Խ. ԱԲՈՎՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРМЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. Х. АБОВЯНА

Բնական գիտություններ № 1 (20) 2014 Естественные науки

УДК 539.3:534.2

КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ И ЖЕСТКО ЗАШЕМЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

ДЖ.Л. СРАПИОНЯН
Армянский государственный педагогический университет им Х. Абовяна 0010, Ереван, пр. Тигран Меци 17
e-mail: srapionyan84@mail.ru

Исследуются собственные краевые колебания ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны, со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими.

Ключевые слова: *собственные колебания, безмоментная оболочка, жестко защемленные образующие.*

Поступила в редакцию 8 октября 2013г.

Введение. Исследование собственных колебаний пластин и оболочек занимают важное место в динамике деформируемого тела. Это обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими вопросами машиностроения, строительства, приборостроения и т.д. [1]. Особый интерес представляют задачи на собственные значения, связанные с цилиндрическими оболочками переменной кривизны. Для решения таких задач применяются различные аналитические, асимптотические и численные методы [2-9]. Вопрос существования собственных краевых колебаний,

затухающих от свободного края безмоментной цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующих, изучены в работах [10-15].

Нами исследовани собственные колебания ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки открытого профиля, со свободными краями и жестко защемленными образующими. Предполагается, что образующие ортогональны к краям оболочки и квадрат кривизны направляющей кривой поверхности можно представить в виде ряда

$$R^{-2} = k^2\left(r_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta \right),\ 0 \le \beta \le s,\ \ k = 2\pi / s,\ \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty \quad (1)$$

Здесь β длина переменной дуги направляющей кривой, s–полная длина направляющей кривой между жестко защемленными граничными образующими. Для цилиндрических оболочек со свободными краями первые частоты и частоты соответствующих больших волновых чисел распределены очень густо [6-17]. Поэтому численный расчет не всегда эффективен. Эти трудности преодолеваются с помощью комбинирования аналитической и асимптотической теорий, а также численными методами.

Задача не допускает разделения переменных. Такие задачи обычно решаются по методам понижения размерности на основе интегральных или колокационных подходов типа Канторовича-Власова в сочетании с численными методами решения одномерных задач [18-22]. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова развитых в [20-22]. В качестве базисных функций используются следующие функции:

$$W_m(\beta) = 1 - \cos km\beta, \quad k = 2\pi / s,\ 0 \le \beta \le s,\ m = \overline{1,+\infty} \qquad (2)$$

В дальнейшем для пластинки под s подразумевается её ширина пластинки, а для цилиндрической оболочки - длина направляющей кривой. Заметим, что

$$W_m(0) = W_m(s) = W_m'(0) = W_m'(s) = 0 \qquad (3)$$

1. Постановка задач и некоторые математические особенности. Рассматриваются собственные колебания незамкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими. На поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты (α, β), где $\alpha(0 \le \alpha \le l)$ и $\beta(0 \le \beta \le s)$ являются соответственно текущей длиной образующей и текущей длиной дуги направляющей кривой (рис. 1), l-длина цилиндрической оболочки, а s - длина направляющей кривой.

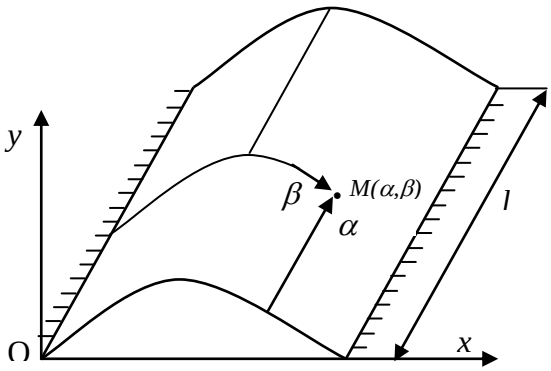

Рис.1.

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек записанные в выбранных криволинейных координатах α, β

$$-B_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2} - B_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2} - (B_{11}+B_{66})\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta} + B_{12}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_3}{R}\right) = \lambda u_1$$

$$-(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta} - B_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2} - B_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2} + B_{22}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_3}{R}\right) = \lambda u_2$$

(1.1)

$$-\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} - \frac{B_{22}}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta} + \frac{B_{22}}{R^2}u_3 = \lambda u_3$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора перемещений, соответственно в направлениях α, β и нормали поверхности оболочки, B_{ik} - коэффициен-ты упругости, $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$ - кривизна направляющей кривой поверхности, $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω - частота собственных колебаний, ρ - плотность материала. Граничные условия имеют вид [23]

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R}\right)\Bigg|_{\alpha=0,l} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha}\Bigg|_{\alpha=0,l} = 0$$

(1.2)

$$u_1\big|_{\beta=0,s} = u_2\big|_{\beta=0,s} = 0$$

(1.3)

где соотношения (1.2) являются условиями свободного края при $\alpha = 0, \alpha = l$, а соотношения (1.3) - условиями жесткого защемления при $\beta = 0, \beta = s$. Для пары вектор–функций $f^{(j)}(\alpha, \beta) = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}),\ j = 1,2$ введем скалярное произведение по формуле

$$\left(f^{(1)}, f^{(2)}\right) = \int_0^l \int_0^s \sum_{j=1}^{3} u_j^{(1)} \overline{u}_j^{(2)} d\beta d\alpha$$

(1.4)

Обозначим через $L_0^{(cc)}$ оператор, соответствующий левой части системы уравнений (1.1), первоначально определенный на гладких вектор –функциях удовлетворяющих условиям (1.2)-(1.3). Нетрудно проверить, что для таких вектор - функций выполняется соотношение

$$(L_0^{(cc)} f^{(1)}, f^{(2)}) = (f^{(1)}, L_0^{(cc)} f^{(2)})$$

(1.5)

Более того, для любой функции $f^{(j)}(\alpha, \beta) = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{J}),\ j = 1,2$ удовлетворяющей условиям (1.2)-(1.3), имеет место неравенство

$$(L_0^{(cc)} f, f) \geq 0$$

(1.6)

Из неравенства (1.6) следует, что с задачей на собственные значения (1.1)-(1.3) можно связать неотрицательно определенный

самосопряженный оператор (расширения по Фридрихсу оператора $L_0^{(cc)}$ [24] стр.350). Для которого сохраним обозначение $L_0^{(cc)}$. Аналогично [25] можно доказать, что спектр оператора $L_0^{(cc)}$ неотрицателен и не является чисто дискретным. Оказывается, что при любых граничных условиях, операторы, порожденные системой уравнений (1.1), имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $[0,\lambda_0]$ – множеством значений функции

$$\Omega(\beta,\theta)=\frac{B_{66}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta}{B_{66}(B_{11}\sin^4\theta+B_{22}\cos^4\theta)+(B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

(1.7)

$$0\le\beta\le s,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

Отметим, что появление этого участка непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1.1) по Дуглису-Ниренбергу [27-29]. Как известно, эллиптичности системы недостаточно для того, чтобы задача Дирихле была корректно поставлена даже в случае однородных систем. Для существования нетривиального решения задачи (1.1)-(1.3) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы некоторого условия алгебраического характера. Это условие называется условием дополнительности (условие Шапиро-Лопатинского) [26]. Отметим, что для задачи (1.1)-(1.3) условие Шапиро-Лопатинского эквивалентно условию ([14],[25],[6], стр. 76)

$$\theta(\lambda,\beta)\big|_{\beta=0,\beta=s}=B_{66}(\lambda-B_{22}R^{-2}(\beta))+\sqrt{B_{22}\lambda(B_{11}\lambda-(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)R^{-2}(\beta))}\Big|_{\beta=0,s}\neq 0$$

(1.8)

Множество значений λ (не более двух точек), при которых нарушается условие (1.8), т.е. имеем равенство

$$\theta(\lambda,\beta)/_{\beta=0,\beta=s}=0$$

(1.9)

обозначим через Ω_γ. Вне множества $[0,\lambda_0]\cup\Omega_\gamma$ для оператора $L_0^{(c,c)}$, выполняется условие дополнительности (1.8), [25-30].

Справедливо следующее утверждение: вне множества $[0,\lambda_0]\cup\Omega_\gamma$

спектр оператора $L_0^{(c,c)}$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Это утверждение следует из следующего общего утверждения [25].

Теорема. Для того, чтобы точка λ принадлежала непрерывному спектру оператора $L_0^{(c,c)}$, необходимо и достаточно, чтобы при этом λ нарушалось условие эллиптичности системы (1.1) или условие Шапиро-Лопатинского краевой задачи (1.1)-(1.3).

Заметим, что оператор $L_0^{(c,c)}$ имеет сколь угодно большие положительные собственные значения. Это следует из его неотрицательности и неограниченности. Этот факт позволяет задачу (1.1)-(1.3) изучать в виде обобщенной задачи на собственные значения ([31],стр.92) с применением обобщенного метода сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Конторовича-Власова.

2. Вывод и анализ дисперсионного уравнения оператора $L_0^{(c,c)}$. Решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.3), ищем в виде

$$u_1 = \exp(k\chi\alpha)\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin km\beta\right), \quad u_n = \exp(k\chi\alpha)\left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m (1-\cos km\beta)\right),$$

$$w = k\exp(k\chi\alpha)\left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin km\beta\right)$$

(2.1)

Здесь $w = u_3 / R$, u_m, v_m, w_m - неопределенные коэффиценты, χ – неопределенный коэффицент затухания. Подставим выражения (2.1) в первые два уравнения системы (1.1). Полученные уравнения умножаем на $\sin kmB$, $\cos kmB$ соответственно и интегрируем в пределах от 0 до s. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(B_{11}\chi^2 - B_{66}m^2 + \lambda / k^2\right)u_m + \left(B_{12} + B_{66}\right)\chi_m v_m = B_{12}\chi w_m \\ (B_{12} + B_{66})\chi_m u_m - (B_{66}\chi^2 - B_{22}m^2 + \lambda / k^2)v_m = B_{22} m w_m \end{cases}$$

(2.2)

Откуда получаем соотношения

$$C_m u_m = \chi a_m w_m, \; C_m \upsilon_m = -m b_m w_m$$

(2.3)

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}}\chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta^2,\ \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}$$

$$b_m = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}\chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta^2$$

(2.4)

$$c_m = \chi^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}m^2\chi^2 + \frac{B_{11}+B_{66}}{B_{11}}\eta^2\chi^2 + (m^2 - \eta^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right)$$

Обе части третьего уравнения системы (1.1) умножим на R^{-1} и подставим в него (2.1). Учитывая представление (1), соотношения (2.3), правило умножения тригонометрических рядов ([32], стр. 592), умножим обе части полученного уравнения на $\sin km\beta$ и интегрируем в переделах от 0 до s, придем к бесконечной системе уравнений

$$\left((r_0 - r_{2m})A_m - 2\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2\right)w_m + \sum_{n=1, n\neq m}^{\infty}(r_{|n-m|} - r_{n+m})A_n w_n = 0,\ m = \overline{1,+\infty},$$

(2.5)

$$A_n = P_n / c_n,\ P_n = c_n + n^2 b_n - B_{12}/B_{22}\chi^2 a_n,\ n = \overline{1,+\infty},$$

(2.6)

Так как в области определения A_n имеем

$A_n = O(1/n^2)$, следовательно $\sum_{n=1}^{\infty}|A_n| < +\infty$. Учитывая (1), получим

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}|A_n|(|r_{n+m}| + |r_{1n-m}|) \le 3\left(|r_0|/2 + \sum_{n=1}^{\infty}|r_n|\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|\right) < +\infty \qquad (2.7)$$

Следовательно, бесконечный определитель системы (2.5) при $\lambda \notin [0, \lambda]$ и χ в области определения коэффициентов (2.6) относится к известному классу сходящихся определителей - к нормальным определителям [32]. Чтобы система (2.5) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1, \ldots, r_m, \ldots) = 0$$

(2.8)

Предположим, что χ_1, χ_2 различные корни уравнения (2.8) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_3 = -\chi_1, \chi_4 = -\chi_2$ также являются различными корнями уравнения (2.8). Пусть $(w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \ldots, w_m^{(j)}, \ldots)$, $j = \overline{1,4}$ являются нетривиальными решениями системы (2.5) при $\chi_j, j = \overline{1,4}$ соответственно. Представим решение задачи (1.1)-(1.3) в виде $u_i = \sum_{j=1}^{4} u_i^{(j)},\ i = 1,2,\ w = \sum_{j=1}^{4} w^{(j)}$

(2.9)

где $u_i^{(j)}, w^{(j)}, i = 1,2,\ j = \overline{1,4}$ решения системы (1.1), имеющие вид (2.1) при $\chi = \chi_j$. Подставим (2.9) в граничные условия (1.2). В полученные уравнения, которые содержат $\sin km\beta$, умножаем на $\sin km\beta$, а те которые содержат $\cos km\beta$, умножаем на $\cos km\beta$, затем интегрируя в пределах от 0 до s, получаем совокупность систем уравнений

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{R_{1j}^{(m)}}{C_m^{(j)}} W_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{2j}^{(m)}}{C_m^{(j)}} W_m^{(j)} = 0 \quad m = \overline{1,+\infty}$$

(2.10)

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{R_{1j}^{(m)} \exp(z_j)}{C_m^{(j)}} W_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{2j}^{(m)} \exp(z_j)}{C_m^{(j)}} W_m^{(j)} = 0$$

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{1,2}}{B_{11}} m^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{1,2}}{B_{11}} c_m^{(j)},\ R_{2j}^{(m)} = \chi_j (a_m^{(j)}) + b_m^{(j)}),\ z_j = k\chi_j l$$

(2.11)

a $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$ - значения a_m, b_m, c_m из (2.4) при $\chi = \chi_j$ соответственно. Чтобы совокупность систем уравнений (2.10) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\Delta = Det\begin{Vmatrix} R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} & R_{11}^{(m)}\exp(z_1) & R_{12}^{(m)}\exp(z_2) \\ R_{21}^{(m)} & R_{22}^{(m)} & -R_{21}^{(m)}\exp(z_1) & -R_{22}^{(m)}\exp(z_2) \\ R_{11}^{(m)}\exp(z_1) & R_{12}^{(m)}\exp(z_1) & R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} \\ R_{21}^{(m)}\exp(z_1) & R_{22}^{(m)}\exp(z_1) & -R_{21}^{(m)} & -R_{22}^{(m)} \end{Vmatrix} = 0 \qquad m=\overline{1,+\infty}$$

(2.12)

вне множества $[\theta, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ имела λ - решение. Заметим, что определитель из (2.12) можно привести к виду

$$\Delta = m^{14}(x_2 - x_1)^2 Det\|m_{ij}\|_{i,j=1}^4$$

(2.13)

$$Det\|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = K_2^2(\eta_m^2, x_1, x_2)(1+\exp(2z_1+2z_2)) +$$

$$8m_{11}m_{22}m_{12}m_{21}\exp(z_1+z_2) - (m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21})^2(\exp(2z_1)+\exp(2z_2) -$$

$$4m_{11}m_{22}(m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21})(\exp(z_2)-\exp(z_1))[z_1z_2] - 4m_{11}^2m_{21}^2[z_1,z_2]^2,$$

$$x_j = \chi_1/m,\ \eta_m = \eta/m,\ [z_1,z_2] = kml(\exp(z_2)-\exp(z_1)/(z_2-z_1)$$

$$K_2(\eta_m^2, x_1, x_2) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3(x_1^2+x_2^2) + \delta_4$$

$$\delta_1 = \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}^2}\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_m^2\right), \qquad z_j = kmx_jl$$

$$\delta_2 = -\eta_m^2\left(\frac{B_{22}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2-B_{22}B_{66}-B_{12}B_{66})}{B_{11}^3}\eta_m^2\right) \quad (2.16)$$

$$\delta_3 = \frac{B_{12}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)}{B_{11}^3}\eta_m^2(1-\eta_m^2),\ \delta_4 = \frac{B_{12}B_{66}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}^3}\eta_m^4(1-\eta_m^2)$$

$$m_{11} = \left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2)}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66})}{B_{11}^2}\eta_m^2\right)x_1^2 + \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2}\eta_m^2(1-\eta_m^2)$$

$$m_{12} = \left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2)}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66})}{B_{11}^2}\eta_m^2\right)(x_1+x_2)$$

$$m_{21} = \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}^2}x_1^3 + \frac{B_{12}+B_{22}}{B_{11}}\eta_m^2 x_1$$

$$m_{22} = \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}^2}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2) + \frac{B_{12}+B_{22}}{B_{11}}\eta_m^2$$

Уравнения (2.12) эквивалентны уравнениям

$$Det\left\|m_{ij}\right\|_{ij}^{4}=0, \quad m=\overline{1,+\infty}$$

(2.15)

Таким образом, доказано следующее утверждение: если $R^{-2}(\beta)$ можно представить в виде (1) и $\lambda \notin [0,\lambda_0] \cup \Omega_\gamma$, то уравнения (2.15) являются дисперсионными уравнениями оператора $L_0^{(cc)}$, где $\chi_1 = mx_1, \chi_n = mx_2$ - различные корни уравнения (2.8) с неположительными действительными частями. Заметим, что если $\chi_1 = mx_1$, и $\chi_2 = mx_1$ имеют отрицательные действительные части, то при $ml \to \infty$ уравнения (2.15) преобразуются в уравнения

$$k_2(\eta_1^2, x_1, x_2) = \delta_1 x_1^2 x_n^2 + \delta_2 x_1 x_n + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4 = 0, \quad m=\overline{1,+\infty}$$

(2.16)

Уравнения (2.16) являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки с произвольной плоской направляющей со свободным торцом, когда граничные образующие жестко защемлены (ср.[16]). В общем случае решение уравнения (2.8) представляет сложную задачу. Поэтому, для установления асимптотических формул, рассмотрим следующие частные случаи.

3. Частные случаи: *Случай а):* $R^{-2}(\beta) \equiv 0$ ($r_m = 0, m=\overline{0,+\infty}$), т.е. имеем ортотропную пластину со свободными торцами и жестко защемленными сторонами. В этом случае система (1.1) принимает вид

$$-B_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda u_2$$

$$-(B_{11}+B_{66})\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} = \lambda u_2$$

(3.1)

который моделирует малые планарные колебания пластин.

Граничные условия (1.2)-(1.3) преобразуются к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{B_{12}}{B_{11}}\frac{\partial u_2}{\partial \beta}\bigg|_{\alpha=0,e}=0,\ \frac{\partial u_1}{\partial \beta}+\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0,e}=0$$

(3.1)

$$u_1\big|_{\beta=0,s}=u_2\big|_{\beta=0,s}=0$$

(3.3)

Задаче (3.1)-(3.3) соответствует самосопряженный и неотрицательно определенный оператор, который имеет неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$. Поэтому, для решения задач (3.1)-(3.3) применены обобщенный метод Канторовоза-Власова. Решение системы (3.1) удовлетворяющей условиям (3.3), ищем в виде

$$u_1=u_m\sin km\beta\exp(kmy\alpha),\ u_2=v_m(1-\cos km\beta)\exp(kmy\alpha)\ \ m=\overline{1,+\infty}$$

(3.4)

где $k=2\pi/s$, s - ширина пластинки, а u_m, v_m и y неизвестные параметры.

Подставляя (3.4) в систему уравнений (3.1) и полученное первое уравнение умножая на $\sin km\beta$, а второе на $\cos km\beta$ и интегрируя от 0 до s, получим систему уравнений

$$\begin{cases}(B_{11}y^2+B_{66}(1-\eta_m^2))u_m+(B_{12}+B_{66})ymv_m=0\\ -(B_{12}+B_{66})ymu_m+(B_{66}y^2-B_{22}+B_{66}\eta_m^2)v_m=0\end{cases}$$

(3.5)

где $\eta_m^2=\lambda/(B_{66}k^2m^2)$, $m=\overline{1,+\infty}$. Приравнивая определитель системы (3.5) к нулю, получим характеристические уравнения

$$y^4-\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}-\frac{B_{11}+B_{66}}{B_{11}}\eta_m^2\right)y^2+(1-\eta_m^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_m^2\right)=0,\ m=\overline{1,+\infty}$$

(3.6)

Пусть y_1, y_2 являются различными корнями уравнения (3.6) с неположительными действительными частями. Тогда $y_3=-y_1$ и $y_4=-y_2$ также различные корни уравнения (3.6). Решение задачи (3.1)-(3.3) ищем в виде

$$u_1 = \sin km\beta \sum_{j=1}^{4} u_m^{(j)} W_j \ \exp(kmy_j\alpha)$$

$$u_2 = (1-\cos km\beta) \sum_{j=1}^{4} v_m^{(j)} W_j \ \exp(kmy_j\alpha)$$

(3.7)

$$u_m^{(j)} = -\frac{B_{12}+B_{66}}{B_{11}} y_j, \quad v_m^{(j)} = y_j^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}}\left(1-\eta_m^2\right)$$

(3.8)

Подставим (3.7) в граничные условия (3.2). Первые и вторые из полученных уравнений умножаем на $\sin km\beta$ и $\cos km\beta$ соответственно. Интегрируя все полученные уравнения в переделах от 0 до s, получаем совокупность систем уравнений

$$\sum_{j=1}^{4} P_{1j}^{(m)} W_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} P_{2j}^{(m)} W_j = 0$$

$$m = \overline{1,+\infty}$$

$$\sum_{j=1}^{4} P_{1j}^{(m)} \exp(z_j) W_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} P_{2j}^{(m)} \exp(z_j) W_j = 0$$

(3.9)

$$P_{1j}^{(m)} = y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}(1-\eta_m^2), \quad P_{2j}^{(m)} = y_j\left(y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_m^2),\right) \qquad z_j = kmy_j l$$

(3.10)

Чтобы совокупность систем (3.9) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы совокупность уравнений имела η_m решение

$$\Delta_m = \exp(-z_1 - z_2)(y_2 - y_1)^2 \quad P(\eta_m^2, y_1 y_2) = 0, \qquad m = \overline{1,+\infty}$$

$$P(\eta_m^2, y_1, y_2) = -\left(\frac{B_{12}+B_{66}}{B_{11}}\right)^2 K_2^2(\eta_m, y_1, y_2)(1+\exp(2z_1+2z_2)) -$$

$$8m_{11}m_{12}m_{21}m_{22}\exp(z_1+z_2) + 4m_{11}m_{21}(m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21})[z_1 z_2](\exp(z_2) -$$

$$\exp(z_1)) + (m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21})^2(\exp(2z_1)+\exp(2z_2)) + 4m_{11}^2 m_{21}^2 [z_1 z_2]^2,$$

(3.12)

$$K_2(\eta_m, y_1 y_2) = (1-\eta_m^2)\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2\right) - \eta_m^2 y_1 y_2,$$

$$m_{11} = y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}(1-\eta_m^2); \qquad m_{12} = y_1 + y_2,$$

$$m_{21} = y_1\left(y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_m^2 \right), \quad m_{22} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 + y_1 y_2;$$

$$[z_1 z_2] = klm(\exp(z_2) - \exp(z_1))/(z_2 - z_1)$$

Уравнение (3.11) эквивалентно уравнению

$$P(\eta_m^2, y_1, y_2) = 0 \quad m = \overline{1,+\infty}$$

(3.13)

Уравнения (3.13) являются дисперсионными уравнениями задачи (3.1)-(3.3). Если y_1 и y_2 имеют отрицательные действительные части, то при $l \to \infty$ уравнения (3.13) преобразуются в уравнения

$$K_2(\eta_m, y_1\, y_2) = (1-\eta_m^2)\left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0 \quad m = \overline{1,+\infty}$$

(3.14)

Уравнения (3.14) являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной пластинки - полосы со свободным торцом, когда остальные края жестко защемлены.

Случай б): $R^{-2} = k^2 r_0 / 2\,(r_m = 0, m = \overline{1,+\infty})$ т. е. имеем безмоментную круговую ортотропную цилиндрическую оболочку открытого профиля со свободными торцами, когда граничные образующие жестко защемлены. В этом случае система (2.5) принимает вид

$$\left(r_0 A_m - 2\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2 \right) W_m = 0, \quad m = 1, +\infty$$

(3.15) Следовательно, уравнение (2.8) распадается на совокупность уравнений

$$r_{mm} = r_0 P_m - 2\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2 C_m = 0, \qquad m = 1, +\infty$$

(3.16)

или уравнений

$$\left(\eta^2-\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}}\frac{r_0}{2}\right)\chi^4-\eta^2\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}m^2-\frac{B_{11}+B_{66}}{B_{11}}\eta^2+\right.$$

$$\left.\frac{B_{11}B_{12}-B_{12}^2+B_{66}B_{22}}{B_{11}B_{66}}\frac{r_0}{2}\right)\chi^2+\eta^2(m^2-\eta^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}\frac{r_0}{2}\right)=0,\ m=1,+\infty$$

(3.17)

В этом случае для нахождения безразмерной характеристики собственных частот η/m используются уравнения (2.15), в которых $x_1=\chi/m,\quad x_2=\chi_2/m$, а χ_1 и χ_2 являются корнями уравнения (3.17) с неположительными действительными частями.

Обозначим через $y=\chi/m$ в уравнениях (3.17) и перейдем к пределу $r_0/m^2\to 0$. Тогда уравнения (3.17) преобразуются к характеристические уравнения (3.6) моделирующие планарные колебания прямоугольной пластины со свободными торцами и жестко защемленными сторонами. Тогда, в этом случае, для дисперсионных уравнений (2.15) справедливы следующие асимптотические формулы

$$Det\left\|m_{ij}\right\|_{ij=1}^4=\left(\frac{B_{11}}{B_{12}+B_{66}}\right)^2N_1^2(\eta_m)P(\eta_m^2,y_1,y_2)+O(\varepsilon/m^2)=0,\ m=1,+\infty$$

(3.18) где $P(\eta_m^2,y_1y_2)$ определяются по формуле (3.12),

$$N_1(\eta_m)=\frac{B_{22}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)}{B_{11}^3}+\frac{B_{12}(B_{11}B_{12}-B_{12}^2-B_{12}B_{66}-B_{22}B_{66})}{B_{11}^3}\eta_m^2$$

(3.19)

Из (3.18) следует, что при $r_0/m^2\to 0$ уравнения (2.15) преобразуются в уравнения (3.13). Пусть y_1 и y_2 корни уравнения (3.3) с отрицательными действительными частями. Учитывая выражения для $P(\eta_m^2,y_1,y_2)$ из (3.12), заключаем, что при $ml\to\infty$ уравнение (3.18) можно написать в виде

$$Det\left\|m_{ij}\right\|_{ij=1}^4=-N_1^2(\eta_m)K_2^2(\eta_m,y_1,y_2)+\sum_{j=1}^2O(\exp(z_j))+O(r_0/2m^2)=0$$

(3.20)

Из (3.20) следует, что при $ml\to\infty$, $r_0/m^2\to 0$, η_m- корни уравнения (2.15) стремятся к корням уравнения (3.14).

Случай в: $R^{-2} = k^2(r_0/2 + r_1\cos k\beta)$, т. е. имеем некруговую цилиндрическую оболочку открытого профиля со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими. В этом случае система уравнений (2.5) принимает вид

$$r_1 P_{m-1}\omega_{m-1} + r_{mm}\omega_m + r_1 P_{m+1}\omega_{m+1} = 0 \qquad m = 1, +\infty$$

(3.21)

$$\omega_m = w_m / c_m, \;\; r_{mm} = r_0 p_m - 2B_{66}\eta^2 c_m / B_{22}$$

(3.22)

Так как определитель системы (3.21) относится к нормальному типу, то для нахождения ненулевого решения приравняем ее нулю

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{21}, B_{66}, r_0, r_1) = 0$$

(3.23)

Решение χ^2 уравнения (3.23) находится аналогичным образом как в [11-15]. Для этого, возьмем усеченный определитель из D при конечном n и приравняем нулю

$$D_n((\chi^2)^2, \eta^2, B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{21}, B_{66}, r_0, r_1) = 0$$

(3.24)

Найдем решение χ_n алгебраического уравнения (3.24). Точное решение уравнения (3.23) следует из χ_n при $n \to \infty$. Раскрывая определитель D_m по элементам последнего столбца или строки, получаем следующую реккурентную последовательность:

$$D_1 = r_{11}, \;\; D_2 = r_{22}D_1 - r_1^2 P_1 P_2$$

$$D_m = r_{mm}D_{m-1} - r_1^2 P_{m-1}P_m D_{m-2}, \qquad m = \overline{3, +\infty}$$

(3.25)

Справедливо следующее утверждение: при фиксированном $m \geq 2$ и $\lambda \notin [0, \lambda_0]$ уравнение (3.23) имеет формальные решения вида

$$(\chi_j)^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_j^{(m)} r_1^4 + \ldots, \;\; j = 1,2$$

(3.26)

где $\chi_j^{(m)} (j = 1,2)$ корни уравнения $r_{mm} = 0$ (т.е. уравнения (3.17) с неположительными действительными частями) и

$$\alpha_j^{(m)} = \left.\frac{P_m(P_{m-1}r_{m+1m+1} + P_{m+1}r_{m-1m-1})}{r_{m-1m-1}r_{m+1m+1}r'_{mm}}\right|_{\chi=\chi_j^{(m)}}, \qquad j=1,2$$

(3.27)

где r'_{mm} -производная по χ^2.

Действительно, легко проверить, что уравнение $r_{mm}=0$ при фиксированном m имеет два положительных или комплексно сопряженных $(\chi_j^{(m)})^2$, $j=1,2$ корня. Тогда корни χ^2 уравнения

$$D_m = r_{m+1m+1}D_m - r_1^2 P_m P_{m+1} D_{m-1} = (r_{m+1m+1}r_{mm} - r_1^2 P_m P_{m+1})D_{m-1} - r_1^2 P_{m-1} P_m\, r_{m+1m+1} D_{m-2} = 0$$

(3.28)

ищем в виде

$$\chi_{jm}^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_j^{(m)} r_1^4 + \ldots \quad j=1,2,\ m=\overline{2,+\infty}$$

(3.29)

Поставляя (3.29) в (3.28) и приравнивая коэффициенты при r_1^2 нулю, получим

$$(r_{m+1m+1}r'_{mm}\alpha_j^{(m)} - P_{m+1}P_m)D_{m-1} - r_{m+1m+1}P_m P_{m-1} D_{m-2}\big|_{r_1=0} = 0$$

(3.30) Учитывая, что $D_{m-1}\big|_{r_1=0} = r_{m-1m-1,} D_{m-2}\big|_{r_1=0} = 0$

получим формулы (3.27).

Докажем, что если использовать определители более высокого порядка чем $m+1$ и искать нули этого определителя в виде (3.29), то коэффиценты при r_1^2 не изменятся. Действительно, так как $D_m\big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} = O(r_1^2)$, $D_{m+1}\big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} = O(r_1^4)$ и $D_{m+2} = r_{m+2m+2}D_{m+1} - r_1^2 P_{m+1}P_{m+2}D_m^{(2)}$, то $D_{m+2}\big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} = 0(r_1^4)$. Методом математической индукции убеждаемся, что $D_n\big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} = O(r_1^4)$ при $n \ge m+1$. Следовательно $\alpha_j^{(m)}(j=1,2)$ не изменяются при $n \to \infty$, т.е. доказаны представления (3.26) с гарантированными значениями первых двух слагаемых. Таким образом, в этом случае для дахождения коэффициентов затухания χ_j / m (j=1,2) можно использовать приближенные формулы

$$\chi_j / m = -((\chi_j^{(m)}/m))^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 / m^2)^{1/2},\ j=1,2,$$

(3.31)

а для нахождения соответствующих характеристик собственных частот η / m уравнение (2.15).

4. Численные исследования. В таблицах 1,2, используя дисперсионные уравнения (2.15), (3.13) приведены безразмерные характеристики собственных значений η / m и характеристики коэффицентов затухания соответствующих форм в зависимости от m, a, b для цилиндрических оболочек с длинами l=15, l=5 образующей и направляющими

$$y = ba^{-2}\left(a^2 - x^2\right), \quad |x| \le a, \quad a = 2, \; b = 0.5; \; a = 2, \quad b = 1$$

(4.1)

изготовленных из ортотропного материала с параметрами [33]:

Стеклопластик: $\rho = 2{,}4.10^3$ Кг/М^3, $E_1 = 6{,}37.10^{10}$ Н/М^2,

$E_2 = 1{,}47.10^{10}$ Н/М^2; G=4,9.10^9 Н/М^2, $\upsilon_1 = 0{,}26$; $\upsilon_2 = 0{,}06$

(4.2)

В таблице1 представлены результаты для вариантов 1,2,3 соответственно при $R^{-2} = 0$, $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$, $R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$ примененные к цилиндрическим оболочкам изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами (4.2) и геометрическими параметрами (4.1): $a = 2$, $b = 0{,}5$, $s = 4{,}16092$, $r_0 = 0{,}05072$, $r_1 = 0{,}02351$, при $l = 15$, $l = 5$. Результаты представленные в таблице 2. соответствуют оболочкам с параметрами (4.2) и (4.1): $a = 2$, $b = 1$, $s = 4{,}59117$, $r_0 = 0{,}205$, $r_1 = 0{,}30625$, при $l = 15$, $l = 5$. Отметим, что в вариантах 1 предполагается $s = 4$.

В качестве коэффициентов затухания, приведены значения следующих величин

$$k\chi_0 / m = \max\left\{k \operatorname{Re} \chi_1 / m, k \operatorname{Re} \chi_2 / m\right\}$$

(4.3)

Заключение: Рассмотрены ортотропные безмоментные цилиндрические оболочки с произвольными гладкими направляющими. Предпалогаются, что торцы оболочки свободны от напряжений, а

граничные образующие жестко защемлены. Показано, что в таких оболочках, квадрат кривизны которых можно представить в виде (1), могут существовать собственные колебания затухающих от свободных краев вдоль ее образующих. Частоты собственных колебаний таких ортотропных цилиндрических оболочек определяются совокупностью уравнений (2.15). Для круговой цилиндрической оболочки коэффиценты затухания определяются

Таблица 1

l	m	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
		$k\chi_0/m$	η/m	$k\chi_0/m$	η/m	$k\chi_0/m$	η/m
15	1	-0.1202	0.96516	-0.1131	0.96642		
	2	-0.0966	0.97767	-0.0928	0.97770	-0.0927	0.97770
		-0.0653	0.98989	-0.0571	0.99162	-0.0571	0.99162
	3	-0.0896	0.98082	-0.0862	0.98081	-0.0862	0.98081
		-0.0824	0.98379	-0.0779	0.98434	-0.7792	0.98434
	4	-0.0875	0.98175	-0.0840	0.98178	-0.0840	0.98178
		-0.0855	0.98254	-0.0817	0.98277	-0.0817	0.98277
	5	-0.0868	0.98203	-0.0833	0.98207	-0.0833	0.98207
		-0.0863	0.98223	-0.0827	0.98234	-0.0827	0.98235
	6	-0.0866	0.98210	-0.0831	0.98218	-0.0831	0.98215
		-0.0864	0.98220	-0.0828	0.98230	-0.0829	0.82230
	7	-0.0866	0.98213	-0.0831	0.98216	-0.0831	0.98216
		-0.0866	0.98214	-0.0831	0.98219	-0.0830	0.98219
	10	-0.8660	0.98213	-0.0832	0.98215	-0.0832	0.98215
		-0.0866	0.98213	-0.0832	0.98215	-0.0832	0.98215
	100	-0.0866	0.98213	-0.0832	0.98213	-0.0832	0.98215
				-0.0831	0.98213	-0.0832	0.98215
	3	-0.1202	0.96516	-0.1169	0.96434	-0.1169	0.96434
	4	-0.1085	0.97170	-0.1055	0.97106	-0.1055	0.97106
	5	-0.1013	0.97540	-0.0984	0.97491	-0.9839	0.97490
		-0.0408	0.99605	-0.0284	0.99793	-0.0284	0.99794

5	6	-0.0965 0.97769 -0.0653 0.98988	-0.0936 0.97730 -0.0590 0.99104	-0.0936 0.97730 -0.0590 0.99104
	7	-0.0933 0.97918 -0.0749 0.98665	-0.0904 0.97887 -0.0700 0.98740	-0.0940 0.97887 -0.0700 0.98740
	10	-0.0886 0.98126 -0.0840 0.98317	-0.0855 0.98112 -0.0803 0.98340	-0.0855 0.98113 -0.0803 0.98340
	100	-0.0866 0.98213	-0.0832 0.98213 -0.0832 0.98213	-0.0832 0.98213 -0.0831 0.98213

Таблица 2

l	m	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
		$k\chi_0/m$ η/m	$k\chi_0/m$ η/m	$k\chi_0/m$ η/m
15	1	-0.1202 0.96516	-0.1087 0.96230	
	2	-0.0965 0.97769 -0.0653 0.98988	-0.0835 0.97784 -0.0309 0.99698	-0.0824 0.97788 -0.0260 0.99783
	3	-0.0896 0.98082 -0.0825 0.98379	-0.0779 0.98081 -0.0665 0.98607	-0.0776 0.98110 -0.0661 0.98637
	4	-0.0875 0.98175 -0.0855 0.98254	-0.0759 0.98186 -0.0724 0.98349	-0.0757 0.98201 -0.0722 0.98365
	5	-0.0868 0.98203 -0.0863 0.98223	-0.0752 0.98219 -0.0739 0.98280	-0.0751 0.98228 -0.0738 0.98290
	6	-0.0866 0.98210 -0.0864 0.98220	-0.0750 0.98227 -0.0746 0.98250	-0.0749 0.98234 -0.0746 0.98249
	7	-0.0866 0.98213 -0.0866 0.98214	-0.0750 0.98223 -0.0748 0.98240	-0.0750 0.98231 -0.0749 0.98360
	10	-0.0866 0.98213 -0.0866 0.98213	-0.0753 0.98220 -0.0752 0.98220	-0.0752 0.98223 -0.0752 0.98223
	100	-0.0866 0.98213	-0.0754 0.98213	-0.0754 0.98213
	3	-0.1202 0.96516	-0.1087 0.96230	-0.1083 0.96278
	4	-0.1085 0.97170	-0.0983 0.96938	-0.0980 0.96957
	5	-0.1013 0.97540 -0.0408 0.99605	-0.0914 0.97355	-0.0913 0.97366

5	6	-0.0965 0.97767 -0.0052 0.98988	-0.0867 0.97623 -0.0417 0.99456	-0.0867 0.97623 -0.0414 0.99468
	7	-0.0933 0.97917 -0.0749 0.98665	-0.0835 0.97802 -0.0574 0.98960	-0.0834 0.97807 -0.0572 0.98974
	10	-0.0886 0.98126 -0.0840 0.98317	-0.0753 0.98220 -0.0752 0.98220	-0.0782 0.98074 -0.0710 0.98415
	100	-0.0866 0.98213	-0.0754 0.98213	-0.0755 0.98210

из уравнения (3.17), а для пластинки (3.6).

При некруговой цилиндрической оболочке для коэффицентов затухания можно использовать приближенные формулы (3.31). Для нахождения собственных частот и коэффицентов затухания аналогичных задач для прямоугольной пластинки можно отдельно использовать формулы (3.13) и (3.6) соответственно.

Численный анализ показывает, что при больших m или при малой кривизне все характеристики колебаний цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных колебаний прямоугольной пластинки со свободными торцами и жестко защемленными сторонами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pietraszkiewicz W.Szymczak (z.Eds) Shell Stractures, Theory and Applications-Proceedings of the 8th International Conference on Shell Structure (SSTA , 2005).
2. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. Выч. Мат. и мат. физика-1961. 1, N3. С. 542-545
3. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И., Свободные колебания элементов оболочечных конструкций, К: Наук, думка, 1986, 170с.

4. Гулгазарян Г.Р., Формула распределения частот цилиндрической оболочки с произвольной направляющей //Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1979, N2, С. 161-163
5. Костромин Л.В., Мяченков В.И., Колебания незамкнутых цилиндрических оболочек переменной кривизны //Прикл. Мех., 1972, 8, N 8. с. 113-116.
6. Асланян А.Г., Лидский В.Б., Распределение собственных частот тонких упругих оболочек, М.: Наука, 1974, 156с.
7. Михасев Г.И., Товстик П.Е., Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит., 2009, 290с.
8. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S.N., Influence of Variable Thickness on Displacements and Stresses in Non-thin Cylindrical Orthotropic Shells with Elliptic Cross-Section //int. Appl., Mech., 2004, 40, N8, p.900-907.
9. Semenyuk N.P., Babich I. Yu., Zhukova N.B Natural Vibrations of Corrugated Cylindrical Shells //int. Appl. Mech. , 2005, 41, N5, p.512-519.
10. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б., Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке //Волновые задачи механики. Нижный Новгород, 1992, с. 87-93.
11. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Колебания, локализованные у свободного края полубесконечной безмоментной цилиндрической оболочки. //Акуст. вісник АН Украіны. 1999, 2, N 4, с.42-48.
12. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Волны типа Рэлея в полубесконечной гофрированной цилиндрической оболочке //Изв. РАН механика твердого тела, 2001, N3, с.151-158.
13. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Колебания в консольной ортотропной гофрированной незамкнутой цилиндрической оболочке// Математика в высшей школе. Ереван: Изд-во Ер. Гос. Полит. Универс., 2004, вып. 3(9), с.46-66.
14. Гулгазарян Г.Р., Колебания безмоментной консольной орто-тропной цилиндрической оболочки переменной кривизны. //Изв.

РАН МТТ, 2007, N1, с. 84-99.
15. Гулгазарян Г.Р., Хачанян А.А., Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. //Изв. НАН Армении, Механика, 2011, т. 64, N 1, с. 37-49.
16. Гулгазарян Г.Р., Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободными краями.//Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред.// Ереван, 2005, Изд. “Гитутюн” НАН РА, с. 173-179.
17. Гулгазарян Г.Р., Срапионян, Дж.Л., Колебания тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими. //Актуальные проблемы Механики сплошной среды. 2010, Т. 1, с. 219-223.
18. Власов В.З., Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек. //Строительная промышленность. 1932, N 11, с.33-38, N 12, с. 21-26.
19. Конторович Л.В., Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двайного интеграла. // Изв. АН СССР, Отд. мат. и ест. н., 1933, N5, с. 647-653.
20. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В., Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса. //Инж. физ. журн., 1982, 44, N 11, с. 1007-1013.
21. Беспалова Е.И., К решению стационарных задач теории пологих оболочек обобщенным методом Канторовича-Власова. //Прикл. Мех., 2008, 44, N11, с. 99-111.
22. Беспалова Е.И., Решение задач теории упругости методами полных систем. //Ж. вычислительной математики и математической физики. 1989, 29, N9, с. 1346-1353.
23. Амбарцумян С.А., Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974, 446 с.

24. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по фукциональному анализу. М.: Изд., "Мир", 1979, 587с.
25. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И., Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания. //Сибирский математический журнал, 1973, т.4, N5, с. 978-986.
26. Гельденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е., Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979, 383с.
27. Солонников В.А., Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса, Л. Ниренберга//Изв. АН СССР, математика, 1964, Т.28, с.665-706. Труды матем. ин-та АН СССР, 1970, т. 110, N6, с.233-297.
28. S.Agman, A.Douglis, L.Nirenberg, Estimates mear the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. Comm.Pure., Appl. Math., 1964, V.17, N1.
29. Солонников В.А., О матрицах Грина для эллиптических кривых задач I. //Труды МИАН, 110(1970), с.107-194.
30. Товмасян Н.Е., Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка. Докл. АН СССР, 1964, 159 , с. 995-997.
31. Михлин С.Г., Вариационные методы в математической физике. М., Наука, 1970, 510с.
32. Конторович Л.В., Крылов В.И., Приближенные методы высшего анализа. М.-Л: Гостехизд., 1952, 656 с.
33. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев. // Изв. АН СССР, МТТ, 1982, N3, с. 171-174.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՈՒՂՂՈՐԴ ԿՈՐՈՎ ԲԱՑ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ, ԵՐԲ ԾԱՅՐԵՐԸ ԱԶԱՏ ԵՆ, ԻՍԿ ԵԶՐԱՅԻՆ ԾՆԻՉՆԵՐԸ ԿՈՇՏ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ

Ջ. Լ. ՍՐԱՊԻՈՆՅԱՆ

Հետազոտվել է կամայական ուղղորդ կորով բաց անմոմենտ օրթոտրոպ գլանային թաղանթի սեփական տատանումները, երբ ծայրերը ազատ են, իսկ եզրային ծնիչները կոշտ ամրակցված:

SUMMARY

THE VIBRATIONS OF UNMOMENT ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH VARIABLE CURVATURE, WITH FREE ENDS AND RIGID-CLAMPED BOUNDARY GENERATORS

J. L. SRAPIONYAN

The free edge vibrations of orthotropic unmoment non-closed cylindrical shell with variable curvature, with free ends and rigid-clamped boundary generators studied.