, \lambda)$  (положим  $\lambda = 1$ )

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, t, 1) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-[1 - V(u)]t} u du \left[ -\frac{V'(u)}{\pi V(u)} \int_0^{\infty} \frac{V(u') du'}{V(u') - V(u)} \times \right. \\ & \times \int_a^b \frac{A(y)}{y} \frac{H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)}{y^2 + u^2} (y \cos \tau u' - u' \sin \tau u') dy + \\ & \left. + \int_a^b A(y) \frac{H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)}{y^2 + u^2} (u \cos \tau u + y \sin \tau u) dy \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Можно найти и другое представление для  $\Phi(\tau, t, \lambda)$ , аналогичное (42) и справедливое при том же условии ограниченности  $V(u)$ . В нем кратность интегрирования на единицу меньше, чем в (46):

$$\begin{aligned}
 \Phi(\tau, t, 1) = & \frac{1}{\pi} \int_a^b e^{-\tau y - [1-U(y)]t} dy \left\{ U(y) \sin tv + v \cos tv + \right. \\
 & + \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-u V'(u) du}{(y^2 + u^2) H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)} \times \\
 & \times \left. \frac{V(u) v \cos tv - [U(y)(U(y) - V(u)) + v^2] \sin tv}{[V(u) - U(y)]^2 + v^2} \right\} - \quad (47) \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-\tau y} A(y) y dy \int_0^{\infty} \frac{-u V'(u) V(u) du}{(y^2 + u^2) H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)} \times \\
 & \times \frac{e^{-[1-V(u)]t}}{[V(u) - U(y)]^2 + v^2}.
 \end{aligned}$$

7. Приложение к исследованию нестационарного рассеяния. Теперь, получив точные решения основных уравнений, мы возвратимся к поставленной в начале статьи задаче. Рассмотрим сначала рассеяние в резонансной линии, когда коэффициент поглощения  $\alpha(x)$  монотонно убывает от 1 при  $x=0$  до 0 при  $x=+\infty$ . Тогда ядро (2) можно привести [2, 14] к виду (7)

$$\begin{aligned}
 K(\tau, \beta) &= \int_{\beta}^{\infty} A(y, \beta) e^{-\tau y} dy = \\
 &= \int_{\beta}^{\infty} \frac{A(y-\beta, 0)(y-\beta)}{y} e^{-\tau y} dy = e^{-\tau \beta} \int_0^{\infty} \frac{A(y, 0) y}{y+\beta} e^{-\tau y} dy.
 \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь мы опять пишем аргумент  $\beta$ , так что  $A(y, \beta)$  — это функция  $A(y)$  из разделов 3—6.  $A(y, 0)$  дается формулами [14]

$$A(y, 0) = \begin{cases} \frac{2A}{y} \int_0^{\infty} \alpha^2(x) dx, & y \geq 1, \\ \frac{2A}{y} \int_{x(y)}^{\infty} \alpha^2(x) dx, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases} \quad (49)$$

где  $x(\alpha(x)) = x$ . Все формулы для нестационарного рассеяния могут быть получены из общих, если подставить  $a = \beta$ ,  $b = +\infty$ , а вместо  $A(y)$  функцию  $A(y - \beta, 0)(y - \beta)y$ . Функция  $V(u, \beta)$  имеет вид

$$V(u, \beta) = \frac{A}{u} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx \operatorname{arctg} \frac{u}{\beta + x(x)} = \int_0^{\infty} \frac{A(y, 0)y dy}{(y + \beta)^2 + u^2}, \quad (50)$$

причем

$$V(0, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2(x) dx}{\beta + \alpha(x)} = 1 - A\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x) dx}{\beta + \alpha(x)} = 1 - \Delta(\beta) \leq 1. \quad (51)$$

Таким образом, можно считать задачу в принципе решенной. Однако формулы очень сложны, особенно для резольвентных функций. Поэтому изучим различные предельные случаи и получим для них асимптотики  $H$ -функций и резольвент.

Рассмотрим, как это сейчас часто делается в работах по теории переноса резонансного излучения, важный и довольно общий случай рассеяния, когда коэффициент поглощения в крыле линии убывает по степенному закону

$$\alpha(x) \propto \frac{1}{|x|^\nu}, \quad |x| \gg 1, \quad \nu > 1. \quad (52)$$

Тогда функция  $A(y, 0)$  при малых  $y$  ведет себя следующим образом

$$A(y, 0) \sim A_0 y^{2\gamma}, \quad 0 < \gamma = \frac{\nu - 1}{2\nu} < \frac{1}{2}, \quad (53)$$

где  $A_0$  — постоянная. Число  $\gamma$  является характерным для каждого вида рассеяния и определяет асимптотические свойства поля излучения и возбуждения в среде.

На практике поглощение в непрерывном спектре обычно на несколько порядков меньше, чем поглощение в центре линии. Поэтому мы будем считать величину  $\beta$  малой. Но сколь бы малой она ни была, на больших оптических расстояниях от источников и в далеком крыле линии непрерывное поглощение обязательно скажется, так что считать  $\beta = 0$  можно не всегда.

Для функции  $V(u, \beta)$  в нашем случае может быть получено приближенное представление, где считается  $u \ll 1$  и  $\beta \ll 1$ , в то время как на их отношение не накладывается ограничений [14]:

$$V(u, \beta) \sim 1 - V_0 \frac{(u^2 + \beta^2)^{\frac{1+2\gamma}{2}}}{u} \cdot \frac{\sin[(1+2\gamma) \operatorname{arctg} u/\beta]}{\cos \pi\gamma}, \quad (54)$$

где  $V_0 = \pi A_0 / (2 \sin \pi \gamma)$ . Формулу (54) можно переписать следующим образом:

$$V(u, \beta) \sim 1 - V_0 u^{2\gamma} w_\gamma \left( \frac{\beta}{u} \right), \quad (55)$$

где функция  $w_\gamma(v)$  выбрана таким образом, что  $w_\gamma(0) = 1$ :

$$w_\gamma(v) = (1 + v^2)^{\frac{1+2\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin [(1 + 2\gamma) \arctg 1/v]}{\cos \pi \gamma}. \quad (56)$$

При  $\beta \ll u$  формула (55) переходит в более простую, где множитель  $w_\gamma$  заменяется на 1. Напротив, при  $u \ll \beta$  из (50) имеем

$$V(u, \beta) \sim 1 - \Delta(\beta) + \frac{1}{6} \Delta''(\beta) u^2. \quad (57)$$

Здесь  $\beta$  не обязательно мало. При малых  $\beta$  для  $\Delta(\beta)$  легко вывести

$$\Delta(\beta) \sim V_0 \frac{1 + 2\gamma}{\cos \pi \gamma} \beta^{2\gamma}. \quad (58)$$

Формулу (57) можно получить и из (55), причем  $\Delta(\beta)$  совпадает с (58). Наконец, для функции  $U(\beta + y, \beta)$  при  $0 \leq y \ll 1$  справедлива асимптотика [14]

$$U(\beta + y, \beta) \sim 1 - \frac{V_0}{\cos \pi \gamma} \cdot \frac{(y + 2\beta)^{1+2\gamma} + y^{1+2\gamma} \cos 2\pi \gamma}{y + \beta}. \quad (59)$$

В случае монохроматического рассеяния мы имеем  $a = 1$ ,  $b = +\infty$ ,  $A(y) = 1/y$ , а

$$V(u) = \frac{\arctg u}{u} \sim 1 - \frac{u^2}{3}, \quad (60)$$

так что  $\gamma = 1$ ,  $V_0 = 1/3$ . Формулы (42) и (47) для монохроматического рассеяния неприменимы.

Все приведенные в этом разделе формулы понадобятся при выводе асимптотик основных функций, характеризующих нестационарное рассеяние резонансного и монохроматического излучений.

**8. Асимптотики  $H$ -функций и выходящего излучения.** Здесь мы сначала получим асимптотики  $H$ -функции при  $\lambda$ , лежащих на линии ветвления. Асимптотики для  $0 \leq \lambda \leq 1$  были найдены ранее [19, 14]. Так как при нахождении выходящего излучения  $z = \mu/(\beta + a(x))$ , то физический смысл имеют значения  $z$ , не превосходящие  $1/\beta$ . Впредь считаем  $z\beta \leq 1$ .

Пусть  $z \gg 1$ . Тогда в формуле (23) можно функцию  $V(u)$  заменить асимптотическим выражением (55). Сделав это и произведя замену переменной, получим

$$H(z, \lambda, \beta) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2u^2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda-1}} \cdot h_\gamma(q, z\beta), \quad (61)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{V(u, \beta)}, \quad q = \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{V_0}{z^{2\gamma}}, \quad (62)$$

а функция  $h_\gamma$  дается формулой

$$\ln h_\gamma(q, z\beta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left| 1 + qv^{2\gamma} w_\gamma \left( \frac{z\beta}{v} \right) \right| \frac{dv}{1+v^2}. \quad (63)$$

Таким образом, при больших  $z$  функция  $H(z, \lambda, \beta)$  фактически зависит от двух аргументов  $q$  и  $z\beta$ , так же, как и при  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Только величина  $q$  в нашем случае отрицательна ( $\lambda > 1$ ).

Рассмотрим теперь частные случаи представления (61). Если  $\beta \ll 1/z$  и  $\beta \ll 1/u$ , то можно положить  $\beta = 0$ . Тогда

$$\ln h_\gamma(q, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln |1 + qv^{2\gamma}| \frac{dv}{1+v^2}. \quad (64)$$

Легко видеть, что  $h_\gamma(q, 0)$  обладает свойством

$$h_\gamma\left(\frac{1}{q}, 0\right) = \sqrt{|q|} h_\gamma(q, 0), \quad (65)$$

которое позволяет получить эту функцию целиком, найдя ее лишь для  $-1 \leq q \leq 0$ . Вместе со случаем  $0 \leq \lambda \leq 1$  (для которого функция  $h_\gamma(q, 0)$  была табулирована при  $\gamma = 1/2$  [20]) достаточно найти ее для  $-1 \leq q \leq 1$  [14].

Если при  $\beta = 0$  еще и  $u \ll 1$ , то для  $q$  получается более простое выражение

$$q = -\frac{1}{(uz)^{2\gamma}}, \quad (66)$$

а  $H(z, \lambda, 0)$  и  $\lambda$  зависит лишь от  $uz$ . При этом, если  $uz \gg 1$ , то

$$H(z, \lambda, 0) \sim \frac{1}{uz} \cdot \frac{1}{\sqrt{V_0} u^\gamma}. \quad (67)$$

Если же  $uz \ll 1$ , то

$$H(z, i, 0) \sim H(z, 1, 0) \sim \frac{z^\gamma}{V\sqrt{V_0}}. \quad (68)$$

Вообще в случае, когда  $uz \ll 1$ , мы можем перейти в  $H(z, 1/V(u, \beta), \beta)$  к пределу при  $u \rightarrow 0$ . Тогда при больших  $z$  и  $\beta = 0$  опять получим (68).

Подставляя в (26) и (28) формулы, полученные в этом разделе, мы легко найдем и асимптотики выходящего излучения. Здесь также число переменных, от которых зависит  $H(z, t, 1, \beta)$  при  $z \gg 1$ ,  $t \gg 1$  и  $\beta \ll 1$  может быть сведено к двум, а именно,  $z\beta$  и  $t/z^{2\gamma}$ , причем эти величины могут быть любыми ( $z\beta \leq 1$ ). Подробнее мы рассмотрим предельные случаи.

При  $t^{1/2\gamma} \ll z \ll 1/\beta$  в формуле (26) для  $H(z, t, 1, \beta)$  можно положить  $\beta = 0$ ,  $z = \infty$ . Тогда получим первое равенство (32), где  $t$  не обязательно велико, а  $V(0) = 1$ . Если  $z \ll t^{1/2\gamma} \ll 1/\beta$ , в то время как в остальном  $z$  произвольно, то

$$H(z, t, 1, \beta) \sim H(z, t, 1, 0) \sim \frac{zH(z, 1, 0)}{\pi} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\gamma}\right)}{(V_0 t)^{1/2\gamma} \cdot t}. \quad (69)$$

Наконец при  $t^{1/2\gamma} \gg 1/\beta$  следует воспользоваться соотношением (57). Тогда найдем

$$H(z, t, 1, \beta) \sim \frac{z}{\pi} H\left(z, \frac{1}{V(0, \beta)}, \beta\right) e^{-\Delta(\beta)t} \frac{\sqrt{\pi}}{2t^{3/2} \sqrt{-\frac{1}{6}\Delta''(\beta)}}. \quad (70)$$

Величина  $z$  здесь также может быть любой, меньше  $1/\beta$ , а  $\beta$  не обязательно мало.

Аналогично выводятся асимптотики и для интенсивности отраженного излучения. Напомним еще раз, что  $z = \mu/(\beta + \alpha(x))$ , а интенсивности получаются умножением найденных формул на  $A\alpha(x)/\mu$ .

Мы видим, что при небольших  $t$  выходящая интенсивность в задаче о возбужденной плоскости возрастает со временем в соответствии с (32) и в крыле пропорциональна коэффициенту поглощения  $\alpha(x)$ . С ростом  $t$ , как следует из (69), возрастание сменяется убыванием, захватывающим все большие частоты, причем интенсивность, начиная от центра линии, уменьшается со временем одинаково. Наконец, при очень больших временах степенной спад интенсивности переходит в экспоненциальный (формула (70)).

Для монохроматического рассеяния с помощью (60) из (26) легко найти, что при  $t^{1/2\tau} \gg z$

$$H(z, t, 1, 0) \sim \frac{zH(z, 1, 0)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/4}}, \quad (71)$$

причем указанное условие выполняется при всех  $t \gg 1$ , так как в монохроматическом случае  $z = \mu$  и достаточно рассмотреть  $z \leq 1$ .

9. *Асимптотики резольвентных функций.* Теперь перейдем к изучению асимптотического поведения резольвентных функций, то есть степени возбуждения вещества в бесконечной и полубесконечной средах со вспыхивающей плоскостью. Здесь рассмотрим лишь предельные случаи соотношений между величинами  $\tau$ ,  $t$  и  $\beta$ . Некоторые из этих соотношений удастся объединить. Отметим, что для полубесконечной среды асимптотики получить гораздо труднее, чем для бесконечной. Приходится оценивать вклад каждого члена в выражении (46) для  $\Phi(\tau, t, 1, \beta)$ .

Если  $\tau \gg t^{1/2\tau}$ , а  $\beta$  — любое, для получения асимптотики  $\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta)$  лучше всего исходить из представления (42). Заменяя  $A(y)$  в (42) на  $A_0 \cdot (y - \beta)^{1+2\tau} y^{-1}$ , найдем

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{e^{-\tau\beta}}{\pi} A_0 \int_0^{\infty} e^{-y - [1 - U(\beta + y, \beta)]t} dy [U[\beta + y, \beta]t + 1] \frac{\pi}{2} \frac{y^{1+2\tau}}{y + \beta} \quad (72)$$

В частных случаях соотношений между  $t$  и  $\beta$  получим соответственно

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{1+t}{2} K(\tau, \beta), \quad t^{1/2\tau} \ll \frac{1}{\beta}, \quad t^{1/2\tau} \ll \tau, \quad (73)$$

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{1 + U(\beta, \beta)t}{2} e^{-[1 - U(\beta, \beta)]t} K(\tau, \beta), \quad \tau \gg t^{1/2\tau} \gg \frac{1}{\beta}. \quad (74)$$

Для полубесконечной среды из (46) или (47) находим аналогичные формулы

$$\Phi(\tau, t, 1, \beta) \sim \left[ e^{-t/2} I_0\left(\frac{t}{2}\right) + \int_0^t e^{-t'/2} I_0\left(\frac{t'}{2}\right) dt' \right] \frac{1}{2} K(\tau, \beta), \quad (75)$$

$$t^{1/2\tau} \ll \frac{1}{\beta}, \quad t^{1/2\tau} \ll \tau,$$

$$\Phi(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{tU(\beta, \beta) e^{-|1-U(\beta, \beta)|t}}{2H\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{U(\beta, \beta)}, \beta\right)} K(\tau, \beta), \quad \tau \gg t^{1/2\gamma} \gg \frac{1}{\beta}. \quad (76)$$

В формулах (73) и (75) время  $t$  не обязательно велико, они верны и при  $t = 0$ .

Другой предельный случай описывается неравенствами  $\tau \ll t^{1/2\gamma} \ll 1/\beta$ . Здесь, подставляя в (41) формулу (55) при  $\beta = 0$  и вычисляя интеграл, найдем

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \Phi_{\infty}(\tau, t, 1, 0) \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\gamma}\right)}{\pi (V_0 t)^{1/2\gamma}}. \quad (77)$$

Для полубесконечной среды

$$\Phi(\tau, t, 1, 0) \sim \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\gamma}\right)}{(V_0 t)^{1/2\gamma} \cdot t} \cdot \frac{\tau^{\gamma}}{V V_0 \cdot \Gamma(1 + \gamma)}. \quad (78)$$

При выводе (78) в формуле (46) достаточно оставить только члены, содержащие тройной интеграл, причем множители при  $\sin \tau u'$  и  $\cos \tau u'$  дают одинаковые вклады.

Наконец, последняя возможность  $t^{1/2\gamma} \gg 1/\beta$  и  $t^{1/2\gamma} \gg \tau$ , а  $\tau\beta$  — произвольно. Пользуясь (57), находим

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\lambda(\beta)t} \sqrt{\frac{c}{t}} e^{-\frac{\tau^2}{t}}, \quad (79)$$

где  $c = -3/2 \Delta''(\beta)$ . Тщательное рассмотрение формулы (46) с учетом (57) показывает, что все члены (46) дают вклады одного порядка. Для  $\Phi(\tau, t, 1, \beta)$  получается формула, аналогичная (79), хотя более сложная:

$$\Phi(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda(\beta)t} \left(\frac{c}{t}\right)^{1/4} e^{-\frac{\tau^2}{t}} \left[ H_3\left(1 + 2c \frac{\tau^2}{t}\right) + \tau H_2 \right], \quad (80)$$

где введено обозначение

$$H_n = \int_a^b \frac{A(y)}{y^n} H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(0)}\right) dy, \quad H_2 = \sqrt{\frac{V(0)}{c}}. \quad (81)$$

Для нашего случая необходимо сделать замены, указанные в разделе 7.  $H_2$  получено из (35).

Заметим, что в статье [13] формулы (69) и (78) были получены другим, более непосредственным способом, а именно, путем нахождения асимптотик функции  $H(z, \lambda)$  при  $z \rightarrow \infty$  и комплексных  $\lambda \rightarrow 1$  с последующим обращением асимптотик преобразований Лапласа. В [13] были найдены и асимптотика (77), а также (73) и (75) при  $\beta = 0$ .

При рассеянии без перераспределения по частоте для  $t \gg 1$  получаются формулы того же вида, что и (79) и (80), но только надо положить  $\Delta(\beta) = 0$ ,  $c = 3/4$ ,  $V(0) = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = +\infty$ ,  $A(y) = 1/y$ ,  $H_2 = 2/\sqrt{3}$ .

10. *Обсуждение полученных асимптотик.* Сделаем сначала некоторые замечания о связях различных асимптотик. Формулы (78) и (69) при больших  $z$  находятся в соответствии друг с другом, как оригинал и преобразование Лапласа по  $\tau$ , каждая из них может быть выведена из другой. Стационарные аналоги формул (73)—(76), то есть получающиеся из них преобразованием Лапласа по времени, хорошо известны — это асимптотики стационарных резольвентных функций при очень больших  $\tau$ , при таких, когда существенную роль играют процессы непрерывного поглощения и истинного поглощения в линии [14].

Для важного с практической точки зрения лоренцовского контура коэффициента поглощения  $\alpha(x) = 1/(1+x^2)$  и все формулы получаются из общих, если подставить  $x = 2$ ,  $\gamma = 1/4$ ,  $A_0 = 2/3\pi$ . Заметим, что при  $\beta = 0$  асимптотики могут быть обобщены на случай, для которого (52) является частным. Именно, можно допустить, что функция  $1 - V(u, 0)$ , изменяясь при  $u \ll 1$  в основном по степенному закону, имеет медленно меняющийся, например, логарифмический множитель  $V_0(u)$ , то есть вместо (55)

$$1 - V(u, 0) \sim V_0(u) u^{2\gamma}. \quad (82)$$

Тогда в соответствующих формулах надо  $V_0$  считать не постоянной, а заменить на  $V_0(1/z)$  в (67)—(69), на  $V_0(1/t)$  в (77) и первом множителе (78) и на  $V_0(1/\tau)$  — во втором. В частности, когда коэффициент поглощения в линии — доплеровский  $\alpha(x) = e^{-x^2}$ , то  $\gamma = 1/2$ ,  $V_0(u) = \sqrt{\pi}/(4\sqrt{\ln 1/u})$ . Заметим еще, что, как показывает сравнение с (71), а также (79) и (80) для монохроматического рассеяния, формулы (69), (77) и (78) справедливы и в этом случае ( $\gamma = 1$ ,  $V_0 = 1/3$ ).

Проследим теперь, как изменяется со временем степень возбуждения в среде в рассматриваемых нами задачах. Сперва возбуждение растет со временем (формулы (73) и (75)). Потом на умеренных расстояниях от возбуждающейся плоскости ( $r \ll 1$ ) рост сменяется убы-

ванием в соответствии с (77) и (78). Затем включается непрерывное поглощение, приводящее к экспоненциальному спаду возбуждения (формулы (74) и (76)). На больших расстояниях, где  $\tau\beta \gg 1$ , промежуточного случая нет. Наконец, через очень большое время асимптотики для резольвентных функций (79) и (80) отражают возрастающую роль непрерывного поглощения. Экспоненциальный множитель  $e^{-\lambda(\beta)t}$  отражает гибель квантов в полете. Если учитывать наличие истинного поглощения в линии в соответствии с (18), то экспонента превратится в  $e^{-[1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)]t}$ . Комбинация  $1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)$  всегда возникает при совместном действии истинного и непрерывного поглощения. Если отвлечься от указанного экспоненциального множителя, то формулы для рассеяния с перераспределением и без перераспределения по частотам очень близки при таких больших  $t$ . Все вместе они похожи на получаемые в диффузионном приближении [3]. Таким образом, через очень большой промежуток времени после начального возбуждения перенос квантов происходит как диффузия частиц.

В заключение отметим, что представляет интерес рассмотреть нестационарное рассеяние в конечном слое, а также хотя бы на простейших примерах выяснить влияние конечности скорости света, которое для рассеяния в линии, по-видимому, не всегда мало.

Ленинградский Государственный  
университет

## NONSTATIONARY RADIATION FIELD IN INFINITE MEDIA

D. I. NAGIRNER

The nonstationary resonance line radiation field in stationary infinite and semi-infinite media is considered. The scattering is assumed to be isotropic and either monochromatic or completely frequency redistributed. The time lag due to the finite velocity of light is neglected. The resolvents of the basic integral equations and the intensity of the emergent radiation are found explicitly. Various asymptotics are obtained from the exact formulae. These asymptotics characterize the behavior of radiation in the line wings and the degree of atom excitation far from the sources of radiation and a long time after their action has stopped.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, Астрон. ж., 29, № 4 и 5, 1952.
2. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
3. И. Н. Минин, Вестн. ЛГУ, № 13, 137, 1959; № 19, 124, 1962.
4. И. Н. Минин, ДАН СССР, 154, 1059, 1964.
5. G. M. Wing, An Introduction to Transport Theory, J. Willey Publ. Co., New York—London, 1962.
6. R. E. Bellman, H. N. Kagiwada, R. E. Kalaba, M. S. Prestrud, Invariant imbedding and Time-Dependent Transport Processes, Elsevier Publ. Co., New York, 1964.
7. Л. М. Романова, Физика атмосферы и океана, 2, 844, 1966.
8. К. М. Case, Ann. Phys., 9, 1, 1960.
9. I. Kuscer, P. F. Zweifel, J. Math. Phys., 6, 1125, 1965.
10. T. Holstein, Phys. Rev., 72, 1212, 1947.
11. Б. А. Векленко, ЖЭТФ, 36, 204, 1959.
12. V. V. Ivanov, BAN, 19, 192, 1967.
13. Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович, Астрофизика, 4, 195, 1968.
14. Д. И. Нагирнер, Уч. зап. ЛГУ, № 337 (Труды Астрон. обс. ЛГУ, 25), 3, 1968.
15. В. В. Соболев, Астрон. ж., 28, № 5, 1951.
16. В. В. Соболев, Астрон. ж., 36, 564, 1959.
17. В. В. Иванов, Астрон. ж., 39, 1020, 1962.
18. В. В. Иванов, Астрон. ж., 41, 44, 1964.
19. В. В. Иванов, Уч. зап. ЛГУ, № 307 (Труды Астрон. обс. ЛГУ, 19), 52, 1962.
20. В. В. Иванов, Д. И. Нагирнер, Астрофизика, 1, 143, 1965.

## СВЕЧЕНИЕ НОВЫХ В ПРЕДМАКСИМАЛЬНЫЙ ПЕРИОД

В. В. ЛЕОНОВ

Поступила 22 мая 1968

Рассмотрены источники свечения Новой в предмаксимальный период: энергия, заключенная в оболочке, излучение звезды, излучение, возникающее при столкновении выбрасываемого звездой вещества с главной оболочкой. Построены и сопоставлены с наблюдательными данными теоретические кривые блеска CP Lac,  $\nu$  476 Cyg, DQ Her.

Для выяснения природы новых звезд наибольший интерес представляет изучение свечения Новых в предмаксимальный период, когда происходит особенно интенсивное выбрасывание вещества из звезды. При построении теории свечения Новых в этот период необходимо принять определенную модель вспышки. Согласно наиболее разработанному к настоящему времени представлению (см. [1], гл. III), в начале вспышки в результате взрыва от звезды отделяется оболочка, оптическая толщина которой в непрерывном спектре сначала очень велика, а затем, по мере расширения оболочки, убывает. Первоначально такое представление о вспышке рассматривалось в работах В. А. Амбарцумяна и Ш. Г. Горделадзе [2, 3]. Позднее эта гипотеза была развита В. В. Соболевым [4, 5], исследовавшим свечение Новой в первое время после отрыва оболочки.

Однако в указанных работах не принималось во внимание, что вскоре после отрыва оболочки из звезды начинается мощное выбрасывание вещества со скоростью, превосходящей скорость главной оболочки. Соответствующие расчеты, выполненные В. Г. Горбацким [6, 7], показали, что учет этого обстоятельства оказывается существенным как для объяснения свечения Новых вблизи максимума блеска, так и для понимания динамики оболочек новых звезд.

Учитывая сказанное, будем считать, что в самом начале вспышки от звезды отрывается оболочка, после отделения которой из звезды

начинается непрерывное выбрасывание вещества. Опираясь на такое представление, мы подробно рассмотрим источники свечения Новой в предмаксимальный период, а затем построим теоретические кривые блеска Новых, для которых имеются наиболее полные наблюдательные данные.

1. *Источники свечения Новой.* Принятое представление о вспышке позволяет выделить три источника свечения Новой в предмаксимальный период: 1) энергия, заключенная в оболочке, 2) энергия, излучаемая звездой после отрыва от нее оболочки, 3) часть кинетической энергии газового потока, выбрасываемого из звезды после отделения главной оболочки, которая при столкновении газа с оболочкой переходит в тепловую.

Расчеты, выясняющие роль первого источника энергии, были сделаны В. В. Соболевым [5]. В оторвавшейся от звезды оболочке энергия содержится в различных формах: тепловой, лучистой и ионизационной. При расширении оболочки эта энергия выходит наружу в виде излучения, то есть оболочка высвечивается. Для количества тепловой энергии оболочки была получена формула

$$E_T = \frac{17}{7} \frac{m}{m_H} k T_*, \quad (1)$$

где  $m$  — масса оболочки,  $m_H$  — масса атома водорода,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T_*$  — температура в слое отрыва оболочки. Принимая  $m \approx 10^{20}$  г,  $T_* \approx 5 \cdot 10^6$  (см. [4]), из (1) получаем  $E_T \approx 10^{44}$  эрг.

Оценки показывают, что количество лучистой и ионизационной энергии в оболочке значительно меньше количества тепловой энергии.

Из наблюдений известно, что в предмаксимальный период „средняя“ Новая излучает энергию  $10^{44} - 10^{45}$  эрг. Поскольку энергия, содержащаяся в оболочке, имеет такой же порядок величины, высвечивание оболочки является существенным источником свечения Новой в этот период.

Отметим, что тепловая энергия оболочки может быть больше величины, даваемой формулой (1), так как последняя не учитывает того, что часть энергии взрыва, в результате которого произошло отделение внешних слоев звезды, переходит в тепло. Однако это обстоятельство вряд ли может сильно изменить приведенную оценку, и в дальнейшем мы будем считать, что количество тепловой энергии оболочки, переходящей в излучение, определяется формулой (1).

Рассмотрим теперь второй из названных источников свечения Новой — излучение звезды после отрыва от нее оболочки. При отде-

лении оболочки обнажаются очень горячие слои звезды, что приводит к сильному увеличению светимости. Поскольку такая светимость не соответствует энергии, вырабатываемой внутри звезды, то в результате выхода энергии из внешних слоев светимость уменьшается и звезда постепенно возвращается к стационарному состоянию.

Однако наблюдения показывают, что главная оболочка составляет лишь часть массы, которую новая звезда теряет при вспышке. В результате непрерывного выбрасывания вещества наружные, быстро остывающие слои покидают звезду, замедляя процесс возвращения звезды к стационарному состоянию и тем самым увеличивая количество излучаемой звездой энергии.

В нашей предыдущей заметке [8] была рассмотрена задача о свечении звезды после отделения от нее оболочки с учетом непрерывного выбрасывания вещества. В результате была найдена формула, описывающая изменение светимости звезды с течением времени. Здесь мы приведем предельные случаи этой формулы, вполне достаточные для выяснения влияния непрерывного истечения вещества на закон свечения звезды.

В первое время после вспышки, точнее при  $t_0 \gg t \gg t_1$ , светимость звезды дается формулой

$$L_*(t) = L_0 \left\{ 1 + \tau_* \sqrt{\frac{t_1}{\pi t}} + \frac{t_{\max}}{2 \delta t_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{\pi t_0}} \right) \right\}, \quad (2)$$

где

$$t_0 = \frac{t_{\max}^2}{\delta^2 \tau_* t_1}, \quad (3)$$

$L_0$  — светимость звезды до вспышки,  $\tau_*$  — оптическая толщина главной оболочки в момент отрыва,  $t_1$  — среднее время, проводимое квантом в поглощенном состоянии при физических условиях, соответствующих слою отрыва оболочки (согласно [4]  $\tau_* \approx 10^8$ ,  $t_1 = 10^{-8}$  сек),  $t_{\max}$  — промежуток времени от начала вспышки до момента максимума блеска,  $\delta$  — отношение массы вещества, выброшенного звездой после отделения оболочки, к массе оболочки. При  $t \gg t_0$  светимость звезды описывает формула весьма простого вида

$$L_*(t) = L_0 \left( 1 + \tau_* \sqrt{\frac{t_1}{t_0} + \frac{t}{t_0}} \right). \quad (4)$$

Предмаксимальное возрастание блеска у „средней“ Новой занимает промежуток времени, по порядку величины равный  $10^6$  сек. Учитывая, что  $\delta$  близко к единице, из (3) получаем  $t_0 \approx 10^4$  сек. Анализ формул (2) и (4) с учетом последней оценки позволяет сделать сле-

дующие выводы. При  $t < t_0$  величина  $L_*(t)$  определяется в основном вторым членом в правой части формулы (2). Это означает, что в первое время после начала вспышки светимость звезды уменьшается по закону  $1/\sqrt{t}$ , найденному В. В. Соболевым [4]. Однако, если без учета выбрасывания вещества светимость уменьшается монотонно, то в нашем случае при  $t \approx t_0$  светимость достигает минимума  $L(t_0) \approx L_0 \tau_* \sqrt{t_1/t_0}$  и начинает возрастать.

Для „средней“ новой звезды  $L_*(t_0)$  по порядку величины равна  $10^3 L_0$ . Поскольку указанного минимума функция  $L_*(t)$  достигает задолго до наступления максимума блеска Новой ( $t_0/t_{\max} \approx 10^{-2}$ ), мы, сохраняя вполне достаточную для нашей задачи точность, можем считать, что в течение всего предмаксимального периода светимость звезды описывается формулой (4).

Оценивая с помощью формулы (4) количество энергии, излучаемой звездой от начала вспышки до максимума блеска, получаем  $10^{44} - 10^{45}$  эрг. Следовательно, излучение звезды является важным источником свечения Новой.

Третий из перечисленных выше источников свечения Новой — столкновение газового потока с главной оболочкой — гораздо труднее для рассмотрения, чем первые два. Наблюдения показывают, что скорость вещества, выбрасываемого звездой, превосходит скорость главной оболочки. При столкновении газового потока с оболочкой часть кинетической энергии догоняющего вещества переходит в тепловую и затем теряется оболочкой в форме излучения. На важность учета этого явления впервые указал Э. Р. Мустель [9].

При построении кривой блеска нас будет интересовать не только полное количество энергии, излучаемой Новой за счет того или иного источника, но, в основном, зависимость мощности различных источников энергии от времени. Подсчитаем поэтому количество кинетической энергии, переходящей за единицу времени в тепло, а затем в излучение при столкновении газового потока с оболочкой.

Обозначим через  $m$  и  $v$  массу и скорость главной оболочки, а через  $q_0$  и  $V$  — массу вещества, выбрасываемого звездой за 1 сек, и его скорость. Считая мощность выбрасывания вещества постоянной, можем написать

$$q_0 = \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{m_1}{t_{\max}}, \quad (5)$$

где  $m_1$  есть полная масса вещества, потерянного звездой за все время вспышки. Мы будем считать ее равной массе оболочки в небулярной

стадии развития Новой. Масса оболочки и скорость ее движения в результате взаимодействия с догоняющим веществом изменяются с течением времени. Уравнение движения оболочки имеет вид

$$\frac{d(mv)}{dt} = q_0 (V - v). \quad (6)$$

Изменение массы оболочки в единицу времени вследствие присоединения к ней догоняющего вещества определяется уравнением

$$\frac{dm}{dt} = q_0 \left(1 - \frac{v}{V}\right). \quad (7)$$

Скорость движения газового потока обычно столь велика, что его внутренней энергией можно пренебречь по сравнению с кинетической. Поэтому скорость изменения полной энергии оболочки равна кинетической энергии вещества, присоединяющегося к оболочке в единицу времени

$$\frac{dE}{dt} = q_0 \frac{V(V-v)}{2}. \quad (8)$$

Одна часть этой энергии затрачивается на увеличение кинетической энергии оболочки  $E_k$ , другая переходит в тепловую энергию  $E_T$  и затем излучается

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{dE_T}{dt}. \quad (9)$$

Учитывая, что

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(mv^2)}{dt}, \quad (10)$$

из (6)—(9) после несложных преобразований находим количество тепловой энергии  $\Delta E$ , возникающей в единицу времени при столкновении газового потока с оболочкой

$$\Delta E \equiv \frac{dE_T}{dt} = q_0 \frac{(V-v)^2}{2V}. \quad (11)$$

Подставляя (5) в (11), окончательно получаем

$$\Delta E = \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{m_1}{2t_{\max}} \frac{(V-v)^2}{V}. \quad (12)$$

Для определения зависимости  $\Delta E(t)$  требуется решение задачи о движении под действием газового потока слоя газа переменной

массы в среде с зависящей от времени плотностью. Решение такой задачи приводит к значительным математическим трудностям. Поэтому мы будем считать  $\nu$  величиной постоянной, равной среднему арифметическому скоростей, находимых по предмаксимальному и главному спектрам. Соответствующий расчет по формуле (12) показывает, что за счет перехода части кинетической энергии газового потока в тепловую „средняя“ Новая в предмаксимальный период излучает энергию  $\geq 10^{44}$  эрг.

Сказанное в этом разделе позволяет сделать вывод, что при изучении свечения Новых в предмаксимальный период необходимо учитывать совместное действие всех рассмотренных источников энергии.

3. *Светимость Новой в предмаксимальный период.* Определенные изменения с течением времени светимости Новой сводится к рассмотрению процесса переноса излучения, вырабатываемого источниками энергии, через расширяющуюся оболочку. Строго говоря, для этого необходимо решение весьма сложной в математическом отношении задачи о диффузии излучения в среде с зависящими от времени оптическими свойствами, требующей специального исследования. Поэтому здесь мы воспользуемся результатами, полученными В. В. Соболевым [5]. Считая геометрическую толщину оболочки малой по сравнению с ее радиусом и пренебрегая временем пребывания кванта в оболочке по сравнению с временем пребывания его в полости, образованной оболочкой, В. В. Соболев получил следующую формулу для светимости Новой

$$L(x) = \frac{E_{\tau}}{\beta} x^{k-1} e^{-\frac{x^k}{k}} + x^{k-1} \int_0^x E(x') \exp\left\{-\frac{1}{k}(x^k - x'^k)\right\} dx', \quad (13)$$

где

$$x = \frac{t}{\beta} \quad (14)$$

— безразмерное время,

$$\beta = \left( \frac{4\tau_* r_*^k}{3cV_0^{k-1}} \right)^{1/k} \quad (15)$$

$c$  — скорость света,  $k$  — параметр, характеризующий скорость убывания оптической толщины оболочки с увеличением ее радиуса

$$\tau = \tau_* \left( \frac{r_*}{r} \right)^k. \quad (16)$$

Если считать расширяющуюся оболочку однородной сферой с распределением температуры как в обычной фотосфере, то  $k = 8/3$ , если же оболочка расширяется не меняя своей толщины, то  $k = 5/3$ . При выводе (13) принималось, что  $r = v_0 t$ , где  $v_0$  — скорость расширения оболочки (порядка  $10^3$  см/сек), определяемая по смещению линий предмаксимального спектра. В формуле (13)  $E(x)$  обозначает сумму энергии, приходящей на внутреннюю границу оболочки от звезды, и тепловой энергии, возникающей при столкновении газового потока с оболочкой. Выражение для  $E(x)$  находится из формул (3), (4) и (12).

Для определения величины  $t_1$ , входящей в (4), воспользуемся соотношением [10]

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{E_1}{E_2}, \quad (17)$$

где  $t_2$  — среднее время, проводимое квантом в пути между двумя последовательными рассеяниями при физических условиях, соответствующих слою отрыва оболочки;  $E_1$  и  $E_2$  — соответственно тепловая и лучистая энергия единицы объема. В условиях термодинамического равновесия имеем

$$E_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} n_* k T_*, \quad E_2 = \frac{4\sigma}{c} T_*^4, \quad (18)$$

где  $n_*$  — концентрация атомов в слое отрыва оболочки (множитель 2 учитывает присутствие свободных электронов),  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана. Учитывая, что

$$t_2 = \frac{1}{\alpha c} \quad (19)$$

и принимая для коэффициента поглощения  $\alpha$  выражение

$$\alpha = C \frac{n_*^2}{T_*^{3/2}}, \quad (20)$$

из (17)–(20) получаем

$$t_1 = \frac{3}{4} \frac{k}{\sigma C} \frac{\sqrt{T_*}}{n_*}, \quad (21)$$

где  $C$  — постоянная порядка  $10^{-23}$ . Соотношение (21), справедливое при термодинамическом равновесии, может быть использовано для оценок в условиях звездных атмосфер.

Складывая (4) с (12) и подставляя (21), известные выражения для  $n_*$  и  $T_*$  (см. [4]) и значения постоянных, получаем

$$E(x) = 10^{15} \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{m_1}{\beta x_{\max}} \left[ 1 + \delta \frac{x}{x_{\max}} + 5 \frac{(V - v)^3}{V} \right], \quad (22)$$

где  $x_{\max}$  — безразмерное время максимума блеска, а величины скорости газового потока  $V$  и скорости движения оболочки  $v$  выражены в тысячах километров в секунду. Первые два члена в правой части формулы (22) учитывают излучение звезды, третий — столкновение газового потока с оболочкой. Относительный вклад этих слагаемых меняется от звезды к звезде, однако, как показывают расчеты, их влияние на светимость Новой приблизительно одинаково.

Обратимся теперь к формуле (13) с целью выяснить вклад каждого слагаемого в величину  $L(x)$ . Первый член, характеризующий роль высвечивания оболочки, сначала растет, достигая максимальной величины при  $x = (k - 1)^{1/k}$ , а затем быстро убывает. Соответствующая этому значению безразмерного времени  $x$  величина  $t$  при  $k = 2$ , согласно (14) и (15), равна  $10^5$  сек. Очевидно, последняя оценка по порядку величины определяет время высвечивания оболочки. Поскольку продолжительность предмаксимального периода обычно в несколько раз больше, мы должны считать, что тепловая энергия оболочки может играть существенную роль в свечении Новой только в самом начале вспышки и практически полностью излучается задолго до достижения Новой максимума блеска. Влияние излучения звезды и столкновения выбрасываемого звездой вещества с оболочкой определяется вторым слагаемым в правой части формулы (13). Хотя эти источники энергии начинают действовать сразу после отрыва оболочки от звезды, в первое время их вклад в  $L(x)$  незначителен по сравнению с энергией, высвечиваемой оболочкой; их роль в свечении Новой становится определяющей после так называемой „ступеньки“ на кривой блеска. Исследование интегрального члена в (13) показывает, что при  $x \geq 3$  выполняется приближенное равенство

$$E(x) \approx x^{k-1} \int_0^x E(x') \exp \left\{ -\frac{1}{k} (x^k - x'^k) \right\} dx'. \quad (23)$$

Это означает, что энергия, вырабатываемая источниками, быстро выходит из оболочки, то есть  $L(x) \approx E(x)$ .

Согласно приведенным в первом разделе оценкам, энергия, излучаемая Новой вследствие высвечивания оболочки, сравнима с энергией, вырабатываемой другими источниками в предмаксимальный период. Поскольку высвечивание оболочки заканчивается задолго до наступления максимума блеска, то светимость Новой в эпоху, когда она определяется высвечиванием оболочки, оказывается в несколько

раз больше светимости после окончания этого процесса. Соответствующие расчеты показывают, что уменьшение болометрической звездной величины Новой, связанное с окончанием высвечивания оболочки, весьма значительно и может достигать 1.5—2 звездных величин.

В дальнейшем основную роль начинают играть другие источники энергии, и, как видно из формулы (22), светимость Новой должна вновь возрастать. Последний вывод подтверждается наблюдениями. Оказывается у всех звезд, для которых имеются предмаксимальные наблюдения, светимость от „ступеньки“ до максимума блеска увеличивается.

3. *Сопоставление теории с наблюдательными данными.* Чтобы сравнить найденную теоретически зависимость светимости Новой от времени с наблюдениями, необходимо перейти от светимости к непосредственно наблюдаемым величинам: визуальному блеску и эффективной температуре оболочки. Светимость Новой связана с эффективной температурой оболочки  $T$  соотношением

$$L(t) = 4\pi r^2(t) \sigma T^4(t). \quad (24)$$

Будем считать, что распределение энергии в непрерывном спектре оболочки дается формулой Планка. Тогда абсолютную визуальную величину  $M_v$  можно вычислить по известной формуле

$$M_v(t) = -0.08 - 5 \lg \frac{r(t)}{r_{\odot}} + \frac{29500}{T(t)} + 2.5 \lg \left( 1 - e^{-\frac{27000}{T(t)}} \right). \quad (25)$$

В первое время после начала вспышки (при  $x \lesssim 1$ ) визуальный блеск вместе со светимостью должен быстро возрастать. Затем, при  $x > 1$ , когда происходит убывание светимости оболочки, связанное с ее высвечиванием, на кривой блеска должна появиться „ступенька“. В дальнейшем, при новом увеличении светимости возобновится и возрастание блеска. Однако, если светимость Новой при завершении высвечивания оболочки убывает в несколько раз, то уменьшение видимого блеска в области „ступеньки“ обычно не превышает 0.1 звездной величины. Это объясняется сильным уменьшением эффективной температуры оболочки в этот период, вследствие чего максимум распределения энергии в непрерывном спектре смещается в сторону видимых частот.

После „ступеньки“ блеск Новой продолжает расти как за счет увеличения радиуса оболочки, так и вследствие возрастания светимости при одновременном падении эффективной температуры. Увеличение блеска Новой закончится тогда, когда оптическая толщина оболочки станет порядка единицы.

Для сравнения теории с наблюдениями мы использовали наблюдательные данные трех Новых: CP Lac,  $v$  476 Cyg и DQ Her. Результаты наблюдений  $v$  476 Cyg и DQ Her заимствованы из монографии Пейн-Гапошкиной [11]. Для CP Lac взята кривая блеска, полученная в работе [12] по данным многих наблюдателей.

При вычислениях теоретических кривых блеска заданными величинами считались: масса оболочки в небулярной стадии развития Новой  $m_1$ , скорость движения оболочки в предмаксимальный период  $v_0$ , скорость, определяемая по смещению главного спектра  $v_1$ , абсолютная визуальная величина Новой в максимуме блеска  $M_{v \max}$  и эффективная температура оболочки в максимуме  $T_{\max}$ , причем в качестве  $T_{\max}$  принимались значения температуры, находимые по спектральному классу звезды. Значения этих величин для выбранных Новых приведены в табл. 1.

Таблица 1

Название звезды	$m_1$	$M_v$	$T_{\max}$	$v_0$	$v_1$
DQ Her	$0.55 \cdot 10^{29}$	-6.4	$6 \cdot 10^3$	$0.18 \cdot 10^8$	$0.32 \cdot 10^8$
$v$ 476 Cyg	$3.2 \cdot 10^{29}$	-9.0	$9 \cdot 10^3$	$0.38 \cdot 10^8$	$0.70 \cdot 10^8$
CP Lac	$7.0 \cdot 10^{29}$	-9.2	$9 \cdot 10^3$	$0.60 \cdot 10^8$	$1.3 \cdot 10^8$

Сначала по формуле (25) вычислялись радиусы оболочек в момент максимума блеска. По найденным радиусам и заданным  $T_{\max}$  с помощью формулы (24) были получены светимости Новых в максимуме блеска  $T_{\max}$ , что позволяет найти величину  $\delta$ . Для определения  $\delta$  заметим, что, согласно принятой модели, светимость Новой в максимуме блеска целиком определяется свечением звезды и излучением, возникающим при столкновении газового потока с оболочкой. Это означает, что первый член в формуле (13) можно положить равным нулю. Тогда, учитывая (23) и заменяя  $E(x)$  в левой части формулы (22) на  $L_{\max}$ , полученное соотношение можем рассматривать как уравнение для определения  $\delta$ . После этого по формуле (13) были вычислены  $L(t)$ . Теоретический ход  $L(t)$  для CP Lac и  $v$  476 Cyg показан на рис. 1. Наконец, по формулам (24) и (25) были найдены абсолютная визуальная величина Новой  $M_v(t)$  и температура оболочки  $T(t)$ . Полученные в результате вычислений кривые  $M_v(t)$  приведены на рис. 2. Данные наблюдений визуального блеска нанесены в виде сплошной линии. Пунктирные кривые иллюстрируют теоретический ход видимого блеска Новой при различных значениях параметра  $k$ . Вдоль кривых нанесены результаты спектральных наблюде-

ний Новых и вычисленные значения температуры оболочки для разных моментов времени.

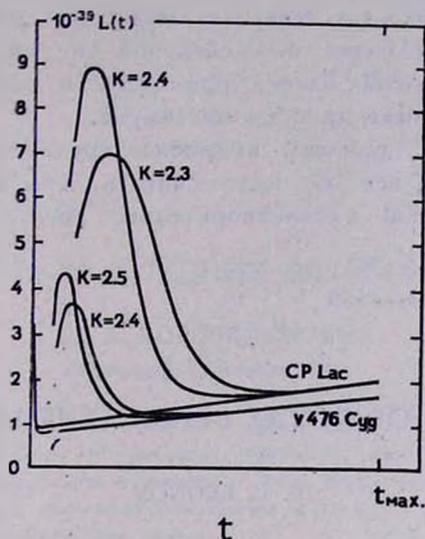


Рис. 1. Теоретические кривые изменения светимости Новой  $L(t)$  и светимости звезды  $L_*(t)$ .

Как уже отмечалось, лишь для немногих Новых имеются наблюдения восходящей ветви кривой блеска, причем первое наблюдение даже в этом случае относится к моменту появления „ступеньки“ или

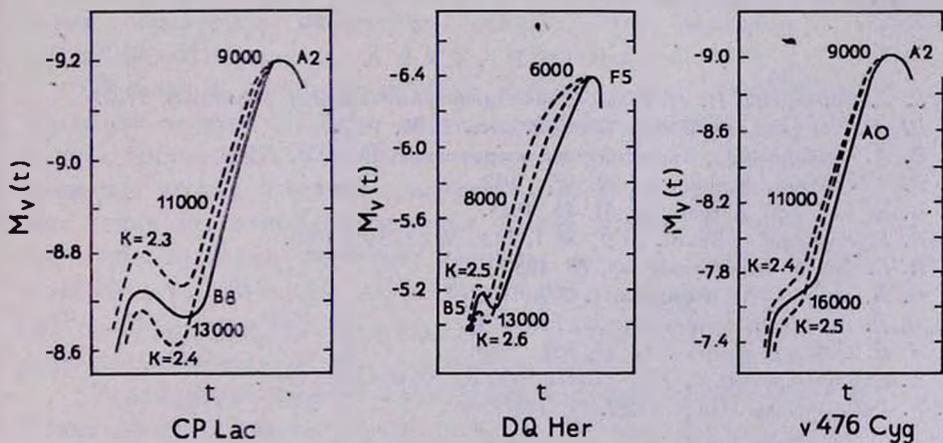


Рис. 2. Наблюдаемые (сплошные линии) и теоретические кривые блеска.

более позднему. Еще хуже изучено изменение спектров в предмаксимальный период. Лишь в отдельных случаях удалось получить спек-

тры за несколько часов, редко за 1—2 дня до максимума. Исключением составляют только самые медленные Новые DQ Her и RR Pic, спектры которых были захвачены за несколько дней до максимума. Однако и в этих случаях нет сведений об их спектрах на восходящей ветви кривой блеска при яркости слабее, чем на две звездные величины ниже яркости максимума.

Хотя по этим причинам подробное сравнение теории с наблюдениями невозможно, все же надо считать, что в основных чертах результаты вычислений удовлетворительно согласуются с наблюдательными данными.

Ленинградский Государственный  
университет

## THE RADIATION OF NOVAE BEFORE THE LIGHT MAXIMUM

V. V. LEONOV

The sources of the radiation of a Nova during the period before light maximum are considered. These sources are the heat energy of the envelope, the radiation of the star, the energy arising from the collision of the envelope with the matter ejected from the star. The calculated light curves are compared with observational data for CP Lac,  $v$  476 Cyg, DQ Her.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Г. Горбачкий, И. Н. Минин, *Нестационарные звезды*, Физматгиз, 1963.
2. Ш. Г. Горделадзе, *Бюлл. Абастум. обс.*, 1, 55, 1937.
3. В. А. Амбарцумян, *Теоретическая астрофизика*, ГОНТИ, 1939.
4. В. В. Соболев, *Астрон. ж.*, 29, 517, 1952.
5. В. В. Соболев, *Астрон. ж.*, 31, 15, 1954.
6. В. Г. Горбачкий, *Вестн. ЛГУ*, № 1, 142; № 13, 131, 1960.
7. В. Г. Горбачкий, *Астрон. ж.*, 39, 198, 1962.
8. В. В. Леонов, *Астрофизика*, 4, 207, 1968.
9. Э. Р. Мустель, *Астрон. ж.*, 25, 156, 1948.
10. В. В. Соболев, *Астрон. ж.*, 37, 387, 1960.
11. С. Payne-Gaposhkina, *The Galactic Novae*, Amsterdam, 1958.
12. F. Beileke, *Astr. Nachr.*, 262, 17, 1937.

## О ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ

Ю. П. КОРОВЯКОВСКИЙ

Поступила 19 января 1968

Рассчитываются траектория газовых потоков в тесных двойных системах в трехмерном случае при учете динамических эффектов газового давления. Получены координаты точки встречи газового потока с оболочкой главной звезды. Скорости встречи газового потока с оболочкой заключены в пределах  $200-300 \text{ км.сек}^{-1}$  для модели I и  $900-1000 \text{ км.сек}^{-1}$  для модели II.

Спектроскопические исследования ряда двойных звезд позволили установить существование в этих системах потоков газа, текущего от одного компонента системы к другому. Наблюдения [1, 2] показывают, что скорость газовых потоков доходит до  $700-900 \text{ км/сек}$ . Газовая струя входит в оболочку звезды, и в результате столкновения образуется разогретая область — так называемое „горячее пятно“ [3—5].

В связи с предполагавшейся важной ролью газовых потоков в эволюции тесных двойных систем расчеты движения газа в этих системах производились многими авторами [6—10]. Однако до сих пор движение частиц в потоке рассматривалось как движение материальных точек, не взаимодействующих между собой. Поскольку в действительности поток является газовым, то есть его частицы взаимодействуют, то при соответствующих ему значениях плотности ( $10^{11} - 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ) и температуры ( $10\,000 - 15\,000 \text{ }^\circ\text{K}$ ) давление газа должно играть существенную роль в динамике потока.

В настоящей заметке излагаются некоторые результаты расчетов трехмерного движения струи газа в системе двух гравитирующих центров, вращающихся вокруг центра тяжести системы при учете газодинамических эффектов. Роль последних оценивается в автотомельном приближении.

Обычно при подобных расчетах считают, что потеря вещества спутником происходит из внутренней точки Лагранжа  $L_2$  (если второй компонент заполняет поверхность нулевых скоростей) [6, 9], либо из той точки поверхности спутника, которая лежит по линии, соединяющей центры компонентов [7]. В этих случаях энергия, необходимая для отрыва вещества, минимальна. Мы сделаем аналогичное предположение и будем считать, что поток газа вначале обладает цилиндрической симметрией и начальный радиус его равен  $R_0$ .

Для того, чтобы учесть взаимодействие частиц при движении газового потока в двойной системе, сперва рассмотрим процесс разлета газового цилиндра в вакуум, не принимая во внимание массовые силы. Решая задачу о разлете газового цилиндра в пустоту, примем, что распределение по радиусу всех газодинамических величин строго автомодельно. Указанный класс решений характеризуется линейным распределением скорости частиц по радиусу [11]

$$u = R \frac{r}{R}, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус цилиндра в данный момент времени,  $r$  — расстояние точки от оси симметрии цилиндра.

Далее сделаем предположение об изэнтропичности разлета. Тогда давление газа  $p$  и плотность его  $\rho$  связаны соотношением

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = A = \text{const}, \quad (2)$$

где  $A$  — энтропийная константа и  $\gamma = c_p/c_v$  — отношение удельных теплоемкостей.

Используя уравнение движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

и соотношение (1), получим профили давления и плотности в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_c \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \\ p &= A \rho_c^\gamma \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\rho_c$  — плотность газа на оси симметрии цилиндра.

Аналогичные соотношения получены в [11] для газового шара.

Подставляя (4) в уравнение (3), получим уравнение движения границы цилиндра в виде

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2A \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho_c^{\gamma-1} \frac{1}{R}. \quad (5)$$

Ограничимся далее рассмотрением траекторий движения частиц газа, относящихся к границе цилиндра.

Рассматривая теперь газовый цилиндр в системе 2-х гравитационных центров, вращающихся вокруг центра тяжести системы, будем считать, что движение частицы газа, находящейся на границе цилиндра, складывается из двух движений: во-первых, из движения, обусловленного действием тяготения, силы Кориолиса и центробежной силы и, во-вторых, из движения, которое вызвано действием некоторой силы  $\bar{F}_{\text{газ}}$ , сообщаемой частице ускорение в соответствии с уравнением (5).

Выберем систему координат  $x, y, z$  таким образом, что начало координат совпадает с центром спутника, ось  $z$  перпендикулярна орбитальной плоскости, а ось  $x$  направлена в центр главной звезды. Находя проекции силы  $\bar{F}_{\text{газ}}$  на оси  $x, y, z$  и подставляя их в уравнения движения, получим, что движение газовых частиц, принадлежащих границе цилиндра, определяется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{d\tau^2} - 2 \frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial C}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2 \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial C}{\partial y} + Q \frac{y - y_0}{z^2 + (y - y_0)^2}, \\ \frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{\partial C}{\partial z} + Q \frac{z}{z^2 + (y - y_0)^2}, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$C = \frac{1}{1+q} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q}{1+q} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-a_0)^2 + y^2 + z^2}} + \\ + \left(x - \frac{q}{1+q}\right)^2 + y^2,$$

$$q = \frac{m_2}{m_1}, \quad \tau = \omega_{\text{обр}} \cdot t,$$

$\omega_{\text{обр}} \text{ сек}^{-1}$  — угловая скорость обращения по орбите спутника,

$$Q = 2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} A \rho_c^{\gamma-1} \frac{1}{a_0^2 \omega_{\text{обр}}^2},$$

$a_0$  — расстояние между центрами компонент,  $y_0$  — ордината той точки оси симметрии в момент  $\tau$ , которая в момент  $\tau = 0$  имела координаты  $(R_{\text{спут}}, 0, 0)$ .

Систему уравнений (6) следует дополнить уравнением движения точки оси симметрии цилиндра, имевшей в начальный момент времени координаты  $(R_{\text{спут}}, 0, 0)$ . Заметим, что на эту точку сила  $\bar{F}_{\text{газ}}$  не действует, а ее координата  $z$  равна 0 в любой момент времени. Уравнения движения этой точки аналогичны (6) без членов, описывающих действие силы  $\bar{F}_{\text{газ}}$ .

Полученная система уравнений интегрировалась численно методом Рунге-Кутты с шагом по времени  $\Delta\tau = 0.01$  на ЭЦВМ „БЭСМ-3М“. В уравнения (6) входит коэффициент  $Q$ , который зависит от параметров, определяющих состояние газа в потоке ( $T, \rho, \gamma$ ) в начальный момент времени  $\tau = 0$ . Принятые параметры моделей газовых струй для двух типов двойных систем приведены в табл. 1.

Таблица 1

Модель	$q$	$R$ спутн.	$R$ обо- лочек	$a_0$ (см)	$M_{\text{спутн.}}$ ( $M_{\odot}$ )	$M_{\text{гравн.}}$ ( $M_{\odot}$ )	$F_{\text{газ. пот.}}$ ( $\text{г/см}^3$ )	$T$ потока ( $^{\circ}\text{K}$ )	$\mu$ моле- кул. вес	$\gamma$ показ. адиа- баты	$R_0$ начальный радиус потока (см)
I	1.0	$0.3a_0$	$0.3a_0$	$3.5 \cdot 10^{10}$	0.20	0.20	$10^{-10}$	$10^4$	0.5	5/3	$10^8$
II	20	$0.234a_0$	$0.25a_0$	$3.7 \cdot 10^{10}$	0.03	0.60	$10^{-10}$	$5 \cdot 10^3$	1.0	5/3	$10^8$

Расчеты проводились для пяти точек границы газового цилиндра, которые в момент  $\tau = 0$  располагались так, как показано на рис. 1.

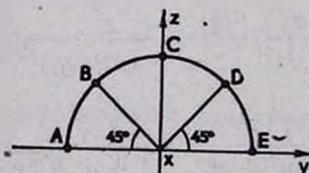


Рис. 1. Положение точек границы цилиндра  $A, B, C, D, E$  в момент времени  $\tau = 0$ .

Траектории движения точек границы цилиндра  $A$  и  $E$  в плоскости орбиты двух компонент  $xu$  при различной величине начальной скорости выброса для модели I приведены на рис. 2—4.

На рис. 2 изображено также сечение газового потока плоскостью  $xu$ , рассчитанное без учета газового давления при начальной скорости выброса  $v_x^0 = 170 \text{ км.сек}^{-1}$ ,  $v_y^0 = 0$ .

На рис. 6 представлены траектории движения точки  $C$  в плоскости  $xz$  при различных значениях скорости выброса в случае I. Для модели II скорость встречи струи с оболочкой заключена в пределах  $200-300 \text{ км.сек}^{-1}$ .

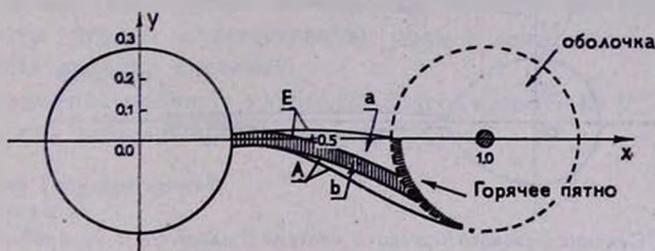


Рис. 2. Сечение газового потока, выброшенного с начальной скоростью  $v_x^0 = 170 \text{ км.сек}^{-1}$ , плоскостью  $xy$ . а) сечение потока при учете сил взаимодействия газовых частиц, б) сечение потока без учета действия силы  $\bar{F}_{\text{газ}}$ .

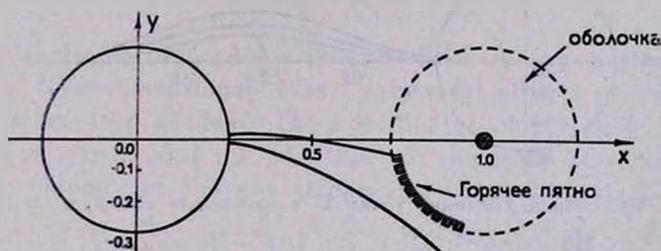


Рис. 3. Угловая скорость вращения точки выброса вокруг центра спутника больше угловой скорости обращения его по орбите:  $v_x^0 = 210 \text{ км/сек}$ ;  $v_y^0 = -50 \text{ км/сек}$ .

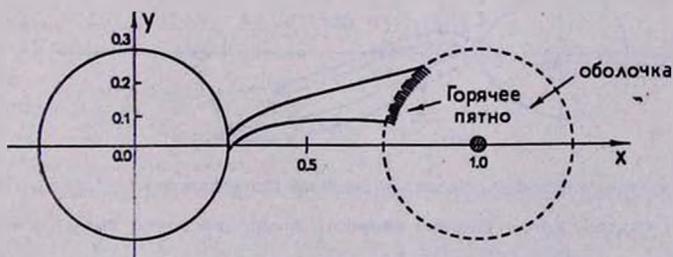


Рис. 4. Угловая скорость вращения точки выброса вокруг центра спутника меньше угловой скорости обращения его вокруг главного компонента:  $v_x^0 = 170 \text{ км/сек}$ ;  $v_y^0 = +120 \text{ км/сек}$ ;  $v_z^0 = 0$ .

При принятом отношении масс  $q = 20.0$  (случай II) предполагалось, что точка выброса находится на поверхности спутника. Сечения газовых потоков плоскостью  $z = 0$  для различных значений ско-

рости выброса в случае II даны на рис. 7. Как показывает расчет, перед встречей (см. рис. 5) потока с оболочкой звезды, он оказывается сильно уплощенным.

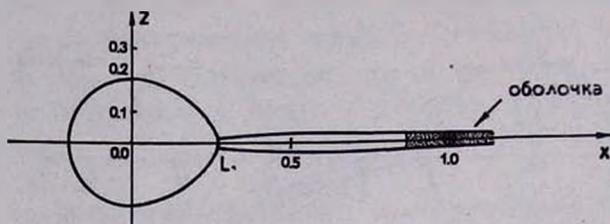


Рис. 5. Сечение газового потока в системе II плоскостью  $xz$  при начальной скорости выброса:  $v_x^0 = 100$  км/сек;  $v_y^0 = v_z^0 = 0$ .

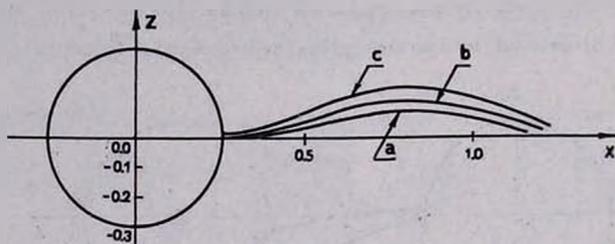


Рис. 6. Траектории движения точки С в плоскости  $xz$ : а)  $v_x^0 = 170$  км.сек $^{-1}$ ;  $v_y^0 = v_z^0 = 0$ ; б)  $v_x^0 = 210$  км.сек $^{-1}$ ;  $v_y^0 = v_z^0 = 0$ ; в)  $v_x^0 = 260$  км.сек $^{-1}$ ;  $v_y^0 = v_z^0 = 0$ .

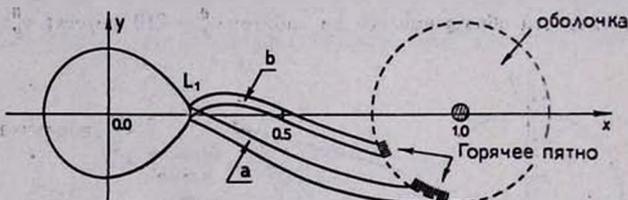


Рис. 7. Сечение газового потока в системе II плоскостью  $xy$ : а)  $v_x^0 = 100$  км.сек $^{-1}$ ;  $v_y^0 = v_z^0 = 0$ ; б) случай, когда угловая скорость вращения точки выброса вокруг центра спутника меньше угловой скорости обращения спутника по орбите:  $v_x^0 = 100$  км.сек $^{-1}$ ;  $v_y^0 = 100$  км.сек $^{-1}$ ;  $v_z^0 = 0$ ; ( $\omega_{\text{обр}} \approx 3\omega_{\text{вращ}}$ ).

Как следует из сравнения вычисленных положений точки встречи газового потока с оболочкой на рис. 7 (случай 6) с наблюдаемым положением „горячего пятна“, в системе WZSge период вращения точки выброса вокруг центра спутника не должен совпадать с периодом обращения спутника по орбите ( $\omega_{\text{обр}} \approx 3\omega_{\text{вр}}$ ) [9].

Полученные значения скорости встречи газового потока с оболочкой для модели II (900—1000 км.сек<sup>-1</sup>) при скорости выброса 40—60 км.сек<sup>-1</sup> хорошо согласуются с величиной скорости, полученной [1] из измерения смещений спектральных линий в системе WZ Sge.

Результаты вычислений показывают также, что газодинамические эффекты играют существенную роль в движении газовых потоков в тесных двойных системах.

В заключение приношу глубокую благодарность В. Г. Горбачкову за помощь при выполнении настоящей работы.

Ленинградский Государственный  
университет

## ON THE MOTION OF GAS IN CLOSE BINARY SYSTEMS

Yu. P. KOROVYAKOVSKY

The trajectories of gaseous jets in close binary systems are calculated in a three-dimensional case, dynamical effects of the gas pressure being taken into account. The coordinates of the point of encounter of the gas stream and the envelope of the main star are obtained. The relative velocity of the gas stream and of envelope at the encounter is bounded between the values of 200 and 300 км.сек<sup>-1</sup> for model I and between 900 and 1000 км.сек<sup>-1</sup> for model II.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. W. Krzeminski, R. P. Kraft, Ap. J., 140, 921, 1964.
2. J. Sahade, Etoiles a raies d'émission, Cointe-Sclessin, Institut d'Astrophysique, 46, 1958.
3. G. H. Herbig, Ap. J., 132, 76, 1960.
4. M. F. Walker, G. H. Herbig, Ap. J., 120, 278, 1954.
5. В. Г. Горбачкий, *Астрофизика*, 3, 245, 1967.
6. Z. Kopal, Non-stable Stars, ed. G. H. Herbig, Cambridge, Cambridge University Press, 1957.
7. N. L. Gould, P. A. S. P., 69, 541, 1957, A. J., 64, 136, 1959.
8. M. Plavec, S. Kriz, Бюлл. астрон. ин-тов Чехослов., 16, 5, 297, 1963.
9. P. Kruszevski, Acta astr., 13, 2, 106, 1963; 14, 3, 231, 1964.
10. K. D. Abhyankar, A. J., 64, 163, 1959.
11. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных магнетогидродинамических явлений, Наука, М., 1966.



АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5

ФЕВРАЛЬ, 1969

ВЫПУСК 1

КРИВАЯ РОСТА ДЛЯ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ АТМОСФЕРЫ

М. А. АРАКЕЛЯН

Поступила 10 марта 1968

Рассчитаны кривые роста для расширяющейся атмосферы в модели чистого поглощения. Предполагается, что скорость расширения оболочки постоянна, а интенсивность в непрерывном спектре фотосферы является линейной функцией  $\cos \varphi$  ( $\varphi$  — угловое расстояние от центра диска звезды).

Основным методом определения химического состава звезд является метод кривой роста, то есть исследование зависимости эквивалентных ширины линий поглощения от оптической глубины в центре линии, или от числа атомов, участвующих в образовании линии (см., например, [1]). Поскольку химический состав нестационарных звезд представляет несомненный интерес, а подавляющее их большинство обладает протяженными движущимися оболочками, представляет интерес расчет кривой роста для линий поглощения, образованных в движущейся оболочке. Очевидно, что результаты определения химического состава нестационарных звезд путем сравнения кривых роста, полученных из наблюдений, с кривыми, рассчитанными для стационарной атмосферы, будут в принципе отягощены систематическими ошибками. В настоящей статье приведены кривые роста, рассчитанные для модели чистого поглощения, в случае оболочки, расширяющейся с постоянной скоростью. Подобная работа для модели чистого рассеяния при чисто доплеровском коэффициенте поглощения была недавно проделана К. Д. Абханкаром [2]. При этом предполагалось, что оболочка расширяется со скоростью, пропорциональной оптическому расстоянию от фотосферы.

1. *Основные формулы.* Коэффициент поглощения в частоте  $\nu$ , рассчитанный на один атом, имеющий лучевую скорость  $v$ , равен

$$k_\nu = k_0 \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(v/u)^2} d\left(\frac{v}{u}\right)}{\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} + \frac{v}{u}\right)^2 + a^2}, \quad (1)$$

где  $u$  — наиболее вероятное значение тепловой скорости атомов данного сорта,  $\Delta\nu_D = \nu_0 u/c$  — доплеровская полуширина линии,  $a = \Delta\nu_N/\Delta\nu_D$  — отношение естественной полуширины линии к доплеровской и

$$k_0 = \frac{\pi^{1/2} e^2}{mc} \frac{1}{\Delta\nu_D} f$$

— коэффициент поглощения в центре линии ( $\nu = \nu_0$ ) при  $a = 0$ .

Пусть непрерывное излучение фотосферы проходит через оболочку, расширяющуюся со скоростью  $v(r)$ , где  $r$  — расстояние от центра звезды. Обозначив через  $n(r)$  концентрацию поглощающих атомов, интегрированием по лучу зрения  $s$  найдем оптическую толщину оболочки в частоте  $\nu$  на угловом расстоянии  $\varphi$  от центра диска звезды

$$\tau_\nu(\varphi) = k_0 \frac{a}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} n(r) ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{\left[ \frac{\nu - \nu_0 \left(1 + \frac{v(r)}{c} \cos \theta\right)}{\Delta\nu_D} + y \right]^2 + a^2}, \quad (2)$$

где  $y = v/u$ ,  $s_1$  и  $s_2$  — значения  $s$  на внутренней и внешней границах оболочки ( $s$  — расстояние от фотосферы по лучу зрения),  $\theta$  — угол между лучом зрения и направлением движения данного атома, обусловленного расширением оболочки. Заменив переменную интегрирования и обозначив  $(\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$  через  $x$ , получим

$$\tau_x(\varphi) = k_0 r_0 \frac{a}{\pi} \sin \varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} n(r) \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{\left(x + y - \frac{v(r)}{u} \cos \theta\right)^2 + a^2}, \quad (3)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — значения  $\theta$  на внутренней и внешней границах оболочки,  $r_0$  — радиус фотосферы звезды.

Предположим далее, что внутренний радиус оболочки равен радиусу фотосферы звезды и оболочка расширяется с постоянной скоростью. Тогда

$$n(r) = n(r_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$

и вместо (3) будем иметь

$$\tau_x(\varphi) = k_0 r_0 \frac{\alpha n(r_0)}{\pi \sin \varphi} \int_0^{\infty} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{\left(x + y - \frac{v}{u} \cos \theta\right)^2 + a^2}. \quad (4)$$

Хотя интегрирование по  $\theta$  можно выполнить аналитически, мы этого не делали, и вычисление оптической толщины оболочки производилось численно с помощью формулы (4).

Остаточная интенсивность в линии будет равна

$$r_x = \frac{\int_0^{\pi/2} I(\varphi) e^{-\tau_x(\varphi)} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}{\int_0^{\pi/2} I(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}, \quad (5)$$

где  $I(\varphi)$  — интенсивность в непрерывном спектре фотосферы. При расчете предполагалось, что интенсивность непрерывного излучения является линейной функцией  $\cos \varphi$ :

$$I(\varphi) = A + B \cos \varphi. \quad (6)$$

Далее эквивалентная ширина линии поглощения в шкале безразмерных частот ( $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$ ) вычисляется по формуле

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - r_x) dx. \quad (7)$$

Если оптическая толщина в центре линии очень мала, то как всегда имеет место линейная зависимость эквивалентной ширины линии от числа поглощающих атомов. Легко показать, что эта асимптотическая зависимость имеет вид

$$W_x = k_0 N_0 \sqrt{\pi} G, \quad (8)$$

где  $N_0 = r_0 n(r_0)$  — число поглощающих атомов на луче зрения, проходящем через центр звезды, и

$$G = \frac{\int_0^{\pi/2} I(\varphi) \varphi \cos \varphi d\varphi}{\int_0^{\pi/2} I(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}. \quad (9)$$

В частности, если распределение энергии по диску звезды выражается посредством (6), то  $G$  меняется от 1.14 при  $B=0$  (равномерное распределение яркости) до 1.10 при  $A=0$  (полное потемнение). Таким образом, нуль-пункт кривой роста практически не зависит от коэффициента потемнения яркости непрерывного спектра к краю диска звезды.

2. *Результаты вычислений.* Расчет кривых роста для ряда значений отношения скорости расширения оболочки к тепловой скорости атомов ( $v/u$ ) и различных коэффициентов, характеризующих уменьшение яркости непрерывного спектра к краю диска звезды, произведен на электронно-вычислительных машинах Ленинградского университета. Результаты вычислений приведены в таблицах 1—6. Данные таблиц 1—3 относятся к случаю  $a=10^{-2}$ , а таблицы 4—6 соответствуют  $a=10^{-1}$ . Таблицы 1 и 4 соответствуют случаю равномерного распределения яркости непрерывного спектра ( $B=0$ ); таблицы 2 и 5 — случаю  $A=B$  и, наконец, таблицы 3 и 6 — случаю  $A=0$  (полное потемнение). Кривые роста для  $a=10^{-2}$  и  $A=B$  приведены на рис. 1.

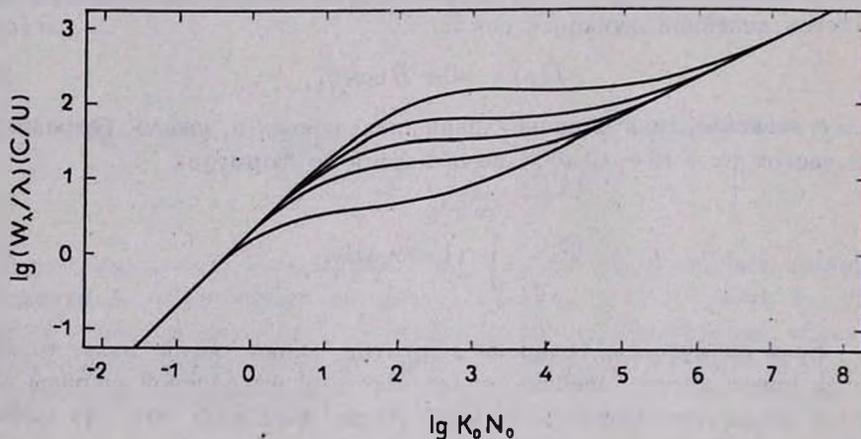


Рис. 1. Кривые роста для случая  $a=10^{-2}$ ,  $A=B$ ,  $v/u=0$  (нижняя кривая), 50, 100, 200, 500.

Анализ таблиц и рис. 1 показывают, что влияние расширения оболочки проявляется в увеличении эквивалентных ширин слабых линий. С ростом скорости расширения возрастает протяженность области, в которой эквивалентная ширина линии пропорциональна числу поглощающих атомов, то есть кривая роста приближается к асимптоте, соответствующей слабым линиям. Такое поведение кривой роста отметили ранее И. Кубиковски и Т. Сюрла [3].

Таблица 1

$v/u$	0	50	100	200	500
$lgk_0N_0$	$lg(W_{\lambda}/\lambda) (c/u)$				
-2.0	-1.70	-1.69			
-1.5	-1.20	-1.20	-1.19		
-1.0	-0.71	-0.70	-0.69	-0.69	
-0.5	-0.25	-0.20	-0.19	-0.19	-0.19
0.0	0.15	0.27	0.28	0.30	0.31
0.5	0.41	0.69	0.74	0.77	0.79
1.0	0.54	1.02	1.12	1.18	1.25
1.5	0.62	1.21	1.39	1.52	1.66
2.0	0.68	1.27	1.53	1.75	1.98
2.5	0.77	1.30	1.56	1.83	2.17
3.0	0.92	1.33	1.57	1.84	2.22
3.5	1.11	1.39	1.60	1.85	2.23
4.0	1.35	1.50	1.66	1.88	2.24
4.5	1.60	1.66	1.76	1.94	2.26
5.0	1.85	1.87	1.92	2.04	2.29
5.5	2.10	2.11	2.13	2.18	2.36
6.0	2.35	2.36	2.36	2.37	2.48
6.5		2.60	2.60	2.60	2.65
7.0			2.85	2.85	2.86
7.5				3.10	3.10
8.0					3.35

Таблица 2

$v/u$	0	50	100	200	500
$lgk_0N_0$	$lg(W_{\lambda}/\lambda) (c/u)$				
-2.0	-1.70	-1.70			
-1.5	-1.21	-1.20	-1.20		
-1.0	-0.72	-0.71	-0.70	-0.70	
-0.5	-0.26	-0.21	-0.20	-0.20	-0.20
0.0	0.14	0.26	0.27	0.29	0.30
0.5	0.41	0.68	0.73	0.76	0.78
1.0	0.54	1.00	1.10	1.17	1.24
1.5	0.62	1.18	1.36	1.49	1.64
2.0	0.68	1.23	1.49	1.72	1.94
2.5	0.77	1.26	1.52	1.79	2.13
3.0	0.92	1.30	1.53	1.80	2.18
3.5	1.11	1.36	1.57	1.81	2.19
4.0	1.35	1.48	1.63	1.84	2.20
4.5	1.60	1.65	1.74	1.91	2.22
5.0	1.85	1.87	1.91	2.02	2.26
5.5	2.10	2.11	2.12	2.17	2.33
6.0	2.35	2.35	2.36	2.37	2.46
6.5		2.60	2.60	2.60	2.64
7.0			2.85	2.85	2.85
7.5				3.10	3.10
8.0					3.35

Таблица 3

$v/u$	0	50	100	200	500
$lgk_0N_0$	$lg(W_{\lambda}/\lambda) (c/u)$				
-2.0	-1.71	-1.71			
-1.5	-1.22	-1.21	-1.21		
-1.0	-0.73	-0.72	-0.71	-0.71	
-0.5	-0.27	-0.22	-0.21	-0.21	-0.21
0.0	0.14	0.24	0.26	0.28	0.29
0.5	0.40	0.66	0.72	0.75	0.77
1.0	0.54	0.96	1.07	1.14	1.23
1.5	0.62	1.12	1.31	1.45	1.61
2.0	0.68	1.17	1.42	1.66	1.89
2.5	0.76	1.20	1.45	1.72	2.05
3.0	0.92	1.24	1.47	1.73	2.10
3.5	1.11	1.32	1.51	1.74	2.12
4.0	1.35	1.45	1.58	1.78	2.13
4.5	1.60	1.64	1.71	1.85	2.15
5.0	1.85	1.86	1.89	1.98	2.20
5.5	2.10	2.10	2.11	2.14	2.29
6.0	2.35	2.35	2.35	2.36	2.43
6.5		2.60	2.60	2.60	2.62
7.0			2.85	2.85	2.85
7.5				3.10	3.10
8.0					3.35

Таблица 4

$v/u$	0	50	100	200	500
$lgk_0N_0$	$lg(W_{\lambda}/\lambda) (c/u)$				
-2.0	-1.70	-1.69			
-1.5	-1.20	-1.19	-1.19		
-1.0	-0.71	-0.70	-0.69	-0.69	
-0.5	-0.25	-0.20	-0.19	-0.19	-0.19
0.0	0.16	0.27	0.28	0.30	0.31
0.5	0.44	0.69	0.74	0.77	0.79
1.0	0.60	1.03	1.12	1.18	1.25
1.5	0.73	1.22	1.40	1.52	1.66
2.0	0.95	1.31	1.54	1.75	1.98
2.5	1.12	1.38	1.59	1.84	2.17
3.0	1.35	1.50	1.66	1.87	2.23
3.5	1.60	1.66	1.76	1.94	2.26
4.0	1.85	1.87	1.92	2.03	2.30
4.5	2.10	2.11	2.13	2.18	2.37
5.0	2.35	2.36	2.36	2.37	2.49
5.5	2.60	2.60	2.60	2.60	2.66
6.0		2.85	2.85	2.85	2.87
6.5			3.10	3.10	3.11
7.0				3.35	3.35
7.5					3.60

Таблица 5

$v/u$	0	50	100	200	500
$\lg k_0 N_0$	$\lg(W_{\lambda}/\lambda) (c/u)$				
-2.0	-1.70	-1.70			
-1.5	-1.21	-1.20	-1.20		
-1.0	-0.72	-0.71	-0.70	-0.70	
-0.5	-0.26	-0.21	-0.20	-0.20	-0.20
0.0	0.15	0.26	0.27	0.29	0.30
0.5	0.44	0.68	0.73	0.76	0.78
1.0	0.59	1.01	1.10	1.17	1.24
1.5	0.73	1.19	1.37	1.49	1.64
2.0	0.94	1.27	1.51	1.72	1.94
2.5	1.11	1.36	1.56	1.80	2.13
3.0	1.35	1.48	1.63	1.84	2.19
3.5	1.60	1.65	1.74	1.91	2.22
4.0	1.85	1.87	1.91	2.01	2.27
4.5	2.10	2.11	2.12	2.17	2.34
5.0	2.35	2.35	2.36	2.37	2.47
5.5	2.60	2.60	2.60	2.60	2.65
6.0		2.85	2.85	2.85	2.87
6.5			3.10	3.10	3.10
7.0				3.25	3.25
7.5					3.60

Таблица 6

$v/u$	0	50	100	200	500
$\lg k_0 N_0$	$\lg(W_{\lambda}/\lambda) (c/u)$				
-2.0	-1.71	-1.71			
-1.5	-1.22	-1.21	-1.21		
-1.0	-0.73	-0.72	-0.71	-0.71	
-0.5	-0.27	-0.22	-0.21	-0.21	-0.21
0.0	0.15	0.24	0.26	0.28	0.29
0.5	0.43	0.66	0.72	0.75	0.77
1.0	0.59	0.97	1.07	1.14	1.21
1.5	0.73	1.14	1.32	1.45	1.61
2.0	0.94	1.22	1.45	1.66	1.89
2.5	1.11	1.31	1.50	1.74	2.06
3.0	1.35	1.45	1.58	1.78	2.12
3.5	1.60	1.64	1.71	1.85	2.15
4.0	1.85	1.86	1.89	1.97	2.21
4.5	2.10	2.10	2.11	2.14	2.29
5.0	2.35	2.35	2.35	2.36	2.44
5.5	2.60	2.60	2.60	2.60	2.63
6.0		2.85	2.85	2.85	2.85
6.5			3.10	3.10	3.10
7.0				3.35	3.35
7.5					3.60

Что касается потемнения диска звезды к краю, то, как и следовало ожидать, его влияние проявляется в уменьшении эквивалентных ширины линий поглощения, причем этот эффект также возрастает с увеличением скорости расширения оболочки. При фиксированном значении отношения скорости расширения оболочки к тепловой скорости атомов различие в эквивалентных ширинах линий поглощения за счет этого эффекта достигает наибольшего значения в промежуточной („горизонтальной“) части кривой роста.

Из приведенных результатов следует, что применение к определению химического состава нестационарных звезд теоретической кривой роста, рассчитанной для неподвижной атмосферы, будет приводить к недооценке числа тех атомов, содержание которых определяется по линиям поглощения, соответствующим „горизонтальной“ части кривой роста. Допускаемая при этом ошибка будет тем больше, чем меньше тепловая скорость атомов данного сорта. Поэтому для определения содержания атомов данного сорта в принципе необходимо использовать теоретическую кривую роста, рассчитанную для соответствующих атомам данного сорта тепловых скоростей. (Предполагается, что скорость расширения оболочки известна).

Не исключена, однако, и возможность того, что эквивалентные ширины линий поглощения в спектрах нестационарных звезд обусловлены в первую очередь отношением скорости расширения оболочки

и скорости турбулентных движений. Последние не зависят от атомных весов, и для определения содержания всех элементов следует использовать одну и ту же кривую роста, рассчитанную для имеющегося отношения скорости расширения оболочки и скорости турбулентного движения.

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

## THE CURVE OF GROWTH FOR AN EXPANDING ATMOSPHERE

M. A. ARAKELIAN

The curves of growth for an expanding atmosphere in the case of pure absorption are calculated. The velocity of expansion is supposed to be constant and the intensity of the continuous radiation is supposed to be a linear function of  $\cos \varphi$  ( $\varphi$  is the angular distance from the center of the limb of the star).

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Х. Аллер, сб. „Звездные атмосферы“, под ред. Дж. Л. Гринстейна, ИЛ., М., 1963, стр. 165.
2. К. Д. Abhyankar, Ap. J., 140, 1353, 1964; 141, 1056, 1965.
3. J. Kubikowski, T. Ciurla, Acta astr., 15, 177, 1965.



## О РАСШИРЕНИИ ПЛАНЕТАРНЫХ ТУМАННОСТЕЙ

В. В. ВИТЯЗЕВ

Поступила 26 июля 1968

С надежным положительным коэффициентом корреляции подтверждается статистическая зависимость между скоростями расширения и радиусами планетарных туманностей. Рассматривается расширение туманностей под действием прямого  $L_c$ - и диффузного  $L_a$ -излучений. Показана заметная роль  $L_a$ -излучения в динамике туманностей. При предположении о расширении оболочки под действием корпускулярного давления получена оценка мощности истечения вещества из ядер планетарных туманностей ( $\sim 10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$ ).

*Введение.* Из наблюдений известно, что линии излучения в спектрах планетарных туманностей раздвоены. Это свидетельствует либо о расширении, либо о сжатии туманностей [1]. Прямые измерения диаметров некоторых ближайших туманностей на снимках, сделанных с промежутками в несколько десятилетий [2—4] говорят о расширении этих туманностей. В настоящее время этот вывод переносится и на все остальные планетарные туманности.

Изучая вопросы расширения туманностей, И. Н. Минин [5], Вилсон [6], Туров [7] указывали на то, что скорости расширения увеличиваются с ростом радиусов. Это можно интерпретировать как факт ускоренного расширения туманностей.

При теоретическом рассмотрении динамики туманностей В. А. Амбарцумян [8] показал, что планетарные туманности не могут быть механически равновесными образованиями, а должны находиться в состоянии движения. Для изучения динамики туманностей можно рассматривать различные силы, действующие на газовые оболочки. Очевидно, что роль сил притяжения ничтожна из-за огромного удаления туманности от центральной звезды. В. А. Амбарцумян указал на большую роль светового давления и предложил разделить световое поле на поля  $L_c$ - и  $L_a$ -излучений.

Роль  $L_*$ -излучения изучалась И. Н. Мининым [5] и Занстра [9]. В их работах было показано, что под действием давления излучения ядра в лаймановском континууме туманность большой оптической толщины расширяется с ускорением, дающим увеличение скорости расширения на величину порядка 10 км/сек за время эволюции туманности. Полученная оценка скорости все же меньше действительно наблюдаемых скоростей. Отмечая это, Занстра [10] нашел, что газовое давление может дать скорости расширения, сравнимые с наблюдаемыми.

В принципе возможно рассмотрение расширения туманности под действием корпускулярного излучения центральной звезды. Однако из-за недостаточности наблюдательных данных этот вопрос еще не изучался достаточно подробно.

В настоящей статье подтверждается существование статистической зависимости скоростей расширения от радиусов туманностей, а также рассматривается расширение планетарных туманностей под действием светового и корпускулярного давлений. При этом получены теоретические параметры туманности и ядра в предположении о преобладающем действии на туманность только одной из рассматриваемых сил.

1. *Статистическая зависимость между скоростями и радиусами.* В работе И. Н. Минина [5] была найдена статистическая зависимость между скоростями расширения туманностей и коэффициентами диллюции. При этом скорости расширения брались по данным спектроскопических наблюдений Вилсона [11], а коэффициенты диллюции вычислялись по формуле В. В. Соболева [12]:

$$\lg W = -7.0 - 0.4 m_* - 2 \lg D'' + \frac{14700}{T_*}, \quad (1)$$

где  $m_*$  — фотографическая звездная величина ядра,  $D''$  — диаметр туманности в секундах,  $T_*$  — температура ядра. Эти данные, известные из прямых наблюдений, были взяты из каталога Б. А. Воронцова-Вельяминова [13]. Характер найденной зависимости оказался таким, что с уменьшением коэффициентов диллюции скорость расширения увеличивалась.

С другой стороны, между коэффициентом диллюции, радиусом туманности  $R$  и радиусом центральной звезды  $r_*$  существует известное соотношение:

$$W = \frac{1}{4} \left( \frac{r_*}{R} \right)^2. \quad (2)$$

Это указывает на то, что между скоростями расширения туманностей и их радиусами тоже должна существовать статистическая зависимость,

причем следует ожидать увеличения скоростей расширения с увеличением радиусов. Однако расстояния до туманностей определены плохо. Прямыми способами они были получены лишь для нескольких объектов, различные же косвенные методы дают сильно расходящиеся результаты. Недавно О'Делл [14] провел тщательные фотовольтамметрические измерения потоков в линии  $H\beta$  и, пользуясь способом И. С. Шкловского [15], составил наиболее полный и надежный каталог планетарных туманностей. Кроме того, Туров [7], используя данные Вилсона и О'Делла, из найденных им статистических соотношений между различными параметрами туманностей и их ядер нашел скорости расширения тринадцати туманностей, для которых они не были определены спектроскопически. Все эти данные содержатся в табл. 1.

Таблица 1

Туманность	$V$ км/сек	$R \cdot 10^{+3}$ пс	Туманность	$V$ км/сек	$R \cdot 10^{+3}$ пс
NGC 1535	19.8	91	NGC 6853	38.6*	213
2003	17.5*	73	6884	22.5	58
2392	53.7	120	6886	18.6	66
2440	22.3	131	7009	20.6	82
3132	13.4*	63	7026	40.9	96
3242	19.9	92	7027	21.4	61
4846	19.0*	49	7662	26.1	65
5117	17.7*	28			
6210	21.1	75	IC 351	14.5	86
6543	12.0	45	418	21.1	57
6567	17.9	61	2149	20.2	58
6572	15.7	62	2165	20.0	69
6720	30.0	113	3568	15.2*	112
6741	20.7	67	4593	12.6*	87
6778	17.7*	141	4634	14.8	73
6790	21.5*	44	5217	17.3*	56
6803	14.0	49			
6807	16.6*	29	I 320	17.3	84
6818	28.3	75	900	17.7	115
6926	16.5*	70			
6833	22.4*	59	HD 184738	26.4	50

\* Скорости из работы Турова [7].

По ним было произведено статистическое исследование зависимости скоростей расширения  $V$  от радиусов  $R$ .

На рис. 1 показан результат сопоставления этих величин для тридцати девяти туманностей.

Статистическая обработка данных дает для средней скорости расширения величину  $21 \text{ км/сек}$ , для среднего радиуса —  $0.08 \text{ пс}$ . Вычисленный для статистической зависимости  $V$  от  $R$  коэффициент корреляции оказался  $+0.48 \pm 0.12$  (коэффициент корреляции для зависимости  $V$  от  $W$  из работы [5] оказался равным  $+0.48 \pm 0.20$ ). Если вместо радиусов О'Делла брать радиусы из каталога И. С. Шкловского [15], то соответствующий коэффициент корреляции оказывается равным  $0.32 \pm 0.20$ . Все эти результаты говорят о слабой, но довольно

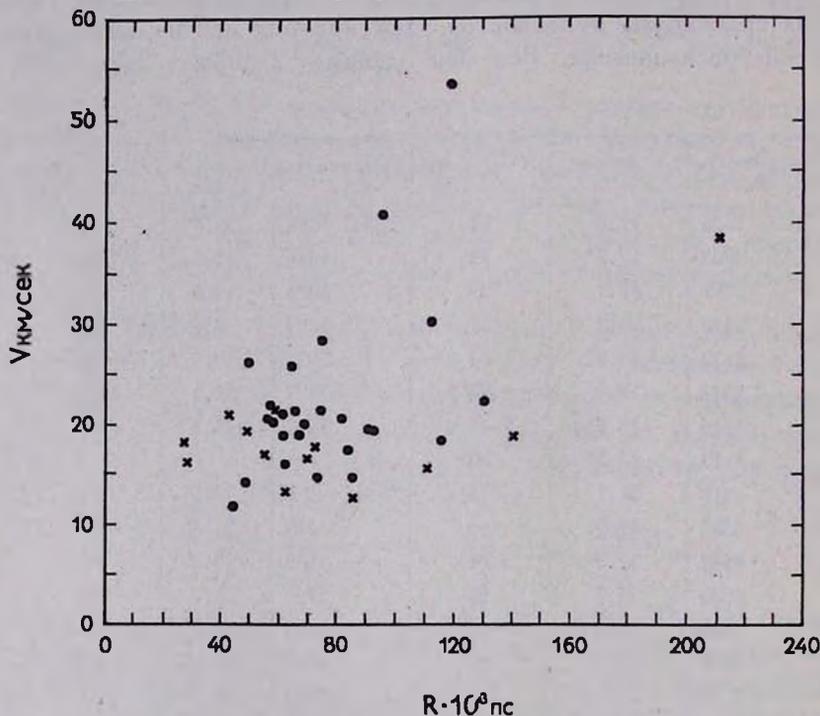


Рис. 1.

надежной статистической зависимости между скоростями расширения туманностей и их радиусами. Малая величина коэффициента корреляции объясняется, во-первых, низкой точностью каталогов (главным образом из-за принципиальных ошибок определения расстояний косвенными методами), во-вторых, зависимостью скоростей расширения не только от радиусов, но и от других параметров. Обе эти причины приводят к большому разбросу точек на рис. 1.

Все же полученные результаты позволяют уверенно судить о качественной стороне зависимости  $V$  от  $R$ . Положительный знак ко-

эфициента корреляции означает статистический рост скоростей с увеличением радиусов, что указывает на ускоренный характер расширения туманностей.

Нужно заметить, что Г. А. Гурздян [16], используя аналогичный статистический материал, пришел к выводу о замедленном расширении туманностей. Однако в его распоряжении находились менее надежные значения радиусов для 24 туманностей (в настоящей работе используются более надежные данные для 39 туманностей). Им не проводилось никакой статистической обработки имевшегося материала. Вычисленный для его данных коэффициент корреляции оказался равным  $+0.36 \pm 0.20$ . Большая ошибка этого коэффициента корреляции не позволяет делать сколько-нибудь определенные заключения о наличии корреляции между скоростями расширения и радиусами. Однако знак этого коэффициента корреляции остается положительным даже в пределах ошибки, что само по себе не дает основания для вывода о замедленном расширении туманностей.

2. *Расширение под действием  $L_\alpha$ -излучения.* Будем считать, что полностью ионизованная водородная туманность представляет собой тонкую сферическую оболочку с внутренним радиусом  $R$  и толщиной  $\delta$  ( $\delta \ll R$ ). При поглощении туманностью  $L_\alpha$ -излучения ей передается некоторый импульс, под действием которого она расширяется. Примем, что в процессе расширения толщина оболочки не меняется. Пусть в некоторый момент времени туманность имела оптическую толщину в лаймановском континууме  $\tau_0$ , радиус  $R_0$  и расширялась со скоростью  $V_0$ . Ставится задача о нахождении зависимости скорости расширения туманности от радиуса в процессе эволюции.

Обозначим массу туманности через  $M$ , светимость ядра в лаймановском континууме через  $E$ , оптическую толщину у предела серии Лаймана через  $\tau$ , тогда уравнение движения оболочки запишется следующим образом:

$$M \frac{dV}{dt} = \frac{E}{c} (1 - e^{-\tau}), \quad (3)$$

где  $dV/dt$  — ускорение оболочки,  $c$  — скорость света.

Зависимость оптической толщины от радиуса дается формулой

$$\tau = \int_R^{R+\delta} \kappa n_1 dr. \quad (4)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент поглощения, рассчитанный на один атом водорода у предела серии Лаймана,  $n_1$  — концентрация атомов водорода

в основном состоянии. Пусть степень ионизации  $n^+/n_1$  ( $n^+$  — концентрация протонов) постоянна во всей туманности (или во всей зоне Н II для туманностей с оптической толщиной  $\tau \gg 1$ ). С помощью формулы ионизации для оптически тонких туманностей можно легко получить, что при сделанных предположениях степень ионизации  $n^+/n_1$  не зависит от радиуса  $R$ . Кроме того, определяя полную концентрацию атомов водорода с помощью формулы

$$n = \frac{M}{m_H 4\pi R^2 \delta}, \quad (5)$$

где  $m_H$  — масса атома водорода и считая  $n^+ \approx n$ , из формулы (4) получим

$$\tau = \left( \frac{R_1}{R} \right)^2. \quad (6)$$

Здесь

$$R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M \times n_1}{m_H \pi n^+}}. \quad (7)$$

Несмотря на то, что формула (6) была получена для оптически тонких туманностей, ее можно применять и для оптически толстых туманностей, так как при  $\tau \gg 1$  экспонента в уравнении (3) много меньше единицы. Следовательно, пока радиус туманности  $R$  не станет равным  $R_1$ , зависимость  $\tau$  от  $R$  не сказывается на характере изменения скорости с ростом радиуса. Если  $R \gg R_1$  то  $\tau \ll 1$ , и изменение скорости с ростом радиуса будет полностью определяться полученной зависимостью (6).

Пользуясь формулой (6) и исключая из уравнения (3) время, получим:

$$V \frac{dV}{dR} = \frac{E}{Mc} \left[ 1 - e^{-\left(\frac{R_1}{R}\right)^2} \right]. \quad (8)$$

При начальных условиях

$$R = R_0, \quad V = V_0, \quad \tau = \tau_0 \quad (9)$$

решение уравнения (8) записывается следующим образом:

$$V \left( \frac{R}{R_0} \right) = \sqrt{V_0^2 + F \frac{E}{VM} D \left( \frac{R}{R_0}, \tau_0 \right)}. \quad (10)$$

В этой формуле

$$F = \frac{2R_1}{c\sqrt{M}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\times n_1}{m_H \pi n^+}}. \quad (11)$$

$$D\left(\frac{R}{R_0}, \tau_0\right) = \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} \left[ \frac{R}{R_0} (1 - e^{-\tau}) - (1 - e^{-\tau_0}) + \sqrt{\pi\tau_0} (\Phi(\sqrt{V\tau_0}) - \Phi(\sqrt{V\tau})) \right], \quad (12)$$

$\Phi(z)$  — интеграл вероятностей

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx, \quad (13)$$

При неограниченном увеличении величины  $R/R_0$  переменный множитель  $D(R/R_0, \tau_0)$  стремится к своему предельному значению, при этом скорость расширения туманности оказывается ограниченной величиной

$$V(\infty) = \sqrt{V_0^2 + F \frac{E}{\sqrt{M}} \left[ \sqrt{\pi} \Phi(\sqrt{V\tau_0}) - \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} (1 - e^{-\tau_0}) \right]}. \quad (14)$$

Для туманностей, у которых  $\tau_0 < 1$ , вместо формул (10) и (14) имеем

$$V\left(\frac{R}{R_0}\right) = \sqrt{V_0^2 + F \frac{E}{\sqrt{M}} \sqrt{\tau_0} \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)}, \quad (15)$$

$$V(\infty) = \sqrt{V_0^2 + F \frac{E}{\sqrt{M}} \sqrt{\tau_0}}. \quad (16)$$

С физической стороны существование предельной величины для скорости расширения объясняется уменьшением оптической толщины туманности при расширении, в результате чего уменьшается поглощаемое ею количество  $L_c$ -квантов.

Из полученных формул видно, что скорость расширения существенно определяется параметром  $E/\sqrt{M}$ . Предполагая, что ядро туманности излучает как абсолютно черное тело, для светимости  $E$  находим:

$$E = \frac{8\pi^2 r^2 h}{c^2} \left(\frac{kT_*}{h}\right)^4 \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \quad (17)$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $x_0 = \lambda_1/kT_*$ ,  $\lambda_1$  — потенциал ионизации атома водорода,  $k$  — постоянная Больцмана.

В табл. 2 приводятся значения светимостей  $E$  для различных температур ядер  $T_*$ , вычисленные по формуле (17) при  $r_* = 3 \cdot 10^{10}$  см.

Таблица 2

$T_*$ °K	$E$ эрг/сек
50 000	$0.23 \cdot 10^{37}$
70 000	$1.2 \cdot 10^{37}$
100 000	$5.7 \cdot 10^{37}$
130 000	$17 \cdot 10^{37}$
150 000	$31 \cdot 10^{37}$

Взяв для массы туманности значение  $M = 0.01 M_\odot$ , с помощью табл. 2 находим  $E/\sqrt{M} = 1.3 \cdot 10^{32}$  при  $T_* = 100\,000$  °K. В табл. 3 показаны скорости расширения туманностей с различными начальными оптическими толщинами для интервала значений параметра  $Z = 10^{-22} E/\sqrt{M}$  от 0.5 до 1.5, что при взятом значении  $M = 0.01 M_\odot$  соответствует изменению  $T_*$  от 70 000 до 130 000 °K. Вычисления проводились по формуле (12) при  $V_0 = 10$  км/сек и  $n^+/n_1 = 10^4$ .

3. *Расширение под действием  $L_\alpha$ -излучения.* При поглощении туманностью излучения лаймановского континуума происходит образование  $L_\alpha$ -квантов. Из-за большой оптической толщины туманности в частотах линии  $L_\alpha$  кванты долго диффундируют в среде. Диффузии  $L_\alpha$ -излучения посвящено много работ, авторы которых рассматривают главным образом внутренние эффекты диффузии, не касаясь вопроса о расширении туманности в целом.

Для качественного выяснения роли  $L_\alpha$ -излучения в расширении туманности рассмотрим туманность, толщина которой много меньше радиуса. В этом случае ее слои можно считать плоскопараллельными. Из-за поглощения в туманности к внешней границе доходит лишь часть падающего на внутреннюю границу  $L_\alpha$ -излучения. Поэтому количество  $L_\alpha$ -квантов, образующихся у внешней границы, меньше количества  $L_\alpha$ -квантов, образующихся у внутренней границы. В процессе диффузии  $L_\alpha$ -кванты подходят к границам и могут выходить из туманности. Следовательно, поток выходящего через внешнюю границу  $L_\alpha$ -излучения будет меньше потока  $L_\alpha$ -излучения, выходящего через внутреннюю границу. Разностью этих потоков и объясняется возникновение силы отдачи, заставляющей туманность расширяться в целом.

Таблица 3

СКОРОСТИ РАСШИРЕНИЯ  $V$  В км/сек

		$\tau_0=0.5$					$\tau_0=1$				
$Z$	$R/R_0$	0.5	0.7	1.0	1.3	1.5	0.5	0.7	1.0	1.3	1.5
1.0	1.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
1.5	1.5	11.7	12.2	13.1	13.9	14.4	12.0	12.7	13.7	14.6	15.2
2.0	2.0	12.5	13.4	14.6	15.7	16.4	13.0	14.0	15.5	16.8	17.6
2.5	2.5	13.0	14.0	15.4	16.7	17.5	13.7	14.8	16.5	18.0	19.0
3.0	3.0	13.3	14.3	15.9	17.3	18.2	14.1	15.4	17.2	18.8	20.0
3.5	3.5	13.5	14.6	16.3	17.8	18.7	14.4	15.8	17.7	19.4	20.5
4.0	4.0	13.6	14.8	16.5	18.0	19.2	14.6	16.0	18.0	19.8	20.9
5.0	5.0	13.9	15.2	17.0	18.5	19.5	14.8	16.3	18.4	20.2	21.4
6.0	6.0	14.1	15.4	17.2	18.9	19.9	15.1	16.6	18.8	20.7	21.9
7.0	7.0	14.2	15.5	17.3	19.0	20.0	15.2	16.8	19.1	21.1	22.2
$\infty$	$\infty$	14.8	16.3	18.4	20.3	21.4	16.1	17.9	20.4	22.6	24.0

		$\tau_0=2$					$\tau_0=5$				
$Z$	$R/R_0$	0.5	0.7	1.0	1.3	1.5	0.5	0.7	1.0	1.3	1.5
1.0	1.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
1.5	1.5	12.2	12.9	14.0	15.0	15.6	11.8	12.4	13.3	14.2	14.7
2.0	2.0	13.3	14.5	16.0	17.4	18.2	13.1	14.1	14.4	17.0	17.8
2.5	2.5	14.1	15.4	17.2	18.9	19.9	14.1	15.4	17.2	18.8	19.8
3.0	3.0	14.3	16.1	18.1	19.9	21.0	14.7	16.1	18.2	20.0	21.1
3.5	3.5	15.0	16.5	18.7	20.7	21.8	15.3	16.8	19.2	21.2	22.3
4.0	4.0	15.3	16.9	19.2	21.2	22.2	15.6	17.3	19.8	21.9	23.1
5.0	5.0	15.7	17.4	19.8	21.9	23.2	16.2	18.0	20.7	22.9	24.3
6.0	6.0	16.0	17.8	20.3	22.4	23.8	16.6	18.5	21.2	23.5	25.0
7.0	7.0	16.3	18.0	20.7	22.7	24.2	16.8	18.8	21.6	24.0	25.5
$\infty$	$\infty$	17.3	19.4	22.3	24.8	26.3	18.6	20.9	24.2	27.1	28.8

Обозначим через  $f$  силу отдачи, действующую на  $1 \text{ см}^2$  внутренней поверхности туманности. Из уравнения переноса излучения находим

$$f = \frac{1}{c} \left[ \int I(R, \theta) \cos^2 \theta d\omega - \int I(R + \delta, \theta) \cos^2 \theta d\omega \right]. \quad (18)$$

В этой формуле  $I(R, \theta)$  и  $I(R + \delta, \theta)$  — интенсивности  $L_\alpha$ -излучения, выходящего через внутреннюю и внешнюю границы туманности соот-

ветственно под углом  $\theta$  к нормали,  $d\omega$  — элемент телесного угла. Интегрирование производится по всем направлениям.

Произведем оценку величины этой силы. Пренебрегая выходом  $L_c$ -квантов через внешнюю границу, получим максимальное значение силы отдачи

$$f_{\max} = \frac{1}{c} \int I(R, \theta) \cos^2 \theta d\omega. \quad (19)$$

Вынося в (19) среднее значение косинуса за знак интеграла, имеем

$$f_{\max} = \frac{H_a}{2c}, \quad (20)$$

где  $H_a = \int I(R, \theta) \cos \theta d\omega$  — поток  $L_c$ -квантов через внутреннюю границу туманности. Так как число  $L_c$ -квантов, падающих на туманность, равно числу  $L_c$ -квантов, выходящих из нее, то формулу (20) можно переписать так:

$$f_{\max} = \frac{3H}{8c} = \frac{3}{8} P, \quad (21)$$

где  $H$  — энергия  $L_c$ -квантов, падающих на  $1 \text{ см}^2$  внутренней поверхности туманности в единицу времени,  $P$  — давление на туманность прямого  $L_c$ -излучения. Множитель  $3/4$  дает отношение энергии  $L_c$ -кванта к энергии  $L_c$ -кванта.

Из формулы (21) видно, что наибольшая сила отдачи, возникающая от диффузии  $L_c$ -излучения, меньше половины давления прямого излучения ядра в лаймановском континууме. Эта сила не очень велика, но не настолько, чтобы ее действием можно было бы пренебречь в любом случае.

Необходимо отметить, что Г. С. Хромов [17] пришел к выводу о ничтожной роли  $L_c$ -излучения в динамике туманностей. В своей работе он сравнил импульс расширения туманности  $MV$  с суммарным импульсом  $L_c$ -квантов, введенным как произведение импульса одного кванта на число квантов, находящихся в туманности. При этом он получил, что первый импульс на три порядка больше второго, из чего и было сделано указанное заключение.

Однако сравнение этих величин не может характеризовать роль  $L_c$ -излучения. Действительно, если бы на расширяющуюся оболочку не действовали никакие силы, то ее количество движения не менялось бы. При постоянном же образовании  $L_c$ -квантов в туманности и при их постоянном выходе из туманности ей сообщается некоторый импульс, накапливающийся со временем. Поэтому для выяснения роли

$L_\alpha$ -излучения нужно количество движения  $MV$  сравнивать с его приращением, равным импульсу  $L_\alpha$ -квантов, переданным туманности за все время ее существования, но не с импульсом  $L_\alpha$ -квантов, находящихся в туманности в каждый момент времени, как это было сделано в работе [17]. Кроме того, при определении импульса  $L_\alpha$ -излучения в работе [17] следовало учесть направления движения квантов, что, впрочем, не изменило бы порядка полученного там значения.

Как следует из данного раздела, сравнение правильно вычисленного импульса  $L_\alpha$ -квантов с количеством движения  $MV$  дает совпадение порядков их величин, что говорит о заметной роли  $L_\alpha$ -излучения в расширении туманностей.

С ссылкой на работу [17] Мэтьюз [18] пренебрег действием  $L_\alpha$ -излучения при построении моделей планетарных туманностей. Однако, по указанным причинам этот результат Г. С. Хромова использовать не следует.

4. *Роль выбрасывания вещества из ядер.* В последнее время при теоретическом изучении динамики туманностей было введено в рассмотрение давление корпускулярного излучения ядра на туманность. Гипотеза о существовании таких потоков основана главным образом на наличии в спектрах некоторых ядер полос излучения. В этой связи интересно отметить статью Мэтьюза [18], который, строя модели планетарных туманностей, пришел к заключению о невозможности согласования теоретических параметров туманностей с наблюдаемыми без предположения о корпускулярных потоках, разгоняющих оболочку изнутри.

При изучении расширения оболочки под действием корпускулярного потока была получена следующая зависимость скорости расширения оболочки от радиуса [19]:

$$V = u \left[ 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{\left(\frac{1 - w_0}{w_0}\right)^2 + \frac{2\mathfrak{R}R_0(R/R_0 - 1)}{M_0 u w_0}}} \right]. \quad (22)$$

В этой формуле  $w_0 = 1 - v_0/u$ ,  $u$  — скорость корпускулярного потока,  $M_0$  — начальная масса оболочки,  $\mathfrak{R}$  — мощность корпускулярного потока (масса вещества, выбрасываемая ядром в единицу времени).

При принятых значениях  $V_0 = 10$  км/сек,  $u = 1000$  км/сек,  $M_0 = 10^{31}$  г,  $R_0 = 3 \cdot 10^{18}$  см оказывается, что формула (22) может объяснить полученную в разделе 1 статистическую зависимость  $V$  от  $R$  при значениях мощности излучения ядра порядка  $10^{26}$  г/сек, что соответствует  $10^{-8} M_\odot/\text{год}$ .

Проведенные расчеты показывают, что достаточно взять разброс безразмерной величины  $\mathfrak{M} R_0/M_0 u$  в пределах  $6 \cdot 10^{-5} \div 6 \cdot 10^{-4}$ , чтобы на рис. 1 область между соответствующими теоретическими кривыми совпала с областью разброса наблюдаемых величин  $V$  и  $R$ .

Учет торможения оболочки в межзвездной среде показал, что межзвездная среда с плотностью  $3 \cdot 10^{-24}$  г/см<sup>3</sup> не оказывает заметного влияния на расширение оболочки под действием корпускулярного излучения ядра. Мощность корпускулярного потока, необходимого для согласования теоретического значения величины скорости с наблюдаемым, остается прежней.

Таким образом, удается сделать оценку мощности истечения вещества из ядер планетарных туманностей. Ее величина ( $\sim 10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$ ) оказывается существенно ниже соответствующей оценки для звезд Вольфа-Райе ( $\sim 10^{-5} M_{\odot}/\text{год}$ ). Было бы весьма интересно для сравнения с теоретическими результатами провести оценку мощности истечения вещества из ядер туманностей по спектроскопическим наблюдениям.

*Заключение.* Из имеющихся в настоящее время наблюдательных данных о размерах и скоростях расширения туманностей довольно трудно делать определенные выводы о характере расширения. Все же надежный положительный коэффициент корреляции для статистической зависимости скоростей от радиусов, полученный в первом разделе, подтверждает ранее высказывавшиеся утверждения об ускоренном расширении туманностей. Если при этом учесть, что разные авторы пришли к такому же выводу из различных наблюдательных данных и теоретических исследований, то можно считать, что качественно вопрос об ускоренном расширении планетарных туманностей сейчас является надежно установленным фактом.

Роль давления прямого  $L_{\gamma}$ -излучения изучалась во втором разделе. Полученные результаты являются более общими, чем найденные ранее [5, 9]. Действие диффузии  $L_{\gamma}$ -излучения не учитывалось, кроме того, в данной работе не рассматривались эффекты внутренней динамики туманностей, связанные с проникновением полностью ионизованной зоны в неионизованную.

В разделе 3 была дана качественная картина увеличения радиуса оболочки под действием диффузии  $L_{\gamma}$ -излучения. Точная количественная оценка этого эффекта потребует применения более сложных методов теории диффузии излучения в линии. Процессы внутренней динамики, производимые диффундирующими  $L_{\gamma}$ -квантами, в данной работе не рассматривались.

Произведенная в четвертом разделе оценка мощности корпускулярного излучения является верхней границей скорости выбрасывания вещества из ядер туманностей, так как она была получена при предположении об ускоренном расширении туманности только под действием корпускулярного потока ядра. Очевидно, что реальная мощность истечения вещества из ядер должна быть меньше значения  $\dot{M} = 10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$ .

Приношу благодарность И. Н. Минину за консультации при выполнении этой работы.

Астрономическая обсерватория  
ЛГУ

## ON THE EXPANSION OF PLANETARY NEBULAE

V. V. VITYASEV

The statistical dependence between expansion velocities and planetary radii is verified with reliable positive correlation coefficient. The nebula expansion due to direct  $L_c$ - and diffuse  $L_a$ -radiation is considered. A noticeable role of  $L_a$ -radiation in planetary expansion is shown. Assuming the expansion of the shell under action of corpuscular pressure, the rate of corpuscular emission from planetary nuclei is evaluated to be  $10^{-8}$  solar mass a year.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. H. Zanstra, Z. Astrophys., 3, 329, 1931.
2. А. А. Латыпов, Труды Ташкентской астрон. обс. (2), 5, 31, 1957.
3. О. Н. Чудовичева, Изв. Пулк. обс., 23, 154, 1964.
4. M. H. Liller, W. Liller, W. L. Welther, Ap. J., 144, 280, 1960.
5. И. Н. Минин, Труды четвертого совещания по вопросам космогонии, М., 1955.
6. O. C. Wilson, Rev. mod. Phys., 30, 1025, 1958.
7. M. Tuross, A computer model for planetary nebulae. A dissertation printed at the Institute for Defence Analyses. Arlington, Virginia, USA, 1965.
8. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
9. H. Zanstra, BAN, 12, 465, 1956.
10. X. Занстра, Третий симпозиум по космической газодинамике, ИЛ, М., 1960.
11. O. C. Wilson, Ap. J., 111, 279, 1950.
12. В. В. Соболев, Движущиеся оболочки звезд, Изд. Ленингр. ун-та, 1947.
13. Б. А. Воронцов-Вельяминов, Газовые туманности и новые звезды, Изд. АН СССР, 1948.

14. *C. R. O'Dell*, *Ap. J.*, 135, 371, 1962.
15. *И. С. Шкловский*, *Астрон. ж.*, 33, 2, 1956.
16. *Г. А. Гурздян*, *Вопросы динамики планетарных туманностей*, Ереван, 1954.
17. *Г. С. Хромов*, *Астрон. ж.*, 40, 5, 1963.
18. *W. G. Mathews*, *Ap. J.*, 143, 173, 1966.
19. *В. Г. Горбачук*, *И. Н. Минин*, *Нестационарные звезды*, Физматгиз, М., 1963.

## МЕДЛЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОЛИТРОП

В. В. ПАПОЯН, Д. М. СЕДРАКЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Поступила 1 августа 1968

Статья посвящена изучению медленного вращения релятивистских политроп. Учитываются лишь линейные по угловой скорости поправки на зрачение. Получено распределение момента инерции и недиагональной компоненты метрики для  $l = 1; 1.5; 2; 2.5; 3$ . В связи с гипотезой Хойла и Фаулера [29] особо рассмотрена вращающаяся политропа с  $l = 3$ . Показано, что одному и тому же числу барионов соответствуют две конфигурации, при переходе между которыми выделяется энергия  $10^{58} \pm 10^{60}$  эрг. Часть излучаемой энергии идет на увеличение энергии вращения (около 30%). Переход сопровождается выбросом вещества с экватора звезды. Предложенная модель является, по-видимому, удовлетворительной моделью квазара.

1. Анализ большого количества наблюдательных данных привел В. А. Амбарцумяна к выводу о наличии в ядрах некоторых галактик сверхплотных образований [1, 2]. В связи с обнаружением квазаров и источников пульсирующего радиоизлучения [3] гипотеза Амбарцумяна привлекает все большее число сторонников, и теперь уже почти ни у кого не вызывает сомнения, что связанные со сверхплотными телами сильные гравитационные поля играют важную роль в эволюции звезд и звездных систем.

Первым этапом изучения этой проблемы явилось рассмотрение сферически-симметричных релятивистских объектов [4—8]\*. В реальных задачах условие сферической симметрии выполнено лишь с определенной точностью. Поэтому интересно выяснить, существенно ли влияет отклонение от сферичности на решения уравнений Эйнштейна, полученные в предположении о наличии сферической симметрии.

В несферическом случае задача чрезвычайно сложна. Однако в астрофизических приложениях можно считать, что отклонения от сфе-

\* Подробная библиография в книге [9].

ричности вызваны вращением и предполагать, поэтому, наличие осевой симметрии, значительно упрощающей задачу.

На основе анализа, проведенного в рамках теории тяготения Ньютона, можно утверждать, что хотя вращение и деформирует сверхплотную звезду, заметных изменений ее массы вызвать не может [10, 11]. Весьма вероятно, что вращение играет существенную роль в вопросах, связанных со стабильностью релятивистского объекта. В частности показано [12], что коллапс вращающейся сверхмассивной звезды останавливается до начала ядерных реакций. Кроме того, есть основания предполагать, что вращение стабилизирует нейтронную звезду относительно коллапса, если даже ее масса больше критической.

Изменения, связанные с вращением релятивистских конфигураций, рассматривались в двух разных приближениях: а) после-ньютоновское приближение, в котором нет ограничения на угловую скорость вращения, однако эффекты общей теории относительности (ОТО) учитываются как поправки первого порядка к ньютоновской теории [12—15]; б) приближение малых угловых скоростей, в котором вращение рассматривается как возмущение к невращающимся релятивистским звездам [16—21]. При рассмотрении вращающихся сверхплотных звезд второй метод кажется более оправданным, так как большие плотности в центре конфигурации с одной стороны ограничивают величину угловой скорости вращения [11], с другой—делают необходимым использование ОТО.

Настоящая статья посвящена изучению медленного вращения релятивистских политропов. При этом учтены лишь линейные по угловой скорости  $\Omega = d\varphi/dt$  поправки на вращение. Получено распределение момента инерции и недиагональной компоненты метрики вдоль радиуса звезды для значений показателя политропы  $n = 1; 1.5; 2; 2.5; 3$ . Особо рассмотрена вращающаяся политропа с  $n = 3$ , отождествляемая со сверхмассивными звездами. Показано, что одному и тому же числу барионов соответствуют две равновесные конфигурации. При переходе между этими состояниями выделяется энергия  $10^{58} \div 10^{60}$  эрг. Переход в состояние с наименьшей энергией сопровождается увеличением энергии вращения и выбросом вещества с экватора конфигурации. Предложенная модель является, по-видимому, вполне удовлетворительной моделью квазара.

2. В системе связанных с центром распределения масс сферических координат  $R, \theta, \varphi$  метрика стационарного аксиально-симметри-

ческого поля тяготения, созданного телом, вращающимся с независимой от времени угловой скоростью, имеет вид [17, 18]\*

$$-ds^2 = (\omega^2 e^{\lambda} \sin^2 \vartheta - e^{\nu}) dt^2 + e^{\lambda} dR^2 + e^{\lambda} [d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2] + 2\omega e^{\lambda} \sin^2 \vartheta d\varphi dt. \quad (1)$$

Все компоненты метрического тензора, а вместе с ними и  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\omega$  — функции от  $R$ ,  $\vartheta$  и  $\Omega$ . Преобразование  $t \rightarrow -t$  оставляет инвариантной метрику, в то время как  $\Omega$  меняет знак, поэтому  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  зависят от четных, а  $\omega$  только от нечетных степеней  $\Omega$ .

С другой стороны, рассматриваемое линейное по  $\Omega$  приближение соответствует вращению шара с учетом „кориолисовых“ сил, которые не могут привести к изменению его формы. Следовательно, в этом приближении  $\nu$ ,  $\lambda$  не зависят от  $\vartheta$  и  $\Omega$ ,  $e^{\lambda}$  можно положить равным  $R^2$ , а  $\omega$  будет функцией  $R$  и  $\Omega$ . Иначе говоря, диагональные компоненты метрического тензора сохраняют шварцшильдовский вид, а единственная недиагональная компонента

$$g_{t\varphi} = \omega R^2 \sin^2 \vartheta. \quad (2)$$

Легко видеть, что уравнения Эйнштейна, определяющие функции  $\nu$  и  $\lambda$ , останутся такими же, как и в отсутствие вращения [22].

$$e^{-\nu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{\lambda_1}{R} \right) - \frac{1}{R^2} = -8\pi\rho, \quad (3)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{\nu_1}{R} \right) - \frac{1}{R^2} = 8\pi P. \quad (4)$$

Здесь и далее индекс 1 означает дифференцирование по  $R$ , а  $P$  и  $\rho$  — давление и плотность энергии соответственно. Связанные с вращением характеристики конфигурации представлены решением уравнения  $G_{\varphi}^t = 8\pi T_{\varphi}^t$ . Подсчет тензора Эйнштейна  $G_{\varphi}^t$  дает

$$G_{\varphi}^t = \frac{e^{-\nu-\lambda}}{2} R^2 \sin^2 \vartheta \left[ \omega_{,11} - \omega_{,1} \left( \frac{\nu_1 + \lambda_1}{2} - \frac{4}{R} \right) \right]. \quad (5)$$

Если задано число барионов конфигурации и зафиксирован момент импульса, то, как показано в [17], уравнения  $T_{\varphi}^k = 0$  эквивалентны условию

$$u^{\varphi} = \Omega u^t \quad (6)$$

и уравнению

\* Здесь и далее принята система единиц, в которых  $c = G = 1$ .

$$v = -2 \int \frac{dP}{P + \rho}. \quad (7)$$

Используя далее (6) и соотношение  $u_k u^k = -1$ , без труда найдем

$$T_{\varphi}^t = (P + \rho) e^{-v} R^2 \sin^2 \vartheta (\omega + \Omega) \quad (8)$$

и

$$\frac{e^{-\lambda}}{2} \left[ \omega_{11} - \omega_1 \left( \frac{\nu_1 + \lambda_1}{2} - \frac{4}{R} \right) \right] = 8\pi (P + \rho) (\omega + \Omega). \quad (9)$$

Введем безразмерную величину  $\beta = \Omega^2 / 8\pi\rho$ , новые переменные

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\beta}} (\omega + \Omega), \quad m = \frac{R}{2} (1 - e^{-\lambda}), \quad (10)$$

тогда учет уравнения (7) дает вместо (3), (4) и (9) систему уравнений Эйнштейна в первом по  $\Omega$  приближении

$$m_1 = 4\pi R^2 \rho, \quad (11)$$

$$P_1 = -F(R) \left[ P + \frac{m}{4\pi R^2} \right], \quad (12)$$

$$Q_{11} + \left[ \frac{4}{R} - F(R) \right] Q_1 - \frac{4}{R} F(R) Q = 0, \quad (13)$$

где

$$F(R) = \frac{4\pi(P + \rho) R^2}{R - 2m}. \quad (14)$$

Важно отметить, что уравнение (13) остается неизменным во втором по  $\Omega$  приближении. Действительно, как отмечено выше, поправки на вращение в функциях  $m$ ,  $P$ ,  $\rho$  пропорциональны  $\Omega^2$ , а  $Q \sim \Omega$ . Кроме того, было показано [18, 20], что уравнение, определяющее  $Q$ , во втором приближении не может содержать угловой части. Поэтому как в первом, так и во втором по  $\Omega$  приближениях  $Q = Q(R, \Omega)$  определяется уравнением (13) через характеристики  $m$ ,  $P$ ,  $\rho$  соответствующей невращающейся конфигурации.

Таким образом, если в первом приближении рассчитаны связанные с  $Q$  недиагональная компонента метрики и момент инерции, то можно утверждать, что их значения останутся неизменными и в приближении  $\Omega^2$ .

Начальные значения функций  $m$  и  $P$  выбираются обычным образом:  $m(0) = 0$ ,  $P(0) = P_c$ . Начальное значение  $Q$  выбирается произвольно, так что  $Q(0) = D$ ,  $Q_1(0) = 0$  [18]. Поэтому  $Q$  определена урав-

нением (13) лишь с точностью до постоянной  $D$ . Величину этой константы можно найти из требования непрерывности  $g_{17}$  и ее первой производной на границе конфигурации.

Вне распределения масс уравнение (13) имеет вид

$$Q_{11} + \frac{4}{R} Q_1 = 0.$$

Решение этого уравнения  $Q^{\text{вн}} = C_0 + C/R^3$  удовлетворяет условиям на бесконечности при  $C_0 = 0$ . Поэтому

$$Q^{\text{вн}} = \frac{C}{R^3}. \tag{15}$$

3. Модели конфигураций, состояние вещества которых описывается политропным уравнением

$$P = k \rho^{1+1/n}, \tag{16}$$

изучены достаточно подробно. Математические трудности, связанные с вращением политроп, вынудили в ряде случаев ограничиться ньютоновским приближением [23—26]. В других — задача была решена для невращающихся релятивистских конфигураций [27]. Поэтому, на наш взгляд, определенный интерес представляет рассмотрение медленного вращения релятивистских политроп, которым мы здесь займемся.

Введем, следуя Чандрасекару [23], безразмерные переменные.

$$\xi = AR; \quad v(\xi) = \frac{A^3}{4\pi\rho_c} m(R); \quad \theta(\xi) = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{1/n}; \tag{17}$$

$$A^3 = \frac{4\pi\rho_c^2}{(n+1)P_c} = \frac{4\pi\rho_c}{a(n+1)}; \quad a = \frac{P_c}{\rho_c} = k\rho_c^{1/n}.$$

В новых обозначениях уравнения (11) — (13) перепишутся в виде

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \theta^n, \tag{18}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -F(\xi) \frac{(v\theta^{-n} + a\xi^2\theta)}{a\xi^3(n+1)}, \tag{19}$$

$$\frac{d^2Q}{d\xi^2} + \left[ \frac{4}{\xi} - F(\xi) \right] \frac{dQ}{d\xi} - \frac{4}{\xi} F(\xi) Q = 0. \tag{20}$$

Здесь

$$F(\xi) = \frac{\alpha(n+1)(1+\alpha\theta)\theta^n\xi}{1-2\alpha(n+1)v/\xi}. \quad (21)$$

Система (18) — (20) проинтегрирована на ЭВМ „Наири“ для показателей политропы  $n=1; 1.5; 2; 2.5; 3$ . Решение уравнения (20) искали в виде  $Q(\xi) = Dq(\xi)$ , так что в соответствии со сказанным выше, в качестве начальных условий можно выбрать  $v(0) = 0; \theta(0) = 1, q(0) = 1, dq(0)/d\xi = 0$ . Граница конфигурации  $\xi_0$  определялась условием  $\theta(\xi_0) = 0$ . Значения релятивистского параметра  $\xi_0$  взяты в пределах от  $\alpha = 0.1$  до  $\alpha_{\max} = n/(n+1)$  [27].

Полученные распределения функций  $v, \theta, q, dq/d\xi$  будут использованы в дальнейшем для подсчета физических параметров вращающихся политроп в приближении  $\Omega^2$ . Однако такие характеристики, как недиагональная компонента метрики  $g_{t\varphi}$  и момент инерции можно найти на основе выполненного расчета  $q(\xi)$  и  $dq/d\xi$ . Для этого необходимо вычислить значения постоянных  $D$  и  $C$ . Используя непрерывность  $g_{t\varphi}$  и ее производной в точке  $\xi_0$ , получим

$$D = \frac{3\sqrt{2\alpha(n+1)}}{3q(\xi_0) + \xi_0 \frac{dq(\xi_0)}{d\xi}}, \quad (22)$$

$$C = -D \frac{\xi_0^4}{3} \frac{dq(\xi_0)}{d\xi}.$$

Известно, что вне распределения масс [28]

$$g_{t\varphi} = -\frac{2K}{R} \sin^2 \theta, \quad (23)$$

где  $K$  — полный момент импульса вращающегося тела. Сравнивая (23) с полученным из (2), (10), (22) выражением

$$g_{t\varphi} = -\frac{V\beta}{A} [V\sqrt{2\alpha(n+1)} - Q(\xi)]^2 \sin^2 \theta, \quad (24)$$

легко видеть, что момент инерции  $I$  имеет вид

$$J(\xi_0) = \frac{[V\sqrt{2\alpha(n+1)} - Q(\xi_0)]^2 \xi_0^3}{2A^2 V\sqrt{2\alpha(n+1)}}. \quad (25)$$

Результаты численного интегрирования приведены в табл. 1. Для политроп с  $n=1; 1.5; 2$  момент инерции монотонно убывает с ростом  $\alpha$ , в то время как для  $n=2.5; 3$  он сначала убывает, а за-

Таблица 1

$n=1$						$n=1.5$					
$\alpha$	$\xi_0$	$\nu(\xi_0)$	$q(\xi_0)$	$dq(\xi_0)/d\xi$	$(A^5/4\pi\rho_c) J(\xi_0)$	$\alpha$	$\xi_0$	$\nu(\xi_0)$	$q(\xi_0)$	$dq(\xi_0)/d\xi$	$(A^5/4\pi\rho_c) J(\xi_0)$
0.1	2.60	1.75	1.453	0.15	3.609	0.1	3.02	1.482	1.541	0.0986	3.332
0.2	2.28	1.143	1.922	0.409	2.063	0.2	2.69	0.9604	2.164	0.2563	1.869
0.3	2.06	0.819	2.424	0.761	1.294	0.3	2.481	0.6883	2.876	0.4641	1.198
0.4	1.91	0.6249	2.989	1.214	0.8948	0.4	2.36	0.527	3.696	0.6904	0.8426
0.5	1.8	0.4981	3.596	1.727	0.6523	0.5	2.274	0.4226	4.62	0.9447	0.6313
						0.6	2.215	0.3505	5.658	1.218	0.4969
$n=2$						$n=2.5$					
0.1	3.65	1.299	1.631	0.05464	3.173	0.1	4.056	1.167	1.691	0.043	3.169
0.2	3.39	0.8403	2.402	0.1260	1.278	0.2	4.719	0.7607	2.621	0.04374	1.921
0.3	3.261	0.6054	3.327	0.2043	1.204	0.3	4.985	0.5557	3.752	0.05386	1.371
0.4	3.214	0.4680	4.419	0.2822	0.8854	0.4	5.534	0.4386	5.1403	0.05266	1.123
0.5	3.295	0.38	5.721	0.3254	0.7013	0.5	6.396	0.3665	6.825	0.04456	1.026
0.6	3.399	0.3201	7.228	0.3631	0.5877	0.6	7.655	0.3203	8.854	0.0341	1.04
0.6667	3.492	0.2901	8.362	0.3807	0.5356	0.7	9.505	0.2906	11.293	0.02401	1.172
						0.7143	9.8	0.2872	11.677	0.02297	1.2
$n=3$						$n=3$					
0.1	6.8	1.079	1.783	$7 \cdot 10^{-3}$	3.4661	0.5	37.09	0.4214	8.014	$3 \cdot 13 \cdot 10^{-4}$	6.15
0.2	7.95	0.7131	2.815	$7 \cdot 9 \cdot 10^{-3}$	2.332	0.6	90.98	0.4493	10.859	$7.329 \cdot 10^{-5}$	32.1
0.3	10.8	0.5386	4.142	$4.57 \cdot 10^{-3}$	2.077	0.7	161.96	0.5252	14.575	$5 \cdot 16 \cdot 10^{-5}$	145.03
0.4	17.58	0.4517	5.835	$1.55 \cdot 10^{-3}$	2.637	0.75	180.4	0.5638	16.809	$6.266 \cdot 10^{-5}$	219.3

тем растет (см. рис. 1). Так как момент инерции определен сравнением найденного решения с решением Папаян [28] для удаленного наблюдателя, то, в конечном счете, такое поведение  $I$ , по-видимому,

связано с поведением инвариантного радиуса  $r_0 = \int_0^{R_0} e^{1/2} dR$ . Действительно, для  $n = 2.5; 3$ , как показывает расчет, инвариантный радиус конфигурации, в отличие от координатного  $R$ , ведет себя аналогично  $I$ . При  $n = 3$  таков и ход кривой  $v(\xi_0)$  от  $\alpha$ . Таким образом, убывание момента инерции конфигурации и дальнейший рост его связаны с искривлением пространства в поле сверхмассивной звезды, с которой обычно отождествляют политропу с  $n = 3$ .

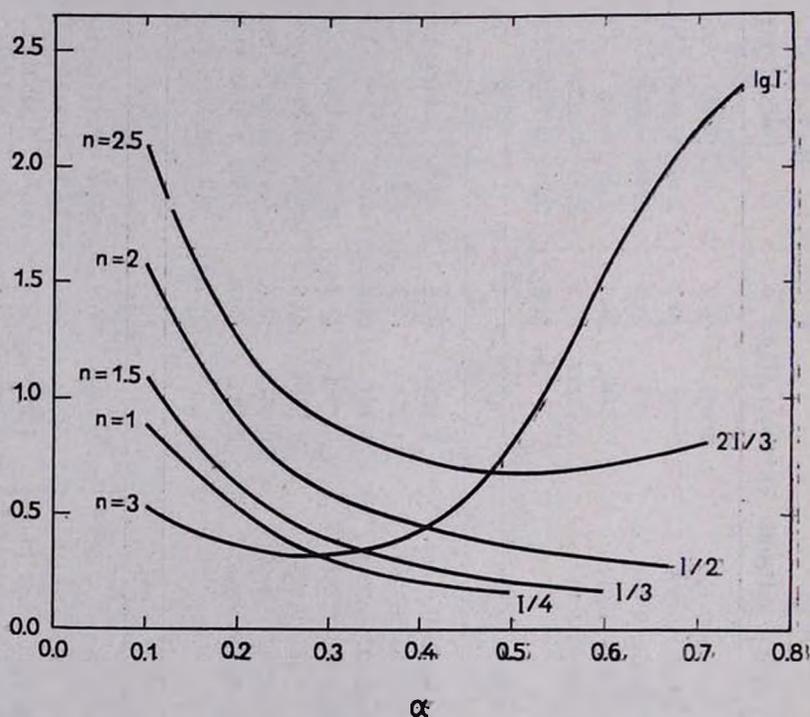


Рис. 1. Зависимость момента инерции  $I$  от релятивистского параметра  $\alpha$ . Для  $n = 2.5$  и  $3$  одному и тому же значению  $I$  соответствуют два разных значения  $\alpha$ .

На рисунках 2 и 3 для  $n = 1.5$  и  $n = 3$  показана зависимость функций  $v$ ,  $\theta$ ,  $g_{t\varphi}$  и  $I$ , характеризующих внутреннюю структуру конфигурации, в зависимости от  $\xi$ . В обоих случаях  $\alpha = 0.3$ . Сравнение кривых показывает, что для  $n = 3$   $g_{t\varphi}$  достигает максимума, а  $I$  выходит на плато ближе к центру звезды, чем в случае  $n = 1.5$ .

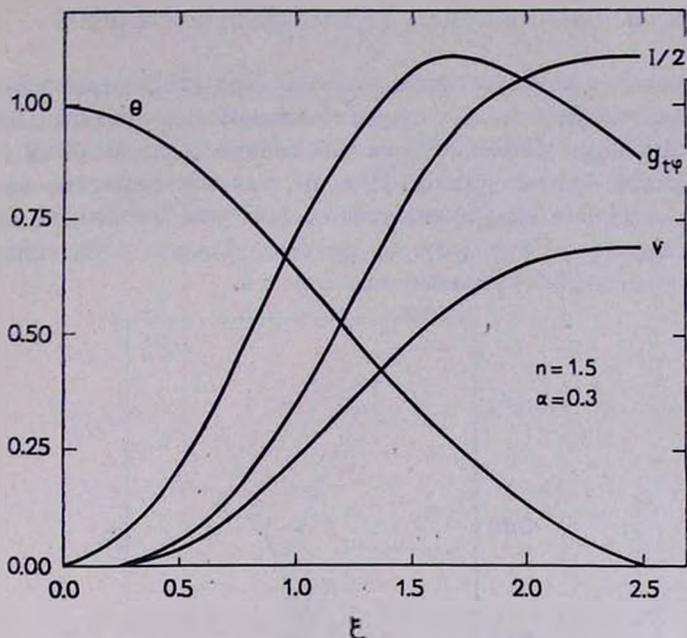


Рис. 2. Зависимость  $\theta$ ,  $v$ ,  $g_{t\phi}$ ,  $I/2$  от радиуса конфигурации  $\xi$ , определяющая внутреннюю структуру релятивистской вращающейся политропы с  $n = 1.5$  и  $\alpha = 0.3$ .

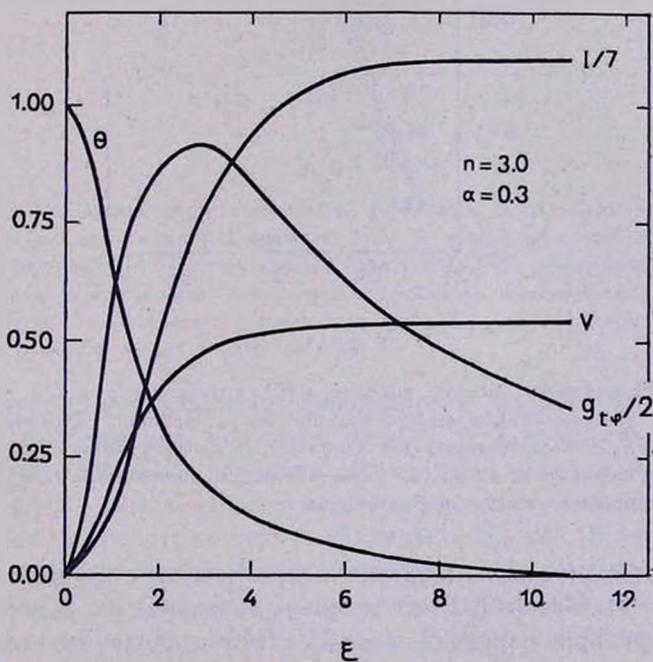


Рис. 3. Зависимость  $\theta$ ,  $v$ ,  $g_{t\phi}/2$ ,  $I/7$  от радиуса конфигурации  $\xi$ , определяющая внутреннюю структуру релятивистской вращающейся политропы с  $n = 3$  и  $\alpha = 0.3$ .

4. Согласно гипотезе Хойла и Фаулера [29], взрывные явления в галактиках обусловлены существованием сверхмассивных звезд ( $M \sim 10^3 + 10^6 M_{\odot}$ ). Давление в такой звезде должно быть большим, чтобы удержать ее от коллапса. Причем, так как вещество звезды невырождено, давление излучения преобладает над давлением вещества. Состояние вещества такой звезды поэтому близко к состоянию, описываемому политропным уравнением с  $n = 3$ .

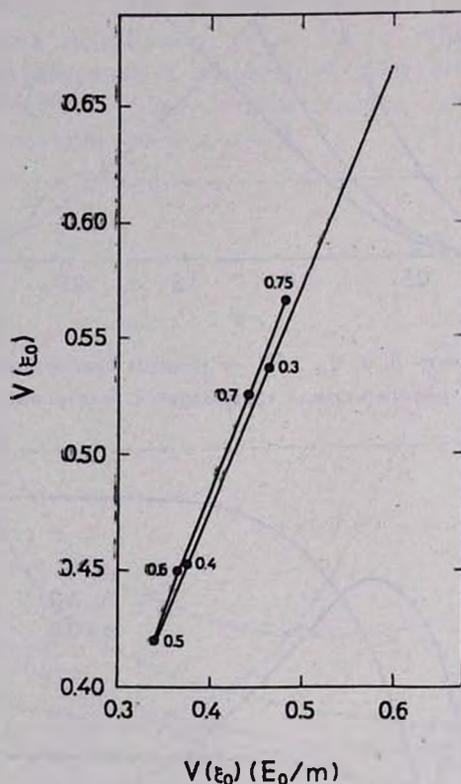


Рис. 4. Зависимость полной энергии  $v(\xi_0)$  политропы с  $n = 3$  от величины  $v(\xi_0) E_0/m$  (см. приложение), пропорциональной числу барионов. Одному и тому же значению  $v(\xi_0) E_0/m$  соответствуют две равновесные конфигурации с разными энергиями. Поэтому верхняя ветвь—ветвь метастабильных состояний. Черными точками отмечены значения релятивистского параметра  $z$ .

Рассматривая неврашающиеся сверхмассивные звезды как политропы с  $n = 3$ , Тупер [27] предложил механизм излучения энергии  $10^{58} \div 10^{60}$  эрг при переходе звезды с метастабильного состояния в стабильное с сохранением числа барионов. На рис. 4 показана зависимость массы от величины  $v(\xi_0) E_0/m$  (см. приложение), пропорцио-

нальной числу барионов. Звезда с верхней ветви должна перейти на нижнюю, при этом, если считать, что на верхней ветви масса ее порядка  $10^6 \div 10^6$ , выделяется энергия  $10^{58} \div 10^{60}$  эрг. Однако при переходе на нижнюю ветвь масса невращающейся звезды еще настолько велика, что она будет коллапсировать [30, 31].

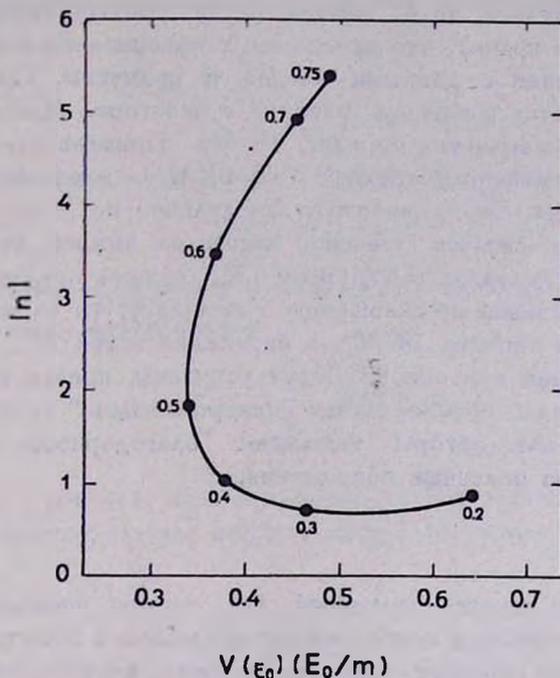


Рис. 5. Зависимость натурального логарифма полного момента инерции  $\ln I$  от  $v(\epsilon_0) E_0/m$  (см. приложение). Одному и тому же значению этой величины соответствуют две равновесные конфигурации с разными  $I$ , одна из которых метастабильная. При переходе в стабильное состояние с сохранением момента импульса уменьшается величина  $I$ , но сильно растет угловая скорость вращения. Черными точками отмечены значения релятивистского параметра  $\alpha$ .

Фаулер, рассматривая вращающиеся политропы в после-ньютоновском приближении, пришел к выводу, что вращение стабилизирует звезду относительно коллапса по крайней мере до  $M < 10^8 M_\odot$ . Поэтому имеет смысл рассматривать переходы типа Тупера [27] для вращающихся релятивистских политропов. На рис. 5 изображена полученная нами зависимость момента инерции конфигурации с  $n = 3$  от величины  $v(\epsilon_0) E_0/m$ , пропорциональной числу барионов. Как видно из рисунка, одному и тому же значению  $v(\epsilon_0) E_0/m$  соответствуют два разных значения момента инерции  $I$ . Рассмотрим переход с верхней ветви кривых на рис. 4 и 5 на нижнюю при фиксированном числе барионов.

Обсуждение динамики этого перехода связано с большими трудностями и лежит вне пределов настоящей статьи. Допустим, что на верхней ветви при  $\alpha = 0.75$  и  $M = 10^8 M_\odot$  звезда вращается с максимальной возможной угловой скоростью  $\Omega^2 \sim M/R^3$ , увеличение которой приводит к истечению вещества с экватора. Если при переходе сохраняется момент импульса, то на нижней ветви угловая скорость вращения  $\Omega$  настолько велика, что превосходит максимально возможное без истечения значение с данными массой и радиусом. Поэтому переход сопровождается выбросом материи с экватора. Масса выброшенного вещества оказывается порядка  $10^5 M_\odot$ . Примечательно, что 30% энергии, излучаемой при переходе ( $9.8 \cdot 10^5 M_\odot$ ), идет на увеличение энергии вращения. Это увеличивает предельное по отношению к катастрофическому сжатию значение массы на нижней ветви. Действительно, если вслед за Роксбургом [32] оценить предельное значение массы, устойчивой по отношению к коллапсу, то на верхней ветви оно оказывается порядка  $10^6 M_\odot$ , а на нижней ветви  $M \lesssim 10^8 M_\odot$ .

В дальнейшем эти оценки будут уточнены, причем будет учтена деформация звезды, обусловленная „центробежными“ силами.

В заключение авторы выражают благодарность профессору Г. С. Саакяну за полезные обсуждения.

### Приложение

Принятое в тексте выражения для тензора энергии — импульса предполагает отсутствие конвективных процессов, а политропное уравнение состояния означает изовэнтропичность конфигурации. В такой модели логично считать рассматриваемые процессы адиабатическими. Для адиабатических процессов релятивистское обобщение первого закона термодинамики имеет вид

$$\frac{d\rho}{\rho + p} = \frac{d\rho_0}{\rho_0},$$

$\rho_0$  — плотность энергии покоя частиц вещества звезды. Учет (16) и (17) дает вместо выписанного соотношения

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = \frac{nd\theta}{\theta(1 + \alpha\theta)},$$

интегрирование которого приводит к

$$\rho_0 = \rho_{0c} \left[ \frac{(1 + \alpha)\theta}{1 + \alpha\theta} \right]^n.$$

Вблизи границы конфигурации  $\theta \ll 1$  и

$$\rho_0 = \rho_{0c} \theta^n (1 + \alpha)^n,$$

кроме того плотность внутренней энергии у границы гораздо меньше плотности энергии покоя частиц, так что можно считать  $\rho \approx \rho_0$ . Поэтому

$$\rho_0 = \rho_c \frac{\theta^n}{(1 + \alpha\theta)^n}.$$

В нерелятивистском пределе при  $\alpha \rightarrow 0$ , как и следовало ожидать,

$$\rho = \rho_0 = \rho_c \theta^n.$$

Полученное для  $\rho_0$  выражение используется для подсчета полной энергии покоя частиц конфигурации

$$E_0 = 4\pi \int_0^{R_0} \rho_0 e^{\lambda/2} R^2 dR$$

(в единицах  $c = G = 1$ ,  $E_0$  — сумма масс покоя частиц вещества).

Как известно, полная энергия звезды  $m$  определяется соотношением

$$m = 4\pi \int_0^{R_0} \rho R^2 dR.$$

Тогда в безразмерных переменных (17) отношение  $E_0/m$  нетрудно получить в виде

$$\frac{E_0}{m} = \frac{1}{v(\xi_0)} \int_0^{\xi_0} \frac{\theta^{n+2} d\xi}{(1 + \alpha\theta)^n \sqrt{1 - 2\alpha(n+1)v/\xi}}.$$

Этот интеграл подсчитан методом трапеций на ЭВМ „Наири“ для  $n = 3$  и  $\alpha = 0.1$  до  $\alpha = 0.75$ .

Ереванский Государственный  
университет

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

## SLOWLY ROTATING RELATIVISTIC POLYTROPIC MODELS

V. V. PAPOYAN, D. M. SEDRAKIAN, E. V. CHUBARIAN

The slow rotation of relativistic polytropic models is studied. Only the linear term is taken into account. The distribution for the moment of inertia and nondiagonal components of metric is derived in case of  $n = 1; 1.5; 2; 2.5; 3$ . In connection with the Hoyle and Fowler hypothesis, rotating polytrop with  $n = 3$  is specially discussed. It is found, that two configurations correspond to the same barion number. In the case of transition between these states,  $10^{58} - 10^{60}$  erg of energy is radiated. A part of the radiated energy is spent on the increase of the energy (30%). During the transition matter is thrown out from the equator of the star. The proposed model is probably a satisfactory model of quasars.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 5, 9, 1958.
2. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 2, Ереван, 1960.
3. А. Hewish, S. J. Bell, J. D. Pilkington, R. A. Collins, P. F. Scott, Nature, 217, 709, 1968.
4. J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, Phys. Rev., 55, 374, 1939.
5. В. А. Амбарцумян, Г. С. Саакян, Астрон. ж., 37, 193, 1960; 38, 785, 1961.
6. Г. С. Саакян, Ю. А. Вартамян, Сообщ. Бюр. обс., 33, 55, 1963; Астрон. ж., 41, 193, 1964.
7. Г. С. Саакян, Э. В. Чубарян, Сообщ. Бюр. обс., 34, 99, 1963.
8. В. К. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, J. A. Wheeler. Gravitational theory and gravitational collapse, 1965.
9. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Релятивистская астрофизика, М., Наука, 1967.
10. Н. I. Chiu, Ann. Phys., 26, 364, 1964.
11. В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян, Сообщ. Бюр. обс., 39, 108, 1968; 40, 82, 1968.
12. W. A. Fowler, Ap. J., 144, 180, 1966.
13. S. Chandrasekhar, Ap. J., 142, 1513, 1965; 147, 334, 1967; 148, 621, 645, 1967.
14. B. Durney, I. Roxburgh, Proc. R. Soc., 296, 189, 1967.
15. Г. С. Бисноватый-Козан, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Астрон. ж., 44, 525, 1967.
16. А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, ЖЭТФ, 49, 170, 1965.
17. J. V. Hartle, D. H. Sharp, Ap. J., 147, 317, 1967.
18. Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян, Астрофизика, 4, 239, 480, 1968.
19. K. S. Thorne, Proc. of the Colloque International „Fluides et Champ Gravitational“, Paris, 1967.
20. J. V. Hartle, Ap. J., 150, 1005, 1967.
21. J. V. Hartle, K. S. Thorne, Ap. J., 153, 807, 1968.
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., 1967.

23. *S. Chandrasekhar*, *M. N.*, 93, 390, 1933.
24. *S. Chandrasekhar*, *N. R. Lebovitz*, *Ap. J.*, 136, 1082, 1962.
25. *R. A. James*, *Ap. J.*, 140, 552, 1964.
26. *J. J. Monaghan*, *J. W. Roxburgh*, *M. N.*, 131, 13, 1965.
27. *R. F. Tooper*, *Ap. J.*, 140, 434, 1964.
28. *A. Papapetrou*, *Proc. R. I., Akad.*, 52, 11, 1948.
29. *F. Hoyle*, *W. Fowler*, *M. N.*, 125, 169, 1963.
30. *K. S. Thorne*, Preprint, Relativistic stellar structure and dynamics, 1967.
31. *W. A. Fowler*, *Rev. mod. Phys.*, 36, 545, 1104, 1964.
32. *J. W. Roxburgh*, *Nature*, 207, 363, 1965.



СПЕКТРАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ ГАЛАКТИК МАРКАРЯНА  
С УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫМ КОНТИНУУМОМ. II.

Д. В. ВИДМАН, Э. Е. ХАЧИКЯН

Поступила 20 ноября 1968

Приводятся предварительные результаты спектральных наблюдений галактик из списка Маркаряна [1]. Результаты наблюдений 17-ти галактик приведены в предыдущей статье [2]. В настоящей работе приведены описания спектров остальных 18-ти галактик.

Около 80 % галактик показывают в спектрах эмиссионные линии.

Наблюдения указывают на присутствие эмиссионных линий водорода и запрещенных линий гелия, кислорода, неона, серы и др. в спектрах многих из исследованных галактик. Обнаружены еще две новые галактики типа Сейферта. Таким образом, среди исследованных галактик найдены четыре галактики, которые по спектральным характеристикам принадлежат к типу Сейферта (Маркарян 9, 10, 34 и 42). Три из них (9, 10, 34) по своей абсолютной величине и величине красного смещения превосходят все известные до сих пор сейфертовские галактики и сходны с квазарами. Приводятся доводы в пользу космогонической активности ядер многих галактик Маркаряна и их нетеплового излучения.

Как величины красного смещения, так и абсолютные величины исследованных галактик меняются в больших пределах ( $0.002 < z < 0.050$ ;  $-22 < M < -13$ ). Наблюдается большое разнообразие спектров галактик Маркаряна. Сделана попытка разбить их на четыре основные группы.

В предыдущей статье [2] было дано описание спектров 17-ти галактик из списка Маркаряна [1], полученных с большой дисперсией. В настоящей статье приводится описание спектров остальных 18-ти галактик, полученных на тех же телескопах.

*Маркарян 26.* Сфероидальная, очень диффузная галактика с двумя небольшими отростками, без определенного центрального сгущения. Наблюдения указывают на слабый непрерывный спектр, без заметных эмиссионных линий. Поэтому красное смещение не было определено.

*Маркарян 33* = Haro 2 [3]. Рис. 1с. Спектр галактики эмиссионный. Наблюдаются линии  $\lambda$  3870,  $H_\alpha$ ,  $H_\gamma$ ,  $H_\beta$ ,  $N_2$ ,  $N_1$ ,  $H_\alpha$ , 6717.  $N_1$  ярче, чем  $H_\beta$ , в то же время  $H_\beta$  ярче, чем  $N_2$ . Непрерывный спектр очень яркий. Спектр с дисперсией 27 Å/мм дает для ширин линий соответственно 200 км/сек для  $N_1$ , 170 км/сек для  $N_2$  и 190 км/сек для  $H_\beta$ . На прямых фотографиях наблюдается эллиптическое ядро с размерами  $5'' \times 9''$ , окруженное гало волокнистой структуры. Визуально отчетливо наблюдается звездообразное ядро с диффузной оболочкой.  $z = 0.0054$ .

*Маркарян 34*. Рис. 1б. Самая далекая из наблюдаемых нами галактик с  $z = 0.0507$ . В спектре присутствует ряд эмиссионных линий:  $\lambda$  3727, 3870,  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$ , 4686,  $H_\beta$ ,  $N_2$ ,  $N_1$ ,  $H_\alpha$ . Непрерывный спектр сравнительно слабый. Линия  $N_1$  очень яркая, значительно сильнее, чем  $H_\beta$ . Линия  $N_2$  также намного сильнее, чем  $H_\beta$ . Возможно, что линии слегка наклонены.

Спектр с дисперсией 27 Å/мм показывает широкие линии. Общая ширина линии  $N_1$  800 км/сек, с центральным выступом шириной 200 км/сек. А линия  $H_\alpha$  еще шире, общая ширина более 1500 км/сек. Электрофотометрические наблюдения, выполненные на 36'' телескопе МакДональдской обсерватории, дают следующие величины для ядра (исправленные за межзвездное поглощение):  $V_0 = 14^m 65$ ,  $(B - V)_0 = +1^m 14$ ,  $(U - B)_0 = +0^m 08$ . Следовательно, абсолютная величина этой галактики меньше, чем у самых ярких наблюдаемых галактик Маркаряна 9 и 10 и равна  $M_v = -22.2$ . Большое значение  $U - B$  возможно вызвано очень большой яркостью линии  $N_1$ . Прямая фотография на 36'' телескопе показывает очень компактное, эллиптическое ядро с размерами  $2.5 \times 5''$ , с небольшой диффузной оболочкой, простирающейся на 2'' от края ядра.

Визуально эта галактика видна как отдельное звездообразное ядро с диффузной оболочкой. Ее можно причислить к галактикам типа Сейферта.

*Маркарян 35* = NGC 3353 = Haro 3 [3]. Рис. 1а. На прямых фотографиях 36'' телескопа хорошо заметно ядро, асимметрично включенное в эллиптическое гало размерами  $8'' \times 35''$ . По-видимому, оно состоит из трех узлов, которые, сливаясь, образуют треугольник со стороной 10''. Центральная часть состоит из двух сгущений, которые хорошо разделяются на оригинальных снимках спектров этой галактики. В эмиссии наблюдаются:  $\lambda$  3727, 3870,  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$ ,  $H_\beta$ ,  $N_2$  и  $N_1$ . Непрерывный спектр слабый.  $N_1$  сильнее, чем  $H_\beta$ , которая той же интенсивности, что и  $N_2$ . Ширина линии  $N_1$ , определенная по спектру с

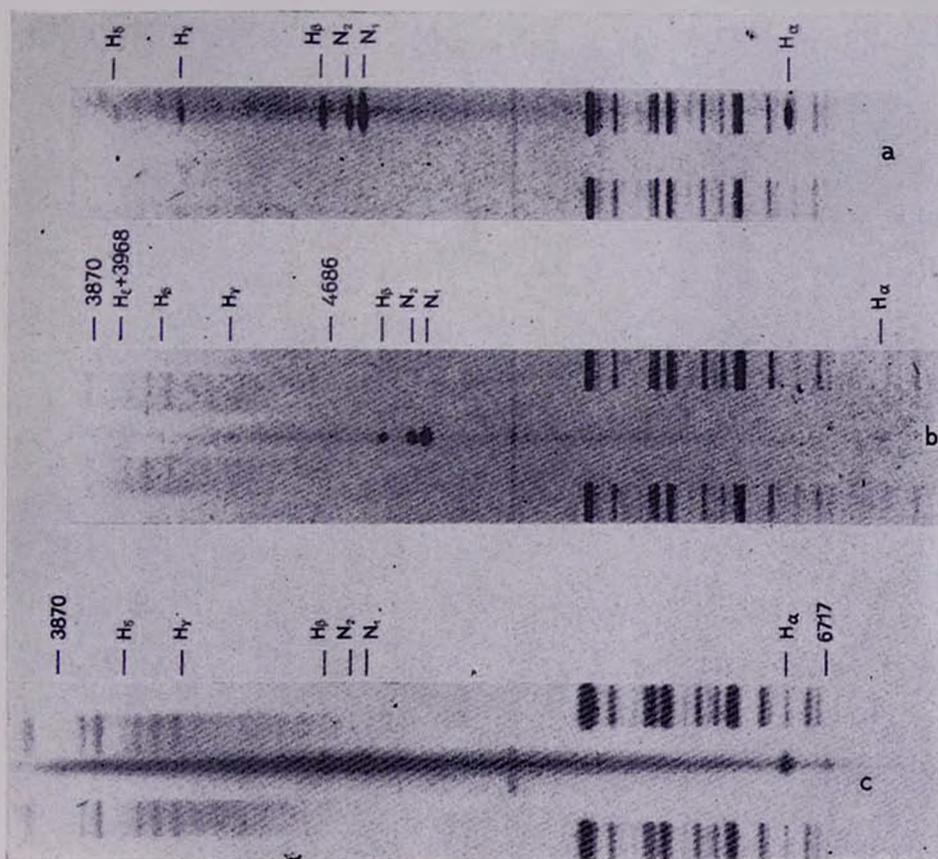


Рис. 1. Спектры галактик Маркаряна (82" телескоп, дисперсии 220 Å/мм):  
 а) Маркарян 35, б) Маркарян 34, с) Маркарян 33.

дисперсией 27 Å/мм, оказалась равной 200 км/сек, для  $N_2$  160 км/сек, и для  $H_3$  190 км/сек.  $z = 0.0034$ .

*Маркарян 36* = Ного 4 [3]. Рис. 2б. Спектр этой галактики похож на спектр Маркарян 5. В эмиссии  $\lambda$  3727, 3870,  $H_2 + 3889$ ,  $H_1 + 3968$ ,  $H_6$ ,  $H_7$ , 4363,  $H_3$ ,  $N_2$ ,  $N_1$ . Непрерывный спектр довольно сильный и его яркость быстро увеличивается в сторону коротких волн.  $z = 0.0022$ .

*Маркарян 40*. Рис. 3д. Несколько диффузная галактика с определенным центральным сгущением. В эмиссии наблюдаются линии:  $H_3$ ,  $N_2$ ,  $N_1$ ,  $H_2$ .  $H_2$  и  $H_3$  шире, чем  $N_1$  и  $N_2$ .  $N_1$  сильнее, чем  $H_2$ , но  $H_3$  в свою очередь ярче, чем  $N_2$ . Непрерывный спектр умеренный.  $z = 0.0202$ .

Галактика имеет слабо выраженные признаки, характерные для галактик Сейферта. Она включена в список галактик типа Сейферта [4], как VV 144. На аномальные спектральные признаки этой галактики впервые были указаны в [1].

*Маркарян 41*. Рис. 4а. Сферическая, диффузная туманность без определенного центрального сгущения. В спектре не наблюдаются линии излучения. Непрерывный спектр сильный.

*Маркарян 42*. Рис. 2а. Галактика определенно имеет центральное сгущение, окруженное диффузной оболочкой. Заметны эмиссионные линии излучения  $\lambda$  3727,  $H_6$ ,  $H_7$ ,  $H_3$ ,  $N_2$ ,  $N_1$  и  $H_1$ . Непрерывный спектр сильный и его яркость увеличивается к коротковолновой части. Водородные линии  $H_3$  и  $H_7$  намного шире, чем  $N_1$  и  $N_2$ . Ширина линии  $H_3$  более 2000 км/сек, а  $H_7 \sim 1500$  км/сек.  $z = 0.024$ . Галактика обладает признаками, характерными для галактик типа Сейферта.

*Маркарян 49* = Ного 8 [3]. Рис. 3с. Диффузная галактика без сильного центрального сгущения. В спектре присутствуют сильные эмиссионные линии  $H_6$ ,  $H_7$ ,  $H_3$ ,  $N_2$ ,  $N_1$ ,  $H_1$ . Самая яркая линия —  $N_1$ . Линии удлинены и слегка наклонены. Непрерывный спектр, сравнительно слабый.  $z = 0.0042$ .

*Магсарян 51*. Рис. 3б. Диффузный объект без яркого ядра. Эмиссионные линии сравнительно слабы на фоне непрерывного спектра.

Наблюдаются в эмиссии:  $H_3$ ,  $N_2$ ,  $N_1$ ,  $H_2$ .  $H_1$  ярче, чем  $H_3$  и  $N_2$ , которые имеют примерно одинаковую яркость. Линии наклонены. Электрофотометрические наблюдения с диафрагмой 17" дуги дают

$$V_0 = 15^m 54; (B - V)_0 = + 0^m 21; (U - B)_0 = - 0^m 13. z = 0.0032.$$

*Маркарян 52.* Рис. 3а. Галактика со звездообразным ядром, окруженным эллиптической диффузной оболочкой с размерами  $75'' \times 45''$ , причем плотность оболочки намного выше вдоль большой оси. Вероятно она является обычной спиральной галактикой или галактикой с перемычкой. Видны яркие линии  $H_{\beta}$ ,  $H_{\gamma}$ ,  $H_{\delta}$ ,  $N_2$ ,  $N_1$ ,  $H_{\alpha}$ .

В спектре наблюдаются также линии [NII] и [SII].  $H_{\delta}$  намного ярче, чем  $N_1$ . Непрерывный спектр умеренной интенсивности.  $z = 0.0062$ . Электрофотометрические наблюдения на  $36''$  телескопе с диафрагмой  $17''$  дают (без поправки за межзвездное поглощение):  $V = 14^m.08$ ,  $B - V = + 0^m.63$ ,  $U - B = - 0^m.25$ .

*Маркарян 54.* HZ 46 [5]. Диффузный объект без определенного центрального сгущения, с очень слабым непрерывным спектром и, возможно, со слабым следом  $N_1$ .

По данным [6] в галактике наблюдается эмиссионная линия  $\lambda 3727$  и  $z = 0.045$ .

*Маркарян 58.* В спектре не наблюдаются эмиссионные линии. Очень слабый непрерывный спектр. Слабый диффузный объект без определенного центрального сгущения.

*Маркарян 59 = NGC 4861.* Рис. 4б. Иррегулярная галактика, напоминающая по виду комету. „Ядром“ кометы и является галактика Маркарян 59. Это самая южная и наиболее яркая диффузно-сферическая часть этой галактики. Наблюдается интенсивный эмиссионный спектр с линиями  $\lambda\lambda 3727, 3870, H_{\beta}, H_{\gamma}, H_{\delta}, N_2, N_1$ .  $z = 0.0027$ .

*Маркарян 65.* Рис. 5д. Компактный объект с диффузной оболочкой. Непрерывный спектр умеренный. В спектре наблюдаются очень длинные эмиссионные линии  $H_{\delta}, N_2, N_1, H_{\alpha}$ .  $N_1$  ярче, чем  $H_{\beta}$ , которая в свою очередь ярче, чем  $N_2$ .  $z = 0.0434$ .

*Маркарян 66.* Рис. 5с. Диффузный объект с удлинением в направлении запад-восток, без определенного ядра. Яркие эмиссионные линии  $H_{\beta}, N_2, N_1, H_{\alpha}$  наблюдаются вне непрерывного спектра, который имеет заметную интенсивность.  $z = 0.0223$ .

*Маркарян 67.* Рис. 5б. Компактная галактика с диффузной оболочкой. Очень слабый непрерывный спектр, по сравнению с эмиссионной линией  $N_1$ , которая намного ярче  $H_{\beta}$ .  $z = 0.0036$ .

*Маркарян 70.* Рис. 5а. Диффузный, протяженный объект с заметным непрерывным спектром, но без эмиссионных линий.

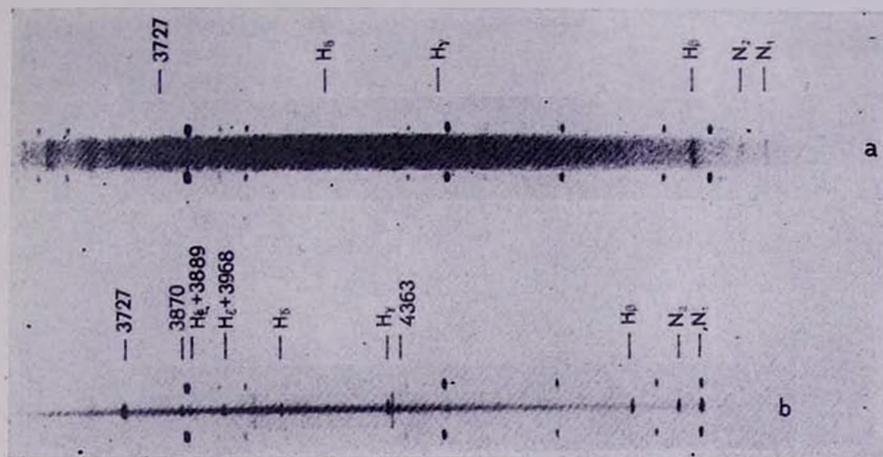


Рис. 2. Спектры галактик Маркаряна (200" телескоп): а) Маркарян 42, б) Маркарян 36.

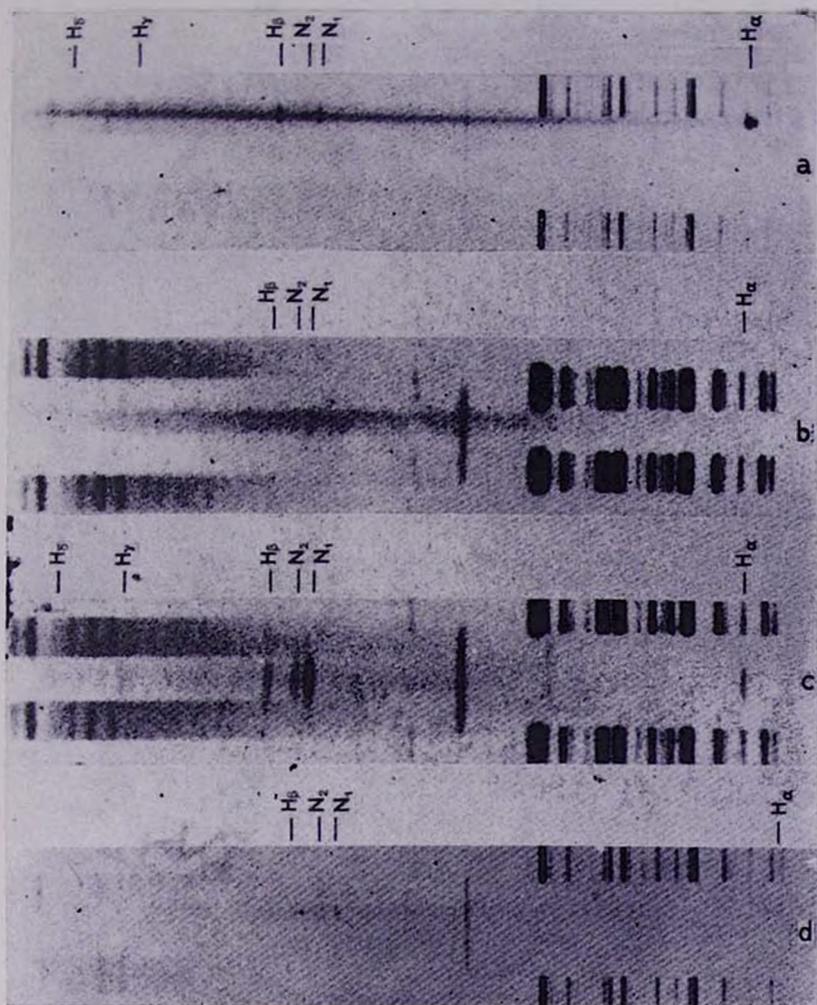


Рис. 3. Спектры галактик Маркаряна (82" телескоп): а) Маркарян 52, б) Маркарян 51, с) Маркарян 49, д) Маркарян 40.

Следует отметить, что спектры галактик Маркаряна 33, 34, 35, 40, 49, 51, 52, 65, 66, 67 и 70 получены в диапазоне длин волн 4000–7000 Å, а спектры 36, 41, 42 и 59 — примерно 3600—5200 Å.

*Обсуждение наблюдательных данных.* Как известно, Б. Е. Маркаряна [1] выделил рассматриваемые галактики в одну группу из-за наличия у них сильного ультрафиолетового континуума. В свою очередь по степени интенсивности ультрафиолетового континуума они были разбиты на две группы. Кроме того, по резкости краев спектра галактики были разделены на два типа: „s“, со звездоподобным резким спектром, напоминающим спектры квазаров, и „d“-диффузного вида.

Наши как спектральные, так и электрофотометрические данные подтверждают наличие ультрафиолетового излучения у большинства из наблюдаемых галактик. Однако весьма существенным является тот факт, что из 35 исследованных галактик у 29 (то есть у более, чем 80%) наблюдается эмиссионный спектр. Если учесть еще то обстоятельство, что из оставшихся шести галактик две галактики имеют очень слабый ультрафиолетовый континуум (№ 11 и 58), у трех не наблюдается сильного континуума, а у Маркаряна 54 эмиссию в линии  $\lambda 3727$  наблюдали Хюмасон, Мейел и Сандейдж [6], то можно утверждать, что наличие эмиссионных линий является другой характерной особенностью этих галактик.

Интересно отметить, что все или почти все галактики Маркаряна, имеющие сильный ультрафиолетовый континуум и отмеченные в [1] знаком „I“, показывают в спектре целый ряд сильных эмиссионных линий.

Этот факт, по-видимому, не является случайным, и мы можем заключить, что наличие сильного ультрафиолетового континуума тесно связано с образованием эмиссионного спектра. Возможно, что такой спектр возникает в значительной части из-за флуоресценции, подобно тому, как это происходит в планетарных туманностях. И действительно, многие спектры исследованных галактик напоминают спектры планетарных туманностей (см., например, Маркаряна 1, 3, 5, 6, 8, 13 и т. д.).

Однако при более детальном рассмотрении спектров исследованных галактик становится ясным, что они тем не менее существенно отличаются друг от друга по степени возбуждения эмиссионных линий, ширине эмиссионных водородных и запрещенных линий, их относительной интенсивности, интенсивности непрерывного спектра и величине красного смещения. Сильно различаются они также и по внешнему виду, и по морфологическим характеристикам. Сейчас уже ясно,

что среди них встречаются компактные галактики Цвикки, голубые галактики Аро, галактики типа *N*, сейфертовские галактики, иррегулярные галактики. Весьма существенным является открытие среди этих объектов четырех галактик типа Сейферта. Причем сейфертовские галактики Маркарян 9, 10, и 34 по светимости и величине красного смещения превосходят все известные до наших наблюдений сейфертовские галактики (см. табл.).

Наблюдается также некоторое различие в радиоизлучении исследованных галактик. По нашей просьбе др. А. Моффет на Радиоастрономической обсерватории Оуэнс Валли наблюдал некоторые из галактик Маркаряна на длинах волн 3 и 21 см, за что авторы выражают ему глубокую благодарность. Из 24 наблюдаемых им галактик на волне 3 см только одна галактика — Маркарян 42 — показывает более или менее заметное радиоизлучение с  $S = 0.21 \pm 0.14$  ед. потока. На волне же 21 см самое сильное излучение имеет Маркарян 3 с  $S = 1.07 \pm 0.08$  ед. потока. Примерно одинаковое радиоизлучение на этой волне ( $S = 0.30 \pm 0.10$ ) имеют Маркарян 6, 12, 18, 33 и 59. Интересно, что Маркарян 42 на волне 21 см излучает меньше, чем на волне 3 см ( $S = 0.16 \pm 0.11$ ).

Следует обратить внимание на очень большое различие красных смещений наблюдаемых галактик. Величина  $z$  находится в большом интервале между 0.002 и 0.184, то есть скорость удаления галактик лежит между 600 км/сек и 55000 км/сек. Здесь учтено также красное смещение Маркарян 64 ( $z = 0.184$ ), измеренное Брадези, Линдсом и Сандейджем [7] (объект В 340 в табл. 1). Но так как видимые звездные величины этих галактик различаются мало, это означает, что по абсолютной величине они существенно отличаются друг от друга.

Ниже приводится таблица, в которой помещены некоторые данные об исследованных галактиках. В этой таблице в последовательных столбцах даны: номера галактик по списку Маркаряна, значение  $B$ ,  $B - V$ ,  $U - B$ ,  $z$ ,  $M_B$ ,  $R$  и характеристики спектра согласно [1]. При вычислении  $M_B$  для постоянной Хаббла принято значение 75 км/сек. мпс.

Как видно из таблицы, светимости галактик сильно отличаются друг от друга. Наряду со сверхгигантами с  $M < -22$  встречаются карликовые галактики с  $M$  порядка  $-13$ . Оценка абсолютных яркостей галактик, не наблюдаемых электрофотометрически, сделана на основании данных таблицы Маркаряна [1], которые являются приближенными. Но сравнение электрофотометрических данных с данными Маркаряна показывает, что в среднем видимые величины галактик в его списке завышены, хотя ошибка не больше, чем  $0^m.5$ . То есть га-

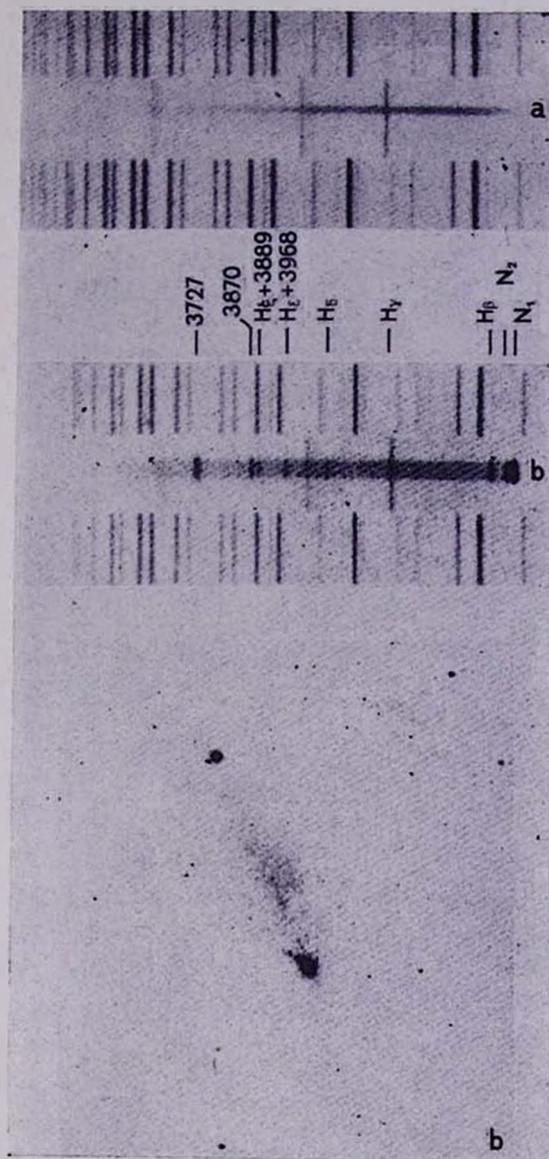


Рис. 4. Спектры галактик Маркаряна ( $36''$  Кросслеевский телескоп, дисперсия  $430 \text{ \AA/мм}$  у  $H_{\beta}$ ). а) Маркарян 41, б) Маркарян 59. Внизу—фотография галактики, полученная на том же телескопе (Масштаб  $1 \text{ мм} \sim 5''$ ).

№№ по [1]	B	B-V	U-B	z	M <sub>B</sub>	R <sub>млс</sub>	Характеристика спектра по [1]	№№ по [1]	B	B-V	U-B	z	M <sub>B</sub>	R <sub>млс</sub>	Характеристика спектра по [1]
1	14 <sup>m</sup> 64	+0 <sup>m</sup> 41	-0 <sup>m</sup> 22	0.016	-19.5	64	sd12e	33	14 <sup>m</sup> 29	+0 <sup>m</sup> 48	-0 <sup>m</sup> 61	0.0054	-17.9	22	sd1e
2	14.14	+0.60	-0.12	0.018	-21.5	72	s12	34	15.79	+1.14	+0.08	0.0507	-21.0	203	ds1e
3	15.0*			0,0135	-18.7	54	ds12e	35	14.0*	+0.32 <sup>x</sup>	-0.35 <sup>x</sup>	0.0034	-16.7	14	ds1e
4	16.5*			0.016	-17.6	64	sd12e	36	15.5*	+0.13 <sup>x</sup>	-0.64 <sup>x</sup>	0.0022	-14.2	9	d1e
5	17.0*			0.0029	-13.3	12	d1e	40	16.0*			0.0202	-18.5	81	sd12
6	15.0*			0.018	-19.3	72	s1e	41	15.72	+0.70	+0.03				sd12(e)
8	15.0*			0.0114	-18.3	45	d1	42	16.24	+0.79	-0.19	0.024	-18.8	100	s12(e)
9	14.77	+0.49	-0.68	0.039	-21.2	156	s1e	49	15.68	+0.48	-0.45	0.0042	-15.5	17	ds1e
10	14.71	+0.47	-0.70	0.029	-20.7	116	s1e	51	15.75	+0.21	-0.13	0.0032	-15.8	13	ds12
11	15.0*						s2	52	14.71	+0.63	-0.25	0.0062	-17.3	25	s12(e)
13	15.5*			0.0052	-16.1	21	sd1(e)	54	15.0*			0.045**	-21.3	180	s1e
14	15.5*			0.0105	-17.6	42	s12	58	15.5*						s2
17	17.0*			0.0228	-17.8	91	s12	59	14.0*	+0.57		0.0027	-16.2	11	d1e
19	16.0*			0.0141	-17.7	56	ds1e	64***	17.38	+0.41	-0.74	0.184	-21.9	735	sd1
22	16.5*			0.0050	-15.0	20	d1e	65	15.5*			0.0434	-20.7	170	d1
23	16*			0.0325	-19.6	130	s12	66	15.0*			0.0223	-19.7	89	d2(e)
25	14.80	+0.50	-0.47	0.0091	-18.0	36	s12(e)	67	16.5*			0.0036	-14.2	14	sd1e
26	16.0*						s12(e)	70	16.0*						d12(e)

\* Согласно [1].

\*\* Согласно [6].

\*\*\* Данные об этой галактике взяты из [7].

x Согласно [10].

лактики, отмеченные в таблице крестиками, по абсолютной величине должны быть в среднем несколько ярче, что совершенно не влияет на наши выводы.

В [1], исходя из непрерывного спектра, галактики были разделены на две основные группы. Нам кажется, что для лучшего понимания физической природы этих объектов надо учесть также эмиссионные линии. С этой точки зрения (хотя галактики Маркаряна имеют много общего) их можно разбить на группы со следующими спектральными особенностями (как уже отмечалось в первой статье, впервые такая попытка была сделана одним из авторов [8]):

а) Узкие, яркие эмиссионные линии (как водородной серии, так и запрещенные линии) с высокой степенью возбуждения (Маркарян 5, 8, 13, 59).

б) Очень широкие, яркие линии водорода и узкие запрещенные линии. Спектры типичные для сейфертовских галактик (Маркарян 9, 10, 34 и 42).

в) Широкие, яркие диффузные водородные и запрещенные линии с высокой степенью возбуждения. Линии  $N_1$  и  $N_2$  намного ярче и шире, чем линии водорода, в полную противоположность сейфертовским галактикам (их можно назвать „анти-сейфертовскими“). (Маркарян 1, 3, 6, 35).

г) Непрерывный спектр без заметных ярких эмиссионных линий или линий поглощения (Маркарян 11, 26, 41, 58, 70).

Что касается группы, отмеченной в [8] под номером 1, а именно: спектры с узкими эмиссионными и абсорбционными линиями, то кроме одной галактики — Маркарян 2 — другой галактики с такой спектральной характеристикой не было обнаружено. Поэтому мы считаем целесообразным пока не выделять ее в отдельную группу.

Еще в [1] отмечалось, что некоторые галактики, отнесенные к типу „s“, по характеру распределения энергии в спектре напоминают квазары. Наши данные также говорят в пользу этой точки зрения. Более того, галактики Маркарян 9, 10 и 34 напоминают квазары и своим высоким светимостям ( $M \sim -22$ ).

На сходство этих галактик с квазарами указывает еще тот факт, что в списке квазаров Брадези, Линдса и Сандейджа находится одна из галактик Маркаряна (№ 64) ([7], табл. 1, объект В 340).

Таким образом, они занимают промежуточное положение между квазарами и обычными галактиками. С другой стороны, все вышеприведенные данные говорят о том, что в центральных областях этих галактик (ибо по сути дела нами получены спектры лишь центральных областей) происходят необычные активные физические процессы,

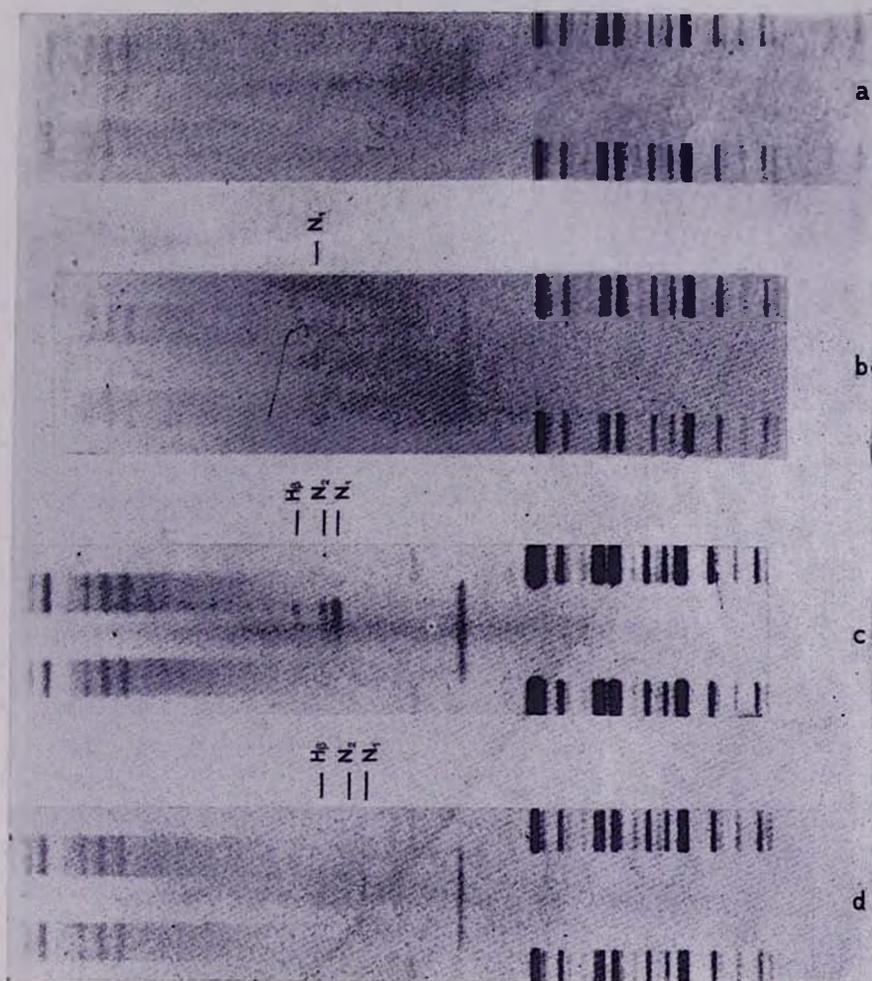


Рис. 5. Спектры галактик Маркаряна (82" телескоп):  
 а) Маркарян 70, б) Маркарян 67, в) Маркарян 66, г) Маркарян 65.

проявляющие себя разными способами и в разных масштабах. Кроме того, выявленные нами особенности эмиссионных линий в спектрах ряда галактик Маркаряна дают достаточное основание утверждать, что их ядра обладают нетепловым излучением.

Итак, сейчас уже известна многочисленная группа галактик разных морфологических типов, ядра которых явно проявляют признаки активности и в число которых с достаточным основанием можно теперь включить исследованные нами галактики.

Все это находится в хорошем согласии с идеей о космогонической активности центральных областей галактик, высказанной более 10 лет тому назад В. А. Амбарцумяном [8].

В заключение авторы считают необходимым отметить, что описания спектров всех галактик приведены на основании предварительного их изучения. Результаты детального исследования этих спектров будут опубликованы в ближайшем будущем.

Авторы признательны академику В. А. Амбарцумяну и чл.-корр. АН АрмССР Б. Е. Маркаряну за ценные замечания и дискуссии, а также сотруднику МакДональдской обсерватории (США) Р. Энджioni за помощь при электрофотометрических наблюдениях и Дж. Эйнатян за измерение величин красных смещений.

Один из авторов (Э. Е. Х.) выражает глубокую благодарность директорам обсерваторий МакДональд, Кит Пик, Маунт Паломар и Лик за предоставленную возможность наблюдать на телескопах этих обсерваторий.

МакДональдская обсерватория  
Техасского университета, США

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

## SPECTRAL OBSERVATIONS OF MARKARIAN GALAXIES WITH ULTRAVIOLET CONTINUUM. II.

D. W. WEEDMAN, E. Ye. KHACHIKIAN

The preliminary results of spectral observations of galaxies with strong ultraviolet continua from Markarian's list [1] are presented. The observations of 17 galaxies were described in the first paper [2]. Here the description of spectra of the other 18 galaxies is presented.

About 80% of the galaxies show emission spectra. The emission lines of hydrogen and forbidden lines of oxygen, neon, sulphur and others are present in the spectra of these galaxies. Two other new Seyfert type galaxies were revealed. Four Seyfert galaxies were disco-

vered in all (Markarian 9, 10, 34 and 42). Three of these galaxies (9, 10, 34) show very large red-shifts and absolute magnitudes, which are larger than those of the other known Seyfert galaxies and are close to those of some quasars. Some arguments in favour of cosmogonic activity in the nuclei of some of the Markarian galaxies and in their nonthermal radiation are presented. There are some evidences in favour of a correlation of the ultraviolet continuum with the emission spectra.

Both the red-shifts and absolute magnitudes of the investigated galaxies vary over large intervals ( $0.002 < z < 0.050$ ;  $-22 < M < -13$ ). A large variety in the spectra of the Markarian galaxies has been observed. An attempt is made to divide these galaxies into four groups.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. Е. Маркарян, *Астрофизика*, 3, 55, 1967.
2. Д. В. Видман, Э. Е. Хачикян, *Астрофизика*, 4, 587, 1968.
3. G. Haro, *Bull. Obs. Tonantzintla Tacubaya*, No. 4, 8, 1956.
4. *Proceedings of the Conference of Seyfert Galaxies and Related Objects*, p. 10, 1968.
5. M. L. Humason, F. Zwicky, *Ap. J.*, 105, 85, 1947.
6. M. L. Humason, N. U. Mayall, A. R. Sandage, *A. J.* 61, 97, 1956.
7. A. Braccesi, C. R. Lynds, A. R. Sandage, *Ap. J.*, 152, L 105, 1968.
8. Е. Կс. Khachikian, *Proceedings of the Conference of Seyfert Galaxies and Related Objects*, 31, 1968.
9. В. А. Амбарцумян, *Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 11, 9, 1958.
10. W. A. Hiltner, B. Iriarte, *Ap. J.*, 128, 443, 1958.

## СПЕКТРОФОТОМЕТРИЯ F-ЗВЕЗД.

IV. КОНТУРЫ ЛИНИЙ В СПЕКТРАХ  $\sigma$  Boo,  $\nu$  Her и 41 Cyg

Т. А. КИППЕР

Поступила 15 апреля 1968

Исправлена 30 мая 1968

В работе описана программа для расчета контуров линий  $H\gamma$  и  $K$  Ca II на основе моделей атмосфер. С помощью этой программы вычислены контуры линий, которые соответствуют 9 моделям атмосфер F-звезд. Проведено сравнение вычисленных контуров с наблюдаемыми контурами в спектрах  $\sigma$  Boo,  $\nu$  Her и 41 Cyg. Выяснено, что бальмеровские линии мало чувствительны к изменению ускорения силы тяжести. По контурам линии  $K$  Ca II определено содержание кальция в атмосферах  $\sigma$  Boo,  $\nu$  Her и 41 Cyg.

На основе моделей атмосфер можно вычислять теоретические контуры спектральных линий. В настоящей работе вычислены контуры бальмеровских линий ( $H\gamma$ ) и линии  $\lambda 3933$  Ca II (K), так как эти контуры можно легко сравнивать с наблюдаемыми нами контурами в спектрах  $\sigma$  Boo,  $\nu$  Her и 41 Cyg [1, 2]. Контуры линий остальных элементов сравнивать трудно, так как эти на наших спектрограммах почти инструментальные.

1. *Вычисление контуров.* а) *Водородные линии.* В большинстве астрофизически важных случаев расширение водородных линий обусловлено главным образом линейным эффектом Штарка, и другие типы расширения можно не учитывать, кроме доплеровского расширения для центрального несмещенного компонента [3, 4]. Поэтому можно для коэффициента поглощения в линии написать упрощенное выражение, избегая обычного свертывания функций, описывающих расширение.

$$I_{\lambda} = \text{const} \cdot \varepsilon_H (gf_{\pm} \lambda) \cdot \left( \frac{N_i}{g_i N_H} \right) \cdot [1 - \exp(-2.859 \cdot 10^4 \theta / \lambda)] \times \quad (1)$$

$$\times (83.82/\theta + \xi^2)^{-1/2} \cdot \left[ \frac{\sqrt{\pi} \lambda}{c} (83.82/\theta + \xi^2)^{1/2} S(\alpha, p) \frac{d\alpha}{d(\Delta\lambda)} + \frac{f_0}{f_{\pm}} H(\alpha, \nu) \right].$$

В формуле (1)  $\alpha$  — расстояние от центра линии в единицах эффективной силы поля  $F_0$ .

$$F_0 = 1.25 \cdot 10^{-9} N^{2/3}, \quad (2)$$

где  $N$  — число расширяющих частиц в  $\text{см}^3$ ,  $f_0 = 0.006989$  — сила осциллятора несмещенного компонента,  $f_{\pm} = 0.037498$  — суммарная сила осциллятора смещенных компонентов [5],  $\varepsilon_H$  — содержание водорода относительно суммы содержаний всех элементов ( $\varepsilon_H \approx 0.86$ ).

Функция  $S(\alpha, p)$  описывает штарковское расширение. Расширение центрального несмещенного компонента описывается функцией Фойгта  $H(\alpha, \nu)$ . В формуле (1) сомножители  $[1 - \exp(-2.859 \cdot 10^4 \theta / \lambda)]$  и  $(83.82/\theta + \xi^2)^{1/2}$  выражают соответственно долю индуцированного излучения и наиболее вероятную скорость атомов водорода.

Для  $S(\alpha, p)$  используем таблицы, которые основаны на графиках из работы [4]. Полученные с графиков значения  $S(\alpha, p)$  могут иметь случайную ошибку  $\sim 3 - 6\%$ , но это не должно иметь значительного влияния на результаты, так как при интегрировании по оптическим глубинам эти случайные ошибки компенсируют друг друга. Для  $\alpha$  больших, чем 0.5, используем приближенную формулу

$$\lg S(\alpha, p) = 5.859 - 2.504 \lg \alpha \quad (\text{для } H\gamma). \quad (3)$$

При вычислении графиков для  $S(\alpha, p)$  в работе [4] учитывались эффекты корреляции и экранирования. Для всего контура использовалось квазистатическое приближение, хотя для  $\Delta\lambda$  меньших, чем

$$\Delta\lambda_L = 9.12/\theta \quad (\text{для } H\gamma) \quad (4)$$

это приближение должно быть заменено ударным приближением. Чтобы использовать одно приближение для всего контура, введена процедура эмпирической коррекции [4]. В настоящее время данное представление дает лучшее согласие с экспериментами, которые проведены при температурах и давлениях, встречающихся в звездных атмосферах [4].

Эффекты корреляции и экранирования учитываются параметром  $p$ ,

$$p = 0.0898 N^{1/3} / T^{1/2}.$$

Число расширяющихся частиц  $N$  является функцией  $\Delta\lambda$  и меняется в пределах

$$N_* \leq N(\Delta\lambda) \leq 2N_*. \quad (6)$$

Для параметра  $p$  выбор  $N$  не имеет большого значения ввиду малого показателя степени у  $N$  в формуле (4), а также ввиду слабой зависимости  $S(z, p)$  от  $p$ . Зато более сильное влияние имеет этот выбор на эффективную силу поля  $F_0$ .

В работе [4] предложен чисто эмпирический способ для выбора  $N$ .

Число расширяющихся частиц выражается в виде функциональной зависимости

$$N = N(\Delta\lambda) = N_* \left( 1.5 + 0.5 \frac{z-1}{z+1} \right). \quad (7)$$

Хорошее согласие с наблюдениями получается при

$$z = 7 \Delta\lambda / \Delta\lambda_L. \quad (8)$$

В этом случае

$$S(z, p) \frac{dz}{d(\Delta\lambda)} = S(p[N^*], \alpha[N]) g(\Delta\lambda) / F_0(N), \quad (9)$$

где

$$g(\Delta\lambda) = 1 - 2/3 \frac{N_*}{N(\Delta\lambda)} \frac{z}{(z+1)^2}. \quad (10)$$

Как уже сказано,  $N^*$  может быть выбрано произвольно в пределах, указанных в формуле (5).

Контур линии в выходящем потоке можно вычислить по формуле

$$R(\Delta\lambda) = \frac{\int_0^{\infty} S_{\Delta\lambda}(\tau_{\Delta\lambda}) E_2(\tau_{\Delta\lambda}) d\tau_{\Delta\lambda}}{\int_0^{\infty} S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) E_2(\tau_{\lambda}) d\tau_{\lambda}}, \quad (11)$$

где  $S_{\Delta\lambda}$  и  $S_{\lambda}$  — функции источника соответственно в линии и в непрерывном спектре, а  $E_2$  — интегральная показательная функция 2-го порядка.

Бальмеровские линии как субординатные линии возникают главным образом по схеме „чистого поглощения“, хотя в таком случае получаются некоторые неувязки в центральных областях линий. Учитывая неточности моделей и теории расширения, это предположение

достаточно хорошее при сравнении с наблюдениями [6]. Если принять схему „чистого поглощения“, то можно функцию источника заменить функцией Планка

$$\begin{aligned} S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) &= B_{\lambda}(T[\tau_{\lambda}]) \\ S_{\Delta\lambda}(\tau_{\Delta\lambda}) &= B_{\lambda}(T[\tau_{\Delta\lambda}]) \end{aligned} \quad (12)$$

б) *Линии  $\lambda 3933$  Ca II.*

Линия К ( $\lambda 3933$ ) Ca II является одной из самых сильных линий в спектрах F-звезд. Расширение крыльев этой линии описывается теорией дискретных соударений. Для далеких крыльев линии ( $v \geq 8$ ) коэффициент поглощения можно написать в форме [7]

$$I_{\lambda} = \frac{16.5 \cdot 10^{-26}}{m_H \mu_0} \cdot \varepsilon_{Ca} \cdot (gf)_{\lambda} \cdot \left( \frac{N_i}{g_i N} \right) \left[ 1 - \exp \left( -2.859 \cdot 10^4 \frac{\theta}{\lambda} \right) \right] \cdot \frac{\lambda}{\Delta\lambda^2} \cdot \frac{\Gamma}{\gamma_{\lambda}} \quad (13)$$

Здесь коэффициент поглощения (с учетом индуцированного излучения) выражен для 1 грамма звездного вещества (в наших моделях  $\mu_0 = 1.67$ ). Для линии K Ca II написанное выражение коэффициента поглощения можно использовать, ввиду очень большой ширины этой линии, практически для всей линии, за исключением очень узкой центральной области, где расширение обусловлено эффектом Доплера.

В формуле (13)  $\varepsilon_{Ca}$  — относительное содержание Ca по отношению к водороду,  $\Gamma$  — постоянная затухания,  $\gamma_{\lambda}$  — классическая постоянная затухания

$$\gamma_{\lambda} = \frac{2.22}{\lambda^2} \cdot 10^{15} = 1.44 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1} \quad (\text{для } \lambda 3933). \quad (14)$$

Так как линия  $\lambda 3933$  Ca II — резонансная линия, надо при расчете величины  $N_i/g_i N$  использовать только формулу Саха. Если учитывать нейтральные, однократно и двукратно ионизованные атомы, то

$$\frac{N_i}{g_i N} = \frac{1}{U_1} \cdot \frac{1}{\frac{N_0}{N_1} + 1 + \frac{N_2}{N_1}} \quad (15)$$

Остается найти выражение для  $\Gamma$ , которое является суммой постоянной затухания излучением и числа соударений в секунду.

$$\Gamma = \Gamma_{\text{rad}} + 2S. \quad (16)$$

Для постоянной затухания излучением имеем в случае  $\lambda 3933$  Ca II

$$\Gamma_{\text{rad}} = 3 \sum \frac{g_n}{g_m} f_{nm} \gamma_{\nu} = 1.19 \gamma_{\lambda}. \quad (17)$$

Для числа соударений в секунду можем написать

$$S = \pi v \frac{P_f}{kT} \rho_0^2, \quad (18)$$

где  $v$  — средняя относительная скорость излучающего и расширяющегося атомов:

$$v = \left[ \frac{8\pi T}{\pi m_H} \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \right]^{1/2}. \quad (19)$$

В нашем случае главную роль расширяющихся частиц играют нейтральные атомы водорода [7]. В этом случае  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 40$ . Через  $\rho_0^2$  отмечено сечение ударного расширения. В случае, если расширяющиеся частицы — атомы водорода, соударения характеризуются силами ван-дер-ваальсовского типа [7] и

$$\rho_0 = \left( 12 \cdot 15 \frac{C}{v} \right)^{1/3}. \quad (20)$$

Для линии К Ca II константа ван-дер-ваальсовского взаимодействия  $C = 1.51 \cdot 10^{32}$  [7]. Если учесть формулы (12)–(16), можно после некоторых преобразований получить удобную для численных расчетов формулу

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_\lambda} = 1.083 + 10^{(-3.886 + \lg P_f + 0.7 \lg \rho)} \quad (21)$$

Сильные резонансные линии, вроде линии,  $\lambda 3933$  Ca II, не возникают по схеме „чистого поглощения“. Для таких линий доля рассеяния гораздо больше истинного поглощения. В случае  $\lambda 3933$  Ca II величина  $e$ , которая показывает долю истинного поглощения, порядка 0.001 [3]. Поэтому при использовании формулы (11) для нахождения контура нужно вычислять функцию источника для линии, которая учитывает рассеяние. Но, как показывают многочисленные исследования [3, 8, 9], рассеяние имеет важное значение лишь для центральных областей линии. Вычисленные по схеме „чистого поглощения“ крылья сильных резонансных линий дают хорошее согласие с наблюдаемыми контурами. Поэтому с формальной точки зрения мы можем для крыльев линии  $\lambda 3933$  Ca II использовать в качестве функции источника функцию Планка.

По описанной схеме была написана программа для ЭЦВМ „Минск-2“ на алгоритмическом языке МАЛГОЛ [10]. В качестве моделей атмосфер использовались приближенные модели атмосфер для F-звезд, рассчитанные автором [11]. При составлении программы пред-

положено, что суммы по состояниям для  $S_a$  зависят только от температуры, зависимость от  $P_0$  не учтена. Значения сумм по состояниям находятся путем интерполяции из таблиц, составленных на основе работ Клааса [12] и Аллера [13].

## 2. Результаты вычислений. а) Линия $H\gamma$ .

Численные результаты применения описанной схемы приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\theta_{\text{eff}}$	0.75	0.78	0.81	0.72	0.735	0.75	0.70	0.72	0.74
$\lg g$	2.49	2.49	2.49	3.4	3.4	3.4	4.35	4.35	4.35
$\Delta\lambda$									
0.00	0.264	0.245	0.235	0.270	0.264	0.258	0.279	0.270	0.262
0.25	0.280	0.275	0.292	0.286	0.285	0.291	0.296	0.299	0.309
0.50	0.447	0.478	0.519	0.398	0.418	0.439	0.373	0.394	0.417
1.0	0.562	0.591	0.626	0.502	0.524	0.548	0.467	0.494	0.522
2.0	0.674	0.695	0.726	0.612	0.635	0.654	0.574	0.604	0.631
3.0	0.737	0.757	0.786	0.674	0.697	0.713	0.640	0.663	0.691
4.0	0.785	0.798	0.828	0.717	0.736	0.757	0.687	0.707	0.727
5.0	0.815	0.832	0.855	0.750	0.770	0.787	0.714	0.739	0.763
6.0	0.842	0.853	0.879	0.777	0.794	0.813	0.742	0.766	0.790
7.0	0.861	0.872	0.899	0.797	0.816	0.834	0.767	0.787	0.811
10	0.903	0.917	0.939	0.847	0.861	0.876	0.817	0.836	0.853
15	0.946	0.956	0.968	0.901	0.913	0.926	0.869	0.888	0.905
20	0.967	0.973	0.980	0.935	0.944	0.953	0.908	0.924	0.938
25	0.978	0.982	0.987	0.956	0.962	0.968	0.934	0.948	0.957
30	0.985	0.987	0.991	0.968	0.972	0.976	0.952	0.960	0.967

Наши результаты показывают, что в спектральных классах F2—F4 ( $\theta_{\text{eff}} = 0.70 \div 0.80$ ) контуры бальмеровских линий очень слабо зависят от ускорения силы тяжести, если последнее изменяется в пределах  $\lg g = 3.0 \div 4.5$ . У сверхгигантов ( $\lg g = 2.5$ ) контур линии  $H\gamma$  несколько уже. Но при несколько низшей температуре эффект абсолютной величины почти отсутствует и для  $\lg g = 2.5 \div 3.0$ . В то же время контуры  $H\gamma$  весьма чувствительны к изменениям температуры (у сверхгигантов это наблюдается при  $\theta_{\text{eff}} > 0.78$ ).

Причина такого результата в том, что для F-звезд коэффициент непрерывного поглощения определяется главным образом отрицательными ионами водорода

$$k_v = \alpha (H^-) \frac{P_e}{m_H \mu}, \quad (22)$$

где  $\alpha$ ,  $H^-$  зависит только от температуры. Коэффициент поглощения в линии пропорционален  $I_\nu \sim P_e^{2/3}$ . Так как при вычислении контура используется отношение  $I_\nu/k_\nu$ , то контур мало зависит от  $P_e$ , а следовательно и от  $\lg g$ . У сверхгигантов доля отрицательных ионов в непрерывном поглощении при  $\theta_{\text{eff}} < 0.8$  еще мала [7], поэтому для них контур зависит от  $\lg g$ .

Интенсивность бальмеровских линий заметно растет с ростом температуры. Это связано с тем, что населенность уровня  $n=2$  весьма малая и растет быстро с ростом температуры, а роль ионизации в то же время еще незначительная. Недостаточная чувствительность бальмеровских линий к  $P_e$  указывает, что для нахождения  $P_e$  в спектральном классе F нельзя пользоваться известной формулой Унзольда.

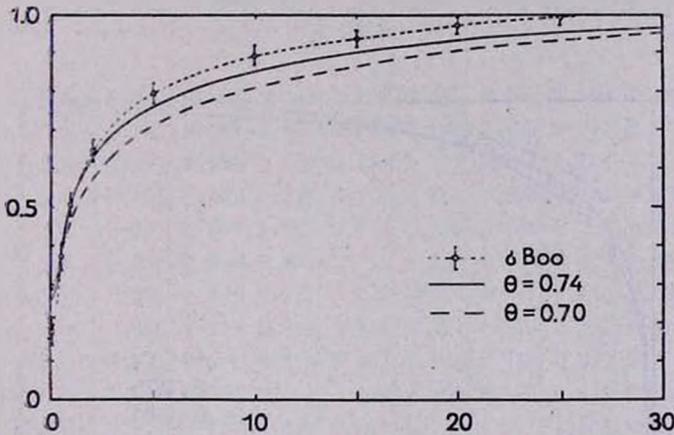


Рис. 1.

Сравнение вычисленных и наблюдаемых контуров  $H_\gamma$  приведено на рис. 1—3. Наблюдаемые контуры  $\delta$  Boo и  $\nu$  Her слишком узкие. Это является, наверно, результатом того, что положение непрерывного спектра несколько занижено. В отличие от сверхгиганта 41 Cyg у  $\delta$  Boo и  $\nu$  Her металлические линии весьма широкие и имеют малые центральные интенсивности, поэтому ошибка в проведении непрерывного спектра больше именно у них. Несовпадение в центрах линий обусловлено неточностью моделей для самых поверхностных слоев, а также тем, что в центральных областях даже таких линий, как

бальмеровские, значительное влияние имеет рассеяние. Поэтому вычисленные по схеме „чистого поглощения“ контуры имеют слишком высокие центральные интенсивности.

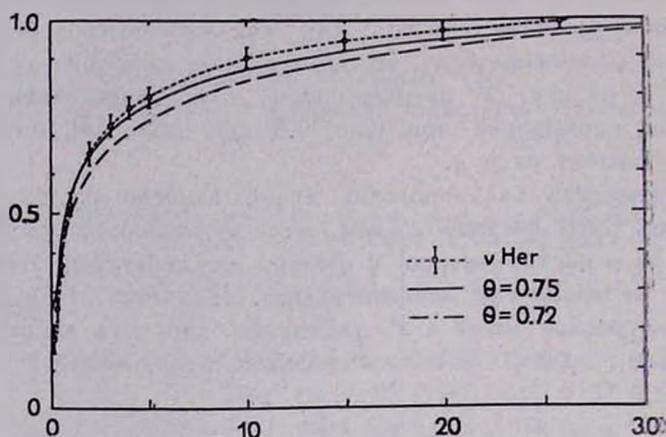


Рис. 2.

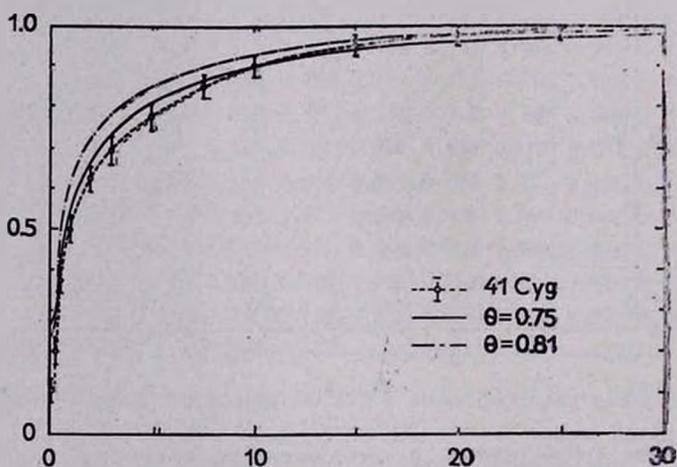


Рис. 3.

Так как контуры бальмеровских линий более чувствительны к  $\theta_{\text{eff}}$ , чем к  $\lg g$ , то в спектральном классе F их можно использовать для определения эффективной температуры  $\theta_{\text{eff}}$ . По рис. 1—3 можно заключить, принимая во внимание указанные замечания о наблюдаемых контурах, что  $\theta_{\text{eff}}$  должно быть в пределах.

$$\delta \text{ Воо} \quad \theta_{\text{eff}} = 0.74 - 0.76$$

$$\nu \text{ Нер} \quad \theta_{\text{eff}} = 0.74 - 0.76$$

$$41 \text{ Суг} \quad \theta_{\text{eff}} = 0.70 - 0.75.$$

Определение  $\theta_{\text{eff}}$  для 41 Суг неуверенное, так как в этом случае выбор  $\lg g$  имеет тоже заметное влияние.

б) Линия  $\lambda.3933 \text{ Ca II}$ .

Вычисленные контуры линии  $\lambda.3933 \text{ Ca II}$  для различных значений  $\epsilon_{\text{Ca}}$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

$\theta_{\text{eff}}$	0.75			0.78			0.81		
$\lg g$	2.49			2.49			2.49		
$\epsilon_{\text{Ca}}$	6.37	6.21	5.91	6.37	6.21	5.91	6.37	6.21	5.91
$\Delta\lambda$									
0.3	0.179	0.180	0.182	0.168	0.169	0.171	0.158	0.159	0.160
0.6	0.183	0.185	0.187	0.172	0.173	0.176	0.161	0.162	0.165
1.0	0.187	0.188	0.192	0.176	0.177	0.179	0.164	0.166	0.168
2.0	0.195	0.202	0.249	0.181	0.185	0.208	0.170	0.172	0.184
3.0	0.277	0.260	0.387	0.195	0.216	0.298	0.178	0.188	0.244
4.0	0.287	0.356	0.556	0.235	0.278	0.438	0.199	0.231	0.341
5.0	0.379	0.483	0.676	0.293	0.369	0.571	0.240	0.291	0.468
6.0	0.485	0.590	0.754	0.371	0.474	0.670	0.292	0.372	0.576
7.0	0.576	0.671	0.810	0.460	0.565	0.738	0.359	0.462	0.661
8.0	0.649	0.730	0.849	0.540	0.640	0.790	0.433	0.542	0.722
9.0	0.704	0.777	0.877	0.607	0.697	0.827	0.505	0.610	0.769
10	0.748	0.813	0.898	0.663	0.742	0.856	0.568	0.666	0.806
12	0.814	0.863	0.927	0.744	0.809	0.896	0.668	0.747	0.858
14	0.858	0.896	0.945	0.801	0.854	0.921	0.737	0.803	0.892
15	0.925	0.946	0.972	0.893	0.923	0.961	0.855	0.894	0.944

$\theta_{\text{eff}}$	0.72			0.735			0.75		
$\lg g$	3.4			3.4			3.4		
$\epsilon_{\text{Ca}}$	6.37	6.21	5.91	6.37	6.21	5.91	6.37	6.21	5.91
$\Delta\lambda$									
0.3	0.196	0.197	0.200	0.190	0.191	0.194	0.184	0.185	0.187
0.6	0.202	0.203	0.205	0.195	0.197	0.198	0.189	0.190	0.192
1.0	0.205	0.208	0.219	0.199	0.201	0.209	0.192	0.219	0.282
2.0	0.233	0.262	0.360	0.218	0.237	0.315	0.207	0.219	0.282
3.0	0.317	0.388	0.581	0.283	0.335	0.514	0.255	0.298	0.449
4.0	0.445	0.548	0.724	0.382	0.480	0.672	0.334	0.417	0.614
5.0	0.573	0.669	0.807	0.506	0.608	0.767	0.441	0.544	0.722
6.0	0.671	0.748	0.858	0.610	0.700	0.828	0.546	0.645	0.792
7.0	0.738	0.804	0.892	0.689	0.763	0.868	0.632	0.718	0.839
8.0	0.789	0.843	0.915	0.745	0.810	0.896	0.698	0.771	0.872
9.0	0.826	0.872	0.932	0.790	0.844	0.916	0.748	0.811	0.897
10	0.855	0.894	0.944	0.824	0.870	0.930	0.787	0.842	0.915
12	0.895	0.924	0.961	0.871	0.906	0.951	0.843	0.885	0.939
14	0.920	0.943	0.971	0.902	0.929	0.963	0.880	0.913	0.955
20	0.959	0.971	0.985	0.949	0.964	0.982	0.937	0.955	0.977

$\theta_{\text{eff}}$	0.70			0.72			0.74		
$\lg g$	4.35			4.35			4.35		
$\epsilon_{\text{Ca}}$	6.37	6.21	5.91	6.37	6.21	1.91	6.37	6.21	5.91
$\Delta\lambda$									
0.3	0.212	0.214	0.216	0.202	0.204	0.207	0.194	0.195	0.199
0.6	0.217	0.219	0.224	0.208	0.209	0.213	0.199	0.200	0.203
1.0	0.223	0.228	0.249	0.212	0.216	0.227	0.203	0.205	0.214
2.0	0.273	0.310	0.430	0.240	0.263	0.348	0.221	0.236	0.296
3.0	0.378	0.459	0.648	0.312	0.368	0.541	0.270	0.312	0.450
4.0	0.517	0.616	0.775	0.415	0.508	0.691	0.345	0.419	0.608
5.0	0.640	0.727	0.844	0.533	0.630	0.781	0.442	0.540	0.718
6.0	0.729	0.795	0.886	0.632	0.718	0.838	0.542	0.639	0.787
7.0	0.786	0.841	0.913	0.707	0.778	0.876	0.626	0.713	0.835
8.0	0.829	0.873	0.932	0.761	0.821	0.902	0.693	0.767	0.869
9.0	0.859	0.897	0.946	0.803	0.853	0.921	0.744	0.807	0.893
10	0.883	0.915	0.956	0.834	0.878	0.935	0.783	0.838	0.912
12	0.916	0.939	0.969	0.879	0.912	0.954	0.839	0.882	0.937
14	0.937	0.955	0.977	0.908	0.934	0.966	0.876	0.910	0.953
20	0.968	0.977	0.989	0.953	0.966	0.983	0.935	0.954	0.976

Контур линии  $\lambda 3933$  тоже зависит сильнее от температуры, чем от ускорения силы тяжести. Для  $\lg g = 4.35$  и  $\lg g = 3.40$  контуры почти совпадают. Лишь для  $\lg g = 2.50$  контур несколько шире.

Сравнение наблюдаемых и вычисленных контуров приведено на рис. 4—6.

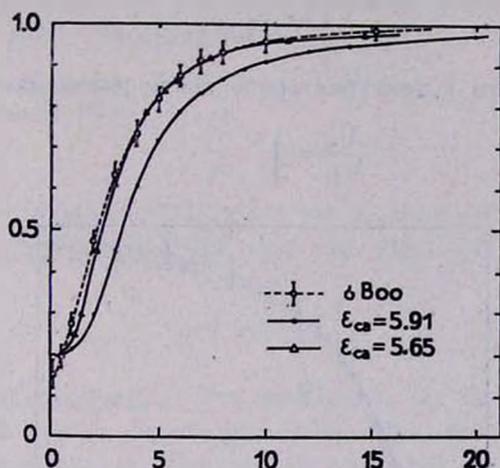


Рис. 4.

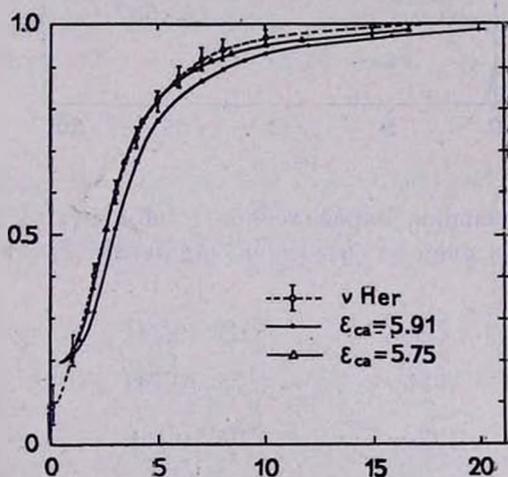


Рис. 5.

Для крыльев линии схема „чистого поглощения“ даст хорошее согласие с наблюдениями. Для центральных областей линии эта схема даст сильно завышенные интенсивности, как и можно было ожидать.

Сравнение контуров позволяет при фиксированном значении  $\theta_{\text{eff}}$  найти относительное содержание кальция  $\epsilon_{\text{Ca}}$  в атмосферах звезд. Если использовать не слишком далекие крылья линии, то есть  $l_1/k \gg 1$ , то, имея в виду формулу (13), по которой

$$I_{\lambda} \sim \frac{\epsilon_{\text{Ca}}}{\Delta\lambda^2}, \quad (23)$$

можно по различиям в контурах сразу найти различия в содержаниях

$$\frac{\Delta\lambda_2}{\Delta\lambda_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (24)$$

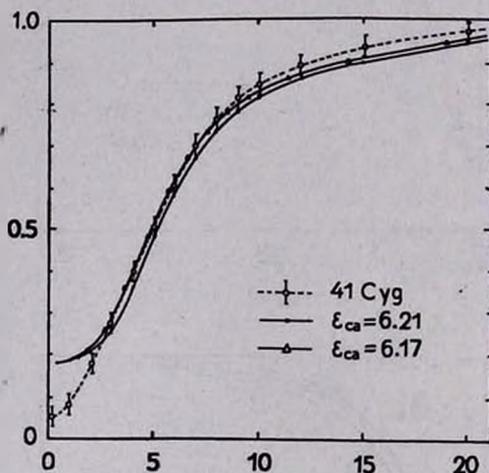


Рис. 6.

Содержание кальция, определенное таким путем, для изученных звезд следующее (в скобках отмечена принятая эффективная температура):

$$\delta \text{ Boo} \quad \epsilon_{\text{Ca}} = 5.65 \quad (0.74)$$

$$\nu \text{ Her} \quad \epsilon_{\text{Ca}} = 5.75 \quad (0.74)$$

$$41 \text{ Cyg} \quad \epsilon_{\text{Ca}} = 6.17 \quad (0.75).$$

При вычислении приведенных содержаний кальция принято, что  $\lg gf = 0.16$  [14]. Солнечное содержание кальция, определенное Мюллер и Мачлехнером [15] по линиям Ca I,  $\epsilon_{\text{Ca}} = 6.05$  (силы осцилляторов по [17]).

В результате можно утверждать, что контуры балмеровских линий, вычисленные с использованием функции  $S(\alpha, p)$  [4], описыва-

ющей штарковское расширение, согласуются с наблюдениями удовлетворительно. Бальмеровские линии имеют лишь очень слабый эффект абсолютной величины в спектральном классе F. Использование для  $\lambda 3933$  Ca II коэффициента поглощения в виде [13] и планковской функции источника также дает хорошее согласие с наблюдениями. Исключения составляют лишь центральные области линии  $\Delta\lambda < 3 \text{ \AA}$ , где большое влияние имеет рассеяние.

Институт физики и астрономии  
Академии наук Эстонской ССР

## SPECTROPHOTOMETRY OF THE F-STARS.

### IV. LINE PROFILES IN THE SPECTRA OF $\delta$ Boo, $\nu$ Her AND 41 Cyg.

T. A. KIPPER

A program for computing the profiles of the Balmer line  $H\gamma$  and of the Ca II  $\lambda 3933$  line is described. Using this program the profiles for 9 model-atmospheres of F-stars are computed. The computed profiles are compared with the observed ones for  $\delta$  Boo,  $\nu$  Her and 41 Cyg. It is found that the profiles of Balmer lines are insensitive to changes in surface gravity. Using the profiles of Ca II  $\lambda 3933$  line, the calcium abundance for  $\delta$  Boo,  $\nu$  Her and 41 Cyg is found.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Т. А. Киппер, Публ. Тарт. АО, 36, 1968; № 3—4, 235, 1967.
2. Т. А. Киппер, Публ. Тарт. АО, 38, 1969 (в печати).
3. Э. Р. Мустель, Звездные атмосферы, М., 1960.
4. F. M. Edmonds, Jr. H. Schlüter, D. C. Wells III, Mem. R. astr. Soc., 71, 271, 1967.
5. A. B. Underhill, J. H. Wadell, NBS Circular, 603, New York, 1959.
6. D. Mihalas, Ap. J., Suppl. ser., 9, № 92, 1965.
7. L. H. Aller, The Atmospheres of the Sun and Stars, New York, 1953.
8. K. S. Krishna-Swamy, Ap. J., 145, 175, 1966.
9. G. D. Finn, D. Muggleston, M. N., 137, 221, 1967.
10. М. Котли, П. Ханко, АН Эст.ССР, Ин-т. кибернетика, Программы для ЭЦВМ „Мяиск-2“, вып. 4., Таллин, 1966.
11. Т. А. Киппер, Изв. АН Эст.ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 3, 303, 1968.
12. W. J. Claas, Rech. astr. Obs. Utrecht, 12, 1, 1951.
13. А. Х. Аллер, сб. „Звездные атмосферы“, под ред. Дж. Л. Гринстейна, М., 1963.
14. E. Treffitz, L. Biermann, Z. Astrophys., 30, 275, 1952.
15. E. A. Müller, J. P. Mutschlechner, Ap. J., Suppl. ser., 9, № 85, 1964.
16. E. Treffitz, Z. Astrophys., 29, 287, 1951.



ГАЛАКТИКА АНДРОМЕДЫ М 31.  
I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Я. И. ЭЙНАСТО

Поступила 10 марта 1968

На базе опубликованных фотографических и фотовольтовых данных о распределении светимости вдоль большой и малой оси галактики М 31 разработана ее модель, состоящая из четырех составляющих (ядро, диск и плоская составляющая). Массы составляющих определены по скорости вращения, выведенной по оптическим и радиоданным, по дисперсии скоростей звезд и спектральному определению звездного состава ядра галактики.

Найдено, что круговая скорость достигает максимума  $V=380$  км/сек уже на расстоянии  $4'$  от центра, скорость вращения звезд сферической составляющей в этой области составляет всего  $125$  км/сек. Такое большое смещение центра скорости обусловлено большой дисперсией скоростей и большим радиальным градиентом плотности составляющей. Динамическое отношение массы к светимости  $17.3$  хорошо согласуется со спектральным ( $16.7$ ).

Масса галактики М 31 получается равной  $200 \cdot 10^9$  солнечных масс. Найденные другими авторами большие массы (см. табл. 3) искажены неучетом конечных размеров галактики.

В движении межзвездного водорода имеют место локальные отклонения от кругового движения.

1. *Введение.* Изучение строения большой галактики Андромеды М 31 представляет интерес прежде всего потому, что она наиболее близкая к нам внешняя спиральная галактика. Это позволяет выяснить в ее строении подробности, не видимые или трудно изучаемые у других, более удаленных галактик. Кроме того, хорошо известно, что галактика М 31 по своему строению весьма похожа на нашу Галактику. Благодаря этому обстоятельству исследование галактики М 31 в ряде случаев дополняет изучение нашей Галактики и наоборот.

Среди результатов, полученных при исследовании общей структуры галактики М 31, можно отметить следующие два противоречивых вывода.

1. Оценки массы системы, несмотря на весьма точно определенную кривую вращения, получаются очень различными, колеблясь от 200 до 600 миллиардов солнечных масс (см. табл. 3).

2. По динамическому определению отношение массы к светимости  $f$  в центре системы очень мало, а на периферии приближается к бесконечности (см. рис. 9). С другой стороны, по спектральному определению состава ядра М31 центральное значение  $f$  приблизительно равно его среднему значению, то есть величина  $f$  должна быть приблизительно постоянной.

В настоящей серии статей будет построена новая модель галактики М31 и сделана попытка выяснить причины указанных противоречий. Допускается, что галактика М31 состоит из четырех основных составляющих: ядрышка, ядра с гало, диска и плоской составляющей. В ходе работы оказалось, что модель целесообразно построить последовательными приближениями. Поэтому в первой статье серии описывается предварительная модель системы. В дальнейшем модель будет уточняться и детализироваться.

2. *Функции описания и уравнения связи между ними.* Из наблюдений можно определить следующие функции или их частные значения: спроектированную плотность светимости  $L_s(X, Y)$  в фотометрической системе  $s$  ( $X$  и  $Y$  — прямоугольные видимые координаты, выраженные в угловых единицах, причем ось  $X$  направлена вдоль видимой большой оси галактики, а  $Y$  — вдоль малой оси); скорость вращения некоторых подсистем  $V_0$ ; дисперсию скоростей звезд  $\sigma$  и звездный состав (для ядра галактики). Кроме того можно изучить распределение и физические свойства отдельных ярких звезд.

Для моделирования галактики необходимо ввести упрощающие предположения. В данном цикле работ допускается, что галактика М31 может быть разделена на конечное число физически однородных составляющих, поверхности равных пространственных плотностей которых являются подобными соосными эллипсоидами вращения. Отношение полуосей эллипсоидов разных составляющих  $\varepsilon$  может быть разным, плотность изменяется плавно.

Так как основные функции описания являются аддитивными (кроме  $V_0$  и  $\sigma$ ), то для упрощения будем писать их уравнения связи не для суммарных величин, а для отдельных составляющих.

Пусть  $\rho(x, y, z)$  — пространственная плотность массы составляющей и  $l_s(x, y, z)$  — пространственная плотность светимости в фотометрической системе  $s$  ( $x, y$  и  $z$  — прямоугольные галактоцентрические координаты, ось  $z$  направлена вдоль оси системы). При указанных выше допущениях

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(a) = \int_s l_s(a), \quad (2.1)$$

где

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^{-2}z^2 \quad (2.2)$$

и  $f_s$  — отношение массы к светимости данной составляющей. Функции плотности связаны с функциями массы  $\mu(a)$  и светимости  $h_s(a)$  формулами [1]

$$\mu(a) = 4\pi s a^2 \rho(a) \quad (2.3)$$

и

$$h_s(a) = 4\pi s a^2 l_s(a). \quad (2.4)$$

Спроектированная плотность светимости выражается в нашем случае формулой [1]

$$L_s(A) = \frac{1}{2\pi E} \int_A^\infty \frac{h_s(a) da}{a \sqrt{a^2 - A^2}}, \quad (2.5)$$

где

$$A^2 = X^2 + E^{-2} Y^2 \quad (2.6)$$

$$E^2 = \cos^2 i + s^2 \sin^2 i, \quad (2.7)$$

причем  $i$  — угол между осью системы и лучом зрения.

Скорость вращения составляющей  $V_\theta$  и круговая скорость  $V$ , обусловленная системой в целом, связаны между собой формулой [2]

$$V_\theta^2 + q\sigma_R^2 = V^2, \quad (2.8)$$

где  $\sigma_R$  — дисперсия скоростей звезд составляющей в радиальном направлении ( $R^2 = x^2 + y^2$ ), а параметр  $q$  выражается так

$$-q = \left(1 - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_R^2}\right) + R \left(1 - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_R^2}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial z} + G\{\rho(R)\} + G\{\sigma_R^2(R)\}. \quad (2.9)$$

В последней формуле для логарифмического градиента использовано обозначение

$$G\{f(R)\} = \frac{\partial \ln f(R)}{\partial \ln R}, \quad (2.10)$$

$\alpha$  — угол наклона вертекса к плоскости симметрии системы (вне плоскости  $\alpha \neq 0$ ).

Выражение для  $q$  в виде (2.9) неудобно для практических применений, так как ни отношения дисперсии скоростей, ни градиент угла  $\alpha$  не могут быть непосредственно найдены из наблюдений. При преобразовании выражения  $q$  будем пользоваться найденными Г. Г. Кузминым [2, 3] соотношениями

$$R \frac{\partial \alpha}{\partial z} = -\frac{1}{4} G\{\rho_t(R)\} \quad (2.11)$$

$(\rho_t(R) — \text{тотальная плотность галактики})$  и

$$\frac{1}{\sigma_z^2} = \frac{1}{\sigma_\theta^2} + \frac{1}{\sigma_R^2}, \quad (2.12)$$

а также формулой Линдблада

$$\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2} = \frac{-B}{A-B}. \quad (2.13)$$

Формулы (2.11)–(2.13) выведены для плоских подсистем. Однако вычисления показывают, что в окрестностях Солнца эти формулы могут быть применены и для менее сплюснутых подсистем. Поэтому можно допустить, что использование этих формул при построении модели галактики М 31 не связано с большими погрешностями.

В формуле Линдблада для плоских подсистем орбитальные параметры  $A$  и  $B$  могут быть выражены через круговую скорость  $\omega(R) = V_\theta/R$  и логарифмический градиент функции скорости  $G\{v(R)\}$ , причем функция скорости определяется формулой [1]

$$v(R) = \frac{V^2 R}{G}, \quad (2.14)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная. Имеем

$$A(R) = \omega(R) \frac{3 - G\{v(R)\}}{4} \quad (2.15)$$

и

$$B(R) = -\omega(R) \frac{1 + G\{v(R)\}}{4}, \quad (2.16)$$

откуда вместо (2.13) и (2.12) получим

$$k_\theta = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2} = \frac{1 + G\{v(R)\}}{4} \quad (2.17)$$

$$k_z = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_R^2} = \frac{1 + G\{v(R)\}}{5 + G\{v(R)\}}. \quad (2.18)$$

Итак, для  $q$  после этих преобразований имеем

$$-q = \frac{[3 - G\{v\}]}{4} - \frac{G\{\rho_t\}}{5 + G\{v\}} + G\{\rho\} + G\{\sigma_R^2\}. \quad (2.19)$$

Это же выражение годится и для сферических подсистем, если считать  $V_\theta \sim V$ . При более строгом рассмотрении в выражении  $q$  круговую скорость надо заменить скоростью вращения подсистемы  $V_\theta$ .

Функция скорости  $v(R)$  связана с функцией массы уравнением [1]

$$v(R) = \int_0^R \frac{\mu(a) da}{\sqrt{1 - \left(\frac{ea}{R}\right)^2}}, \quad (2.20)$$

где  $e^2 = 1 - \varepsilon^2$ .

Наконец, используем еще уравнение Пуассона [4]

$$4\pi G\rho_t = C^2 - 2(A^2 - B^2), \quad (2.21)$$

причем  $C$  — параметр Кузмина. Последний выражается в случае плоских подсистем формулой

$$C = \sigma_z / \zeta, \quad (2.22)$$

где  $\sigma_z$  и  $\zeta$  — дисперсии  $z$ -скоростей и  $z$ -координат звезд.

3. *Выбор формы основной функции описания.* Модель распределения массы и светимости галактики полностью определена, если известно распределение светимости ее подсистем, а также отношение массы к светимости подсистем. Тогда по формулам (2.1), (2.4) и (2.5) может быть найдено распределение массы системы, а по формулам (2.3) и (2.20) — ход круговой скорости. Ввиду пропорциональности  $\rho$  и  $I$ , в этом разделе будем писать формулы только для одной из них —  $\rho$ .

Для построения гидродинамической модели, кроме функции распределения массы и связанных с ней функций, должен быть известен еще ход скорости вращения или дисперсии скоростей подсистем. Тогда по формулам (2.8), (2.12) и (2.13) могут быть вычислены другие интересующие нас гидродинамические функции. Уравнение Пуассона (2.21) позволяет проверить полученные результаты.

Итак, гидродинамическая модель полностью определена заданием функций  $\rho(a)$ ,  $V_0(R)$  и параметров  $\varepsilon$  и  $f$  всех составляющих галактики.

Репрезентативность модели существенно зависит от выбора вида указанных основных функций описания. Естественно требовать, чтобы эти функции описания не имели резких скачков и изломов, чтобы  $\rho(a) > 0$  и  $\sigma_R^2(R) \geq 0$ . Так как реальные звездные системы имеют конечные размеры (вследствие возмущающего действия соседних систем), то желательно выбрать для  $\rho(a)$  выражение, достаточно быстро убывающее с увеличением  $a$ . С другой стороны,  $\rho(a)$  не должно убывать слишком быстро, так как в таком случае круговое движение неустойчиво.

Учитывая все эти соображения, мы выбрали для  $\rho(a)$  обобщенное экспоненциальное выражение [5, 6]

$$\rho(a) = \rho_0 \exp \left[ - \left( \frac{a}{a_0 k} \right)^\nu \right], \quad (3.1)$$

где  $\rho_0$  и  $a_0$  — масштабные параметры центральной плотности и радиуса,  $k$  — безразмерный нормирующий параметр (см. [6]) и  $\nu$  — структурный параметр модели, определяющий концентрацию массы к центру. В число структурных параметров модели через  $a$  входит и  $\varepsilon$ , определяющее толщину модели.

В случае плоской составляющей простая эллипсоидальная модель плохо представляет распределение плотности. Известно, что в центральных областях галактик нет представителей плоских подсистем — эмиссионных туманностей и звездных ассоциаций [7, 8]. Чтобы учесть это обстоятельство в нашей модели, мы использовали искусственный прием: плотность составляющей была вычислена как разность двух эллипсоидальных моделей

$$\rho(a) = \rho_+ \left( a \mid a_0, \rho_0, \nu, \varepsilon \right) - \rho_- \left( a \mid \frac{a_0}{x}, \rho_0, \nu, x\varepsilon \right), \quad (3.2)$$

где  $x > 1$ . При таком  $\rho(a)$  автоматически  $\rho_{R=0}(z) = 0$ . При подходящем выборе  $\rho(a)$  соблюдаются еще условия  $\rho(a) > 0$  и  $\partial\rho/\partial z^2 < 0$  при  $z \neq 0$ .

В рамках предварительной модели галактики М 31 достаточно задать гидродинамические функции только для сферической составляющей — ядра. В этом случае скорость вращения составляющей может быть представлена формулой [9]

$$V_\theta = V_0 \frac{R}{\left[ 1 + \left( \frac{R}{R_0} \right)^n \right]^{3/2n}}. \quad (3.3)$$

4. *Наблюдательный материал.* а) Фотометрические данные о распределении яркости вдоль большой и малой осей галактики М 31 были собраны из всех доступных источников. Были использованы только данные, которые можно было привести к системе UBV (см. [10, 11]). Для построения составной модели было бы желательно иметь фотометрические данные в разных цветах. Достаточно широкий интервал яркости охватывают, однако, лишь данные в синих лучах, поэтому пришлось ограничиться одной фотометрической системой В. Из фотографических наблюдений использованы результаты Редмана и Ширли [12], Фрике [13], Джонсона [14], Рихтера и Хёгнера [15], из фотоэлектрических наблюдений — данные Тиссена [16] и Вокулера [10].

Для образования сводной кривой распределения яркости галактики М 31 данные по NE и SW половинам большой оси, а также по NW и SE половинам малой оси были объединены и соответствующие яркости усреднены. Согласие между NE и SW полуосями повсюду хорошее. Согласие же между NW и SE полуосями менее хорошее, особенно в области сильного поглощения NW полуоси на расстоянии 4.5 до 17' от центра. В рамках предварительной модели М 31 указанная область была исключена. Не было учтено и общее равномерное поглощение ни в нашей Галактике, ни в галактике М 31.

Выведенные сводные значения спроектированной светимости по большой оси указаны на рис. 1 точками. На рис. 2 приведено изменение отношения полуосей изофот  $E$ . В качестве аргумента фигурирует  $R^{\prime 2}$ , причем угловое расстояние от центра системы по большой оси выражено в минутах дуги.

б) Скорость вращения была определена по оптическим [17—20] и радиоданным [21—25]. В области ядра ( $R \leq 10'$ ) были использованы только оптические данные, так как скорость быстро изменяется и радионаблюдения имеют слишком малое разрешение. В диапазоне  $10' < R \leq 50'$  были использованы как оптические, так и радиоданные, в области  $R > 50'$  — только радиоданные как более точные. Взаимная согласованность радиоданных, полученных разными авторами, очень хорошая. Для скорости центроида галактики в целом было выбрано значение — 300 км/сек. При таком выборе лучше всего согласуются области максимальной скорости по обеим сторонам от центра.

Найденные сводные скорости вращения изображены на рис. 3 и 4 точками.

в) Расстояние галактики М 31 было принято  $d = 692$  кпс, в соответствии с истинным модулем расстояния  $(m - M)_0 = 24.2$  [26].

г) Наклон галактики был определен по ходу видимого отношения полуосей изофот  $E$  и по видимому распределению эмиссионных туманностей [7]. Найденное значение  $i = 77.2$  хорошо согласуется с оценкой Бааде  $i = 77.3$  (см. [27]) и недавним результатом Арпа  $74^\circ \leq i \leq 79^\circ$  [7].

д) Дополнительные данные могут быть получены для центральных, наиболее ярких областей системы. Дисперсия скоростей звезд ядра по Минковскому равна  $\sigma_R = 225$  км/сек. [28], а отношение массы к светимости по Спирраду получается равным  $f = 16.7$  [29].

5. Построение модели при фиксированном аналитическом виде основных функций описания сводится к определению модель-параметров этих функций. В данном случае для всех четырех составляющих модели нужно найти следующие параметры:

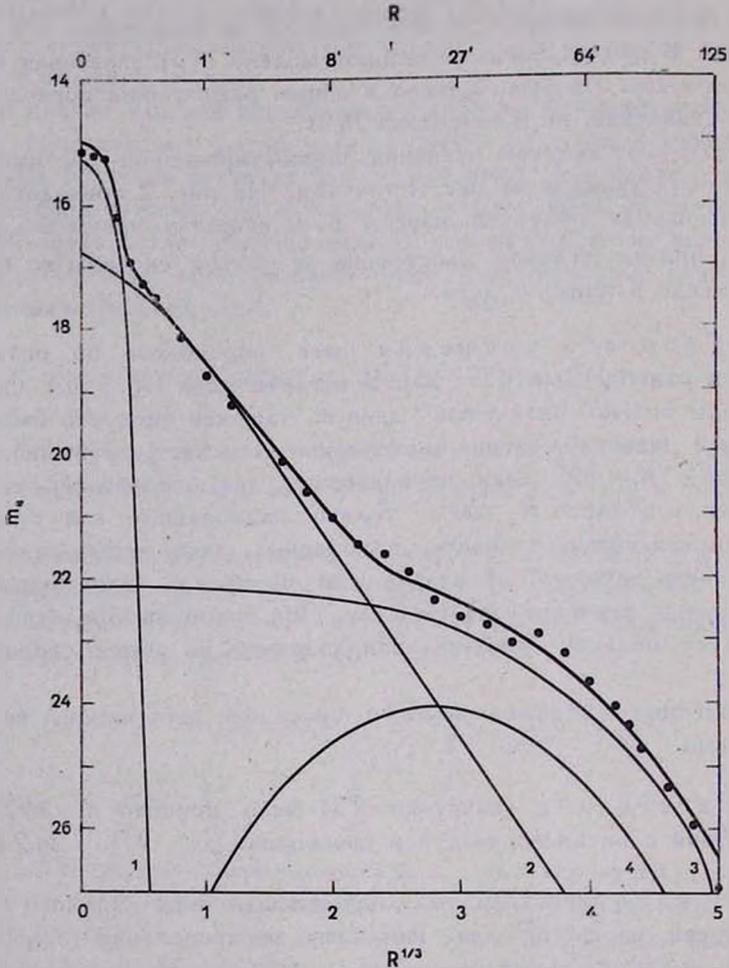


Рис. 1. Распределение яркости по большой оси М 31. Составляющие обозначены: 1—ядро, 2—ядро, 3—диск, 4—плоская составляющая.

а) масштабные параметры  $l_0$  и  $\alpha_0$ ; б) структурные параметры  $\gamma$  и  $\epsilon$ ; в) динамический параметр  $f$ .

Для сферической составляющей (ядра) кроме того нужно знать еще параметры закона вращения (3.3).

Анализ наблюдательного материала показал, что как масштабные, так и структурные параметры составляющих не могут быть достаточно уверенно найдены по скорости вращения. На скорость вращения, кроме распределения массы, влияют еще относительные движения звезд. Работа Вокулера [10] показывает, что параметры модели вполне успешно могут быть найдены по фотометрическим данным.

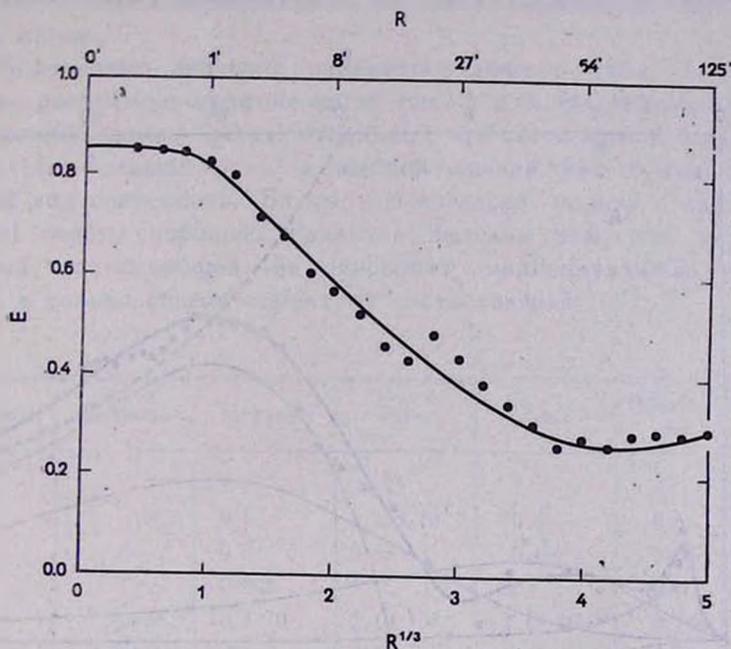


Рис. 2. Распределение отношения полуосей изофот.

Учитывая вышеизложенное, мы определили параметры  $l_0$ ,  $a_0$ ,  $\nu_0$  и  $\varepsilon$  по фотометрическому материалу. Практическая процедура сводилась к следующему.

На электронном вычислителе для ряда значений параметра  $\nu$  были найдены нормированные функции спроектированной плотности  $L^0(\alpha)$  и функции скорости  $v^0(\alpha)$ , причем  $\alpha$  — безразмерное нормированное расстояние (большая полуось). Нормирование было выполнено так, чтобы моменты порядка  $-1$  и  $0$  функции массы  $\mu^0(\alpha)$  были равны единице (см. [5]).

Найденные функции  $L^0(\alpha)$  были нанесены на график в логарифмической шкале  $\lg L^0(\lg \alpha)$ . Аналогичные графики были составлены и для спроектированной светимости М 31 по большой и малой осям.

Так как масштабные преобразования (смещения на логарифмической шкале) не изменяют форму кривой  $\lg L(\lg \alpha)$ , то параметр  $\nu$  может

быть просто найден по совпадению формы вычисленной кривой из общего их семейства с наблюдаемой. Масштабные параметры  $l_0$  и  $a_0$  получаются по величине вертикального и горизонтального смещения вычисленной кривой для получения ее совпадения с наблюдаемой. Параметр видимой сплюснутости  $E$  определяется по сравнению распределения светимости на малой оси с распределением на большой оси. Истинное отношение полуосей  $e$  вычисляется по формуле (2.7).

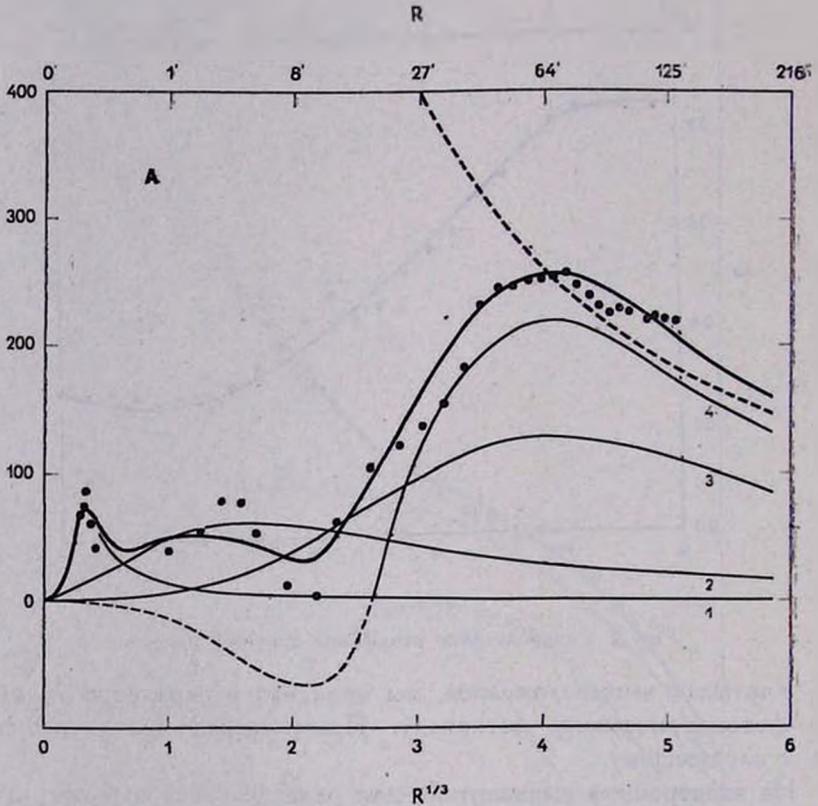


Рис. 3. Распределение круговой скорости. Массы составляющих приняты по варианту А (см. табл. 1). При вычислении функции скорости по (2.20) принята модель плоского диска ( $e=1$ ). Скорости выражены в км/сек.

Единственная практическая трудность при таком способе определения параметров заключается в том, что одновременно нужно найти параметры для всех четырех составляющих системы. Однако распределение плотности компонент весьма различно — на это указывает ход общей яркости (см. рис. 1). Уже после некоторых проб удалось найти удовлетворительные значения параметров.

Указанный путь не применим для нахождения параметра  $\varepsilon$  плоской составляющей. В этом случае  $\varepsilon$  был подобран так, чтобы получить разумный ход эффективной полутолщины составляющей

$$z_e = \frac{1}{2} \frac{P(R)}{\rho(R)}, \quad (5.1)$$

где  $P(R)$  — спроектированная на плоскость симметрии системы плотность массы.

Полученные значения параметров даны в табл. 1. Найденная модель изображена графически на рис. 1 и 2. На первом из них тонкой линией указан вклад отдельных составляющих в общую светимость (по большой оси), а жирной линией дан суммарный вычисленный ход светимости. Видим, что согласие модели с наблюдениями (точки) весьма хорошее. Различия вызваны тем, что наша модель плоской составляющей не описывает индивидуальные спиральные ветви, а только общую структуру составляющей.

Таблица 1

Величина	Единица	Нуклеус	Ядро	Диск	Плоская сост.		$\Sigma$
					+	-	
$\nu$		1	0.25	1	1	1	
$k$		0.5	$1.263 \cdot 10^{-4}$	0.5	0.5	0.5	
$\varepsilon$		0.84	0.57	0.09	0.01	0.02	
$a_0$		0.025	5	50	40	20	
$l_0$	$L_{\odot}/\text{мс}^2$	$8.7 \cdot 10^3$	$2.10 \cdot 10^3$	$2.17 \cdot 10^{-2}$	0.140	0.140	
$L$	$10^3 L_{\odot}$	0.003	4.95	6.46	2.29	0.57	13.13
$\Sigma$	$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right.$	0.009	2.4	58	188	47	201
		0.05	85.5	111.5	5.73	1.43	201
$f$	$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right.$	2.5	0.5	9	82	82	15.3
		17.3	17.3	17.3	2.5	2.5	15.3

Отношение массы к светимости может быть определено двумя способами: А) по скорости вращения; В) по спектральным наблюдениям и другим независимым источникам.

При первом способе обычно считается, что скорость вращения равна круговой скорости  $V_0 = V$ . Практически метод состоит в выборке путем проб таких значений  $f$ , которые приводят (при фиксированных параметрах  $a_0$ ) вычисленные кривые скорости в согласие с наблюдаемой кривой вращения. Найденные значения  $f$  приведены в табл. 1 (вариант А), соответствующие кривые вращения изображены на рис. 3. Как и на рис. 1, тонкие линии указывают вклад отдель-

ных составляющих, жирная линия — общую вычисленную кривую вращения, а точки — наблюдения. Прерывистой линией дана кеплеровская кривая вращения, соответствующая точечному источнику с массой, равной массе нашей модели. Видим, что теоретическая кривая весьма хорошо представляет наблюдения.

Следует сказать, что модель плоской составляющей имеет тороидообразный вид. Внутри тороида вектор притяжения направлен не к центру системы, а к ближайшей стороне тороида. Поэтому в этой области функция скорости отрицательна и круговое движение невозможно (если нет других составляющих, компенсирующих отрицательную область функции скорости). На рис. 3 и 4 эта область вклада составляющей на кривую вращения показана прерывистой линией.

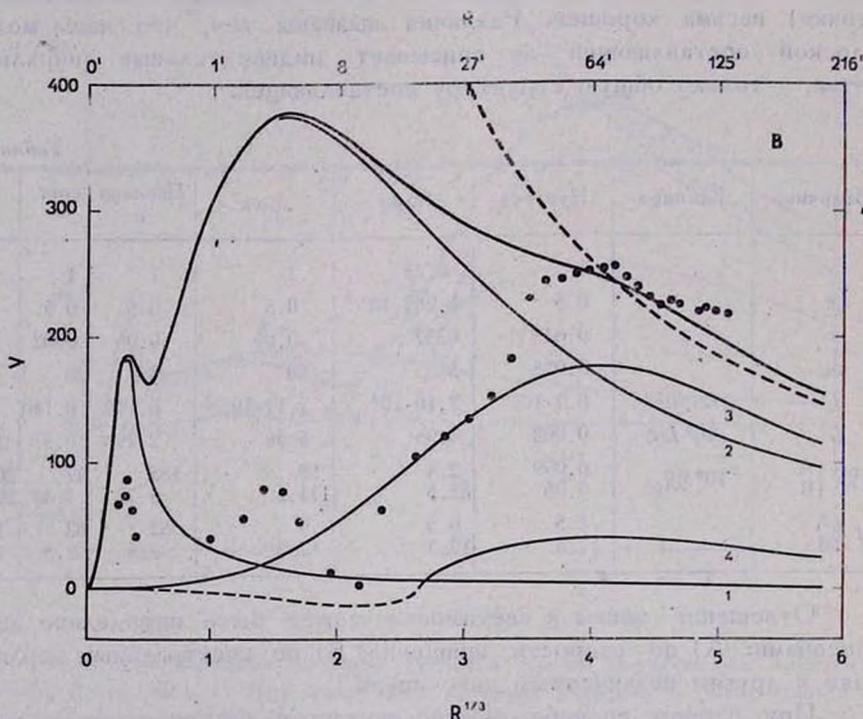


Рис. 4. Распределение круговой скорости; вариант В.

Во втором варианте параметры были найдены следующим образом. Для ядра галактики М 31  $f$  был получен Спиррадом по спектральным наблюдениям [29]  $f = 16.7$ . Плоская составляющая состоит в основном из водорода, масса которого по [21, 23 — 25] может быть принята равной  $M = 3.7 \cdot 10^9 M_{\odot}$ . Масса звезд плоской составляющей

может быть оценена по интегральной светимости составляющей и начальной функции светимости и массы [30, 31]. В итоге мы получили для массы составляющей  $\mathfrak{M} = 4.3 \cdot 10^9 \mathfrak{M}_\odot$ . Так как  $L = 1.72 \cdot 10^9 L_\odot$ , то  $f = 2.5$ . Зная светимость всех составляющих и  $f$  ядра и плоской составляющей, нетрудно вычислить  $f$  диска. Результат почти точно совпадает с найденным Спинрадом значением  $f$  для ядра. Поэтому мы приняли, что все составляющие, кроме плоской имеют одинаковое отношение массы к светимости (вариант В в табл. 1). Соответствующие кривые вращения даны на рис. 4.

В этом варианте в области  $R < 50'$  круговая скорость заметно больше скорости вращения и достигает при  $R = 4'$  максимального значения  $V = 380 \text{ км/сек}$ . Наблюденная скорость вращения при  $R = 4'$  составляет всего  $V_0 = 80 \text{ км/сек}$ . Возникает вопрос, может ли смещение центра скорости достигать такого большого значения  $\Delta V = V - V_0 = 300 \text{ км/сек}$ ?

Вычисления по формулам (2.8) и (2.19) показали, что в пределах точности исходных данных найденное смещение действительно может быть объяснено. На рис. 5 изображен один возможный вариант хода скорости вращения  $V_0$  и дисперсии скоростей  $\sigma_R$  сферической составляющей М 31. Для  $V_0$  принимался закон (3.3),  $\sigma_R$  определялась по формуле (2.8). При вычислениях мы учитывали, что наблюдаемые  $V_0$  и  $\sigma_R$  меньше действительных максимальных их значений. Это вызвано тем, что мы наблюдаем некоторое среднее значение дисперсии и скорости [32]

$$\overline{V_0(R)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} V_0(R, Z) I(R, Z) dZ}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(R, Z) dZ}, \quad (5.2)$$

где  $Z$  — координата вдоль луча зрения. В области  $R < 10'$  кроме того необходимо было немного изменить ход градиента плотности, что в пределах точности имеющихся данных также вполне допустимо.

Мы пришли к выводу, что в варианте В динамическое определение  $f$  согласуется со спектральным.

Вычисленные значения функции описания приведены в табл. 2. Буквой  $V_k$  обозначена критическая скорость, вычисленная по функции скорости  $v(R)$ , с использованием формулы [5]

Таблица 2

R		G(p)			$\rho$		V	V <sub>k</sub>	A	B	C	k <sub>0</sub>	k <sub>s</sub>
'	кпс	2	3	4	$\rho$ /пс <sup>3</sup>	$\rho$ /пс <sup>3</sup>	км/сек		км/сек/кпс				
0	0	0.0	0.0	0.0	1.9·10 <sup>3</sup>	7.6·10 <sup>3</sup>	0	1041	0	55700	64500	1.000	0.500
5	1	2.4	0.2	-0.1	3.29	3880	377	720	194	181	433	0.483	0.326
10	2	2.8	0.4	-0.1	0.82	1350	351	613	102	73	234	0.418	0.295
15	3	3.1	0.6	0.0	0.44	720	326	579	65	43	169	0.397	0.284
20	4	3.3	0.8	0.2	0.31	473	308	540	46	30	138	0.398	0.284
25	5	3.5	1.0	0.4	0.237	345	297	502	35	24	119	0.406	0.289
30	6	3.7	1.2	0.7	0.188	269	284	475	28	20	104	0.415	0.293
35	7	3.8	1.4	1.0	0.151	216	278	453	23	17	93	0.420	0.296
40	8	4.0	1.6	1.3	0.122	176	272	432	20	14	83	0.423	0.297
45	9	4.1	1.8	1.6	0.098	145	267	414	17	12	75	0.425	0.298
50	10	4.2	2.0	1.9	0.079	120	262	399	15.1	11.0	67	0.420	0.296
55	11	4.3	2.2	2.3	0.064	99	258	383	13.7	9.6	60	0.410	0.291
60	12	4.4	2.4	2.6	0.051	79	254	370	12.7	8.5	54	0.401	0.286
65	13	4.5	2.6	2.9	0.042	69	251	359	11.8	7.4	49	0.385	0.278
70	14	4.6	2.8	3.2	0.034	58	246	348	11.0	6.5	44	0.373	0.272
75	15	4.6	3.0	3.5	0.028	48	241	334	10.3	5.7	40	0.359	0.264
80	16	4.7	3.2	3.8	0.022	40	237	323	9.6	5.2	36	0.350	0.259
85	17	4.8	3.4	4.1	0.018	33	233	315	9.0	4.6	33	0.335	0.251
90	18	4.8	3.6	4.4	0.014	28	228	307	8.6	4.0	30	0.321	0.243
95	19	4.9	3.8	4.6	0.012	23	224	299	8.1	3.6	27	0.311	0.237
100	20	5.0	4.0	4.9	0.0093	19.4	220	291	7.64	3.26	24.5	0.299	0.230
110	22	5.1	4.4	5.4	0.0060	13.4	211	278	6.93	2.61	20.2	0.274	0.215
120	24	5.2	4.8	6.0	0.0040	9.3	202	264	6.22	2.15	16.8	0.257	0.204
130	26	5.3	5.2	6.5	0.0026	6.5	195	255	5.62	1.84	14.1	0.246	0.198
140	28	5.4	5.6	7.0	0.0017	4.5	187	245	5.10	1.55	11.9	0.233	0.189
150	30	5.5	6.0	7.5	0.0011	3.1	180	237	4.64	1.33	10.1	0.222	0.182
160	32	5.6	6.4	8.0	0.0008	2.0	174	228	4.24	1.18	8.6	0.218	0.179
170	34	5.7	6.8	8.5	0.0005	1.7	168	222	3.87	1.05	7.4	0.214	0.176
180	36	5.8	7.2	9.0	0.0003	1.2	162	216	3.53	0.94	6.4	0.211	0.175
190	38	5.9	7.6	9.5	0.0002	0.7	158	210	3.27	0.87	5.7	0.210	0.174

$$V_k^2(R) = 2 \int_R^{\infty} \frac{v(X) dX}{X^2} \quad (5.3)$$

В таблице приводятся также логарифмические градиенты плотности составляющих  $G\{\rho(R)\}$ . Обычно используемые в исследованиях нашей Галактики градиенты  $m(R) = -\partial \lg \rho(R)/\partial R$  могут быть легко получены по формуле

$$m(R) = -\frac{\text{Mod}}{R} G\{\rho(R)\}. \quad (5.4)$$

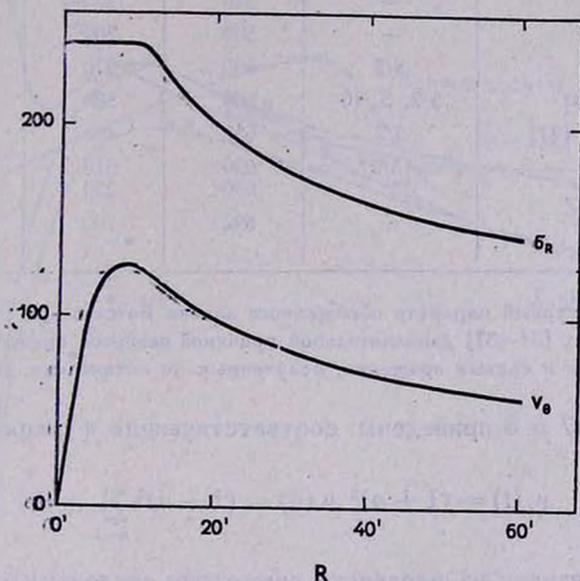


Рис. 5. Вычисленная скорость вращения  $V_0$  и дисперсия скоростей  $\sigma_R$  звезд сферической составляющей.

Из таблицы видим, что значения функций описания галактики Андромеды на расстоянии 10 клс от центра очень хорошо согласуются с системой локальных околосолнечных параметров в нашей Галактике [33].

б) *Анализ модели.* Прежде чем приступить к анализу полученных результатов, приводим основные результаты некоторых разработанных ранее моделей.

а) *Сравнение с результатами других авторов.* Вычисленные по моделям [9, 24, 25, 27, 34—38], а также по настоящей модели (вариант В) массы галактики М 31 приведены в табл. 3; для

некоторых из этих моделей на рис. 6 дано изменение круговой скорости с расстоянием. Точки обозначают принятые нами значения скорости вращения.

Таблица 3

Автор	$n^*$	$d$ (кpc)	$\mathfrak{M}^{**}$ ( $10^6 \mathfrak{M}_{\odot}$ )	$\mathfrak{M}$ ( $d = 692$ кpc) ( $10^6 \mathfrak{M}_{\odot}$ )
Lohmann [34]	3/2	460	330	500
Schwarzschild [35]	—	460	140	210
Schmidt [27]	—	630	338	370
Takase [36]	—	540	200	260
Poveda [37]	—	500	200	280
Brandt [38]	3/2	600	370	430
Brandt, Scheer [9]	3/2, 3, 10	630	580	640
Gottesman et al. [24]	3/2	630	480	530
Roberts [25]	{ 3/2 3	690 690	310 220	310 220
Einasto	—	692	200	200

\*  $n$  — структурный параметр обобщенного закона Ботлингера (3.3).

\*\* В работах [34—37] дополнительной причиной разброса оценок массы являются большие различия в кривых вращения, полученных по оптическим данным.

На рис. 7 и 8 приведены соответствующие функции массы

$$\mu_t(t) = (1+a)^2 \mu(a) = (1+a)^2 \sum_{k=1}^n \mu_k(a) \quad (6.1)$$

и спроектированная на плоскость симметрии системы плотность массы

$$P_t(t) = 2\pi a (1+a)^2 P(a) = 2\pi a (1+a)^2 \sum_{k=1}^n P_k(a) \quad (6.2)$$

В этих формулах  $n$  — число составляющих данной модели и

$$t = \frac{a}{1+a} \quad (6.3)$$

причем  $a$  выражено в градусах. Замена координат проведена с целью более наглядного представления распределения плотности на периферии модели.

Сравнение моделей показывает, что в распределении массы имеют место различия как внутри модели, так и в периферийных областях ее.

Различия первого вида изменяют ход параметра  $f$ ; общая масса системы  $\mathcal{M}$  от них мало зависит. Различия второго вида влияют как на ход  $f$ , так и на массу системы  $\mathcal{M}$ . На подобные различия мы указали уже во введении. Так как эти различия вызваны разными причинами, рассмотрим их отдельно.

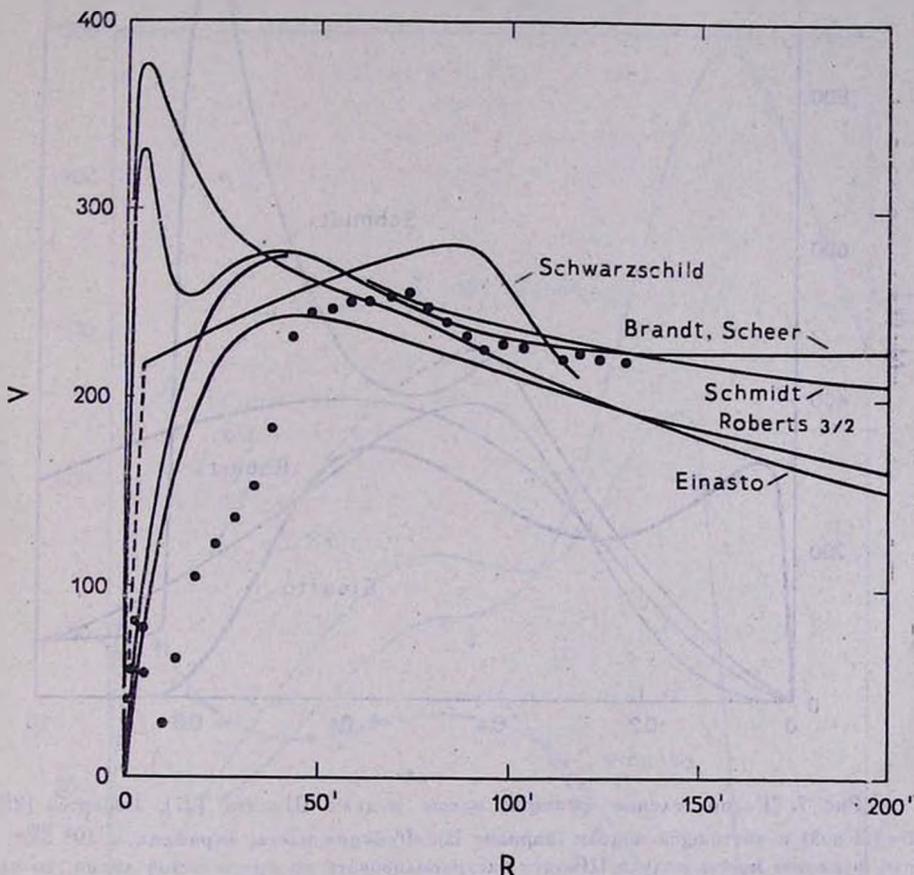


Рис. 6. Круговая скорость моделей Шварцшильда [35], Брандта и Шера [9], Шмидта [27], Робертса [25] ( $n=3/2$ ) и настоящей модели (вариант В).

6) Структура внутренних областей модели определяется в значительной степени способом обработки — будет ли смещение скорости центроида учтено или нет. В большинстве цитированных выше работ, как и в нашем варианте А, наличие смещения игнорировалось. Такой способ обработки встречает следующие возражения.

1) Во внутренних областях галактики преобладает второе население, звезды которого имеют большую дисперсию скоростей. Это

подтверждается и непосредственными определениями дисперсии. Поэтому в уравнении (2.8) второй член слева больше первого и пренебрежение им не оправдано.

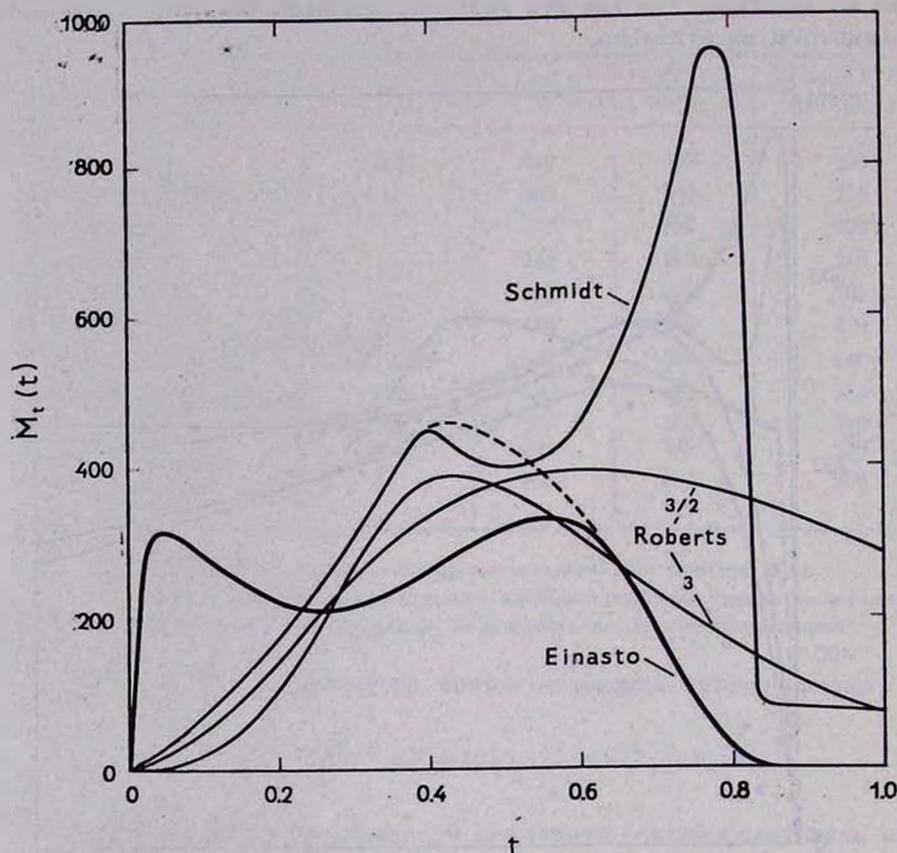


Рис. 7. Распределение функции массы модели Шмидта [27], Робертса [25] ( $n=3/2$  и 3) и настоящей модели (вариант В). Функция массы выражена в  $10^9 M_{\odot}$ . Если функцию массы модели Шмидта экстраполировать по прерывистой линии, то ее масса не отличается от массы настоящей модели.

2) Допущение  $V_0 = V$  приводит к тому, что в центральных областях галактики отношение массы к светимости  $f$  мало (см. [27], а также табл. 1 и рис. 9, вариант А). Исследование эллиптических галактик показывает, однако, что отношение массы к светимости звезд второго населения имеет достаточно большое значение ( $f > 10$ ). Это подтверждается и непосредственными спектральными наблюдениями [29]. Следовательно, допущение  $V_0 = V$  приводит в центральных областях галактик к неприемлемым значениям отношения массы к светимости.

Мы приходим к заключению, что вариант А не может быть принят. Вариант же В приводит, как мы видели выше, к распределению массы, которое приемлемо как с динамической, так и с физической точки зрения. Отсюда следует, что концентрация массы к центру М 31 значительно большая, чем считалось ранее.

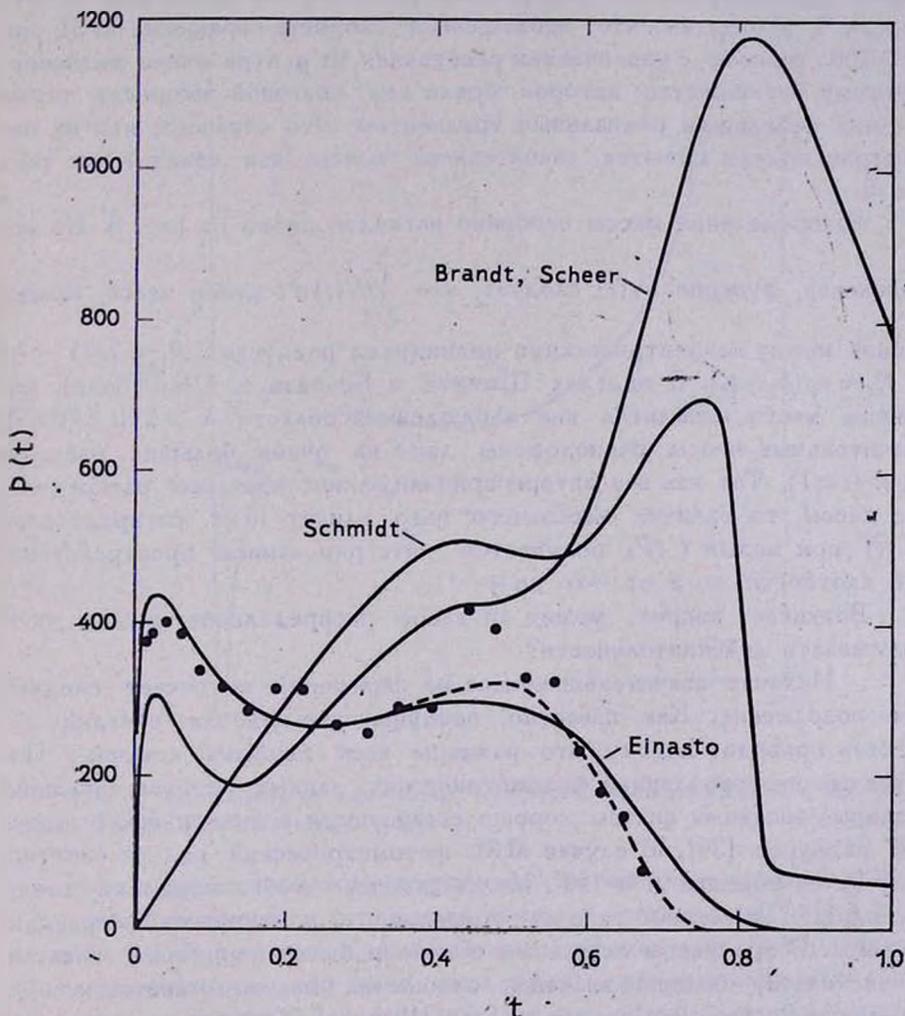


Рис. 8. Распределение спроектированной плотности моделей Брандта и Шера [9], Шмидта [27] и настоящей модели (единица  $10^6 M_{\odot}$ ).

в) Структура внешних областей модели определяется в основном законом экстраполяции функции скорости. Экстраполяция может быть произведена двумя способами — по функции скорости или

по функции массы (вычисляя функцию скорости уже по известному распределению массы.)

В работах по исследованию структуры галактик обычно применяется первый из указанных способов. При этом экстраполяция выполняется тем или иным законом хода круговой скорости, параметры которого подбираются по доступным наблюдениям диапазону  $R$ . На рис. 3, 4, и 6 видим, что наблюдаемая скорость вращения М 31 при  $R > 100'$  убывает с увеличением расстояния от центра очень медленно. Поэтому большинство авторов брали ход круговой скорости также с очень небольшим радиальным градиентом. Это означает, что на периферии модели имеются значительные массы, как показывают рис. 7 и 8.

Распределение массы особенно наглядно видно на рис. 8. Из определения функции  $P_i(t)$  следует, что  $\int_{t_1}^{t_2} P_i(t) dt$  равен массе, заключенной между концентрическими цилиндрами радиусами  $R_1 = t_1/(1 - t_1)$  и  $R_2 = t_2/(1 - t_2)$ . В моделях Шмидта и Брандта и Шер более половины массы находится вне наблюдаемой области  $R > 2'' (t > 0.67)$ , значительные массы расположены даже на очень больших расстояниях ( $t \approx 1$ ). Так как все авторы приняли эллипсоидальные распределения массы, то наличие массивного гало влияет и на распределение  $P_i(t)$  при малых  $t$  ( $P_i$  получается интегрированием пространственной плотности по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ ).

Возникает вопрос, может ли такое распределение массы соответствовать действительности?

Наличие значительных масс на периферии встречает следующее возражение. Как известно, возмущающее действие соседних галактик приводит к тому, что размеры всех галактик конечны. Полученные экстраполяцией фотометрических данных радиусы (внешние границы) звездных систем хорошо согласуются с динамической оценкой радиусов [39]. В случае М 31 фотометрический радиус системы получается порядка  $R = 150'$ . Маловероятно, чтобы галактики имели „невидимое“ массивное гало за пределами фотометрической границы системы. В противном случае мы получили бы на периферии галактик фантастически большие значения отношения массы к светимости  $f$ , как видно на рис. 9 в случае модели Шмидта. Допущение значительного увеличения  $f$  на периферии модели требует для своего объяснения наличия активного механизма „рассортировки“ звезд по массам, что представляется маловероятным.

Если принимать распределение массы согласно нашей модели, то вычисленный радиальный градиент круговой скорости при  $R > 100'$

больше наблюдаемого градиента скорости вращения. Нам кажется, что в данном случае имеет место локальное отклонение движения объектов плоской составляющей от кругового движения. Отклонения порядка 5—10 км/сек от кругового движения имеют место и в нашей Галактике. Подобными отклонениями можно объяснить и отмеченную многими авторами асимметрию кривой скорости [24, 25].

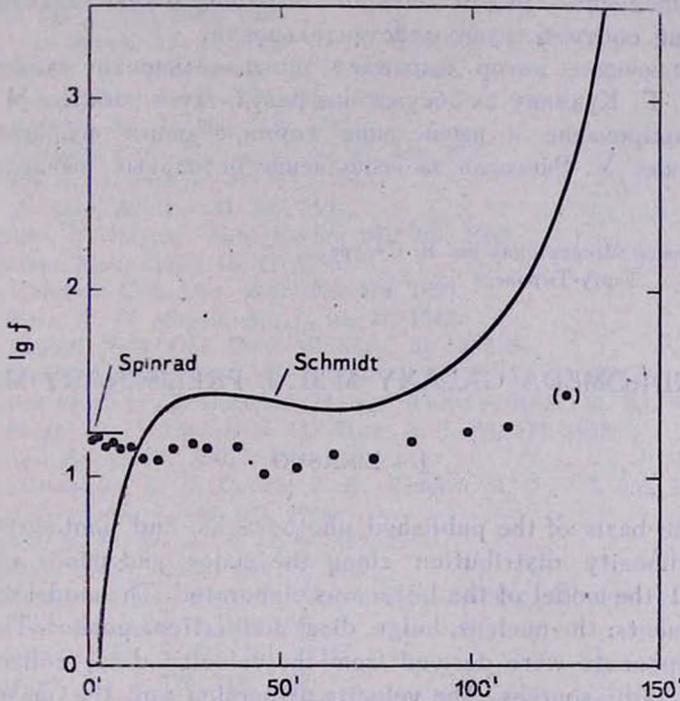


Рис. 9. Зависимость от расстояния логарифма отношения массы к светимости модели Шмидта [27] и настоящей модели.

Вычисленные по фотометрическому материалу плотности  $P_i(t)$  в допущении постоянного отношения массы и светимости  $f = 15.3$  показаны на рис. 8 точками. Сравнение нашей модели с фотометрическими данными показывает, что даже наша модель имеет слишком большое гало. Это можно было ожидать, так как мы приняли неограниченный экспоненциальный закон для плотности. Предполагаемый действительный ход спроектированной плотности показан прерывистой линией.

Различия между нашей моделью и точками на рис. 8 очевидно вызваны тем, что параметр  $f$  не постоянен, а имеет локальные отклонения, в частности, в спиральных ветвях. Совмещая точки с вычислен-

ной кривой  $P_i(t)$  можем получить „наблюдаемые“ значения  $f$ . Они показаны в логарифмической шкале на рис. 9 (точки). Видим, что допущение о постоянстве среднего значения  $f$  неплохо выполняется. Области минимумов  $f$  соответствуют основным спиральным ветвям галактики.

Итак, мы приходим к заключению, что увеличение  $f$  на периферии, а также выведенные рядом авторов большие массы галактики М 31, вероятно, не соответствуют действительности.

В заключение автор выражает признательность чл.-корр. АН ЭстССР Г. Г. Кузмину за обсуждение результатов работы, М. Круллу за программирование и вычисление нормированных функций  $L^0(\alpha)$  и  $v^0(\alpha)$ , а также У. Рюммель за выполнение остальных вычислительных работ.

Астрофизическая обсерватория им. В. Струве  
Тарту-Тыравере

## THE ANDROMEDA GALAXY M 31. I. PRELIMINARY MODEL

J. I. EINAŠTO

On the basis of the published photographic and photoelectric data on the luminosity distribution along the major and minor axis of the galaxy M 31 the model of the latter was elaborated. The model consists of four components: the nucleus, bulge, disc, and flat component. The masses of the components were derived from the velocity data, collected from optical and radio sources. The velocity dispersion and the mass-to-light-ratio, spectroscopically obtained for the centre of M 31, were also used.

It was found that the circular velocity curve has a maximum  $V=380 \text{ km/sec}$  at the distance of  $4'$  from the centre. The rotational velocity of the spheroidal component (the bulge) equals to only  $125 \text{ km/sec}$  in this region. The great difference between the circular and rotational velocities can be explained by the great velocity dispersion and radial density gradient of the spheroidal component. The dynamical mass-to-light-ratio 17.3 is in good agreement with the spectroscopical one, 16.7.

For the mass of the galaxy M 31 a value of  $200 \cdot 10^9$  solar masses is found. Considerably greater values obtained by other authors (see Table 3) are biased by neglecting the fact, that the galaxies are of finite sizes.

In the motion of instellar hydrogen local deviations from the circular motion occur.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Я. Эйнасто, Публ. Тарт. АО, 36, 357, 1968.
2. Г. Г. Кузмин, Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 27, 89, 1962.
3. Г. Г. Кузмин, Публ. Тарт. АО, 33, 351, 1961.
4. Г. Г. Кузмин, Публ. Тарт. АО, 32, 5, 1952.
5. Я. Эйнасто, Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, 5, 87, 1965.
6. Я. Эйнасто, Публ. Тарт. АО, 36, 414, 1968.
7. Н. Агр, Ap. J., 139, 1045, 1964.
8. S. van den Bergh, Ap. J., Suppl. Ser. 9, 65, 1964.
9. J. C. Brandt, L. S. Scheer, A. J., 70, 471, 1965.
10. G. de Vaucouleurs, Ap. J., 128, 465, 1958.
11. T. D. Kinman, Ap. J., 142, 1376, 1965.
12. R. O. Redman, E. G. Shirley, M. N., 97, 416, 1937.
13. W. Fricke, Z. Astrophys., 34, 137, 1954.
14. H. M. Johnson, Ap. J., 133, 309, 1961.
15. N. Richter, W. Högnér, Astr. Nachr., 287, 261, 1963.
16. G. Thlessen, Mem. Liege, 15, 411, 1955.
17. H. W. Babcock, Lick. Obs. Bull., No. 498, 1939.
18. A. B. Wyse, N. U. Mayall, Ap. J., 95, 24, 1942.
19. N. U. Mayall, Publ. Obs. Univ. Michigan, 10, 19, 1951.
20. A. Lallemand, M. Duchesne, M. Walker, P.A.S.P., 72, 78, 1960.
21. H. C. van de Hulst, E. Ratmond, H. van Woerder, BAN, 14. No. 480, 1, 1957.
22. B. F. Burke, K. C. Turker, M. A. Tuve, A. J., 68, 274, 1963.
23. E. Arglye, Ap. J., 141, 750, 1965.
24. S. T. Gottesmann, R. D. Davies, V. C. Reddish, M. N., 133, 359, 1966.
25. M. S. Roberts, Ap. J., 144, 639, 1966.
26. W. Baade, H. H. Swope, A. J., 68, 435, 1963.
27. M. Schmidt, BAN, 14, No. 480, 17, 1957.
28. R. L. Minkovski, Ann. Rept. Mt. Wilson-Palomar Obs., 26, 1954.
29. H. Spinrad, P.A.S.P., 78, 367, 1966.
30. E. E. Salpeter, Ap. J., 121, 161, 1955.
31. A. Sandage, Ap. J., 125, 422, 1957.
32. C. J. van Houten, BAN, 16, No. 509, 1961.
33. B. J. Bok, Internat. Astr. Union Draft Reports, 677, 1967.
34. W. Lohmann, Z. Astrophys., 35, 159, 1954.
35. M. Schwarzschild, A. J., 59, 273, 1954.
36. B. Takase, Publ. astr. Soc. Japan, 9, 16, 1957.
37. A. Poveda, Bol. Obs. Tonantzintla Tacubaya, 17, 3, 1958.
38. J. C. Brandt, Ap. J., 131, 293, 1960.
39. I. King, A. J., 67, 471, 1962.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ  
МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ.  
III. СЛУЧАЙ РАЗЛИЧНЫХ МАСС КОМПОНЕНТОВ

Ж. П. АНОСОВА

Поступила 4 марта 1968

Проведено численное интегрирование на ЭВМ уравнений движения компонентов тройных систем для 300 различных начальных конфигураций. Компоненты систем неподвижны в начальный момент, массам компонентов придавали следующие значения: 1)  $m_1=9$ ,  $m_2=3$ ,  $m_3=1$ ; 2)  $m_1=3$ ,  $m_2=3$ ,  $m_3=1$ ; 3)  $m_1=3$ ,  $m_2=1$ ,  $m_3=1$ . Во всех случаях движения компонентов завершились распадом систем. Каждый раз распад наступал после тесного тройного сближения компонентов. Среднее время распада  $\bar{T}=(27.8\pm 3.5)\tau$ , где  $\tau$ —среднее время пересечения компонентом системы. В подавляющем числе случаев тройную систему покидает компонент наименьшей массы. Дисперсия масс компонентов уменьшает время распада тройных систем приблизительно в три раза.

Результаты исследования динамики тройных систем с компонентами равных масс опубликованы в статьях [1] и [2]. Исследование проводилось численным интегрированием на ЭВМ уравнений движения компонентов тройных систем, начальные конфигурации которых задавались случайным образом. В 100 случаях [1] начальным скоростям компонентов придавались небольшие значения в плоскости конфигурационного треугольника, еще в 100 случаях [2] компоненты в начальный момент считались неподвижными.

Во всех рассмотренных случаях произошел распад тройных систем, наступающий всегда после тесного тройного сближения компонентов. Среднее время распада  $\bar{T}=(95.4\pm 6.9)$  единиц времени  $\tau$ , где  $\tau$ —среднее время пересечения компонентом системы (определение  $\tau$  дано в [1]).

В настоящей работе, как в [1] и [2], численно интегрировались уравнения движения компонентов тройных систем, но массы компонентов принимались различными. Массам компонентов придавали следующие значения: 1)  $m_1 = 9$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 1$ ; 2)  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 1$ ; 3)  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 1$ . Система единиц принята такая же, как и в [1]. В начальный момент компоненты считались неподвижными.

В случае равных масс компонентов множеством всех возможных конфигураций тройных систем являлась область  $D$  на рис. 1, ограниченная осями координат и дугой окружности, проведенной из точки  $(\xi = -1/2, \eta = 0)$  радиусом, равным 1. Для случая компонентов разных масс область  $D$  не является областью всех возможных конфигураций. В данном случае этой областью является вся полуплоскость, ограниченная осью  $\xi$ . С другой стороны, расстояния между компонентами системы не должны превышать 10 единиц расстояния, при котором мы считаем, что происходит условный распад системы (см. [1]).

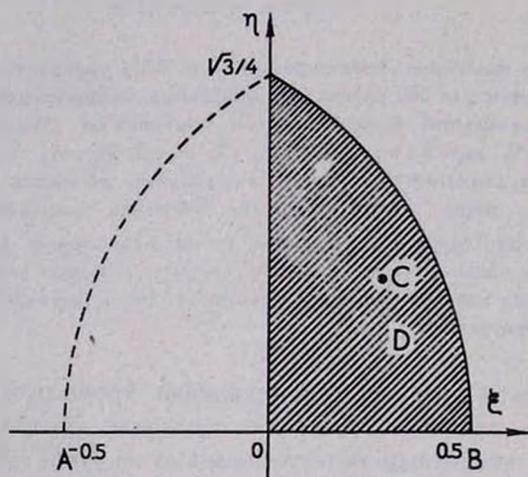


Рис. 1.

Поэтому ограничим область  $D'$  всех возможных конфигураций тройных систем полуокружностью, проведенной радиусом, равным 10 единицам расстояния, с центром в начале координат.

Для получения начальных конфигураций тройных систем с компонентами разных масс мы брали псевдослучайные числа  $\xi$  и  $\eta$  из [1] и при помощи формул, преобразующих область  $D$  в область мало отличающуюся от области  $D'$ , вычислялись координаты  $\xi'$ ,  $\eta'$ , задающие случайное начальное положение точки C. Значения координат

$\xi'$ ,  $\eta'$  приведены в табл. 1. При соотношениях масс компонентов 9, 3, 1 и 3, 1, 1 ось ординат не является осью симметрии области  $D'$ , поэтому при выборе начальных условий тройных систем из табл. 1 брались только первые 50 пар чисел  $\xi'$  и  $\eta'$  и каждому значению  $\xi'$  приписывался сначала знак плюс, а затем знак минус. Для тройных систем с массами компонентов, равными  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 3$ , и  $m_3 = 1$ , ось ординат является осью симметрии области всех возможных начальных конфигураций тройных систем, поэтому при этом соотношении масс компонентов брались все 100 пар координат  $\xi'$  и  $\eta'$ .

Для каждого соотношения масс компонентов (9, 3, 1; 3, 3, 1 и 3, 1, 1) вычислены траектории движения компонентов тройных систем при 100 различных начальных конфигурациях. При вычислении траекторий применялась линеаризация уравнений движения. Контроль вычислений аналогичен контролям [1] и [2]. Движения компонентов во всех системах завершились точным или условным распадом тройных систем.

В отличие от критерия распада, использованного в [1] и [2], где на массы компонентов накладывается условие  $m \geq m_i$ ,  $m \geq m_j$  ( $m$  — масса удаляющегося компонента,  $m_i$  и  $m_j$  — массы близких компонентов), справедливое при равных массах компонентов, в настоящей работе в качестве критерия распада использован другой критерий Г. А. Тевзадзе [3].

Согласно этому критерию, если в некоторый момент  $t_0$  выполняются условия

$$E < 0, \rho(t_0) > \frac{2Gm^2}{3|E|} \quad \text{и} \quad (1)$$

$$\rho(t_0)^2 > \frac{2GM}{m_i + m_j} \left[ \frac{m_i}{\rho(t_0) - g} + \frac{m_j}{\rho(t_0) - q} \right],$$

где  $g = \frac{m_i}{m_i + m_j} r_{\max}$ ,  $q = \frac{m_j}{m_i + m_j} r_{\max}$ , то при  $t \rightarrow \infty$   $\rho(t) \rightarrow \infty$ . Здесь

$E$  — полная энергия системы,  $G$  — постоянная тяготения,  $M$  — сумма масс компонентов системы,  $r_{\max}$  — максимально возможное расстояние между близкими компонентами,  $\rho(t)$  — расстояние далекого компонента от центра масс близких компонентов. Значения  $r_{\max}$  даны Г. А. Мерманом в [4]

$$r_{\max} = G \frac{\sum_{i,j=1}^3 m_i m_j}{|E|}. \quad (2)$$

Таблица 1

№ п/п	$\xi'$	$\eta'$	№ п/п	$\xi'$	$\eta'$
1	2	3	4	5	6
1	1.530844530	0.281758510	36	2.412755611	3.704948852
2	6.306644850	0.271786951	37	1.009304771	0.031562542
3	0.586409706	0.376641268	38	0.773147115	0.209885466
4	0.438322352	0.499630538	39	0.031505655	2.675449670
5	8.849380451	0.021331006	40	0.017229832	1.730411361
6	1.169632410	0.121508198	41	0.436759069	1.832797490
7	3.878655622	0.651987233	42	0.001521472	1.919225650
8	1.466861089	0.626014310	43	1.041762921	0.040544395
9	5.376967151	0.722344918	44	0.951275538	0.154375299
10	0.700272955	2.942157730	45	0.413421343	1.031453551
11	0.061019896	2.309376941	46	0.874035866	2.841184390
12	0.058518012	1.461777710	47	0.328774180	0.330854350
13	0.524178883	0.094018993	48	4.410341941	0.196363674
14	1.132229506	3.474061231	49	3.845804090	2.183368491
15	8.268518520	0.132728839	50	2.430467770	0.518036195
16	3.036166130	0.793502270	51	9.897502790	0.351546184
17	2.110731741	0.083115956	52	3.969836761	0.516086826
18	7.700283291	0.287837173	53	9.018280581	2.505227760
19	4.749117880	0.778826453	54	3.067183881	0.184321248
20	0.247164822	1.105720741	55	0.036530617	3.052396969
21	1.607084241	0.018175596	56	0.157343465	0.837634053
22	1.967298481	1.917649752	57	2.407748181	1.000608162
23	2.601429880	6.345181961	58	0.039323796	5.397602950
24	0.144089332	6.430309540	59	1.254814240	2.178333211
25	0.820856972	1.372113641	60	0.423804407	0.696777909
26	2.494591261	0.095394165	61	3.538867271	2.428183280
27	1.367592220	2.617918441	62	3.400479221	6.058513182
28	2.166068390	0.184773944	63	1.436241990	0.154822977
29	1.398423571	0.405256122	64	0.234115877	1.565074001
30	0.002553481	1.411033982	65	0.421050581	1.254845370
31	2.220389780	1.130497220	66	1.525865330	1.112525601
32	3.284820620	0.178978249	67	1.743369381	2.178891880
33	4.320537641	1.089135821	68	0.642880812	0.179802891
34	0.850873779	0.171355445	69	0.178184193	1.444668011
35	0.049774664	2.893940731	70	0.156767387	8.655581531

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6
71	0.176755433	0.815456257	86	2.810004181	4.331742602
72	1.546244840	0.064848318	87	0.008901173	1.507866480
73	5.171173061	2.867921350	88	0.045691683	0.976742777
74	6.988977290	0.127183530	89	4.329382450	0.975187567
75	1.306991751	2.230054082	90	0.769523497	1.060377371
76	0.535627260	5.885260821	91	1.043539051	1.622453740
77	2.190805521	6.421980102	92	1.043242290	0.629017490
78	1.854081401	0.037135860	93	0.070623741	0.388412661
79	1.244812341	0.274200596	94	0.016289413	0.013719886
80	2.207584111	0.645684734	95	1.702270990	0.454068623
81	0.734044645	1.815467440	96	0.027074829	2.019959990
82	1.681666701	0.653482208	97	0.273074279	1.362998941
83	2.047956540	0.428628578	98	1.169154601	0.259721043
84	1.170159791	7.824601480	99	0.660164106	7.013163491
85	7.526092770	0.506527494	100	8.391696810	0.347129432

Результаты исследования движения компонентов тройных систем для соотношений масс компонентов 1, 1, 1. (см. [1—2]); 9, 3, 1; 3, 3, 1 и 3, 1, 1 приведены в табл. 2. В первой строке приведены средние значения времен распада  $\bar{T}$ , во второй строке указано число тройных систем  $n$ , у которых движения компонентов завершились условным распадом; в третьей строке приведено число распадов  $n^*$ , наступивших после наиболее тесного тройного сближения компонентов. В четвертой, пятой и шестой строках указано число систем  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ , у которых отношение изменения энергии  $\Delta E$  в результате накопления ошибок при счете к полной энергии системы —  $E$  не превосходит соответственно значений 0.01, 0.005 и 0.0005; в седьмой, восьмой и девятой строках приведено число систем с компонентами разных масс  $N_A$ ,  $N_B$ ,  $N_C$ , у которых при распаде удаляются, соответственно, компоненты  $A$ ,  $B$  или  $C$ . В следующих строках указано число случаев, когда периметр конфигурационного треугольника  $P$  в момент тройного сближения, вызвавшего распад, находится в указанном интервале и приводится среднее значение  $(\bar{\Delta'E}/E)$ , где  $\Delta'E$  — превышение энергии удаляющегося компонента над энергией, требуемой критерием (1).

Как видно из табл. 2, для соотношения масс компонентов 1, 1, 1 отношение  $\Delta E/|E|$  сравнительно велико, так как для первых 100 случаев не применялась линеаризация и, кроме того, распад тройных систем с компонентами равных масс наступал позднее.

Таблица 2

№ п/п	$m_1$	1, 1, 1	9, 3, 1	3, 3, 1	3, 1, 1	
1	$\bar{T}$	$95.4 \pm 6.9$	$26.8 \pm 4.2$	$27.4 \pm 3.0$	$29.2 \pm 3.4$	
2	$n$	34	34	41	24	
3	$n^*$	163	98	94	97	
4	$N_1$	150	97	90	99	
5	$N_2$	118	94	65	92	
6	$N_3$	24	29	10	35	
7	$N_A$	—	0	3	0	
8	$N_B$	—	10	3	52	
9	$N_C$	—	90	94	48	
10	$0 < P < 0.2$	$n_1$	125	4	5	6
11		$\left(\frac{\Delta'E}{-E}\right)$	1.273	1.652	0.127	19.627
12	$0.2 < P < 0.5$	$n_2$	75	21	23	31
13		$\left(\frac{\Delta'E}{-E}\right)$	0.279	5.713	2.460	3.036
14	$0.5 < P < 1.0$	$n_3$	—	32	27	40
15		$\left(\frac{\Delta'E}{-E}\right)$	—	1.331	0.587	1.407
16	$P > 1.0$	$n_4$	—	43	45	23
17		$\left(\frac{\Delta'E}{-E}\right)$	—	0.531	0.116	0.960

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы: 1) при всех значениях масс компонентов их движение завершается распадом тройной системы; уменьшение значений  $(\Delta'E/|E|)$  с увеличением  $P$  показывает, что распад тройных систем есть реальное явление, а не результат накоплений ошибок счета; 2) дисперсия масс компонентов уменьшает время распада тройных систем приблизительно в три раза. По-видимому, этот вывод справедлив и для систем, состоящих из большего числа тел; 3) в подавляющем числе случаев трой-

ную систему покидает компонент наименьшей массы; 4) результаты настоящего исследования подтверждают вывод, сделанный в [1] и [2]: чем теснее тройное сближение, тем вероятнее распад тройных систем.

Ленинградский Государственный  
университет

## THE INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF TRIPLE SYSTEMS BY THE METHOD OF STATISTIC TESTS. III. CASE OF COMPONENTS OF DIFFERENT MASSES

J. P. ANOSOVA

Numerical integration of the equation of triple systems for 300 random initial configurations has been carried out on an electronic computer. The components of the systems are assumed to be of different masses and motionless at an initial time. Three cases of masses of the components have been regarded: 1)  $m_1 = 9$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 1$ ; 2)  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 1$ ; 3)  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 1$ . In all cases the motion of components ended with the decay of the system. Decay took place after the close triple approach of components. The mean time  $T$  of the decay of the triple system is equal to  $(27.8 \pm 3.5) \tau$  ( $\tau$  is the mean time of component motion through the system). Practically always, the decay results by leaving the small component. The dispersion of masses of the components reduces the decay time of the triple systems for about three times.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Т. А. Азелян, Ж. П. Аносова, *Астрон. ж.*, 6, 1967.
2. Т. А. Азелян, Ж. П. Аносова, *Астрофизика*, 4, 31, 1968.
3. Г. А. Тевзадзе, *Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 15, № 5, 1962.
4. Г. А. Мерман, *Бюлл. ИТА*, 5, № 9 (72), 1954.



АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5

ФЕВРАЛЬ, 1969

ВЫПУСК 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К РАБОТЕ САЛМОНА О МОДЕЛЯХ  
СТАТИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ

Теоретические исследования [1—5], проведенные в рамках релятивистской обобщенной теории гравитации, показали принципиальную возможность построения моделей статических конфигураций, обладающих чрезвычайно большими массами по сравнению с массой Солнца. Такая возможность обусловлена тем, что внешнее решение Гекмана (решение уравнений поля в пустоте для точечной массы в обобщенной теории) лишено сингулярности [1].

С другой стороны, в работе [6] Салмона рассчитал модель нейтронной звезды, используя уравнения поля и внешнее решение, полученные Дике и Брансом [7—8]. Его результаты мало отличаются от соответствующих в обычной теории Эйнштейна и в принципе означают, что обобщенная теория исключает возможность существования статических тел с массами, существенно превышающими солнечную. Целью нашей заметки является устранить возникшее противоречие с результатами Саакяна и Мнацаканяна, указав на некорректность анализа задачи, сделанного Салмона.

Вариационный принцип и следующие из него тензорные уравнения поля в [1] и [6—8] с точностью до обозначений совпадают друг с другом. Дике и Бранс рассматривают уравнения сферически-симметричного статического поля в изотропной системе координат, с линейным элементом

$$ds^2 = -e^{2\alpha(\rho)} dt^2 + e^{2\beta(\rho)} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (1)$$

и находят решение в пустоте для точечной массы  $M$ :

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha} &= e^{\alpha_0} [(1 - B/\rho)/(1 + B/\rho)]^{1/\lambda}, \\
 e^{\beta} &= e^{\beta_0} [(1 + B/\rho)^2 (1 - B/\rho)/(1 + B/\rho)]^{(1-C-1)/\lambda}, \\
 \Phi &= \Phi_0 [(1 - B/\rho)/(1 + B/\rho)]^{C/\lambda},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\alpha_0, \beta_0, \Phi_0, C, \lambda$  и  $B \sim M$  — постоянные. Решение (2), используемое Салмона в качестве внешнего решения для статической модели, казалось бы, обладает особенностью на расстоянии  $\rho = B$  от точечной массы.

Дело в том, однако, что изложению самой точечной массы отвечает значение  $\rho = B$  (а не  $\rho = 0$ ); при удалении от центра поля на бесконечность переменная  $\rho$  изменяется в области

$$B \leq \rho < \infty. \tag{3}$$

Это очень важное обстоятельство было упущено из виду Дике, Брансом и Салмона.

Под координатным расстоянием от центра поля понимается величина  $r$ , входящая в выражение для линейного элемента, записываемого в виде

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{4}$$

С использованием метрики (4) решение в пустоте для точечной массы представляет собой решение Гекмана [1], регулярное во всей области  $r: (0, \infty)$ . В центре поля функция  $e^{\lambda(r)}$  обращается в нуль. Если сделать преобразование от метрики (4) к метрике (1), то решение Гекмана переходит в (2), но область изменения новой переменной  $\rho$  ограничивается условием  $\rho > B$ . Это связано с тем, что  $e^{\lambda(r)} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Действительно, переход от переменной  $r$  и  $\rho$  дается выражением:

$$\rho = B \exp \left[ \int_0^r \frac{e^{\lambda(r)/2}}{r} dr \right], \tag{5}$$

где  $B = \text{const} \neq 0$ . Поскольку  $e^{\lambda(r)} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , то преобразование (5) переводит центр поля  $r = 0$  в  $\rho = B$ .

Формула перехода (5) справедлива как вне, так и внутри распределения масс. Как показано в [2], уравнения поля во внутренней области допускают следующие поведения для функции  $e^{\lambda(r)}$  в центре модели: а)  $e^{\lambda(r)}$  обращается в нуль при  $r \rightarrow 0$ , в)  $e^{\lambda(0)}$  есть отличная от нуля постоянная. В первом случае центру звезды соответствует значение  $\rho = B$ . Во втором, как видно из (5), в центре  $\rho = 0$ . А так как внешнее решение не допускает значения  $\rho < B$ , то координатный

радиус конфигурации оказывается ограниченным снизу определенной величиной. Последняя пропорциональна массе звезды, и понятно, почему вариант в) исключает существование массивных конфигураций. Напротив, в варианте а) допустимы модели статических тел с чрезвычайно большими массами. Анализируя поведение внутренних решений, Салмона приписывает центру модели значение  $\rho = 0$ , вследствие чего вариант а) автоматически выпадает из его рассмотрения.

Авторы выражают благодарность Г. С. Саакяну и Ю. Л. Вартапяну за обсуждения.

*On Salmona's paper on the model of static configuration. The incorrectness of Salmona's analyse in the problem of static configurations by Dicke-Brans theory is shown.*

30 января 1969

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория  
Ереванский Государственный  
университет

Р. М. АВАКЯН

М. А. МНАЦАКАНЯН

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, *Астрофизика*, 4, 567, 1968.
2. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, *Астрофизика* (в печати).
3. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, Тезисы докладов 5-ой Международной конференции по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968, стр. 198.
4. М. А. Мнацаканян (в печати).
5. Г. С. Саакян, М. А. Мнацаканян, *Астрофизика* (в печати).
6. А. Салмона, *Phys. Rev.*, 154, 1218, 1967.
7. С. Н. Brans, R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, 124, 925, 1961.
8. С. Н. Brans, *Phys. Rev.*, 125, 2194, 1962.

## CONTENTS

DIFFUSE REFLECTION AND TRANSMISSION OF LIGHT BY AN ATMOSPHERE WITH ANISOTROPIC SCATTERING . . . . .	<i>V. V. Sobolev</i> 5
THE SCATTERING OF RADIATION IN THE SPECTRAL LINE OF THE TURBULENT PLASMA . . . . .	<i>S. A. Kaplan, V. N. Tsitovich</i> 21
NONSTATIONARY RADIATION FIELD IN INFINITE MEDIA . . . . .	<i>D. I. Nagirner</i> 31
THE RADIATION OF NOVAE BEFORE THE LIGHT MAXIMUM	<i>V. V. Leonov</i> 55
ON THE MOTION OF GAS IN CLOSE BINARY SYSTEMS	<i>Yu. P. Korovyakovsky</i> 67
THE CURVE OF GROWTH FOR AN EXPANDING ATMOSPHERE	<i>M. A. Arakeltan</i> 75
ON THE EXPANSION OF PLANETARY NEBULAE . . . . .	<i>V. V. Vityasev</i> 83
SLOWLY ROTATING RELATIVISTIC POLYTROPIC MODELS	<i>V. V. Papoyan, D. M. Sedraktan, E. V. Chubartan</i> 97
SPECTRAL OBSERVATIONS OF MARKARIAN GALAXIES WITH ULTRAVIOLET CONTINUUM . . . . .	<i>D. W. Weedman, E. Ye. Khachikian</i> 113
SPECTROPHOTOMETRY OF THE F-STARS. IV. LINE PROFILES IN THE SPECTRA OF $\sigma$ Boo, $\nu$ Her and 41 Cyg . . . . .	<i>T. A. Kipper</i> 123
THE ANDROMEDA GALAXY M 31. I. PRELIMINARY MODEL	<i>J. I. Etnasto</i> 137
THE INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF TRIPLE SYSTEM BY THE METHOD OF STATISTIC TESTS. III. CASE OF COMPONENTS OF DIFFERENT MASSES . . . . .	<i>J. P. Anosova</i> 161
NOTES	
ON SALMONA'S PAPER ON THE MODEL OF STATIC CONFIGURATION	<i>R. M. Avaklan, M. A. Mnatsakantan</i> 169