

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

ФЕВРАЛЬ, 1967

ВЫПУСК 1

ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ ПРИ ДИФфуЗИИ ФОТОНОВ. III	<i>В. В. Соболев</i>	5
МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФфуЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ. II	<i>Р. И. Костик</i>	17
К НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ КОНФИГУРАЦИЙ ГАЛАКТИКИ С УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫМ КОНТИНУУМОМ	<i>В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян</i>	41
	<i>Б. Е. Маркарян</i>	55
О МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ЭФФЕКТЕ ОТРАЖЕНИЯ В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДАХ	<i>И. Б. Пустыльник</i>	69
НАБЛЮДЕНИЯ СВЕРХНОВОЙ 1959b в NGC 4921	<i>Р. Барбон</i>	85
ЗАМЕЧАНИЕ О ПЛОТНОСТИ ВОДОРОДА В СКОПЛЕНИЯХ ГАЛАКТИК	<i>И. Д. Караченцев</i>	89
О ПОЛОЖЕНИИ ГАЗОПЫЛЕВОГО СЛОЯ В ГАЛАКТИКЕ M 31	<i>Е. Н. Макаренко</i>	93
О ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТИ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ НА ДИАГРАММЕ ЦВЕТ-СВЕТИМОСТЬ	<i>А. М. Эйгенсон</i>	103
НАБЛЮДАТЕЛЬНАЯ СЕЛЕКЦИЯ И СТАТИСТИКА ВИЗУАЛЬНО-ДВОЙНЫХ СИСТЕМ. II. СТАТИСТИКА	<i>Б. И. Фесенко</i>	111
О ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ И КОЛОРИМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЭРУПТИВНЫХ ЗВЕЗД. IV	<i>Р. Е. Гершберг</i>	127
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ		
СВЕРХНОВАЯ В NGC 2276	<i>С. Г. Исхударян, Р. К. Шахбазян</i>	133

Е Р Е В А Н

Редакционная коллегия

В. А. Амбарцумян (главный редактор), А. А. Боярчук, Б. А. Воронцов-Вельяминов,
Г. А. Гурзадян, С. А. Каплан, Б. Е. Маркарян,
Л. В. Мирзоян (зам. главного редактора), В. В. Соболев

Խմբագրական կոլեգիա

Ա. Ա. Բոյաժրչուկ, Գ. Ա. Գուրգադյան, Ս. Ա. Կապլան, Վ. Հ. Համբարձումյան (գլխավոր խմբագիր),
Բ. Ե. Մարգարյան, Լ. Վ. Միրզոյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Վ. Սոբոլև,
Բ. Ա. Վորոնցով-Վելյամինով

„АСТРОФИЗИКА“ — научный журнал, издаваемый Академией наук Армянской ССР. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой.

Журнал предназначается для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал выходит 4 раза в год, цена одного номера 1 рубль, подписная плата за год 4 рубля. Подписку можно произвести во всех отделениях Союзпечати, а за границей через агентство „Международная книга“, Москва, 200.

ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ ПРИ ДИФФУЗИИ ФОТОНОВ. III

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 28 октября 1966

Получены уравнения и формулы, определяющие среднее число рассеяний фотона в плоском слое конечной оптической толщины. Рассмотрены два случая источников излучения: 1) на плоский слой падает излучение извне, 2) источники излучения распределены в слое равномерно. Полученные формулы упрощены для слоя большой оптической толщины.

В первой статье этой серии [1] были даны общие формулы для среднего числа рассеяний фотона и сделано их применение сначала к одномерной, а потом к трехмерной полубесконечной среде. В настоящей статье среднее число рассеяний фотона определяется для плоского слоя конечной оптической толщины τ_0 .

Как и раньше, будем считать, что фотон, поглощенный в данном месте переизлучается затем (то есть рассеивается) с вероятностью λ или испытывает истинное поглощение с вероятностью $1 - \lambda$, причем величина λ не меняется в среде. Будем также предполагать, что элементарный объем рассеивает излучение изотропно и без изменения частоты.

В этой статье сперва определяется среднее число рассеяний фотона, поглощенного на данной оптической глубине τ (и диффундирующего после этого в среде). Затем среднее число рассеяний фотона находится для некоторых частных типов источников излучения. В конце статьи полученные формулы применяются к случаю, когда оптическая толщина рассматриваемого плоского слоя очень велика ($\tau_0 \gg 1$).

Среда конечной оптической толщины. Пусть $Q(\tau, \tau_0)$ — среднее число рассеяний фотона, поглощенного на оптической глубине τ в плоском слое оптической толщины τ_0 . Как было показано ранее [1], эта величина определяется формулой

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{1 - P(\tau, \tau_0)}{1 - \lambda}, \quad (1)$$

где $P(\tau, \tau_0)$ — полная вероятность выхода из плоского слоя фотона, поглощенного на глубине τ (то есть вероятность выхода через обе границы слоя во всех направлениях).

Для получения уравнения, определяющего величину $P(\tau, \tau_0)$, воспользуемся уравнением для вероятности выхода фотона в заданном направлении

$$p(\tau, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} E_1 |\tau - t| p(t, \eta, \tau_0) dt + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\lambda}}. \quad (2)$$

Здесь $p(\tau, \eta, \tau_0) d\omega$ — вероятность того, что фотон, поглощенный на глубине τ , выйдет из слоя через границу $\tau = 0$ под углом $\arcs \cos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$ (см. [2], гл. 6).

Очевидно, что

$$P(\tau, \tau_0) = 2\pi \int_0^1 [p(\tau, \eta, \tau_0) + p(\tau_0 - \tau, \eta, \tau_0)] d\eta. \quad (3)$$

Поэтому величина $P(\tau, \tau_0)$ будет определяться уравнением

$$P(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} E_1 |\tau - t| P(t, \tau_0) dt + \frac{\lambda}{2} E_2 \tau + \frac{\lambda}{2} E_2 (\tau_0 - \tau). \quad (4)$$

Однако вместо рассмотрения уравнения (4) удобно получить уравнение, определяющее непосредственно искомую величину $Q(\tau, \tau_0)$. Для этого в уравнение (4) следует подставить выражение $P(\tau, \tau_0)$ через $Q(\tau, \tau_0)$, вытекающее из (1). Сделав это, находим

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} E_1 |\tau - t| Q(t, \tau_0) dt + 1. \quad (5)$$

Ясно, что уравнение (5) может быть также получено из простых вероятностных соображений.

Пусть $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ — резольвента основного интегрального уравнения рассеяния света в плоском слое (и, в частности, уравнения (5)). Как известно, (см. [3]), резольвента $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ выражается через функцию $\Phi(\tau, \tau_0) = \Gamma(\tau, 0, \tau_0)$, которая должна играть очень важную роль в теории рассеяния света. Поэтому и величину $Q(\tau, \tau_0)$ мы выразим через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$.

На основании определения резольвенты имеем

$$Q(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, \tau', \tau_0) d\tau'. \quad (6)$$

Но резольвента $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ связана с функцией $\Phi(\tau, \tau_0)$ уравнением

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Phi(\tau, \tau_0) \Phi(\tau', \tau_0) - \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0) \Phi(\tau_0 - \tau', \tau_0). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) (точнее говоря, дифференцируя (6) по τ , используя (7) и затем интегрируя), получаем

$$Q(\tau, \tau_0) = \Psi(\tau_0, \tau_0) [\Psi(\tau, \tau_0) + \Psi(\tau_0 - \tau, \tau_0) - \Psi(\tau_0, \tau_0)], \quad (8)$$

где

$$\Psi(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \tau_0) d\tau'. \quad (9)$$

Формула (8) и дает искомое выражение $Q(\tau, \tau_0)$ через $\Phi(\tau, \tau_0)$. Напомним, что функция $\Phi(\tau, \tau_0)$ определяется уравнением

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} E_1|\tau-t| \Phi(t, \tau_0) dt + \frac{\lambda}{2} E_1\tau. \quad (10)$$

При небольших значениях τ_0 функция $\Phi(\tau, \tau_0)$ была табулирована [4]. При $\tau_0 \gg 1$ существуют асимптотические формулы для этой функции, которыми мы воспользуемся ниже.

Если величина $Q(\tau, \tau_0)$ известна, то могут быть найдены и величины $Q_1(\tau, \tau_0)$ и $Q_2(\tau, \tau_0)$, представляющие собой средние числа рассеяний фотонов, выходящих из среды наружу и гибнущих в среде соответственно. Для этого служат формулы (10) и (11) первой из статей [1]. Однако так как в эти формулы входит производная $\frac{\partial \Psi(\tau, \tau_0)}{\partial \lambda}$, то их использование встречает некоторые трудности.

Отметим один частный случай формулы (8), а именно допустим, что фотон поглощается на границе плоского слоя. Полагая в формуле (8) $\tau = 0$, находим

$$Q(0, \tau_0) = \Psi(\tau_0, \tau_0). \quad (11)$$

Можно также получить другую формулу для величины $Q(0, \tau)$, выражающую ее через нулевые моменты функций $\varphi(\tau, \tau_0)$ и $\psi(\tau, \tau_0)$ Амбарцумяна. Полагая $\tau = 0$ в формуле (1), имеем

$$Q(0, \tau_0) = \frac{1 - P(0, \tau_0)}{1 - \lambda}. \quad (12)$$

Но из (3), при $\tau = 0$ следует

$$P(0, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} [\alpha_0(\tau_0) + \beta_0(\tau_0)], \quad (13)$$

где принято во внимание, что

$$p(0, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta, \tau_0) \quad \text{и} \quad p(\tau_0, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{4\pi} \psi(\eta, \tau_0) \quad (14)$$

и использованы обозначения

$$\alpha_n(\tau_0) = \int_0^1 \varphi(\eta, \tau_0) \eta^n d\eta, \quad \beta_n(\tau_0) = \int_0^1 \psi(\eta, \tau_0) \eta^n d\eta. \quad (15)$$

Подставляя (13) в (12) и пользуясь соотношением (см. [2] стр. 106)

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 - \frac{\lambda}{2} \beta_0\right) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0\right) = 1 - \lambda, \quad (16)$$

находим

$$Q(0, \tau_0) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0}. \quad (17)$$

В случае чистого рассеяния (то есть при $\lambda = 1$) имеем

$$\alpha_0(\tau_0) + \beta_0(\tau_0) = 2 \quad (18)$$

и формула (17) принимает вид

$$Q(0, \tau_0) = \frac{1}{\beta_0(\tau_0)}. \quad (19)$$

Как увидим дальше, среднее число рассеяний фотонов и во многих других случаях выражается через функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ и их моменты. Эти функции были введены в теорию рассеяния света В. А. Амбарцумяном [5] и подробно изучены Чандрасекаром [6] (обозначившим их через $X(\mu, \tau_0)$ и $Y(\mu, \tau_0)$). Таблицы этих функций составили Собоути [7] и Карлстедт и Малликив [8]. При больших значениях τ_0 имеются асимптотические формулы для функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$, которые мы применим ниже.

Внешние источники излучения. Знание функции $Q(\tau, \tau_0)$ позволяет определить среднее число рассеяний фотона при любых источниках излучения. Это можно сделать по формуле

$$Q^* = \frac{\int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) f(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_0} f(\tau) d\tau}, \quad (20)$$

где $f(\tau) d\tau$ — число фотонов, приходящих непосредственно от источников излучения и поглощаемых между глубинами τ и $\tau + d\tau$.

Рассмотрим сначала случай, когда источники излучения находятся вне среды. Мы найдем среднее число рассеяний фотонов в зависимости от угла их падения, который обозначим через $\text{arcs cos } \zeta$.

В данном случае $f(\tau) = e^{-\frac{\tau}{c}}$ и из формулы (20) следует

$$Q^* = \frac{\int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) e^{-\frac{\tau}{c}} \frac{d\tau}{c}}{1 - e^{-\frac{\tau_0}{c}}}. \quad (21)$$

Подставляя в (21) выражение (8) и интегрируя по частям, находим

$$Q^* = \frac{\Psi(\tau_0, \tau_0)}{1 - e^{-\frac{\tau_0}{c}}} \left\{ 1 - e^{-\frac{\tau_0}{c}} + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{c}} [\Phi(\tau, \tau_0) - \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)] d\tau \right\}. \quad (22)$$

Но, как показано было ранее [3], функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ выражаются через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$ посредством соотношений

$$\varphi(\zeta, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{c}} \Phi(\tau, \tau_0) d\tau, \quad (23)$$

$$\psi(\zeta, \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{c}} + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0) d\tau. \quad (24)$$

Поэтому вместо (22) получаем

$$Q^* = \Psi(\tau_0, \tau_0) \frac{\varphi(\zeta, \tau_0) - \psi(\zeta, \tau_0)}{1 - e^{-\frac{\zeta}{c}}}. \quad (25)$$

Так как сопоставление формул (11) и (17) показывает, что

$$\Psi(\tau_0, \tau_0) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0}, \quad (26)$$

то формулу (25) можно переписать также в виде

$$Q^* = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0} \frac{\varphi(\zeta, \tau_0) - \psi(\zeta, \tau_0)}{1 - e^{-\frac{\zeta}{c}}}. \quad (27)$$

Вычисление среднего числа рассеяний фотонов по формуле (27) не представляет труда, так как функции $\varphi(\zeta, \tau_0)$ и $\psi(\zeta, \tau_0)$ и их моменты хорошо известны.

При $\zeta = 0$ формула (27), как и надо было ожидать, переходит в формулу (17).

Равномерное распределение источников излучения. Допустим теперь, что источники излучения находятся внутри среды. Если они излучают изотропно, то среднее число рассеяний фотонов опять можно найти по формуле (20), в которой под $f(\tau) d\tau$ надо понимать число фотонов, излучаемых между глубинами τ и $\tau + d\tau$.

Рассмотрим случай, когда источники излучения распределены в среде равномерно, то есть $f(\tau) = 1$. На основании формулы (20) имеем

$$Q^* = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) d\tau. \quad (28)$$

Подставляя в (28) выражение (8) и интегрируя при учете (9), получаем

$$Q^* = \Psi(\tau_0, \tau_0) \left[\Psi(\tau_0, \tau_0) - \frac{2}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) \tau d\tau \right]. \quad (29)$$

Величина $\Psi(\tau_0, \tau_0)$ выражается через моменты функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ при помощи формулы (26). Мы можем также выразить через моменты этих функций и интеграл, входящий в (29).

Чтобы сделать это, воспользуемся следующим уравнением

$$\frac{\partial p(\tau, \eta, \tau_0)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau} p(\tau, \eta, \tau_0) + \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta, \tau_0) \Phi(\tau, \tau_0) - \frac{\lambda}{4\pi} \psi(\eta, \tau_0) \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0), \quad (30)$$

вытекающим из (2) (см. [2], гл. 6), и примем во внимание, что

$$\Phi(\tau, \tau_0) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta, \tau_0) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (31)$$

Умножая (30) на $2\pi d\tau \eta d\eta$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 и по η в пределах от 0 до 1, получаем

$$2\pi \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^1 p(\tau, \eta, \tau_0) d\eta = \frac{\lambda}{2} (\alpha_1 - \beta_1) \Psi(\tau_0, \tau_0). \quad (32)$$

Здесь мы использовали формулы (9) и (14).

Умножая (30) на $2\pi \tau d\tau d\eta$ и интегрируя в тех же пределах, находим

$$2\pi \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^1 p(\tau, \eta, \tau_0) d\eta = \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 - \frac{\lambda}{2} \beta_0\right) \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) \tau d\tau + \frac{\lambda}{2} \beta_0 \tau_0 \Psi(\tau_0, \tau_0). \quad (33)$$

Из сопоставления формул (32) и (33) получаем

$$\int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) \tau d\tau = \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \tau_0}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 - \frac{\lambda}{2} \beta_0} \Psi(\tau_0, \tau_0), \quad (34)$$

или, при учете (16) и (26),

$$\int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) \tau d\tau = \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \tau_0}{1 - \lambda}. \quad (35)$$

Подстановка (26) и (35) в (29) дает

$$Q^* = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0} - \frac{\lambda (\alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \tau_0)}{\tau_0 (1 - \lambda)} \right]. \quad (36)$$

Этой формулой и определяется среднее число рассеяний фотона при равномерном распределении источников излучения в плоском слое.

В случае чистого рассеяния вычисление интеграла по формуле (35) дает неопределенность, так как при $\lambda = 1$ имеем

$$\alpha_1 - \beta_1 = \beta_0 \tau_0. \quad (37)$$

Чтобы раскрыть неопределенность, надо воспользоваться уравнением (30) и тем фактом, что в данном случае

$$2\pi \int_0^1 [p(\tau, \eta, \tau_0) + p(\tau_0 - \tau, \eta, \tau_0)] d\eta = 1. \quad (38)$$

Это уже было сделано ранее (см. [2], стр. 214) и оказалось, что

$$\int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) \tau d\tau = \frac{\frac{\tau_0^3}{3} \beta_0 + \tau_0^2 \beta_1 + 2\tau_0 \beta_2 - 2(\alpha_3 - \beta_3)}{\beta_0 [\tau_0 (\alpha_1 + \beta_1) + 2(\alpha_2 + \beta_2)]}. \quad (39)$$

Подставляя (26) и (39) в формулу (29) и учитывая (18) и (37), получаем

$$Q^* = \frac{\frac{1}{6} \tau_0^3 \beta_0 + \tau_0 (\alpha_2 - \beta_2) + 2(\alpha_3 - \beta_3)}{\beta_0^2 \tau_0 \left[\frac{\tau_0}{2} (\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_2 + \beta_2 \right]}. \quad (40)$$

Формула (40) и дает среднее число рассеяний фотона при $\lambda = 1$.

Плоский слой большой оптической толщины. Полученные выше формулы сильно упрощаются в случае, когда оптическая толщина плоского слоя очень велика ($\tau_0 \gg 1$). Очевидно что этот случай наиболее интересен для практических применений.

Мы видели выше, что величина $Q(\tau, \tau_0)$, представляющая собой среднее число рассеяний фотона, поглощенного на любой оптической глубине τ , при помощи формул (8) и (9) выражается через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$. Для этой же функции было получено [9] асимптотическое вы-

ражение через функцию $\Phi(\tau)$ для полубесконечной среды. Поэтому можно получить асимптотическое выражение и для величины $Q(\tau, \tau_0)$ через функцию $\Phi(\tau)$.

Оказывается, что вид асимптотической формулы для $\Phi(\tau, \tau_0)$ существенно зависит от того, какова роль истинного поглощения в данном слое. Поэтому мы будем различать следующие два случая: 1) роль истинного поглощения в слое велика ($k\tau_0 \gg 1$), 2) эта роль мала ($k\tau_0 \ll 1$). Здесь k определяется уравнением

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1. \quad (41)$$

Ко второму случаю относится, в частности, среда, в которой происходит чистое рассеяние излучения ($k = 0$).

В первом из упомянутых случаев функция $\Psi(\tau, \tau_0)$, связанная с $\Phi(\tau, \tau_0)$ формулой (9), отличается от функции $\Psi(\tau)$ для полубесконечной среды на величину, содержащую малый множитель $e^{-k\tau_0}$. В первом приближении можно заменить $\Psi(\tau, \tau_0)$ на $\Psi(\tau)$. Это позволяет переписать формулу (8) для данного случая в виде

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \left[\Psi(\tau) + \Psi(\tau_0 - \tau) - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \right]. \quad (42)$$

Здесь принято во внимание, что

$$\Psi(\tau_0, \tau_0) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (43)$$

Это следует из формулы (26), так как при $\tau_0 = \infty$ имеем

$$1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 = \sqrt{1-\lambda} \quad \text{и} \quad \beta_0 = 0.$$

Пользуясь формулами (20) и (42), мы можем получить асимптотическое выражение для величины Q^* , представляющей собой среднее число рассеяний фотонов при заданных источниках излучения.

Однако при рассмотренных выше типах источников излучения величину Q^* можно найти непосредственно из формул (25) и (36). Для этого мы должны воспользоваться асимптотическими формулами для функций $\varphi(\tau, \tau_0)$ и $\psi(\tau, \tau_0)$ и их моментов [10]. Применяя указанные асимптотические формулы и отбрасывая члены порядка $e^{-2k\tau_0}$ и $e^{-\frac{\tau_0}{\epsilon}}$, вместо формулы (25) получаем

$$Q^* = \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}} \left[1 - \frac{C_1}{k(1-k)} e^{-k\tau_0} \right], \quad (44)$$

где $\varphi(\tau)$ представляет собой функцию $\varphi(\tau, \tau_0)$ при $\tau = \infty$, а величина C_1 определяется из соотношения

$$C_1 \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{(1-k\eta)^2} \eta d\eta = 2k \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{1-k^2\eta^2} \eta d\eta. \quad (45)$$

Вместо формулы (36) аналогично находим

$$Q^* = \frac{1}{1-\lambda} \left[1 - \frac{\lambda a_1(\infty)}{\tau_0 \sqrt{1-\lambda}} \right], \quad (46)$$

где откинута членов порядка $e^{-k\tau_0}$.

Формула (44) дает среднее число рассеяний фотонов при освещении плоского слоя внешними источниками излучения (точнее говоря, при падении фотонов под углом $\arcs \cos \zeta$ к нормали), а формула (46) — среднее число рассеяний фотонов при равномерном распределении источников излучения в слое.

Во втором из указанных выше случаев (то есть при $k\tau_0 \ll 1$) асимптотическая формула для функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ имеет вид

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) - \frac{\tau + q(\tau) - q(\tau_0 - \tau) + q(\infty)}{\tau_0 + 2q(\infty)} \sqrt{3}, \quad (47)$$

где $q(\tau)$ — функция Хопфа. Поэтому для функции $\Psi(\tau, \tau_0)$ получаем следующее асимптотическое выражение

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, \tau_0) = & \frac{\sqrt{3}}{\tau_0 + 2q(\infty)} \left\{ [\tau_0 + 2q(\infty)][\tau + q(\tau)] - \right. \\ & \left. - \frac{\tau^2}{2} - q(\infty)\tau - \int_0^{\tau} [q(\tau') - q(\tau_0 - \tau')] d\tau' \right\}, \end{aligned} \quad (48)$$

где принято во внимание, что

$$\Psi(\tau) = [\tau + q(\tau)] \sqrt{3}. \quad (49)$$

Из формулы (46) следует

$$\Psi(\tau_0, \tau_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\tau_0 + 2q(\infty)]. \quad (50)$$

Подстановка (48) и (50) в формулу (8) дает

$$Q(\zeta, \tau_0) = \frac{3}{2} \left\{ [\tau_0 + 2q(\infty)] [q(\zeta) + q(\tau_0 - \zeta) - q(\infty) + \right. \\ \left. + \tau(\tau_0 - \zeta) - 2 \int_0^{\zeta} [q(\tau') - q(\tau_0 - \tau')] d\tau' \right\}. \quad (51)$$

Этой формулой и определяется среднее число рассеяний фотона, поглощенного на оптической глубине ζ , в плоском слое большой оптической толщины τ_0 при малой роли истинного поглощения.

В рассматриваемом случае автор [10] и недавно ван де Хюлст [11] получили следующие асимптотические выражения для функций $\varphi(\zeta, \tau_0)$ и $\psi(\zeta, \tau_0)$:

$$\varphi(\zeta, \tau_0) = \varphi(\zeta) \left[1 - \frac{\zeta}{\tau_0 + 2q(\infty)} \right], \quad (52)$$

$$\psi(\zeta, \tau_0) = \varphi(\zeta) \frac{\zeta}{\tau_0 + 2q(\infty)}, \quad (53)$$

где $\varphi(\zeta)$ — функция $\varphi(\zeta, \tau_0)$ при $\tau_0 = \infty$ и $\lambda = 1$.

Подставляя эти выражения в формулу (27), находим, что среднее число рассеяний фотона, входящего в плоский слой под углом $\arccos \zeta$ к нормали, равно

$$Q^* = \varphi(\zeta) \left[\frac{\tau_0}{2} + q(\infty) - \zeta \right] \sqrt{3}. \quad (54)$$

Для нахождения среднего числа рассеяний фотона в плоском слое при равномерном распределении источников мы должны подставить выражения (52) и (53) в формулу (40). Делая это и отбрасывая члены порядка $\frac{1}{\tau_0}$, имеем

$$Q^* = \frac{1}{4} \tau_0^2 + \frac{3}{2} q(\infty) \tau_0 + 3q^2(\infty). \quad (55)$$

Такой же результат получается и при подстановке (51) в (28).

Так как мы считаем, что оптическая толщина слоя велика, то вместо (53) можем пользоваться более простой формулой

$$Q^* = \frac{1}{4} \tau_0^2. \quad (56)$$

Заметим, что эта формула вытекает также из формулы (46) первой из статей [1], если ограничиться в ней членом, содержащим τ_0^2 , и заменить τ_0 на $\tau_0 \sqrt{3}$ (как это обычно делается для приближенного перехода от одномерной среды к трехмерной).

Ленинградский
государственный университет

NUMBER OF SCATTERINGS OF DIFFUSING PHOTONS. III

V. V. SOBOLEV

Equations and formulas for the mean number of scatterings of photons diffusing in plane layer of finite optical thickness are given. Two forms of sources of radiation are considered: 1) unidirectional external illumination; 2) uniform distribution of embedded sources. Simplifications arising in case of the layer of large optical thickness are also studied.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, *Астрофизика*, 2, 135, 237, 1966.
2. В. В. Соболев, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, Гостехиздат, М., 1956.
3. В. В. Соболев, *ДАН СССР*, 120, 69, 1958.
4. В. В. Соболев, И. Н. Минин, *Астрон. ж.*, 38, 1025, 1961.
5. В. А. Амбарцумян, *ДАН СССР*, 38, 257, 1943.
6. С. Чандрасекар, *Перенос лучистой энергии*, ИЛ, 1953.
7. Y. Sobouti, *Ap. J., Suppl. ser.*, 7, № 72, 1963.
8. J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin, *Ap. J., Suppl. ser.*, 12, № 113, 1966.
9. В. В. Соболев, *ДАН СССР*, 155, 316, 1964.
10. В. В. Соболев, *Астрон. ж.*, 34, 336, 1957.
11. H. C. van de Hulst, *Icarus*, 3, 336, 1964.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

ФЕВРАЛЬ, 1967

ВЫПУСК 1

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФFUЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ. II

Р. И. КОСТИК

Поступила 10 ноября 1966

Рассматривается задача о диффузии резонансного излучения в среде конечной оптической толщины. Предполагается, что диффузия излучения происходит с полным перераспределением по частотам. Вычислены матрицы A^{-1} , с помощью которых определяется функция источника $B(\tau)$.

Как известно, интенсивность излучения, выходящего из среды в резонансной линии, дается выражением

$$I(\tau_0, \theta, x) = \int_0^{\tau_0} B(\tau) \alpha(x) e^{-2(x)\sec\theta\tau} \sec\theta d\tau, \quad (1)$$

причем

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|t - \tau|) B(t) dt + g(\tau), \quad (2)$$

где $B(t)$ — функция источника; λ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния; $g(\tau)$ — мощность первичных источников излучения;

$$K(y) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) dx \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)y] dx; \quad \alpha(x) = e^{-x^2}.$$

Предполагается, что в элементарном акте рассеяния имеет место полное перераспределение энергии по частотам, коэффициент поглощения — доплеровский, индикатриса рассеяния — сферическая, поглощение в частотах непрерывного спектра отсутствует.

Уравнения (1) и (2) можно заменить следующей системой матричных уравнений (см. [1])

$$\begin{aligned} I - CB &= 0 \\ AB + G &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \|a_{ik} - \delta_{ik}\|^m, & B &= \begin{bmatrix} B(\tau_1) \\ B(\tau_2) \\ \vdots \\ B(\tau_m) \end{bmatrix}, & G &= \begin{bmatrix} g(\tau_1) \\ g(\tau_2) \\ \vdots \\ g(\tau_m) \end{bmatrix}, \\ C &= \|c_{jk}\|^m, & I &= \begin{bmatrix} I(\tau_0, \theta, x_1) \\ I(\tau_0, \theta, x_2) \\ \vdots \\ I(\tau_0, \theta, x_m) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь A, C — квадратные матрицы порядка m ; B, G, I — столбцовые порядка m ; δ_{ik} — символ Кронекера: $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$.

Элементы матриц A и C вычисляются по формулам

$$a_{ik} = \frac{\lambda}{2} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} K\left(\left|t - \frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2}\right|\right) dt \quad i, k = 1, 2, \dots, m$$

$$c_{j,k} = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \alpha(x_j) e^{-\alpha(x_j) \sec \theta z} \sec \theta dz \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Из (3) находим

$$I = TG \quad (4)$$

$$B = -A^{-1}G, \quad (5)$$

где $T = -CA^{-1}$.

Таким образом, имея матрицы T и A^{-1} по формулам (4) и (5) легко найти контур линии излучения и функцию источника при заданном распределении источников возбуждения в среде.

Матрицы T были приведены в предыдущей работе [1]. В данной работе, при перечисленных выше предположениях, даются матрицы $-A^{-1}$. Область интегрирования τ_0 разбита на 14 интервалов (см. рис. 1), вероятность выживания кванта λ принята равной единице. Для τ_0 выбраны значения: 1, 2, ..., 10, 20, ..., 100.

Погрешность определения $B(\tau)$ в случае $g(\tau) = \text{const}$ не превышает 3—12 единиц четвертой значащей цифры для $\tau_0 = 1—10$ и 5—16 единиц третьей значащей цифры для $\tau_0 = 20—100$ (более подробно см. [1]).

Численные значения элементов матрицы $-A^{-1}$ представлены в форме $s \cdot 10^n$, где $0.1 \leq s < 1$. Например, число 1452—1 следует читать $0.1452 \cdot 10^{-1} = 0.01452$.

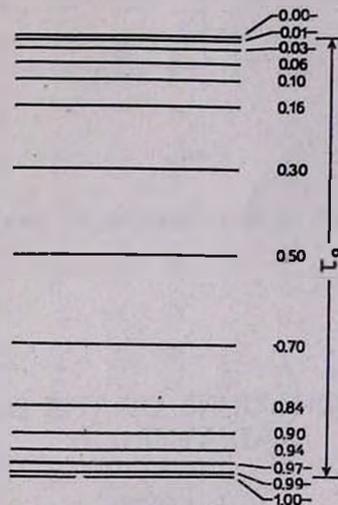


Рис. 1.

Распределение источников возбуждения в данной задаче считается известным — значения $g(\tau)$ следует задать для следующих оптических глубин τ (в единицах τ_0): 0.005, 0.020, 0.045, 0.080, 0.130, 0.230, 0.400, 0.600, 0.770, 0.870, 0.920, 0.955, 0.980, 0.995. В этих же точках получим искомую функцию $B(\tau)$.

Вычисление матриц A^{-1} велось на электронно-вычислительной машине Института кибернетики АН УССР.

Рассмотрим пример. Пусть источники возбуждения распределены в среде с оптической толщиной $\tau_0 = 10$ по закону

$$g(\tau) = \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x) \alpha(x) E_2[\alpha(x)\tau] dx + \\ + \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x) \alpha(x) E_2[\mu(x)(\tau_0 - \tau)] dx,$$

где $i(x)$ — контур фраунгоферовой линии H_α в спектре фотосферы. График этой функции показан на рис. 2 ($\omega = 0.3$). Умножая квадратную

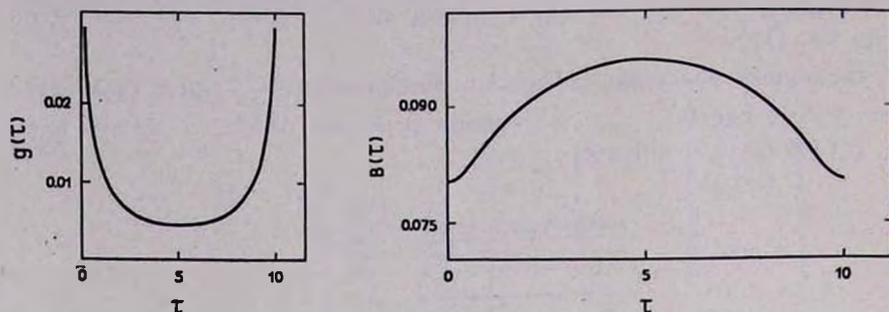


Рис. 2.

матрицу $-A^{-1}$ ($\tau_0 = 10$) на столбцевую G , получим функцию источника (рис. 2).

ГАО АН УССР

THE MATRIX EQUATIONS OF THE DIFFUSION OF RADIATION. II

R. I. KOSTIK

The problem of diffusion of resonance radiation in a medium of finite optical thickness is considered. It is assumed that the radiation diffuses with complete redistribution in frequency. The matrixes A^{-1} are tabulated. The source function $B(\tau)$ is computed using these matrixes.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Яковкин, Р. И. Костик, *Астрофизика*, 2, 379, 1966.

МАТРИЦЫ A^{-1} .

$$\tau_0 = 1$$

1025	1	3616--1	4385--1	5019--1	6553--1	1284	0	1469	0	1167	0	6647--1	2475--1	1531--1	1082--1	6863--2	3312--2
1783--1	1046	1	5008--1	5443--1	6967--1	1347	0	1531	0	1212	0	6895--1	2566--1	1586--1	1121--1	7110--2	3431--2
1452--1	3309--1	1066--1	6391--1	7711--1	1451	0	1625	0	1280	0	7259--1	2699--1	1668--1	1178--1	7472--2	3605--2	
1250--1	2711--1	4763--1	1035--1	9140--1	1606	0	1755	0	1369	0	7735--1	2871--1	1773--1	1252--1	7939--2	3830--2	
1089--1	2316--1	3839--1	6035--1	1124--1	1891	0	1947	0	1494	0	8392--1	3107--1	1917--1	1353--1	8574--2	4135--2	
9054--2	1900--1	3064--1	4505--1	7859--1	1259	1	2413	0	1754	0	9696--1	3570--1	2197--1	1548--1	9803--2	4724--2	
7231--2	1507--1	2399--1	3447--1	5719--1	1661	0	1358	1	2328	0	1218	0	4414--1	2701--1	1896--1	1198--1	5764--2
5764--2	1198--1	1896--1	2701--1	4414--1	1218	0	2328	0	1358	1	1661	0	5719--1	3447--1	2399--1	1507--1	7231--2
4724--2	9803--2	1548--1	2197--1	3570--1	9696--1	1754	0	2413	0	1259	1	7859--1	4505--1	3064--1	1900--1	9054--2	
4135--2	8574--2	1353--1	1917--1	3107--1	8392--1	1494	0	1947	0	1891	0	1124	1	6035--1	3839--1	2316--1	1089--1
3830--2	7939--2	1252--1	1773--1	4871--1	7735--1	1369	0	1755	0	1606	0	9140--1	1086	1	4763--1	2711--1	1250--1
3605--2	7472--2	1178--1	1668--1	2699--1	7259--1	1280	0	1625	0	1451	0	7711--1	6391--1	1066	1	3309--1	1452--1
3431--2	7110--2	1121--1	1586--1	2566--1	6895--1	1212	0	1531	0	1347	0	6967--1	5443--1	5008--1	1046	1	1783--1
3312--2	6863--2	1082--1	1531--1	2475--1	6647--1	1167	0	1469	0	1284	0	6553--1	5019--1	4385--1	3616--1	1025	1

$$\tau_0 = 2$$

1047	1	6656-1	7980-1	9066-1	1175	0	2292	0	2577	0	1966	0	1055	0	3713-1	2221-1	1523-1	9391-2	4427-2
3275-1	1087-1	9343-1	1006	0	1277	0	2461	0	2747	0	2090	0	1120	0	3939-1	2355-1	1615-1	9957-2	4693-2
2639-1	6165-1	1127-1	1214	0	1452	0	2722	0	2999	0	2269	0	1213	0	4264-1	2548-1	1746-1	1077-1	5075-2
2256-1	5005-1	9040-1	1168	1	1768	0	3100	0	3336	0	2503	0	1333	0	4679-1	2795-1	1915-1	1180-1	5562-2
1951-1	4243-1	7225-1	1166	0	1246	1	3755	0	3822	0	2825	0	1497	0	5242-1	3129-1	2142-1	1320-1	6217-2
1603-1	3441-1	5701-1	8614-1	1544	0	1527	1	4924	0	3471	0	1813	0	6317-1	3762-1	2572-1	1583-1	7456-2	
1251-1	2668-1	4365-1	6455-1	1104	0	3363	0	1746	1	4802	0	2392	0	8220-1	4871-1	3319-1	2039-1	9588-2	
9588-2	2039-1	3319-1	4871-1	8220-1	2392	0	4802	0	1746	1	3363	0	1104	0	6455-1	4365-1	2668-1	1251-1	
7456-2	1583-1	2572-1	3762-1	6317-1	1813	0	3471	0	4924	0	1527	1	1544	0	8614-1	5701-1	3441-1	1603-1	
6217-2	1320-1	2142-1	3129-1	5242-1	1497	0	2825	0	3822	0	3755	0	1246	1	1166	0	7225-1	4243-1	1951-1
5562-2	1180-1	1915-1	2795-1	4679-1	1333	0	2503	0	3336	0	3100	0	1768	0	1168	1	9040-1	5005-1	2256-1
5075-2	1077-1	1746-1	2548-1	4264-1	1213	0	2269	0	2999	0	2722	0	1452	0	1214	0	1127-1	6165-1	2639-1
4693-2	9957-2	1615-1	2355-1	3939-1	1120	0	2090	0	2747	0	2461	0	1277	0	1006	0	9343-1	1087-1	3273-1
4427-2	9391-2	1523-1	2221-1	3713-1	1055	0	1966	0	2577	0	2292	0	1174	0	9066-1	7980-1	6656-1	1047	1

$$\tau_0 = 3$$

1067-1	9490-1	1131	0	1280	0	1652	0	3227	0	3598	0	2679	0	1382	0	4668-1	2725-1	1826-1	1100-1	5082-2	
4662-1	1127	1	1351	0	1447	0	1830	0	3532	0	3912	0	2905	0	1496	0	5051-1	2948-1	1975-1	1190-1	5496-2
3736-1	8903-1	1188	1	1784	0	2125	0	3996	0	4371	0	3229	0	1659	0	5596-1	3265-1	2186-1	1317-1	6084-2	
3181-1	7198-1	1328	0	1251	1	2639	0	4651	0	4976	0	3647	0	1868	0	6292-1	3669-1	2456-1	1479-1	6829-2	
2740-1	6075-1	1057	0	1739	0	1371	1	5748	0	5840	0	4222	0	2151	0	7230-1	4212-1	2817-1	1696-1	7831-2	
2234-1	4892-1	8287-1	1279	0	2339	0	1818	1	7716	0	5346	0	2689	0	8996-1	5230-1	3494-1	2101-1	9697-2		
1719-1	3739-1	6261-1	9469-1	1657	0	5225	0	2182	1	7582	0	3656	0	1208	0	6988-1	4654-1	2793-1	1287-1		
1287-1	2793-1	4654-1	6988-1	1208	0	3656	0	7582	0	2182	1	5225	0	1657	0	9469-1	6261-1	3739-1	1719-1		
9697-2	2101-1	3494-1	5230-1	8996-1	2689	0	5346	0	7716	0	1818	1	2339	0	1279	0	8287-1	4892-1	2234-1		
7831-2	1696-1	2817-1	4212-1	7230-1	2151	0	4222	0	5840	0	5748	0	1371	1	1739	0	1057	0	6075-1	2740-1	
6829-2	1479-1	2456-1	3569-1	6292-1	1868	0	3647	0	4976	0	4651	0	2639	0	1251	1	1328	0	7198-1	3181-1	
6084-2	1317-1	2186-1	3265-1	5596-1	1659	0	3229	0	4371	0	3996	0	2125	0	1784	0	1188	1	8903-1	3736-1	
5496-2	1190-1	1975-1	2948-1	5051-1	1496	0	2905	0	3912	0	3532	0	1830	0	1447	0	1351	0	1127	1	4662-1
5082-2	1100-1	1826-1	2725-1	4668-1	1382	0	2679	0	3598	0	3227	0	1652	0	1280	0	1131	0	9490-1	1067	1

$$\tau_0 = 4$$

1087	1	1219	0	1448	0	1634	0	2100	0	4115	0	4569	0	3347	0	1676	0	5483-1	3142-1	2066-1	1220-1	5538-2
5981-1	1165	1	1759	0	1879	0	2367	0	4584	0	5057	0	3694	0	1847	0	6039-1	3460-1	2274-1	1343-1	6095-2	
4774-1	1158	0	1248	1	2356	0	2801	0	5287	0	5764	0	4189	0	2090	0	6826-1	3909-1	2569-1	1517-1	6882-2	
4054-1	9334-1	1753	0	1336	1	3534	0	6267	0	6690	0	4825	0	2400	0	7827-1	4479-1	2942-1	1737-1	7879-2		
3478-1	7850-1	1392	0	2326	0	1502	1	7868	0	8002	0	5697	0	2819	0	9174-1	5245-1	3443-1	2032-1	9215-2		
2818-1	6282-1	1085	0	1704	0	3166	0	2129	1	1077	1	7376	0	3605	0	1168	0	6663-1	4368-1	2575-1	1167-1	
2144-1	4750-1	8112-1	1250	0	2227	0	7227	0	2660	1	1063	1	5000	0	1600	0	9087-1	5939-1	3494-1	1582-1		
1582-1	3494-1	5939-1	9087-1	1600	0	5000	0	1063	1	2660	1	7227	0	2227	0	1250	0	8112-1	4750-1	2144-1		
1167-1	2575-1	4368-1	6663-1	1168	0	3605	0	7376	0	1077	1	2129	1	3166	0	1704	0	1085	0	6282-1	2818-1	
9215-2	2032-1	3443-1	5245-1	9174-1	2819	0	5697	0	8002	0	7868	0	1502	1	2326	0	1392	0	7850-1	3478-1		
7879-2	1737-1	2942-1	4479-1	7827-1	2400	0	4825	0	6690	0	6267	0	3534	0	1336	1	1753	0	9334-1	4054-1		
6882-2	1517-1	2569-1	3909-1	6826-1	2090	0	4189	0	5764	0	5287	0	2801	0	2356	0	1248	1	1158	0	4774-1	
6095-2	1343-1	2274-1	3460-1	6039-1	1847	0	3694	0	5057	0	4584	0	2367	0	1879	0	1759	0	1165	1	5981-1	
5538-2	1220-1	2066-1	3142-1	5483-1	1676	0	3347	0	4569	0	4115	0	2100	0	1634	0	1448	0	1219	0	1087	1

$$\tau_0 = 5$$

1106	1	1481	0	1753	0	1973	0	2527	0	4969	0	5508	0	3988	0	1952	0	6217-1	3510-1	2272-1	1319-1	5889-2
7252-1	1204	1	2162	0	2304	0	2894	0	5626	0	6196	0	4473	0	2186	0	6959-1	3928-1	2542-1	1476-1	6587-2	
5770-1	1422	0	1309	1	2933	0	3480	0	6601	0	7186	0	5162	0	2517	0	8005-1	4516-1	2921-1	1696-1	7568-2	
4887-1	1144	0	2181	0	1422	1	4451	0	7947	0	8479	0	6046	0	2938	0	9331-1	5260-1	3402-1	1974-1	8807-2	
4177-1	9583-1	1727	0	2926	0	1636	0	1011	1	1030	1	7254	0	3508	0	1111	0	6259-1	4045-1	2346-1	1047-1	
3363-1	7622-1	1339	0	2136	0	4020	0	2460	1	1406	1	9546	0	4561	0	1438	0	8084-1	5217-1	3023-1	1348-1	
2535-1	5710-1	9923-1	1553	0	2810	0	9345	0	3178	1	1392	1	6412	0	1998	0	1118	0	7191-1	4158-1	1851-1	
1851-1	4158-1	7191-1	1118	0	1998	0	6412	0	1392	1	3178	1	9345	0	2810	0	1553	0	9923-1	5710-1	2535-1	
1318-1	3023-1	5217-1	8084-1	1438	0	4561	0	9546	0	1406	1	2460	1	4020	0	2136	0	1339	0	7622-1	3363-1	
1047-1	2346-1	4045-1	6259-1	1111	0	3508	0	7254	0	1030	1	1011	1	1636	1	2926	0	1727	0	9583-1	4177-1	
8807-2	1974-1	3402-1	5260-1	9331-1	2938	0	6046	0	8479	0	7947	0	4451	0	1422	1	2181	0	1144	0	4887-1	
7568-2	1696-1	2921-1	4561-1	8005-1	2517	0	5162	0	7186	0	6601	0	3480	0	2933	0	1309	1	1422	0	5770-1	
6587-2	1476-1	2542-1	3928-1	6959-1	2186	0	4473	0	6196	0	5626	0	2894	0	2304	0	2162	0	1204	1	7252-1	
5889-2	1319-1	2272-1	3510-1	6217-1	1952	0	3988	0	5508	0	4969	0	2527	0	1973	0	1753	0	1481	0	1106	1

$\tau_0 = 6$

1125	1	1735	0	2049	0	2300	0	2936	0	5798	0	6425	0	4613	0	2216	0	6900-1	3848-1	2458-1	1405-1	6180-2
8486-1	1242	1	2563	0	2726	0	3413	0	6663	0	7338	0	5252	0	2520	0	7839-1	4370-1	2791-1	1596-1	7016-2	
6733-1	1684	0	1370	1	3517	0	4165	0	7939	0	8644	0	6157	0	2947	0	9158-1	5103-1	3258-1	1862-1	8186-2	
5688-1	1351	0	2514	0	1510	1	5389	0	9689	0	1035	1	7314	0	3489	0	1083	0	6029-1	3847-1	2198-1	9661-2
4843-1	1128	0	2054	0	3538	0	1774	1	1246	1	1274	1	8894	0	4220	0	1307	0	7269-1	4635-1	2647-1	1163-1
3876-1	8919-1	1592	0	2572	0	4895	0	2809	1	1757	1	1185	1	5556	0	1712	0	9505-1	6052-1	3453-1	1516-1	
2899-1	6630-1	1170	0	1856	0	3400	0	1156	1	3731	1	1741	1	7883	0	2401	0	1326	0	8418-1	4793-1	2102-1
2102-1	4793-1	8418-1	1326	0	2401	0	7883	0	1741	1	3731	1	1156	1	3400	0	1856	0	1170	1	6630-1	2899-1
1516-1	3453-1	6052-1	9505-1	1712	0	5556	0	1185	1	1757	1	2809	1	4895	0	2572	0	1592	0	8919-1	3876-1	
1163-1	2647-1	4635-1	7269-1	1307	0	4220	0	8894	0	1274	1	1246	1	1774	0	3538	0	2064	0	1128	0	4843-1
9661-2	2198-1	3847-1	6029-1	1083	0	3489	0	7314	0	1035	1	9689	0	5389	0	1510	1	2614	0	1351	0	5688-1
8186-2	1862-1	3258-1	5103-1	9158-1	2947	0	6157	0	8644	0	7939	0	4165	0	3517	0	1370	1	1684	0	6733-1	
7016-2	1596-1	2791-1	4370-1	7839-1	2520	0	5252	0	7338	0	6663	0	3413	0	2726	0	2563	0	1242	1	8486-1	
6180-2	1405-1	2458-1	3848-1	6900-1	2216	0	4613	0	6426	0	5798	0	2936	0	2300	0	2049	0	1735	0	1125	1

1143	1	1984	0	2339	0	2618	0	3330	0	6608	0	7331	0	5230	0	2474	0	7547-1	4165-1	2630-1	1483-1	6431-2	
9689-1	1280	1	2963	0	3145	0	3925	0	7700	0	8489	0	6038	0	2851	0	8694-1	4797-1	3028-1	1708-1	7403-2		
7670-1	1945	0	1432	1	4108	0	4855	0	9303	0	1014	1	7178	0	3381	0	1030	0	5680-1	3584-1	2021-1	8759-2	
6462-1	1557	0	3051	0	1600	1	6347	0	1149	1	1229	1	8633	0	4053	0	1233	0	6793-1	4285-1	2415-1	1047-1	
5481-1	1295	0	2402	0	4161	0	1916	1	1492	1	1530	1	1062	1	4958	0	1504	0	8281-1	5220-1	2940-1	1274-1	
4359-1	1018	0	1842	0	3011	0	5788	0	3175	1	2128	1	1428	1	6589	0	1989	0	1093	0	6880-1	3871-1	1676-1
3239-1	7513-1	1345	0	2159	0	3996	0	1386	1	4317	1	2109	1	9406	0	2806	0	1534	0	9626-1	5405-1	2337-1	
2337-1	5405-1	9626-1	1534	0	2806	0	9406	0	2109	1	4317	1	1386	1	3996	0	2159	0	1345	0	7513-1	3239-1	
1676-1	3871-1	6880-1	1093	0	1989	0	6589	0	1428	1	2128	1	3175	1	5788	0	3011	0	1842	0	1018	0	4359-1
1274-1	2940-1	5220-1	8281-1	1504	0	4958	0	1062	1	1530	1	1492	1	1916	1	4161	0	2402	0	1295	0	5481-1	
1047-1	2415-1	4285-1	6793-1	1233	0	4053	0	8633	0	1229	1	1149	1	6347	0	1600	1	3051	0	1557	0	6462-1	
8759-2	2021-1	3584-1	5680-1	1030	0	3381	0	7178	0	1014	1	9303	0	4855	0	4108	0	1432	1	1945	0	7670-1	
7403-2	1708-1	3028-1	4797-1	8694-1	2851	0	6038	0	8489	0	7700	0	3925	0	3145	0	2963	0	1280	1	9689-1		
6431-2	1483-1	2630-1	4165-1	7547-1	2474	0	5230	0	7331	0	6608	0	3330	0	2618	0	2339	0	1984	0	1143	1	

$$\tau_0 = 8$$

1161	1	2229	0	2622	0	2928	0	3712	0	7402	0	8230	0	5843	0	2726	0	8167-1	4468-1	2793-1	1556-1	6657-2	
1087	0	1318	1	3363	0	3562	0	4432	0	8740	0	9655	0	6834	0	3183	0	9531-1	5213-1	3258-1	1814-1	7762-2	
8584-1	2206	0	1494	1	4706	0	5550	0	1070	1	1168	1	8227	0	3823	0	1143	0	6251-1	3905-1	2174-1	9300-2	
7213-1	1761	0	3492	0	1692	1	7324	0	1335	1	1432	1	1000	1	4633	0	1383	0	7557-1	4719-1	2627-1	1123 -1	
6093-1	1459	0	2742	0	4794	0	2061	1	1749	1	1799	1	1242	1	5720	0	1704	0	9300-1	5803-1	3228-1	1380-1	
4817-1	1140	0	2090	0	3452	0	6693	0	3556	1	2517	1	1682	1	7656	0	2270	0	1236	0	7702-1	4280-1	1829-1
3559-1	8367-1	1517	0	2460	0	4595	0	1623	1	4935	1	2494	1	1097	1	3215	0	1742	0	1082	0	5998-1	2559-1
2559-1	5998-1	1082	0	1742	0	3215	0	1097	1	2494	1	4935	1	1623	1	4595	0	2460	0	1517	0	8367-1	3559-1
1829-1	4280-1	7702-1	1236	0	2270	0	7656	0	1682	1	2517	1	3556	1	6693	0	3452	0	2090	0	1140	0	4817-1
1380-1	3228-1	5803-1	9300-1	1704	0	5720	0	1242	1	1799	1	1749	1	2061	1	4794	0	2742	0	1459	0	6093-1	
1123-1	2627-1	4719-1	7557-1	1383	0	4533	0	1000	1	1432	1	1335	1	7324	0	1692	1	3492	0	1761	0	7213-1	
9300-2	2174-1	3905-1	6251-1	1143	0	3823	0	8227	0	1168	1	1070	1	5550	0	4706	0	1494	1	2206	0	8584-1	
7752-2	1814-1	3258-1	5213-1	9531-1	3183	0	6834	0	9655	0	8740	0	4432	0	3562	0	3363	0	1318	1	1087	0	
6657-2	1556-1	2793-1	4468-1	8167-1	2726	0	5843	0	8230	0	7402	0	3712	0	2928	0	2622	0	2229	0	1161	1	

1179	1	2470	0	2901	0	3231	0	4083	0	8186	0	9126	0	6455	0	2975	0	8765	-1	4760	-1	2949	-1	1624	-1	6862	-2
1203	0	1355	1	3764	0	3979	0	4935	0	9786	0	1084	1	7642	0	3517	0	1035	0	5621	-1	3482	-1	1917	-1	8100	-2
9480	-1	2466	0	1558	1	5311	0	6250	0	1212	1	1327	1	9308	0	4273	0	1257	0	6819	-1	4222	-1	9324	-1	9818	-2
7944	-1	1965	0	3938	0	1784	1	8318	0	1527	1	1642	1	1143	1	5228	0	1535	0	8324	-1	5152	-1	2835	-1	1197	-1
6682	-1	1621	0	3082	0	5434	0	2209	1	2015	1	2081	1	1430	1	6508	0	1906	0	1033	0	6387	-1	3512	-1	1483	-1
5253	-1	1259	0	2335	0	3894	0	7608	0	3952	1	2925	1	1948	1	8757	0	2553	0	1380	0	8522	-1	4682	-1	1976	-1
3862	-1	9194	-1	1686	0	2759	0	5195	0	1866	1	5581	1	2894	1	1258	1	3624	0	1949	0	1200	0	6576	-1	2771	-1
2771	-1	6576	-1	1200	0	1949	0	3624	0	1258	1	2894	1	5581	1	1866	1	5195	0	2759	0	1686	0	9194	-1	3862	-1
1976	-1	4682	-1	8522	-1	1380	0	2553	0	8757	0	1948	1	2925	1	3952	1	7608	0	3894	0	2335	0	1259	0	5253	-1
1483	-1	3512	-1	6387	-1	1033	0	1906	0	6508	0	1430	1	2081	1	2015	1	2209	1	5434	0	3082	0	1621	0	6682	-1
1197	-1	2834	-1	5152	-1	8324	-1	1535	0	5228	0	1143	1	1642	1	1527	1	8318	0	1784	1	3938	0	1965	0	7944	-1
9818	-2	2324	-1	4222	-1	6819	-1	1257	0	4273	0	9308	0	1327	1	1212	1	6250	0	5311	0	1558	1	2466	0	9480	-1
8100	-2	1917	-1	3482	-1	5621	-1	1035	0	3517	0	7642	0	1084	1	9786	0	4935	0	3979	0	3764	0	1355	1	1203	0
6862	-2	1624	-1	2949	-1	4760	-1	8765	-1	2975	0	6455	0	9126	0	8186	0	4083	0	3231	0	2901	0	2470	0	1179	1

$$\tau_0 = 10$$

1196	1	2708	0	3176	0	3528	0	4444	0	8962	0	1002	1	7067	0	3222	0	9345-1	5042-1	3099-1	1689-1	7052-2	
1317	0	1393	1	4166	0	4395	0	5434	0	1084	1	1204	1	8464	0	3853	0	1117	0	6024-1	3702-1	2017-1	8422-2
1036	0	2726	0	1622	1	5923	0	6956	0	1357	1	1490	1	1042	1	4732	0	1370	0	7385-1	4537-1	2471-1	1032-1
8656-1	2167	0	4389	0	1879	1	9327	0	1725	1	1860	1	1291	1	5839	0	1688	0	9093-1	5584-1	3040-1	1269-1	
7251-1	1781	0	3422	0	6083	0	2360	1	2290	1	2375	1	1627	1	7320	0	2111	0	1136	0	6971-1	3793-1	1583-1
5669-1	1375	0	2579	0	4336	0	8530	0	4362	1	3349	1	2224	1	9890	0	2838	0	1524	0	9339-1	5077-1	2117-1
4149-1	9997-1	1853	0	3057	0	5794	0	2114	1	6256	1	3308	1	1423	1	4035	0	2155	0	1316	0	7140-1	2973-1
2973-1	7140-1	1317	0	2155	0	4035	0	1423	1	3308	1	6256	1	2114	1	5794	0	3057	0	1853	0	9997-1	4149-1
2117-1	5077-1	9339-1	1524	0	2838	0	9890	0	2224	1	3349	1	4362	1	8530	0	4336	0	2579	0	1375	0	5669-1
1583-1	3793-1	6971-1	1136	0	2111	0	7320	0	1627	1	2375	1	2290	1	2360	1	6083	0	3422	0	1781	0	7251-1
1269-1	3040-1	5584-1	9093-1	1688	0	5839	0	1291	1	1860	1	1725	1	9327	0	1879	1	4389	0	2167	0	8656-1	
1032-1	2471-1	4537-1	7385-1	1370	0	4732	0	1042	1	1490	1	1357	1	6956	0	5923	0	1622	1	2726	0	1036	0
8422-2	2017-1	3702-1	6024-1	1117	0	3853	0	8465	0	1204	1	1084	1	5434	0	4395	0	4166	0	1393	1	1317	0
7052-2	1689-1	3099-1	5042-1	9345-1	3222	0	7067	0	1002	1	8962	0	4444	0	3528	0	3176	0	2708	0	1196	1	

$$\tau_0 = 20$$

136	1	501	0	581	0	630	0	772	0	167	1	193	1	133	1	564	0	145	0	754-1	442-1	224-1	851-2		
240	0	178	1	830	0	859	0	103	1	221	1	253	1	175	1	739	0	189	0	986-1	579-1	293-1	111-1		
185	0	537	0	230	1	124	1	143	1	298	1	338	1	232	1	977	0	250	0	130	0	764-1	386-1	147-1	
151	0	416	0	910	0	289	1	201	1	400	1	445	1	303	1	127	1	325	0	169	0	991-1	501-1	190-1	
121	0	329	0	685	0	128	1	398	1	550	1	589	1	396	1	165	1	421	0	219	0	128	0	649-1	246-1
910-1	243	0	491	0	869	0	178	1	915	1	836	1	545	1	225	1	572	0	297	0	174	0	877-1	333-1	
650-1	172	0	343	0	594	0	117	1	483	1	143	2	806	1	322	1	808	0	417	0	243	0	123	0	465-1
465-1	123	0	243	0	417	0	808	0	322	1	806	1	143	2	483	1	117	1	594	0	343	0	172	0	650-1
333-1	877-1	174	0	297	0	572	0	225	1	545	1	836	1	915	1	178	1	869	0	492	0	243	0	910-1	
246-1	649-1	128	0	219	0	421	0	165	1	396	1	589	1	550	1	398	1	128	1	685	0	329	0	121	0
190-1	501-1	991-1	169	0	325	0	127	1	303	1	445	1	400	1	201	1	289	1	910	0	416	0	151	0	
147-1	386-1	764-1	130	0	250	0	977	0	232	1	338	1	298	1	143	1	124	1	230	1	537	0	185	0	
111-1	293-1	579-1	986-1	189	0	739	0	175	1	253	1	221	1	103	1	859	0	830	0	178	1	240	0		
851-2	224-1	442-1	754-1	145	0	564	0	133	1	193	1	167	1	772	0	630	0	581	0	501	0	136	1		

$\tau_0 = 30$

153	1	728	0	837	0	891	0	107	1	248	1	289	1	197	1	809	0	189	0	972-1	560-1	271-1	964-2			
344	0	219	1	127	1	130	1	154	1	350	1	405	1	276	1	113	1	263	0	135	0	779-1	378-1	134-1		
260	0	810	0	304	1	194	1	221	1	492	1	562	1	380	1	155	1	362	0	186	0	107	0	519-1	184-1	
206	0	614	0	141	1	402	1	319	1	677	1	758	1	509	1	207	1	481	0	248	0	142	0	690-1	245-1	
162	0	471	0	103	1	198	1	578	1	942	1	102	2	673	1	272	1	632	0	324	0	187	0	904-1	321-1	
118	0	338	0	715	0	129	1	270	1	150	2	143	2	920	1	368	1	852	0	437	0	251	0	121	0	430-1
836-1	237	0	493	0	869	0	173	1	786	1	241	2	135	2	523	1	120	1	610	0	349	0	168	0	597-1	
597-1	168	0	349	0	610	0	120	1	523	1	135	2	241	2	786	1	173	1	869	0	493	0	237	0	836-1	
430-1	121	0	251	0	437	0	852	0	368	1	920	1	143	2	150	2	270	1	129	1	715	0	338	0	118	0
321-1	904-1	187	0	324	0	632	0	272	1	673	1	102	2	942	1	578	1	198	1	103	1	471	0	162	0	
245-1	690-1	142	0	248	0	481	0	207	1	509	1	758	1	677	1	319	1	402	1	141	1	614	0	206	0	
184-1	519-1	107	0	186	0	362	0	155	1	380	1	562	1	492	1	221	1	194	1	304	1	810	0	260	0	
134-1	378-1	779-1	135	0	263	0	113	1	276	1	405	1	350	1	154	1	130	1	127	1	219	1	344	0		
964-2	271-1	560-1	972-1	189	0	809	0	197	1	289	1	248	1	107	1	891	0	837	0	728	0	153	1			

169	1	959	0	110	1	115	1	138	1	335	1	385	1	261	1	106	1	231	0	118	0	673-1	317-1	107-1		
445	0	262	1	174	1	176	1	207	1	496	1	565	1	381	1	155	1	337	0	172	0	981-1	462-1	156-1		
331	0	109	1	385	1	270	1	305	1	714	1	805	1	540	1	219	1	476	0	243	0	138	0	651-1	219-1	
258	0	811	0	193	1	524	1	447	1	994	1	110	2	730	1	295	1	640	0	327	0	186	0	875-1	295-1	
198	0	609	0	138	1	271	1	775	1	139	2	148	2	968	1	389	1	843	0	430	0	244	0	115	0	387-1
143	0	430	0	938	0	171	1	361	1	217	2	206	2	131	2	522	1	113	1	574	0	326	0	153	0	516-1
100	0	299	0	642	0	114	1	229	1	112	2	349	2	192	2	740	1	158	1	800	0	453	0	212	0	714-1
714-1	212	0	453	0	800	0	158	1	740	1	192	2	349	2	112	2	229	1	114	1	642	0	299	0	100	0
516-1	153	0	326	0	574	0	113	1	522	1	131	2	206	2	217	2	361	1	171	1	938	0	430	0	143	0
387-1	115	0	244	0	430	0	843	0	389	1	968	1	148	2	139	2	775	1	271	1	138	1	609	0	198	0
295-1	875-1	186	0	327	0	640	0	295	1	730	1	110	2	994	1	447	1	524	1	193	1	811	0	258	0	
219-1	651-1	138	0	243	0	476	0	219	1	540	1	805	1	714	1	305	1	270	1	385	1	109	1	331	0	
156-1	462-1	981-1	172	0	337	0	155	1	381	1	565	2	496	1	207	1	176	1	174	1	262	1	445	0		
107-1	317-1	673-1	118	0	231	0	106	1	261	1	385	1	335	1	138	1	115	1	110	1	959	0	169	1		

$$\tau_0 = 50$$

185	1	119	1	136	1	142	1	171	1	427	1	480	1	323	1	132	1	276	0	140	0	790	-1	363	-1	117	-1
545	0	307	1	224	1	224	1	265	1	654	1	730	1	489	1	200	1	417	0	211	0	119	0	549	-1	176	-1
400	0	138	1	472	1	351	1	397	1	957	1	106	2	704	1	287	1	597	0	302	0	171	0	786	-1	253	-1
306	0	101	0	248	1	654	1	585	1	134	2	145	2	957	1	389	1	808	0	409	0	231	0	106	0	342	-1
232	0	747	0	173	1	345	1	991	1	187	2	195	2	127	2	514	1	106	1	538	0	304	0	140	0	449	-1
166	0	522	0	116	1	214	1	457	1	290	2	270	2	171	2	687	1	142	1	715	0	404	0	185	0	596	-1
116	0	362	0	794	0	142	1	288	1	147	2	462	2	251	2	971	1	198	1	995	0	560	0	257	0	824	-1
824	-1	257	0	560	0	995	0	198	1	971	1	251	2	462	2	147	2	288	1	142	1	794	0	362	0	116	0
596	-1	185	0	404	0	715	0	142	1	687	1	171	2	270	2	290	2	457	1	214	1	116	1	522	0	166	0
449	-1	140	0	304	0	538	0	106	1	514	1	127	2	195	2	187	2	991	1	345	1	173	1	747	0	232	0
342	-1	106	0	231	0	409	0	808	0	389	1	957	1	145	2	134	2	585	1	654	1	248	1	101	1	306	0
253	-1	786	-1	171	0	302	0	598	0	287	1	704	1	106	2	957	1	597	1	351	1	472	1	138	1	400	0
176	-1	549	-1	119	0	211	0	417	0	200	1	489	1	730	1	654	1	265	1	224	1	224	1	307	1	545	0
117	-1	363	-1	790	-1	140	0	276	0	132	1	323	1	480	1	427	1	171	1	142	1	136	1	119	1	185	1

$$\tau_0 = 60$$

202	1	144	1	164	1	170	1	205	1	521	1	574	1	385	1	159	1	323	0	162	0	910	-1	411	-1	127	-1
645	0	355	1	276	1	276	1	327	1	820	1	898	1	599	1	248	1	502	0	252	0	142	0	638	-1	198	-1
466	0	168	1	564	1	436	1	496	1	121	2	131	2	871	1	359	1	728	0	364	0	205	0	924	-1	286	-1
352	0	121	1	304	1	794	1	733	1	170	2	180	2	119	2	488	1	988	0	494	0	278	0	125	0	388	-1
265	0	886	0	210	1	422	1	122	2	237	2	242	2	157	2	643	1	130	1	649	0	364	0	164	0	509	-1
188	0	615	0	140	1	259	1	558	1	367	2	334	2	212	2	857	1	172	1	860	0	483	0	218	0	674	-1
131	0	425	0	951	0	172	1	350	1	184	2	577	2	311	2	121	2	241	1	120	1	670	0	301	0	931	-1
931	-1	301	0	670	0	120	1	241	1	121	2	311	2	577	2	184	2	350	1	172	1	951	0	425	0	131	0
674	-1	218	0	483	0	860	0	172	1	857	1	712	2	334	2	367	2	558	1	259	1	140	1	615	0	188	0
509	-1	164	0	364	0	649	0	130	1	643	1	157	2	242	2	237	2	122	2	422	1	210	1	886	0	265	0
388	-1	125	0	278	0	494	0	988	0	488	1	119	2	180	2	170	2	733	1	794	1	304	1	121	1	352	0
286	-1	924	-1	205	0	364	0	728	0	359	1	871	1	131	2	121	2	496	1	436	1	564	1	168	1	466	0
198	-1	638	-1	142	0	252	0	502	0	248	1	599	1	898	1	820	1	327	1	276	1	276	1	355	1	645	0
127	-1	411	-1	910	-1	162	0	323	0	159	1	385	1	574	1	521	1	205	1	170	1	164	1	144	1	202	1

$$\tau_0 = 70$$

218	1	169	1	192	1	199	1	242	1	616	1	668	1	446	1	186	1	374	0	185	0	104	0	460	-1	138	-1
743	0	404	1	332	1	331	1	395	1	992	1	107	2	711	1	297	1	595	0	295	0	165	0	731	-1	219	1
530	0	198	1	661	1	526	1	603	1	148	2	157	2	104	2	433	1	868	0	430	0	240	0	106	0	319	-1
397	0	141	1	362	1	943	1	892	1	207	2	216	2	142	2	589	1	118	1	583	0	326	0	144	0	433	-1
297	0	103	1	247	1	502	1	148	2	289	2	289	2	188	2	775	1	155	1	765	0	427	0	189	0	567	-1
210	0	710	0	164	1	306	1	665	1	446	2	399	2	252	2	103	2	205	1	101	1	564	0	250	0	748	-1
146	0	490	0	111	1	202	1	417	1	222	2	694	2	370	2	146	2	286	1	141	1	783	0	346	0	104	0
104	0	346	0	783	0	141	1	286	1	146	2	370	2	694	2	222	2	417	1	202	1	111	1	490	0	146	0
748	-1	250	0	564	0	101	1	205	1	103	2	252	2	399	2	446	2	665	1	306	1	164	1	710	0	210	0
567	-1	189	0	427	0	765	0	155	1	775	1	188	2	289	2	289	2	148	2	502	1	247	1	103	1	297	0
433	-1	144	0	326	0	583	0	118	1	589	1	142	2	216	2	207	2	892	1	943	1	362	1	141	1	397	0
319	-1	106	0	240	0	430	0	868	0	433	1	104	2	157	2	148	2	603	1	526	1	661	1	198	1	530	0
219	-1	731	-1	165	0	295	0	595	0	297	1	711	1	107	2	992	1	395	1	331	1	332	1	404	1	743	0
138	-1	460	-1	104	0	185	0	374	0	186	1	446	1	668	1	616	1	242	1	199	1	192	1	169	1	218	1

$$\tau_0 = 80$$

235	1	194	1	222	1	230	1	281	1	712	1	762	1	508	1	214	1	428	0	210	0	117	0	511-1	149-1		
840	0	456	1	389	1	388	1	467	1	117	2	124	2	825	1	347	1	694	0	340	0	189	0	827-1	240-1		
593	0	229	1	763	1	621	1	716	1	174	2	183	2	121	2	509	1	102	1	498	0	277	0	121	0	352-1	
441	0	162	1	421	1	110	2	106	2	245	2	252	2	165	2	692	1	138	1	676	0	376	0	164	0	478-1	
328	0	117	1	286	1	584	1	175	2	341	2	337	2	218	2	909	1	181	1	886	0	492	0	215	0	625-1	
231	0	806	0	189	1	354	1	778	1	527	2	464	2	293	2	121	2	240	1	117	1	649	0	284	0	824-1	
161	0	556	0	128	1	234	1	488	1	260	2	812	2	431	2	171	2	335	1	163	1	901	0	393	0	114	0
114	0	393	0	901	0	163	1	335	1	171	2	431	2	812	2	260	2	488	1	234	1	128	1	556	0	161	0
824-1	284	0	649	0	117	1	240	1	121	2	293	2	464	2	527	2	778	1	354	1	189	1	806	0	231	0	
625-1	215	0	492	0	886	0	181	1	909	1	218	2	337	2	341	2	175	2	584	1	286	1	117	1	328	0	
478-1	164	0	376	0	676	0	138	1	692	1	165	2	252	2	245	2	106	2	110	2	421	1	162	1	441	0	
352-1	121	0	277	0	498	0	102	1	509	1	121	2	183	2	174	2	716	1	621	1	763	1	229	1	593	0	
240-1	827-1	189	0	340	0	694	0	347	1	825	1	124	2	117	2	467	1	388	1	389	1	456	1	840	0		
149-1	511-1	117	0	210	0	428	0	214	1	508	1	762	1	712	1	281	1	230	1	222	1	194	1	235	1		

$$\tau_0 = 90$$

252	1	221	1	253	1	262	1	322	1	807	1	855	1	570	1	242	1	496	0	236	0	130	0	563	-1	159	-1
938	0	510	1	450	1	449	1	512	1	134	2	141	2	939	1	397	1	798	0	387	0	214	0	924	-1	262	-1
654	0	260	1	870	1	719	1	833	1	201	2	239	2	138	2	584	1	117	1	569	0	314	0	136	0	384	-1
483	0	182	1	482	1	126	2	123	2	232	2	288	2	189	2	794	1	159	1	772	0	426	0	184	0	520	-1
358	0	132	1	325	1	670	1	203	2	392	2	384	2	249	2	104	2	208	1	101	1	557	0	240	0	680	-1
252	0	904	0	215	1	404	1	898	1	608	2	530	2	334	2	138	2	276	1	133	1	735	0	317	0	896	-1
175	0	622	0	145	1	267	1	562	1	299	2	932	2	492	2	196	2	386	1	186	1	102	1	440	0	124	0
124	0	440	0	102	1	186	1	386	1	196	2	492	2	932	2	299	2	562	1	267	1	145	1	622	0	175	0
896	-1	317	0	735	0	133	1	276	1	138	2	334	2	530	2	608	2	898	1	404	1	215	1	904	0	252	0
680	-1	240	0	557	0	101	1	208	1	104	2	249	2	384	2	392	2	203	2	670	1	325	1	132	1	358	0
520	-1	184	0	426	0	772	0	159	1	794	1	189	2	288	2	282	2	123	2	126	2	482	1	182	1	483	0
384	-1	136	0	314	0	569	0	117	1	584	1	138	2	209	2	201	2	833	1	719	1	870	1	260	1	654	0
262	-1	924	-1	214	0	387	0	798	0	397	1	939	1	141	1	134	2	542	1	449	1	450	1	510	1	938	0
159	-1	563	-1	130	0	236	0	486	0	242	1	570	1	855	1	807	1	322	1	262	1	253	1	221	1	252	1

269	1	248	1	285	1	295	1	364	1	903	1	951	1	634	-1	270	1	546	0	263	0	145	0	617	-1	170	-1
103	1	566	1	513	1	512	1	621	1	152	2	159	2	106	2	449	1	908	0	438	0	241	0	103	0	283	-1
715	0	292	1	982	1	822	1	956	1	228	2	236	2	156	2	662	1	134	1	644	0	354	0	151	0	416	-1
526	0	204	1	545	1	144	2	141	2	320	2	324	2	212	2	898	1	181	1	873	0	480	0	205	0	564	-1
389	0	146	1	366	1	758	1	233	2	444	2	432	2	280	2	118	2	237	1	114	1	626	0	267	0	736	-1
273	0	100	1	241	1	457	1	102	2	691	2	597	2	375	2	156	2	313	1	150	1	826	0	352	0	969	-1
189	0	691	0	163	1	301	1	640	1	338	2	105	3	554	2	222	2	439	1	210	1	115	1	488	0	134	0
134	0	488	0	115	1	210	1	439	1	222	2	554	2	105	3	338	2	640	1	301	1	163	1	691	0	189	0
969	-1	352	0	826	0	150	1	313	1	156	2	375	2	597	2	691	2	102	2	457	1	241	1	100	1	273	0
736	-1	267	0	626	0	114	1	237	1	118	2	280	2	432	2	444	2	233	2	758	1	366	1	146	1	389	0
564	-1	205	0	480	0	873	0	181	1	898	1	212	2	324	2	320	2	141	2	144	2	545	1	204	1	526	0
416	-1	151	0	354	0	644	0	134	1	662	1	156	2	236	2	228	2	956	1	822	1	982	1	292	1	715	0
283	-1	103	0	241	0	438	0	908	0	449	1	106	2	159	2	152	2	621	1	512	1	513	1	566	1	103	1
170	-1	617	-1	145	0	263	0	546	0	270	1	634	1	951	1	903	1	364	1	295	1	285	1	248	1	269	1

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

ФЕВРАЛЬ, 1967

ВЫПУСК 1

К НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ
КОНФИГУРАЦИЙ

В. В. ПАПОЯН, Д. М. СЕДРАКЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Поступила 22 октября 1966

Исследованы вращающиеся конфигурации, описываемые уравнением состояния $P = a \rho^2$ в ньютоновском приближении. Получены аналитические выражения для распределения масс в виде рядов по полиномам Лежандра. Разработан простой метод численного расчета коэффициентов, входящих в это разложение. Рассчитаны масса и другие интегральные характеристики звезды.

1. Проблема вращающихся небесных тел длительное время привлекает внимание астрофизиков и математиков. В классических работах Якоби, Маклорена, Ляпунова, Пуанкаре и других была разработана теория вращения тел, состоящих из несжимаемой жидкости*. В дальнейшем Джинс исследовал различные модели звезд Роша (Roche), а также модели вращающихся политроп. Милн [3], Цейпел [4] и Чандрасекар [5] развили приближенную теорию вращающихся конфигураций для политроп в случае малых значений безразмерного параметра $\beta = \omega^2 / 8 \pi k \rho_c$, где ω — угловая скорость, k — гравитационная постоянная и ρ_c — плотность массы в центре. В последние годы этот вопрос рассматривался в ряде работ Чандрасекара, Робертса, Лебовитца, Джеймса, Такеда и Стокли [6 — 12].

Настоящая статья посвящена исследованию вращающихся конфигураций, в которых состояние вещества описывается уравнением

$$P = a \rho^2, \quad (1)$$

где ρ — плотность массы, P — давление и a — постоянная. При этом мы остаемся в рамках теории тяготения Ньютона.

* Ссылки на более ранние работы можно найти в монографиях Джинса и Литлтона [1, 2].

Получены аналитические выражения для распределения масс в виде рядов по полиномам Лежандра. Постоянные коэффициенты этого ряда определены численными методами с помощью электронно-вычислительной машины „Раздан 2“. Наш метод расчета сравнительно прост и при том же уравнении состояния вещества может быть применен к случаю вращения с переменной угловой скоростью.

2. При твердотельном вращении структура конфигураций определяется системой уравнений

$$\Delta \varphi = 4 \pi k \rho \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} P = -\rho \vec{\nabla} \varphi + \rho \omega^2 \vec{r}, \quad (3)$$

$$P = P(\rho), \quad (4)$$

где φ — гравитационный потенциал, r — расстояние от оси вращения. Соотношение [4] представляет собой символическую запись уравнения состояния. Оно справедливо в двух случаях, а, именно, когда вещество звезды вырождено или же температура ее везде является функцией только плотности. Приведенные уравнения относятся к внутренней области, а вне распределения масс имеем

$$\Delta \varphi = 0. \quad (5)$$

Все характеристики вырожденных сферических конфигураций определяются одним независимым параметром; в качестве такого может быть принято значение плотности массы в центре. В случае же вращения такие конфигурации будут определяться двумя независимыми параметрами: значением центральной плотности ρ_c и угловой скорости ω . Значение ρ_c , очевидно, играет роль краевого условия для дифференциальных уравнений (2) и (3). Однако, это условие недостаточно для нахождения решений. Необходимо также потребовать непрерывность потенциала и его первой производной на поверхности звезды.

Введем сферические координаты R, θ, Φ . При этом нас интересуют только псевдосфероидальные решения, то есть решения φ и ρ не зависящие от угла Φ (в дальнейшем будем пользоваться терминологией Джинса [1]).

Рассмотрим уравнения состояния:

$$P = a \rho^{1 + \frac{1}{n}}, \quad (6)$$

где a и n — постоянные. Перейдем к безразмерным переменным [5]

$$\left[\frac{4\pi k \rho_c^{1-1/n}}{a(n+1)} \right]^{1/2} R = x, \quad \frac{\varphi}{a(n+1)\rho_c^{1/n}} = \psi, \quad \rho/\rho_c = \sigma, \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнения (2), (3), (5) находим

$$\vec{\nabla} \sigma = -\vec{\nabla} \psi^{(i)} + \beta \vec{\nabla} x^2 \quad (8)$$

$$\Delta \psi^{(i)} = \sigma^n \quad (9)$$

для внутренней части звезды, и

$$\Delta \psi^{(e)} = 0 \quad (10)$$

для наружной. Здесь индекс „i“ и „e“ означают внутреннее и внешнее решения соответственно и

$$\beta = \frac{\omega^2}{8\pi k \rho_c} \quad (11)$$

Из (8) — (10) следует, что при заданном уравнении состояния в терминах безразмерных величин (7), масса, распределение масс, потенциал, полуоси и прочие характеристики конфигураций однозначно определяются значениями параметра β .

Уравнение (8) сразу же интегрируется:

$$\sigma(x, \theta) = -\psi(x, \theta) + \beta x^2 \sin^2 \theta + C_0, \quad (12)$$

где C_0 — постоянная интегрирования. Поскольку потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого, мы могли бы в (12) принять $C_0 = 0$. При такой нормировке $\psi(0) = -1$ и $\psi(\infty) \neq 0$. Однако, предпочтительнее оставить эту постоянную неопределенной, с тем чтобы в дальнейшем путем подходящего выбора иметь для потенциала традиционную нормировку $\psi(\infty) = 0$.

3. Решения уравнений (9) и (10) ищем в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} \psi(x, \theta) &= \sum_l \psi_l(x) P_l(\mu) \\ \sigma(x, \theta) &= \sum_l \sigma_l(x) P_l(\mu) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mu = \cos \theta, \quad l = 0, 2, 4, \dots$$

Отсутствие членов с нечетными l в этих рядах обусловлено симметрией распределения масс относительно плоскости $\theta = \pi/2$.

Из формулы обращения

$$\sigma_l(x) = \left(l + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 \sigma(x, \theta) P_l(\mu) d\mu \quad (14)$$

следует, что коэффициенты разложения $\sigma_l(x)$ отличны от нуля лишь в области $x < x_e$, где x_e — большая полуось звезды, ибо $\sigma(x, \theta)$ вне этой сферы исчезает.

Подставляя (13) в (12) получаем

$$\sum_l \left[\sigma_l + \psi_l + \frac{2}{3} \beta x^2 \delta_{2l} - \left(C_0 + \frac{2}{3} \beta x^2 \right) \delta_{0l} \right] P_l(\mu) = 0, \quad x \leq x_e$$

где δ_{lk} — символ Кронекера. Отсюда следует, что

$$\sigma_l(x) = -\psi_l(x) - \frac{2}{3} \beta x^2 \delta_{2l} + \left(C_0 + \frac{2}{3} \beta x^2 \right) \delta_{0l} \quad x \leq x_e. \quad (15)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $n=1$, чему соответствует уравнение состояния, описываемое формулой (1). В этом частном случае уравнения (9) и (10) сводятся к системе

$$\begin{aligned} \Delta \psi^{(l)}(x, \theta) &= \sigma(x, \theta) \\ \Delta \psi^{(e)}(x, \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя ряды (13) в (16), разделив переменные и учитывая (15) находим

$$\begin{aligned} \psi_0''(x) + \frac{2}{x} \psi_0'(x) + \psi_0(x) &= \frac{2}{3} \beta x^2 + C_0 \\ \psi_2''(x) + \frac{2}{x} \psi_2'(x) + \left(1 - \frac{6}{x^2} \right) \psi_2 &= -\frac{2}{3} \beta x^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\psi_l''(x) + \frac{2}{x} \psi_l'(x) + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \psi_l(x) = 0, \quad l = 4, 6, 8, \dots$$

для внутренней части звезды, и

$$\psi_l^{(e)''}(x) + \frac{2}{x} \psi_l^{(e)'}(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} \psi_l^{(e)}(x) = 0 \quad l = 0, 2, 4, \dots \quad (18)$$

для наружной.

Общее решение дифференциальных уравнений (17) есть:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= C \frac{\sin(x + \alpha_0)}{x} + \frac{2}{3} \beta x^3 + C_0 - 4\beta \\ \psi_2(x) &= C_2 x^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \frac{\sin(x + \alpha_2)}{x} - \frac{2}{3} \beta x^2 \\ \psi_l(x) &= C_l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin(x + \alpha_l)}{x}, \quad l = 4, 6, 8, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

где C , C_l и α_l — постоянные интегрирования. Из условия конечности решений в начале координат следует, что все фазы α_l должны исчезать. Постоянную C можно определить из условия в центре звезды. При достаточно малых значениях x найденные решения имеют вид:

$$\psi_l(x) = \text{const } x^l.$$

Такое же поведение в начале координат имеют и коэффициенты разложения плотности $\sigma_l(x) \sim x^l$. Отсюда следует, что

$$\sigma(0) = \sigma_0(0) = 1, \quad \sigma_l(0) = 0, \quad l \geq 2.$$

Учитывая это условие из (15) и (19) находим

$$\sigma_0(0) = 4\beta - C = 1; \quad C = 4\beta - 1.$$

Итак, в области, заключенной внутри большой сферы $x \leq x_*$, решения можно представить в виде

$$\psi_0(x) = (4\beta - 1) D_0(x) + \frac{2}{3} \beta x^2 - 4\beta + C_0, \quad (20)$$

$$\psi_2(x) = C_2 D_2(x) - \frac{2}{3} \beta x^2, \quad (21)$$

$$\psi_l(x) = C_l D_l(x), \quad l = 4, 6, 8, \dots \quad (22)$$

где введено обозначение

$$D_l(x) = x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}$$

Для функций $D_l(x)$ легко вывести следующие два рекуррентных соотношения:

$$\begin{aligned} D_l(x) &= -\frac{2l-1}{x} D_{l-1}(x) - D_{l-2}(x), \\ D'_l(x) &= -\frac{l+1}{x} D_l(x) - D_{l-1}(x). \end{aligned} \quad (23)$$

4. Постоянные C_l ($l > 2$) невозможно определить из условий в центре конфигураций, так как соответствующие $\psi_l(x)$ и их первые производные обращаются в нуль. Они определяются из физических требований на поверхности звезды. Этими требованиями являются исчезновение $\sigma(x, \theta)$, а также непрерывность $\psi(x, \theta)$ и ее первой производной $\psi'(x, \theta)$ на поверхности звезды. Подставляя соотношения (20) — (22) в (13) для гравитационного потенциала внутри звезды получаем

$$\psi^{(i)} = C_0 - 4\beta + (4\beta - 1)D_0(x) + \frac{2}{3}\beta x^2 [1 - P_2(\mu)] + \sum_{l=2}^{\infty} C_l D_l(x) P_l(\mu). \quad (24)$$

Используя (24), формулу (12) можно переписать в следующем виде:

$$\sigma(x, \theta) = 4\beta + (1 - 4\beta)D_0(x) - \sum_{l=2}^{\infty} C_l D_l(x) P_l(\mu). \quad (25)$$

Для внешнего решения удовлетворяющего условию $\psi^{(e)}(\infty) = 0$ из (10) имеем

$$\psi^{(e)}(x, \theta) = \frac{B_0}{x} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{B_l}{x^{l+1}} P_l(\mu), \quad (26)$$

где B_l — постоянные интегрирования.

Из требования непрерывности потенциала и ее первой производной на поверхности конфигурации следует

$$C_0 - 4\beta + (4\beta - 1)D_0(x) + \frac{2}{3}\beta x^2 [1 - P_2(\mu)] + \sum_{l=2}^{\infty} C_l D_l(x) P_l(\mu) = \frac{B_0}{x} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{B_l}{x^{l+1}} P_l(\mu) \quad (27)$$

$$(4\beta - 1)D_0'(x) + \frac{4\beta}{3}x [1 - P_2(\mu)] + \sum_{l=2}^{\infty} C_l D_l'(x) P_l(\mu) = -\frac{B_0}{x^2} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{x^{l+2}} P_l(\mu). \quad (28)$$

В уравнениях (27) и (28) под x подразумевается его значение, определяемое уравнением $x = x(\mu)$. Уравнения (27), (28) и условие $\sigma(x, \theta) = 0$ при $x = x(\mu)$ позволяют определить все неизвестные посто-

янные, входящие в (24) и (26). Итак уравнения, определяющие коэффициенты B_l , C_l и C_0 , можно записать в следующем виде:

$$C_0 - \frac{B_0}{x} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{B_l}{x^{l+1}} P_l(\mu) = -\frac{2}{3} \beta x^2 [1 - P_2(\mu)]$$

$$\frac{B_0}{x^2} + \sum_{l=2}^{\infty} \left[C_l D_l'(x) + \frac{l+1}{x^{l+2}} B_l \right] P_l(\mu) = (1 - 4\beta) D_0'(x) - \frac{4\beta}{3} x [1 - P_2(\mu)] \quad (29)$$

$$\sum_{l=2}^{\infty} C_l D_l(x) P_l(\mu) = 4\beta + (1 - 4\beta) D_0(x).$$

5. Уравнения (29) представляют собой систему с бесконечным числом алгебраических уравнений для неизвестных C_l , B_l и $x(\mu)$. Такая формулировка задачи, разумеется, не позволяет получить решения, поэтому мы делаем следующее приближение. Так, в (29) мы ограничимся членами разложения до $l = 10$. Тогда, чтобы получить замкнутую систему уравнений для неизвестных C_l , B_l и $x(\mu_j)$, очевидно, необходимо уравнения (29) выписать лишь для шести определенных направлений. Используя рекуррентные соотношения (23), уравнения (29) можно переписать в следующем виде

$$\frac{B_0}{x_j} + \sum_{l=2}^{10} \frac{P_l^j}{x_j^{l+1}} B_l - C_0 = \frac{2}{3} \beta x_j^2 (1 - P_2^j),$$

$$\frac{B_0}{x_j^2} + \sum_{l=2}^{10} \frac{(l+1) P_l^j}{x_j^{l+2}} B_l - \sum_{l=2}^{10} C_l \left[\frac{l+1}{x_j} D_l^j + D_{l-1}^j \right] P_l^j = (1 - 4\beta) D_l^j - \frac{4\beta}{3} x_j (1 - P_2^j) \quad (30)$$

$$\sum_{l=2}^{10} C_l D_l^j P_l^j = 4\beta + (1 - 4\beta) D_0^j, \quad \text{где } x_j = x(\mu_j).$$

В качестве шести значений μ_j мы взяли те, которые были использованы в работе Копала [13], а именно, соответствующие углам $\theta_j = 12^\circ, 27^\circ, 43^\circ, 59^\circ, 74^\circ, 90^\circ$ (углы отсчитываются от полярной полуоси). В упомянутой работе было показано, что в формуле обраще-

ния (14) интегрирование по углам можно с достаточной точностью заменить суммированием по этим направлениям.

Итак, мы получили систему (30) из 18 уравнений для шести пар неизвестных C_l , B_l и шести значений x_j .

В приведенном виде уравнения (30) решить трудно, так как неизвестные входят сложным и вообще нелинейным образом. Для решения этих уравнений мы поступаем следующим образом. Выберем для неизвестных x_j некоторые разумные значения x_1, x_2, \dots, x_6 (см. ниже). Тогда первые двенадцать уравнений системы (30) являются линейными относительно C_l и B_l . Определив из них C_l и B_l , подставим их значения в последние шесть уравнений, которые естественно не будут удовлетворяться, поскольку x_j были выбраны наугад. Однако, пользуясь методом Ньютона — Рафсона, мы можем уточнить значения x_j , C_l , B_l с тем, чтобы все уравнения (30) удовлетворялись со сколь угодно точностью. С этой целью найденные x_j , C_l , B_l заменим на $x_j + \delta x_j$, $C_l + \delta C_l$, $B_l + \delta B_l$ и потребуем, чтобы они удовлетворяли системе уравнений (30). Тогда, считая приращения малыми в линейном приближении относительно δx_j , δC_l и δB_l , получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_j} \delta B_0 + \sum_{l=2}^{10} \frac{P_l^j}{x_j^{l+1}} \delta B_l - \delta C_0 - \left[\frac{B_0}{x_j^2} + \sum_{l=2}^{10} \frac{(l+1) P_l^j B_l}{x_j^{l+2}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{3} \beta x_j (1 - P_2^j) \right] \delta x_j = 0 \\ & \frac{1}{x_j^2} \delta B_0 + \sum_{l=2}^{10} \frac{l+1}{x_j^{l+2}} P_l^j \delta B_l - \sum_{l=2}^{10} \left(\frac{l+1}{x_j} D_l^j + D_{l-1}^j \right) P_l^j \delta C_l + \\ & + \left\{ - \frac{2B_0}{x_j^3} - \sum_{l=2}^{10} \frac{(l+1)(l+2) B_l P_l^j}{x_j^{l+3}} + (1 - 4\beta) \left(\frac{2}{x_j} D_1^j + D_0^j \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4\beta}{3} (1 - P_2^j) - \sum_{l=2}^{10} \left[\left(1 - \frac{(l+1)(l+2)}{x_j^2} \right) D_l^j - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2}{x_j} D_{l-1}^j \right] C_l P_l^j \right\} \delta x_j = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sum_{l=2}^{10} D_l^l P_l^l \delta C_l - \sum_{l=2}^{10} \left[\left(\frac{l+1}{x_j} D_l^l + D_{l-1}^l \right) C_l P_l^l + (1-4\beta) D_l^l \right] \delta x_j =$$

$$= 4\beta + (1-4\beta) D_0^l - \sum_{l=2}^{10} D_l^l P_l^l C_l.$$

В этой системе уравнений коэффициенты при δx_j , δC_l и δB_l , очевидно, являются известными. Поэтому из нее можно определить эти

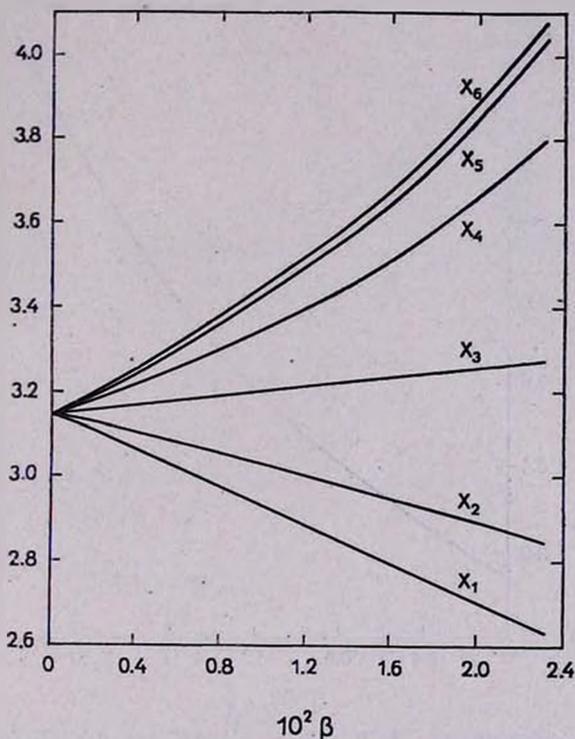


Рис. 1. Зависимость радиусов псевдосферы x_j , соответствующих значениям углов $\theta_j = 12^\circ, 27^\circ, 43^\circ, 59^\circ, 74^\circ$ и 90° , от значений параметра β . Абсцисса — $10^2 \beta$.

приращения. Складывая найденные приращения с первоначальными значениями x_j , C_l и B_l , получим новые x'_j , C'_l и B'_l . Подставив их в систему (31), определим новые значения приращений $\delta x'_j$, $\delta C'_l$ и $\delta B'_l$. Эта процедура продолжается до тех пор, пока поправки $\delta x_j^{(n)}$, $\delta C_l^{(n)}$ и $\delta B_l^{(n)}$ не обратятся в нуль с заданной точностью. Описанная выше

процедура даст сходящийся или расходящийся результат в зависимости от выбора первоначальных значений x_j , поэтому в применяемом методе существенным является удачный выбор исходных значений x_j .

Практически выбор x_j осуществлялся следующим образом. Решение систем (30) и (31) было начато для ряда значений параметра β достаточно близких к нулю, для которых в качестве исходных можно выбрать $x_j = \pi$. Далее, строим кривую зависимости всех x_j от β

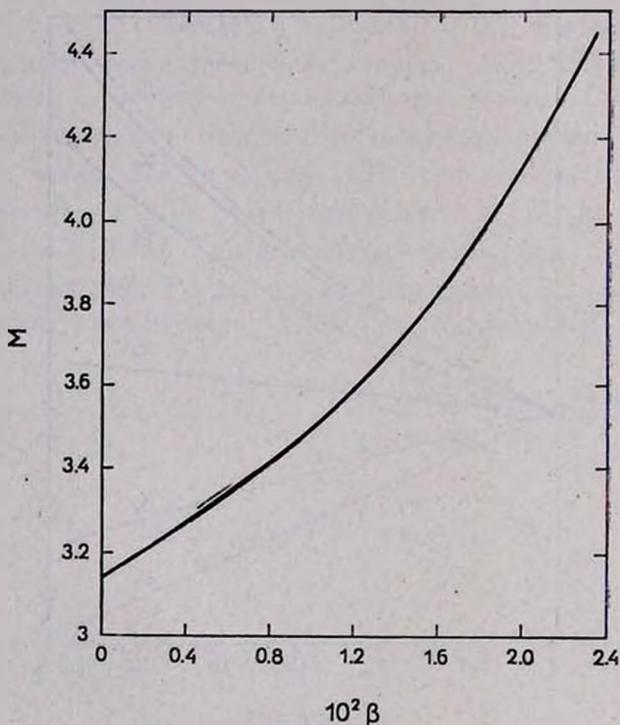


Рис. 2. Зависимость массы вращающейся конфигурации от параметра β . Масса измерена в единицах $4\pi(\alpha/2\pi k)^{3/2}\rho_c$. Абсцисса — $10^2\beta$.

(см. рис. 1). Затем интерполируем кривые x_j до чуть большего значения β и по графикам определяем новые ориентировочные значения x_j , которые далее уточняются вышеописанным способом. Таким образом, можно найти x_j , C_i и B_i для всех возможных β .

Найденная шестерка чисел x_j дает возможность определить форму поверхности вращающейся конфигурации и тем самым определить

большую и малую полуоси. Коэффициенты B_i позволяют определить интегральные характеристики звезды. Так, например, масса звезды есть попросту B_0 (см. рис. 2). Масса вращающейся конфигурации растет с увеличением параметра β и при $\beta = \beta_{\max}$ достигает значения 4.45, которое превышает массу покоящейся звезды в 1.42 раза. Остальные коэффициенты B_i определяют мультипольные моменты (см. рис. 3).

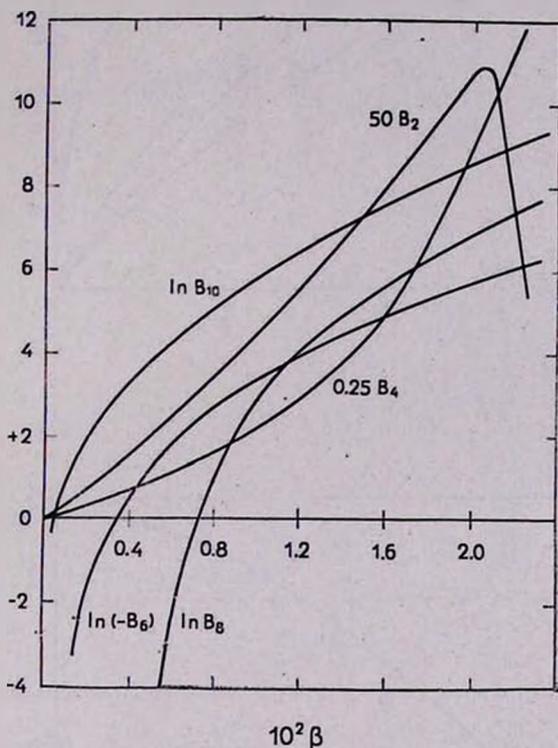
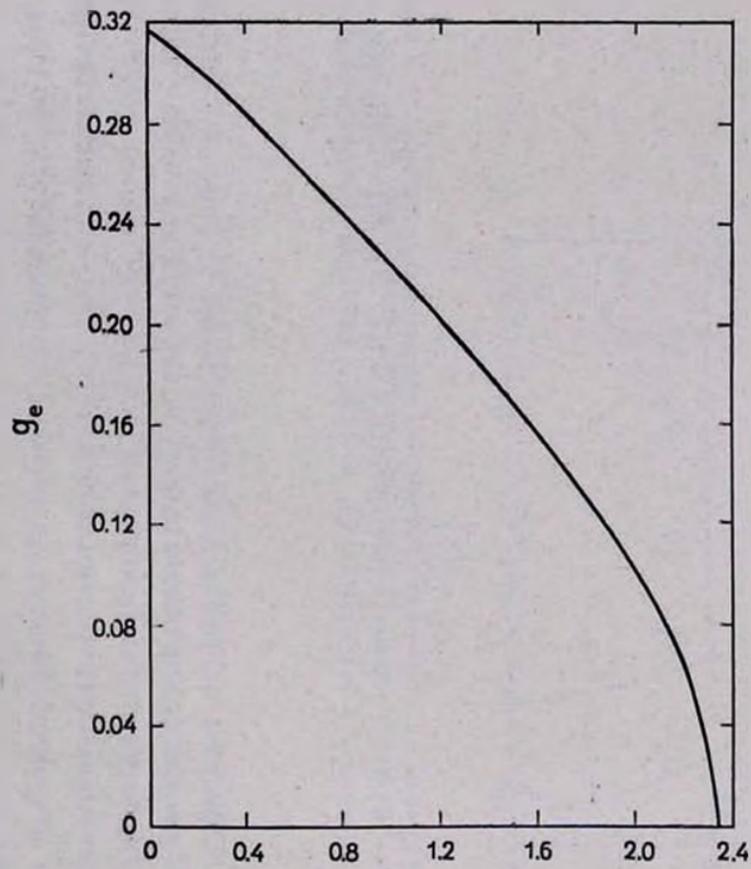
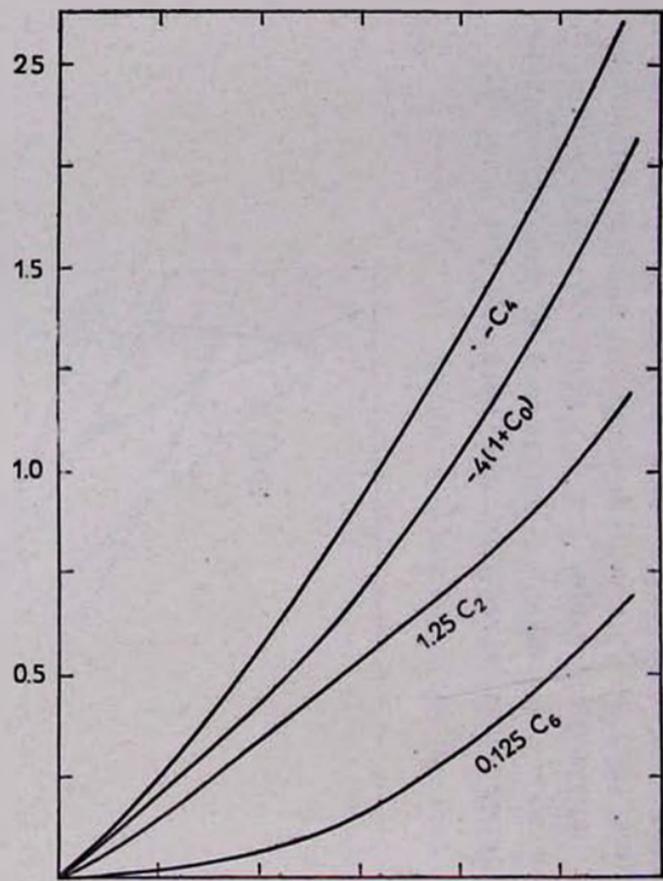


Рис. 3. Зависимость мультипольных моментов вращающейся звезды от параметра β . Абсцисса — $10^2 \beta$. На кривых отложены $50 B_2$, $0.25 B_4$, $\ln(-B_6)$, $\ln B_8$ и $\ln B_{10}$. При малых значениях β $\ln(-B_6)$, $\ln B_8$ и $\ln B_{10}$ расходятся, вследствие их стремления к нулю.

Остается открытым вопрос определения конца серии полученных решений, то есть как найти верхнюю границу возможных значений β . Максимально допустимое значение β определяется из требования $g_e(\beta) = 0$, где g_e есть эффективное ускорение на экваторе. Оно складывается из гравитационного и центробежного ускорений и определяется по формуле:





$$g_c = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=x_c} - 2\beta x_c, \quad (32)$$

где x_c — радиус на экваторе. В ходе интегрирования была построена кривая $g_c(\beta)$ (см. рис. 4) и точка пересечения этой кривой с осью абсцисс дает верхнюю границу параметра β . Для рассматриваемой политропы β_{\max} оказалось равным 0.0236.

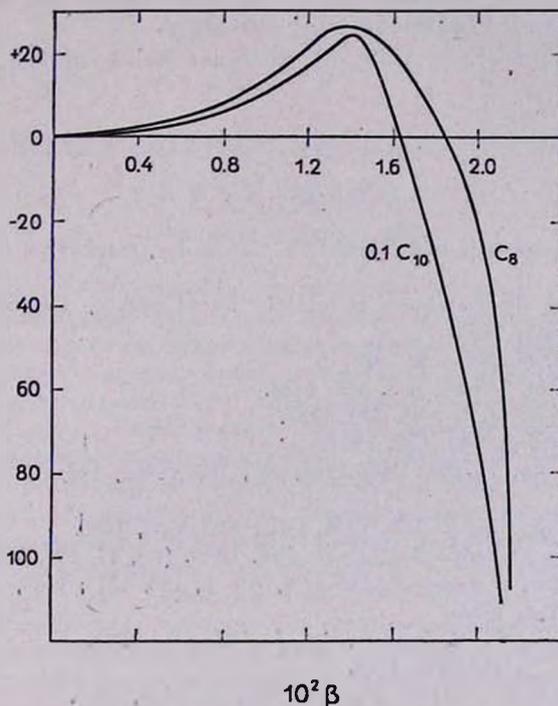


Рис. 6. Зависимость постоянных C_8 и $0.1 C_{10}$ от параметра β . Абсцисса— $10^2 \beta$.

Распределение масс внутри звезды для некоторого значения можно определить, используя формулу (25), причем коэффициенты, входящие в формулу, берутся из кривых, приведенных на рис. 5 и 6.

Авторы глубоко благодарны академику В. А. Амбарцумяну и Г. С. Саакяну, а также Ю. Л. Вартаняну и М. А. Мнацаканяну за постоянный интерес к работе и многочисленные полезные обсуждения. Авторы признательны Л. Б. Бабалян за проведение численных расчетов.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

Ереванский государственный
университет

TO THE NON-RELATIVISTIC THEORY OF THE ROTATING CONFIGURATIONS

V. V. PAPOYAN, D. M. SEDRAKIAN, E. V. CHUBARIAN

The rotating configurations corresponding to the equation of state $P = a\rho^2$ in Newton's approximation are investigated.

The analytic expressions for the distribution of mass in the form of series of Legendres polynoms are obtained.

The mass and other integral characteristics of the configuration calculated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *J. H. Jeans*, *Astronomy and Cosmology*, Cambridge, Cambridge University Press, 1929.
2. *R. A. Lyttleton*, *The stability of rotating liquid masses*, Cambridge, Cambridge University Press, 1953.
3. *E. A. Milne*, *M. N.*, 83, 118, 1923.
4. *H. von Zetzel*, *M. N.*, 84, 665, 684, 1924.
5. *S. Chandrasekhar*, *M. N.*, 93, 390, 1933.
6. *R. A. James*, *Ap. J.*, 140, 552, 1964.
7. *P. H. Roberts*, *Ap. J.*, 136, 1108, 1962; 137, 1129, 1963; 138, 809, 1963; 140, 583, 1964.
8. *S. Chandrasekhar*, *Ap. J.*, 136, 1048, 1962; 137, 1185, 1963.
9. *S. Takeda*, *Nem. Colledge Sci.*, Kyoto Imp. Univ. (A), 17, 197, 1934.
10. *S. Chandrasekhar*, *Norman R. Lebovitz*, *Ap. J.*, 136, 1037, 1069, 1082, 1962; 137, 1142, 1162, 1172, 1963.
11. *S. Chandrasekhar*, *P. H. Roberts*, *Ap. J.*, 138, 801, 1963.
12. *R. Stoeckly*, *Ap. J.*, 142, 208, 1965.
13. *Z. Kopal*, *Numerical Analysis*, London, Chapman Hall, 1961.

ГАЛАКТИКИ С УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫМ КОНТИНУУМОМ

Б. Е. МАРКАРЯН

Поступила 9 декабря 1966

Приводится список 70 слабых, в основном сферидальных галактик, обладающих равными спектральными признаками, подобных рассмотренным автором ярким галактикам с аномальными спектрами и цветами центральных частей [2]. Эти галактики были обнаружены при наблюдениях, выполненных с полутораградусной объективной призмой, установленной на 40" Шмидт-телескопе. Главной особенностью, отличающей эти объекты от основной массы галактик, является присутствие в их спектрах сильного ультрафиолетового континуума, а иногда и эмиссионных линий. Спектры галактик с ультрафиолетовым континуумом по общему виду разделяются на два основных типа: *s* — довольно резкие спектры, подобные звездным, и *d* — спектры с размытыми краями, диффузного вида. По характеру распределения энергии спектры типа *s* подобны спектрам квазаров, а спектры типа *d* — спектрам узлов спиралей, представляющих собой яркие ассоциации. Приводятся аргументы в пользу того, что ультрафиолетовый континуум объектов типа *s* обуславливается необычным излучением, то есть излучением псевзвездного происхождения, а у объектов типа *d* — звездами ранних спектральных классов, присутствие которых делает эти сферидальные галактики крайне необычными.

Детальная колориметрия галактик показывает, что галактики всех морфологических типов обычно синеют при радиальном перемещении в них от центра наружу [1]. При этом ядра и центральные части галактик типов E, S0, Sa и Sb обладают оранжевым или красным цветом и спектры их относятся к типам G и K. Однако среди галактик упомянутых типов встречаются объекты, которые отклоняются от указанной закономерности. Существуют галактики с относительно голубыми центральными частями, в которых при удалении от центра посинение не наблюдается. Такие галактики обладают спектральными признаками звезд относительно ранних классов (A и F) и часто заметным ультрафиолетовым континуумом. Тем не менее, они имеют характерные для своего морфологического типа большие интегральные

показатели цвета ($0^m6 - 1^m0$). Таким образом, в ряде случаев наблюдается противоречие со сложившимся представлением о соответствии между спектральными признаками и интегральными цветами галактик.

Список 40 таких аномальных галактик ярче 13^m был опубликован нами еще в 1963 году [2]. Этот далеко не полный список свидетельствует о существовании среди галактик ранних морфологических типов определенной категории объектов, обладающих более ранними спектральными признаками, чем следовало бы ожидать по их интегральному цвету или морфологическому типу. Следует отметить, что объекты с относительно голубыми центральными частями и ранними спектральными признаками имеются и среди галактик типа Sc, но они не были включены в вышеупомянутый список, так как в случае поздних спиралей трудно отличить аномальные случаи от обычных, поскольку в их центральных частях почти всегда присутствуют звезды ранних спектральных классов. Но имеются случаи, когда существование несоответствия между цветами и спектрами ядер поздних спиралей не вызывает никакого сомнения. Таково, например, ядро M 33, для которого, согласно Уокеру [3], $B - V = 0.68$ и $U - B = 0.05$, между тем как спектральный тип его, согласно Мейоллу [4] — A 7.

Такие данные, относящиеся к самим ядрам, к сожалению, известны лишь для немногих галактик, и все же среди них встречаются объекты, у которых несоответствие между вышеуказанными характеристиками выражено довольно резко. Например, у ядра NGC 4151, согласно Вокулеру [5], $B - V = 0.66$ и $U - B = -0.31$, а спектральный тип, согласно Хюмасону [6] — A 5.

Очевидно, аномальные спектры и цвета центральных частей таких галактик могут быть обусловлены либо необычным звездным составом, либо необычным излучением их ядер. В том и другом случае галактики с относительно голубыми ядрами или центральными частями и ранними спектральными признаками заслуживают особого внимания.

Представляет интерес возможность существования объектов такого рода и среди более слабых галактик, находящихся вне области, занятой сверхскоплением, содержащим Местную систему.

Начатый в Бюракане обзор неба, производимый с объективными призмами, установленными на $40''$ Шмидт-телескопе, показывает, что ранние спектральные признаки наблюдаются и у слабых галактик ранних морфологических типов. Обзор ведется главным образом с полутораградусной объективной призмой и только частично, для сравнения спектров, с трехградусной. Дисперсия полутораградусной призмы крайне мала — $2500 \text{ \AA}/\text{мм}$ у H_β ; вследствие этого в спектрах звезд на-

блюдаются только очень интенсивные и глубокие линии. Поэтому о природе изучаемых объектов приходится судить, главным образом, по характеру распределения яркости в непрерывном спектре.

Изучение показало, что для поставленной цели наиболее подходящими являются пластинки сорта Kodak II AF английского производства. Зеленый провал у этого сорта пластинок по сравнению с обычными панхроматическими несколько смещен в сторону коротких волн, и для звезд типа A0—A2 красно-желтая и сине-фиолетовая части спектра, разделенные зеленым провалом, получают примерно одинаковой поверхностной яркости и длины. При переходе к голубым звездам красно-желтая часть спектра слабеет, а сине-фиолетовая становится ярче и протяженнее. При переходе же к красным звездам, наоборот, красно-желтая часть спектра становится более интенсивной, а сине-фиолетовая — слабее и короче.

Опыт показывает, что при таких пластинках полутораградусную призму, позволяющую получать нерасширенные, то есть ниточные спектры звезд до 17^m , помимо грубой классификации слабых звезд, успешно можно использовать для поисков звезд и галактик с сильным и умеренным ультрафиолетовым континуумом. Наблюдения пока проходились в области созвездий Большой Медведицы и Жирафа и частично в районе северного полюса Галактики. На полученных снимках, покрывающих поверхность, примерно, 650 квадратных градусов, было обнаружено довольно много объектов с сильным ультрафиолетовым континуумом и среди них 70 галактик слабее 13^m . *Спектры этих галактик по интенсивности фиолетового и ультрафиолетового континуума довольно резко отличаются от спектров основной массы галактик, обладающих обычно очень слабым излучением в коротковолновой области.* Поэтому может возникнуть сомнение относительно реальности этих аномальных спектров. Наблюдаемая картина искусственно может возникнуть только при проектировании голубых звезд фона на ядра галактик. Но расчеты показывают, что вероятность проектирования звезд на ядра галактик вообще мала. Она будет чрезвычайно мала для голубых звезд, составляющих незначительную долю общего числа звезд на высоких галактических широтах. Если бы даже спектры не всех обнаруженных галактик были бы обусловлены проектированием голубых звезд на их ядра, а лишь их заметная доля, то случаи проектирования звезд других типов должны были наблюдаться несравненно чаще. Между тем, такие случаи встречаются крайне редко. Кроме этого, рассматриваемые галактики избегают скоплений (подавляющее большинство их находится вне скоплений), в то время как вероятность проектирования звезд на галактики гораздо больше в скоплениях из-за большого количества галактик в них.

Наконец, отметим, что 14 из обнаруженных галактик являются эмиссионными, а у 17 наличие слабой эмиссии заподозрено. Очевидно, что объяснить наличие эмиссии в спектре проектированием звезд на галактики не представляется возможным, поскольку на высоких галактических широтах эмиссионные звезды встречаются чрезвычайно редко.

Все это приводит к заключению, что если не во всех случаях, то по крайней мере в подавляющем их большинстве аномальная природа спектров обнаруженных галактик носит реальный характер.

Половина этих галактик зарегистрирована в Морфологическом каталоге галактик (MCG) Б. А. Воронцова-Вельяминова [7], а часть — в Каталоге галактик и скоплений галактик Ф. Цвикки [8]. Данные о них мы приводим в нижеследующей таблице, а карты (репродукции, сделанные с карт Паломарского атласа в синих лучах) для их отождествления — в конце статьи.

В столбцах таблицы последовательно приведены следующие данные:

- 1 — порядковый номер,
- 2 — номер галактики по MCG [7].
- 3 и 4 — экваториальные координаты для эпохи 1950 г. по [7] и [8]. Координаты галактик, не входящих в эти каталоги, определены нами приближенно.
- 5 — размеры основного тела галактики в секундах дуги по изображениям на картах Паломарского атласа неба.
- 6 — приближенная фотографическая звездная величина образования, излучением которого обуславливается спектр. Оценка яркости производилась на основе интенсивности спектра.
- 7 — спектральные характеристики, которые обсуждаются дальше.
- 8 — примечания.

Отметим, что в таблицу не включены галактики ярче 13^m , так как они, за редким исключением, входят в упомянутый выше список ярких галактик с аномальными спектральными признаками [2]. Шесть из приведенных в таблице галактик, порядковые номера которых отмечены звездочкой, известны как голубые с эмиссионными линиями. Четыре из них — голубые галактики Aro [12], одна из них голубой объект Хюмасона-Цвикки № 46 [14] и одна — известная галактика NGC 4861, которую подробно изучили Барбиджи и Хойл [15]. О физической природе остальных галактик мы не нашли данных в литературе.

Интегральные яркости 55 из 70 рассматриваемых галактик находятся в пределах 13^m и 16^m , так что в среднем на 12 квадратных градусов приходится одна такая галактика с сильным или умеренным ультрафиолетовым излучением. Общее же число галактик в указанных

№	MCG	Координаты (1950)		Размеры	m _{pg}
		α	δ		
1	2	3	4	5	6
1	5-4-9	1 ^h 13 ^m 4	32° 50'	16"×27"	15 ^m 5
2	6-5-44	51.9	36 40	20×25	14
3	12-6-19	6 10.1	71 03	25×35	15
4	12-7-3	21.6	74 20	10	16.5
5	—	35.0	75 39	7	17
6	12-7-18	45.5	74 29	20	15
7	12-7-38	7 22.4	72 39	25×40	15.5
8	12-7-41	23.8	72 13	27×37	15
9	—	32.6	58 52	25	14.5
10	10-11-138	43.2	61 03	20	14.5

Спектр. характ-ки	П р и м е ч а н и я
7	8
sd12e	NGC 449. В эмиссии H_{α} , (N_1 , N_2 , N_3) и возможно λ 3727. Непрерывный спектр слабый.
s12	Имеет слабый отросток. Ядро яркое и звездообразное.
ds12e	В целом красная. Сильная эмиссия в H_2 (N_1 , N_2 , N_3), H_1 и λ 3727.
sd12(e)	Морф. тип SBc. Данные относятся к ядру, являющемуся почти звездообразным.
d1e	Имеет небольшой хвост. По виду напоминает комету. Слабая эмиссия в H_2 и λ 3727.
s1e	IC 450. Имеет слабую корону. В целом красная. Эмиссия в H_{α} , (N_1 , N_2 , H_{β}), H_2 и λ 3727.
d12	По-видимому, иррегулярная галактика небольших размеров.
d1	IC 2184. Две слившиеся тесно двойные галактики. По-видимому, гнездо голубых объектов.
s1(e)	
s1(e)	Пекулярная спираль со звездообразным ядром. Данные относятся к ядру.
s2	Имеет слабую корону. В целом красная. По-видимому, имеет голубое звездообразное ядро.

1	2	3	4	5	6	7	8
12	12-8-13	7 ^h 44 ^m 6	74°30'	12"×25"	13 ^m 5	d2	Морф. тип SBb. Данные относятся к центральной части. Недалеко от ядра (SW) имеется яркое и голубое образование.
13	10-12-17	52.0	60 25	20	15.5	sd1(e)	IC 2209. Пекулярная по структуре галактика с почти звездобразным ядром. Данные относятся к ядру.
14	—	8 5.4	72 56	20	15.5	s12	Сфероидальная со звездобразным ядром.
15	13-6-25	29.0	75 19	10	17	d1(e)	Очень маленькая и слабая галактика с двумя отростками.
16	—	47.7	73 23	14×20	15	ds1	Имеет слабую корону.
17	—	47.9	57 16	7	17	s12	Очень компактная. От звезд отличается еле заметной короной.
18	10-13-54	9 1.0	60 08	50×25	15	ds2	Вытянутая галактика с оболочкой.
19	10-13-71	12.9	59 59	12×15	16	ds1e	Двойная (16 ^m и 18 ^m), обе голубые. Яркая, имеет заметный хвост. В эмиссии H _α , (N ₁ , N ₂ , H ₃) и λ. 3727.
20	12-9-41	17.1	71 45	13×23	16	d2	Две слившиеся сфероидальные галактики в общей оболочке.
21	10-14-41	45.1	58 12	12×9	15.5	sd2	Вытянута по z. На концах большой оси имеются два голубых узла 17 ^m 5.
22	—	45.8	55 50	7×13	16.5	d1e	Двойная—соприкасающиеся сферические галактики 17 ^m
23	10-14-54	53.4	60 12	12	16	s12	Довольно компактная. В целом красная.
24	—	56.0	54 44	10×13	17	ds12	Имеет слабую корону.
25	10-15-4	10 0.4	59 41	18	15	s12(e)	
26	10-15-26	8.6	59 08	13×18	16	d12(e)	Сфероидальная с двумя небольшими отростками.

1	2	3	4	5	6	7
27	—	10 ^h 8 ^m 7	58° 58'	10"	17 ^m	d1
28	—	9.2	58 39	8	17	ds12
29	—	14.5	60 19	10×13	16.5	d12
30	10—15—64	16.3	57 40	10×15	17	d2(e)
31	10—15—65	16.4	57 40	10	15.5	s12
32	—	23.8	56 31	10×13	16	d2
33*	9—17—70	29.3	54 40	25×30	13.5	sd1e
34	10—15—104	30.9	60 17	12×25	16	ds1e
35*	9—18—22	42.3	56 14	25×45	14	ds1e
36*	5—26—46	11 2.2	29 24	10×15	15.5	d1e
37	—	13.9	29 03	16	16	d12
38	9—19—34	15.5	54 02	25	16	sd2
39	9—19—35	15.6	54 02	25	17	ds1(e)
40	9—19—73	22.8	54 41	10	16	sd12

Компактная галактика, вытянутая незначительно по δ .

Компактная галактика, слегка вытянутая по α .

Эллиптическая галактика с отростком, составляющая двойную систему с № 31.

Морф. тип SBg, ядро окружено прерывающимся кольцом. Данные относятся к ядру.

Вытянута по δ .

Наго 2. Сильная эмиссия в H_α и λ 3727; умеренная в (N_1 , N_2 , H_3) и H_γ . $B - V = 0.33$, $U - B = -0.52$ [13].

Имеет слабую корону. В эмиссии H_α (N_1 , N_2 , H_3) и λ 3727.

NGC 3353 = Наго 3. Центральная часть состоит из двух сгущений, у западного в эмиссии H_α — N_1 , N_2 , и λ 3727. $B - V = 0.32$, $B = -0.35$ [13].

Наго 4. Эмиссия в H_α (N_1 , N_2 , H_3) и λ 3727. $B - V = 0.13$, $U - B = -0.64$ [13].

К SE от нее на расстоянии $33''$ имеется галактика $15^m 5$ та-

1	2	3	4	5	6	7	8
41	—	11 ^h 34 ^m 0	55°08'	20"	15 ^m	sd12(e)	
42	8—22—28	51.1	46 29	12	16	s12(e)	Имеет оболочку с резкими краями.
43	—	12 0.4	39 41	10×20	16	d12	Вытянута по α . Имеет небольшой отросток.
44	—	0.8	39 04	12×18	16	s12	Имеет два слабых спутника, расположенных на противоположных концах большой оси.
45	10—17—133	1.2	60 48	9×16	16	ds2	Вытянута почти по α .
46	—	13.4	41 02	8×11	17	d2	Возможно, что тесно-двойная.
47	—	13.5	40 51	9	16	sd2	Имеет заметный хвост и голубой спутник 17 ^m на расстоянии 13" к W.
48	—	14.3	58 09	10	16	s2	Имеет оболочку.
49*	—	16.6	4 08	10×13	15	ds1e	Напо 8. Возможно двойная: иррегулярная и сфероидальная. Эмиссия у последней в H α — β , N $_1$, N $_2$ и λ 3727.
50	—	20.7	2 57	12	15.5	s1	В целом красная. Судя по виду спектра, имеет очень голубое ядро.
51	—	21.7	4 30	10×20	15	ds12	Вытянута по α . Непрерывный спектр в синей и ультрафиолетовой частях почти одинаковой яркости.
52	—	23.2	0 52	10	14.5	s12(e)	NGC 4385 — ранняя спираль с перемычкой. Ядро почти звездообразное. Данные относятся к ядру.
53	—	53.7	27 57	10×13	15.5	ds12	Довольно компактная галактика.
54*	6—28—44	54.6	32 42	13	15	s1e	NZ 46 [14]. Ярчайший — сфероидальный компонент тройной системы. В эмиссии λ 3727.

1	2	3	4	5	6	7	8
55	—	12 ^h 55 ^m 0	27 40'	12"	16 ^m	sd2	Довольно компактная.
56	—	56.1	27 31	10	16.5	d12(e)	Имеет слабую корону.
57	—	56.2	27 26	15	15.5	sd1	Довольно компактная.
58	5—31—57	56.7	27 55	15	15.5	s2	
59*	6—29—3	56.7	35 08	20	14	d1e	NGC 4861. Двойная — иррегулярная и сферондальная. Данные относятся к последней. В эмиссии H _α -, N ₁ , N ₂ и λ 3727.
60	—	57.7	28 08	12	15.5	ds2(e)	Двойная система. Данные относятся к яркому (западному) компоненту.
61	—	59.3	29 40	7×10	17	d12	По-видимому, двойная.
62	—	13 2.9	30 33	10	16.5	d12	Очень компактная, по виду мало отличается от звезд.
63	—	3.8	30 51	8	17	d1	Очень компактная, по виду почти не отличается от звезд.
64	—	4.7	34 40	7	17	sd1	Очень компактная, по виду почти не отличается от звезд.
65	—	19.1	59 21	13	15.5	d1	Довольно компактная.
66	10—19—72	24.2	57 32	15	15	d2(e)	Имеет соприкасающийся спутник 18 ^m .
67	—	39.7	30 46	10	16.5	sd1e	В эмиссии H _α (N ₁ , N ₂ , H ₃) и λ 3727.
68	—	42.9	27 23	8×12	17	d12(e)	Вытянута по α, возможно, что тесно двойная система.
69	—	43.8	29 53	8	16.5	s1	Очень компактная.
70	—	53.5	26 56	12	16	d12(e)	Довольно компактная.

пределах яркости — порядка трех в одном квадратном градусе. Поэтому слабые галактики с сильным ультрафиолетовым излучением составляют примерно три процента от общего числа галактик ярче 16^m . Среди галактик ярче 13^m их доля примерно в два раза больше. Это расхождение следует объяснить тем, что при увеличении расстояния ядра галактик „заглушаются“ окружающими их областями, и на сравнительно больших расстояниях проявляются только такие ядра, светимости которых составляют существенную долю интегральной светимости галактики. По-видимому, доля галактик с ультрафиолетовым континуумом составляет не менее пяти процентов общего числа галактик.

Многие из рассматриваемых галактик являются компактными в смысле Цвикки. Они имеют малые угловые размеры, сферическую или эллиптическую форму (спирали встречаются сравнительно редко) и довольно сильно конденсированы. Но у этих сфероидальных галактик часто наблюдается слабая оболочка или корона, отросток или небольшой хвост, а иногда и слабый голубой спутник. Такие образования — придатки у галактик с аномальными спектральными признаками могли возникнуть в результате выброса вещества из их ядер. По-видимому, *значительная часть этих объектов находится в послезеруптивной стадии.*

Представляет большой интерес происхождение ультрафиолетового континуума в рассматриваемых галактиках. Это довольно сложный вопрос, освещение которого станет возможным только после детального исследования этих объектов. Пока же мы в состоянии сделать лишь некоторые предварительные замечания по этому поводу.

Отметим прежде всего, что спектры галактик, о которых здесь идет речь, как эмиссионные, так и неэмиссионные по своему виду на снимках, полученных с объективной призмой, можно разделить на два типа: *спектры довольно резкие, подобные звездным, и спектры с размытыми краями, диффузного вида.*

В седьмом столбце таблицы, где приведены спектральные характеристики галактик, эти два типа спектров обозначены соответственно через s и d . Имеются конечно, и спектры промежуточного вида, которые обозначены в таблице через sd и ds в зависимости от того, к которому из указанных двух типов они ближе. Цифры же 1 и 2 при этих буквах показывают степень интенсивности ультрафиолетового континуума в спектре. При этом 1 относится к сильному континууму, а 2 — к умеренному. Присутствие в спектрах эмиссионных линий (это обычно бывают H_α , H_β , часто сливающаяся с N_1 и N_2 , иногда другие линии Бальмеровской серии и $\lambda. 3727$) отмечается, как обычно, буквой e .

Когда же по виду спектра можно лишь заподозрить присутствие слабой эмиссии, буква *e* приводится в скобках.

Таким образом, к типу *s* (к которому примыкает тип *sd*) отнесены ниточные спектры галактик, которые почти столь же резки, как спектры звезд и очень незначительно шире ниточных спектров звезд равной им яркости. Такие спектры по общему виду, а именно, по распределению яркости в непрерывном спектре, очень похожи на спектры звездообразных ядер сравнительно ярких галактик, отнесенных к спектральным типам *A* и *F*. В качестве примера таких галактик можно указать Сейфертовские галактики NGC 1068, 4051, 4151 и неэмиссионные галактики NGC 2903, 3504 и т. д. Спектры их ядер на наших снимках по характеру распределения в них энергии в свою очередь подобны спектрам ярких квазаров. Ниточные спектры указанных объектов обычно имеют клинообразный вид, красная их часть шире и ярче синей части, которая заметно заостряется в далеком ультрафиолете. Для объектов, имеющих спектры такого вида, характерны цвета: $B - V > 0.3$ и $U - B < -0.3$. Но заслуживают внимания и такие случаи, когда $B - V > 0.5$ и $U - B \sim 0$; таково, например, упомянутое выше ядро M 33.

Расчеты [2] показывают, что распределение энергии, характеризующее такими цветами, можно получить, комбинируя излучения в основном голубых и красных гигантов. Образования, в которых доминирует излучение красных гигантов, так же, как и образования, в которых доминирует излучение голубых гигантов, нам известны, но трудно представить себе, что столь конденсированные образования, какими являются звездоподобные ядра или галактики, состоят из этих двух крайних типов звезд.

Основной же причиной, которая заставляет нас отказаться от такого представления о природе рассматриваемых объектов, является то, что в этом случае *остается совершенно не объясненным происхождение часто наблюдаемых в спектрах бальмеровских линий*, на основании которых они относятся к спектральным типам *A* и *F*. Поэтому нам кажется более естественным допущение о наличии у ядер таких объектов *дополнительного коротковолнового излучения необычной природы, то есть незвездного происхождения*, которое обуславливает их ультрафиолетовый континуум и, каким-то образом, возникновение бальмеровских линий. Отметим, что происхождение бальмеровских линий требует объяснения не только в этих объектах, но и в некоторых радиогалактиках, например, в M 82.

В пользу такого представления говорят и результаты радионаблюдений части отмеченных нами аномальных галактик, выполненных Г. М. Товмасыном [9]. Эти наблюдения показывают, что галактики

с аномальным спектром и цветом центральных частей *обладают радиоизлучением, заметно превосходящим радиоизлучение нормальных галактик, причем оно локализуется в центральных частях этих галактик.* Таким образом, как ультрафиолетовое, так и радиоизлучение локализуется в центральных частях рассматриваемых галактик, тем самым свидетельствуя о *непосредственной их связи с деятельностью ядер этих галактик.* Поэтому сильное ультрафиолетовое излучение, наблюдаемое у ядер заметной части галактик, можно рассматривать как *одну из форм проявления активной деятельности ядер,* на которой основывается концепция В. А. Амбарцумяна об эволюции галактик [10, 11]. Эта форма деятельности ядер более распространенная, но мало заметная, так как она не всегда приводит к таким быстрым изменениям структуры галактики, какие имеют место при взрывах, выбросах и делении ядер. По-видимому, она может привести к образованию спиральных рукавов и различных подсистем звезд, формирование которых, судя по всему, происходит сравнительно медленно.

Перейдем теперь к объектам второго типа, которые также имеют сильный ультрафиолетовый континуум, но не являются сильно конденсированными или ядра которых не являются звездоподобными. Спектры их, обозначенные в таблице через d и ds , по виду на наших снимках заметно отличаются от спектров звезд. Они представляют собой узкие диффузного вида полосы, ширина которых обуславливается размерами ядра или галактики, если последняя является компактной. Возможно, что ультрафиолетовый континуум у этих объектов также обуславливается дополнительным излучением необычной природы. Но следует отметить, что в этом случае наблюдаемое распределение энергии может иметь и чисто звездное происхождение. Дело в том, что в таких спектрах обычно поверхностная яркость в красно-желтой части спектра либо равна таковой в синефиолетовой части, либо превосходит ее незначительно. Для объектов, имеющих такие спектры, характерны следующие цвета: $B - V \sim 0$ и $U - B < -0.3$. По общему виду и распределению в них энергии спектры второго типа очень похожи на спектры узлов, наблюдаемых в спиралах, то есть на спектры ярких ассоциаций. Такие же спектры имеют редко встречающиеся сложные ядра, состоящие из голубых сгущений, какими являются, например, ядра галактик NGC 3310, 3351 и т. д. Поэтому вполне возможно, что объекты второго типа по природе *родственны ассоциациям.* В этом случае их ультрафиолетовый континуум без труда можно объяснить присутствием в них голубых гигантов. В случае справедливости изложенной точки зрения надо будет признать существование нового типа галактик, имеющих *малые*

размеры, сфероидальную форму, молодое население I типа и часто большое количество газа. Такие образования, судя по всему, должны быть молодыми.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

GALAXIES WITH AN ULTRAVIOLET CONTINUUM

B. E. MARKARIAN

A list of 70 faint, mainly spheroidal galaxies with early type spectral features is given. These galaxies are similar to the galaxies with anomalous spectra and colours of their central parts, discussed earlier by the author [2]. The galaxies of our list have been detected by observations made with the 1.5 full size objective prism mounted on the 40" Schmidt telescope. The main feature, which distinguishes these galaxies from the majority of the others, is the presence of a strong ultraviolet continuum and sometimes of emission lines in their spectra. The spectra of the galaxies with an ultraviolet continuum are subdivided according to their general appearances on objective prism photographs into two main types: the s type with sufficiently sharp appearance of spectrum and the d type the spectra of which have diffuse edges. The numbers 1 and 2 attached to these letters indicate respectively the great and moderate strength of the ultraviolet continuum. The distribution of the energy in the spectra of the s type objects is generally similar to that of the quasars and for the d type to the spectra of the hot spots in the spiral arms which are usually bright stellar associations. It is suggested that the ultraviolet continuum of the s type objects is due to the emission of nonstellar origin, and in the case of the d type objects to the early type stars. The presence of early type stars in the central parts of the observed spheroidal galaxies is an extraordinary feature, which deserves special attention.

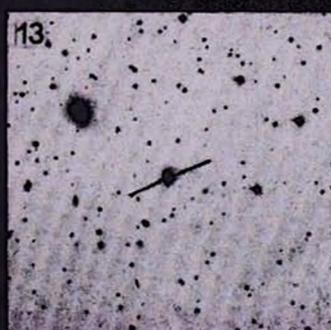
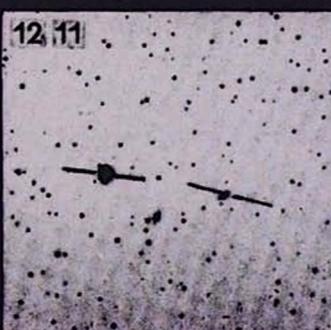
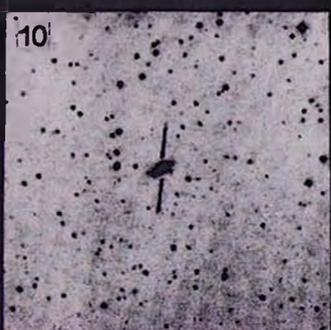
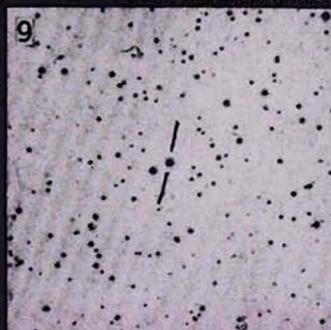
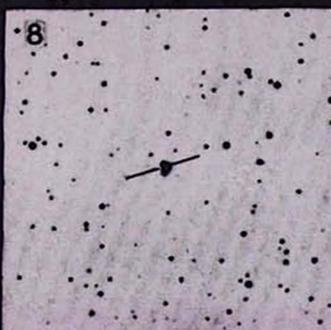
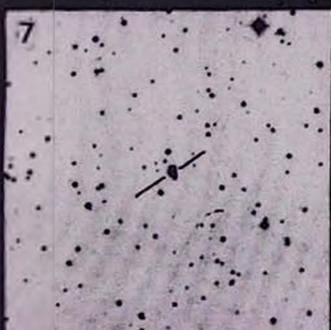
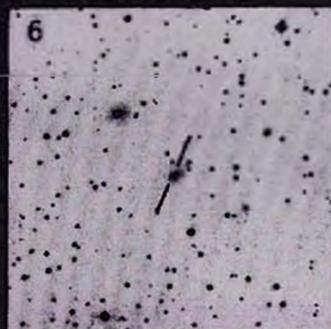
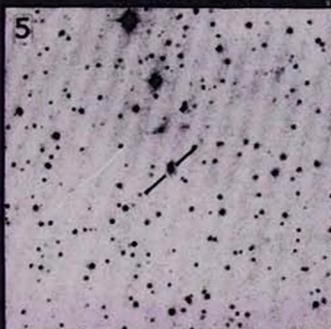
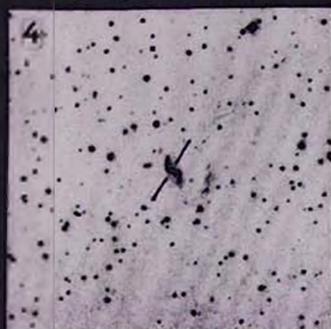
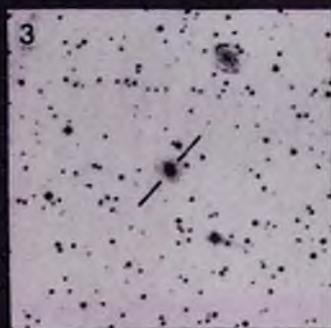
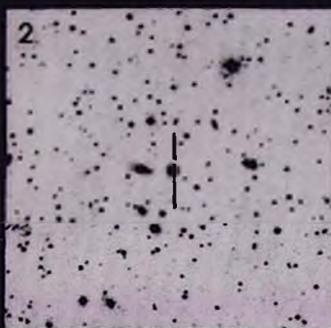
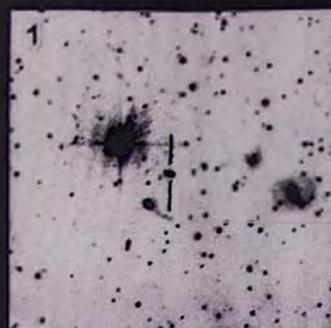
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. Е. Маркарян, Э. Я. Оганесян, С. Н. Аракелян, *Астрофизика*, 1, 38, 1965, 2, 85, 1966.
2. Б. Е. Маркарян, *Сообщ. Бюр. обс.*, 34, 3, 1963.
3. M. F. Walker, *A. J.*, 69, 744, 1964.
4. N. U. Mayall, L. H. Aller, *Ap. J.*, 95, 5, 1942.
5. G. de Vaucouleurs, *Ap. J.*, Suppl. ser., № 48, Vol. V, 233, 1961.
6. M. L. Humason, N. U. Mayall, A. R. Sandage, *A. J.*, 61, 97, 1956.

7. Б. А. Воронцов-Вельяминов, А. А. Красногорская, В. П. Архипова, Морфологический каталог галактик, I и II, 1962—64.
8. F. Zwicky, E. Herzog, Catalogue of galaxies and of clusters of galaxies, II, 1963.
9. H. M. Tovmassian, Austr. J. Phys., 19, 565, 1966.
10. V. A. Ambartsumian, Transactions of the IAU, XI B, 145, 1962.
11. В. А. Амбарцумян, Симпозиум МАС, Бюракан, 1966.
12. G. Haro, Bol. Obs. Tonantzintla y Tacubaya, 14, 8, 1956.
13. W. A. Hiltner, B. Irtarte, Ap. J., 128, 443, 1958.
14. M. L. Humason, F. Zwicky, Ap. J., 105, 85, 1947.
15. E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, F. Hoyle, Ap. J., 138, 873, 1963.

КАРТЫ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ

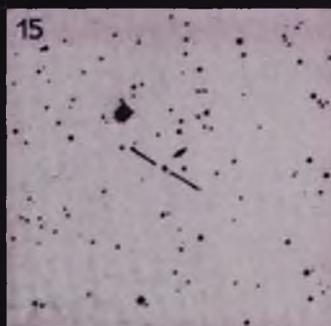
(в синих лучах). Каждая карта покрывает область $16' \times 16'$. Север сверху.
Восток слева.



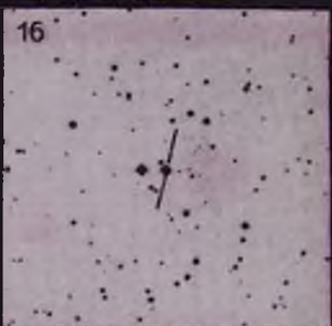
14



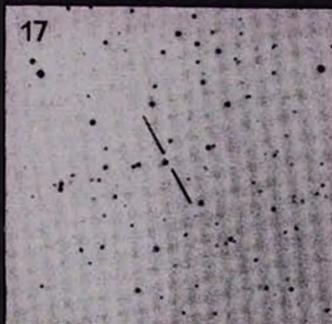
15



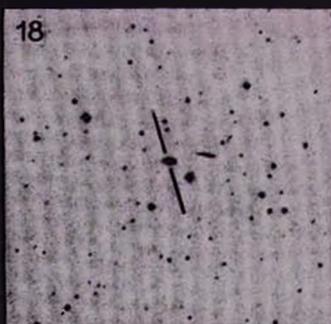
16



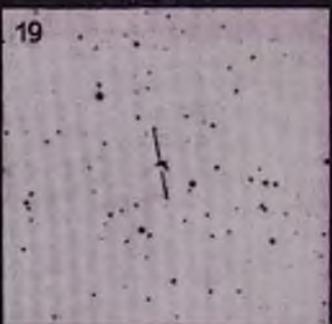
17



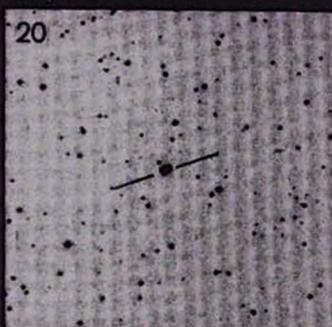
18



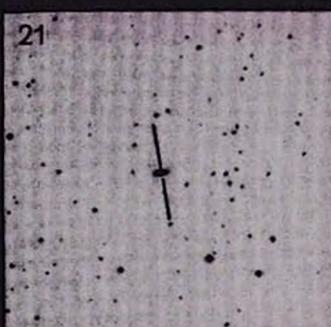
19



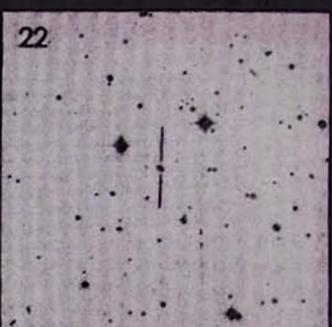
20



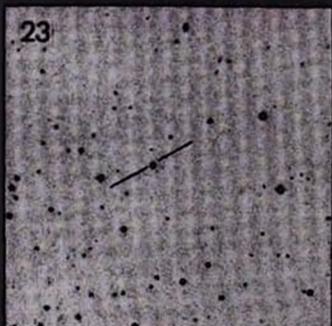
21



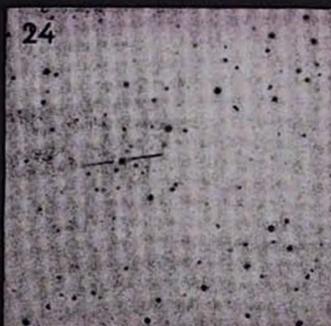
22



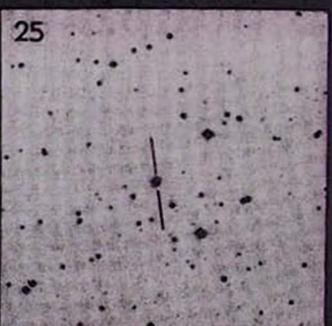
23



24



25



26

27

28

29

31 30

32

33

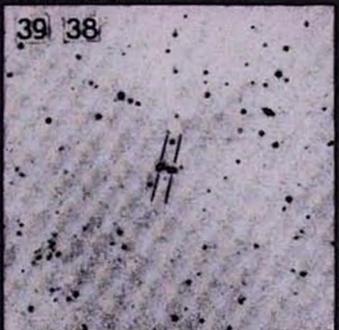
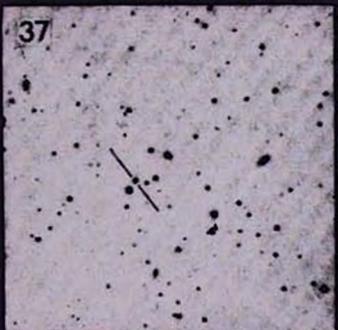
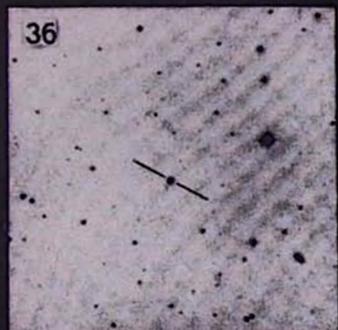
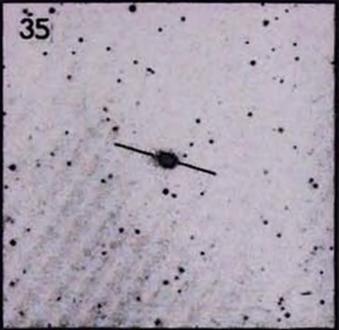
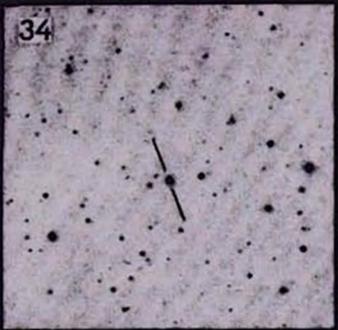
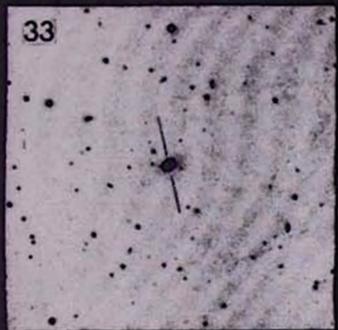
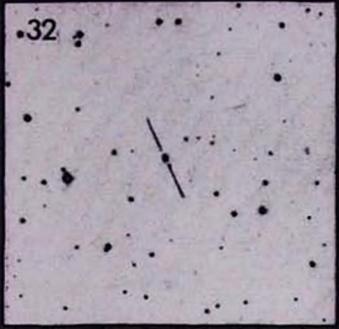
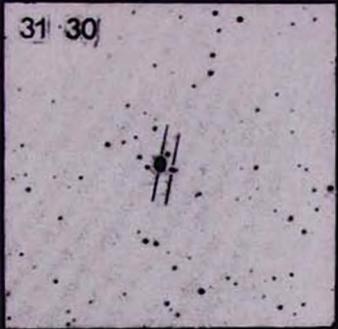
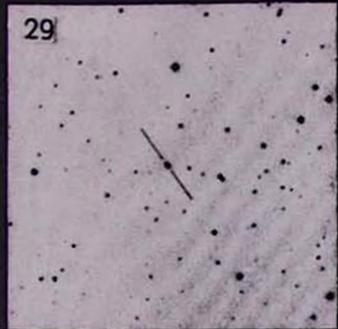
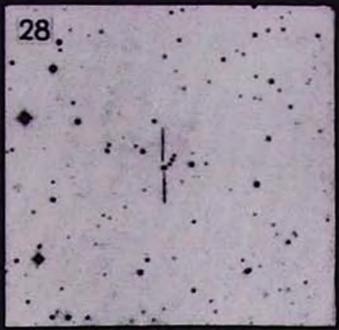
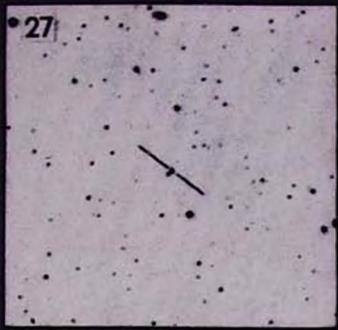
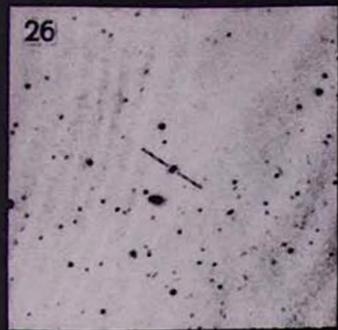
34

35

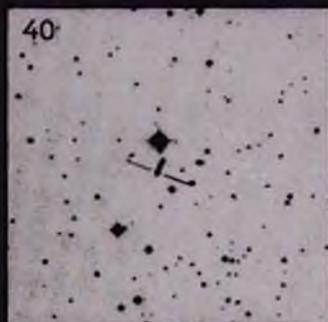
36

37

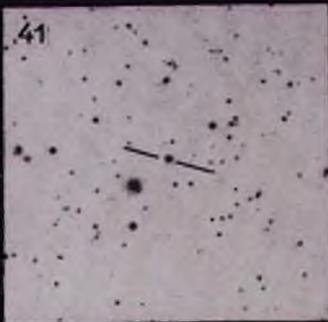
39 38



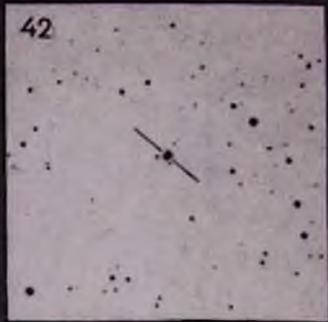
40



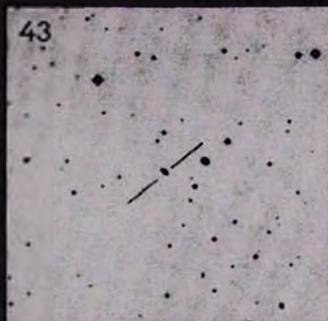
41



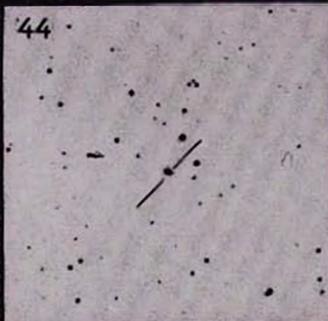
42



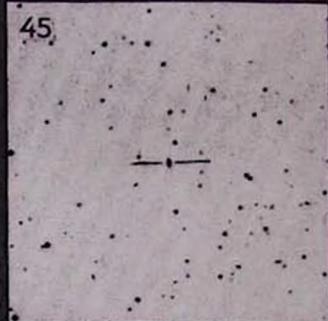
43



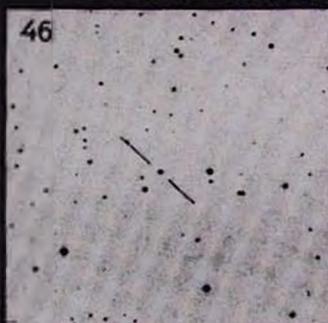
44



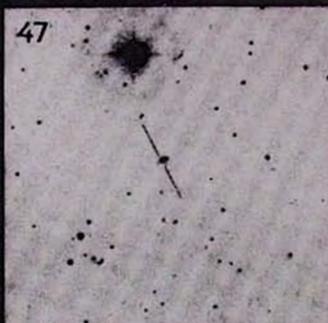
45



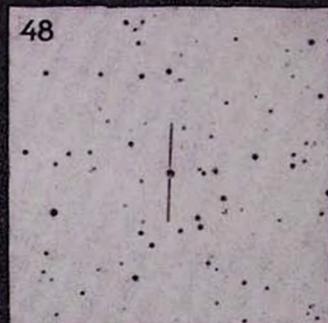
46



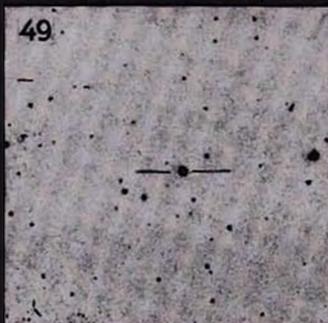
47



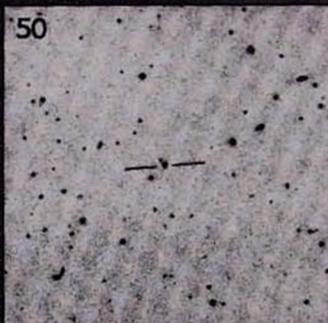
48



49



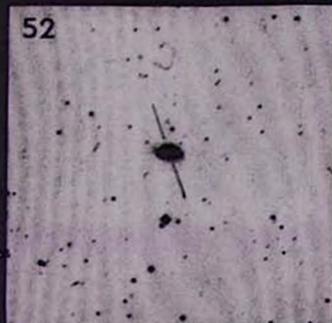
50



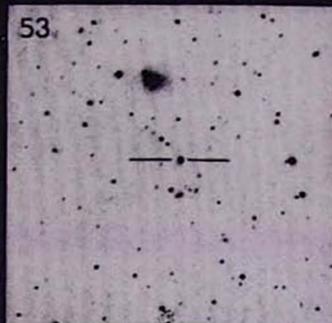
51



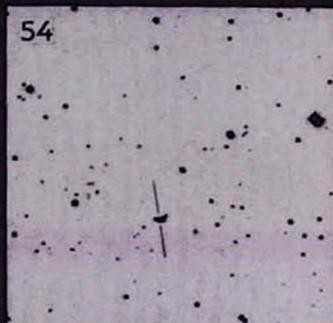
52



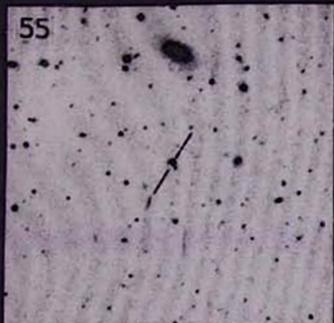
53



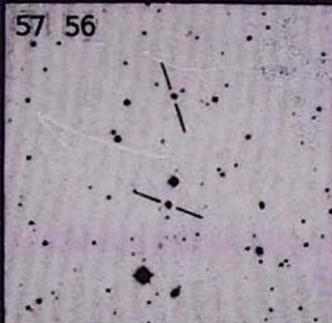
54



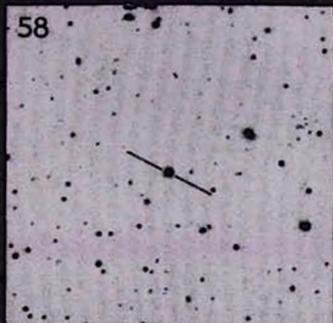
55



57 56



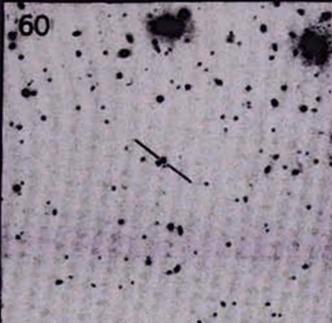
58



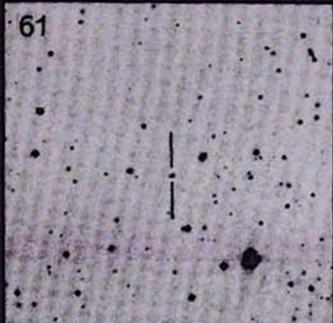
59



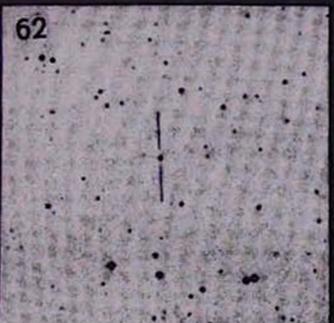
60



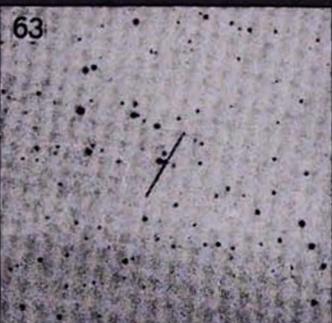
61



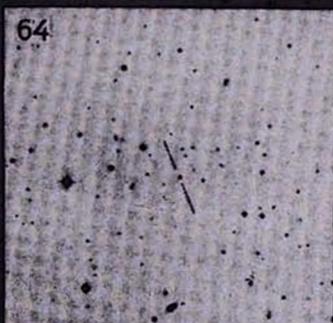
62

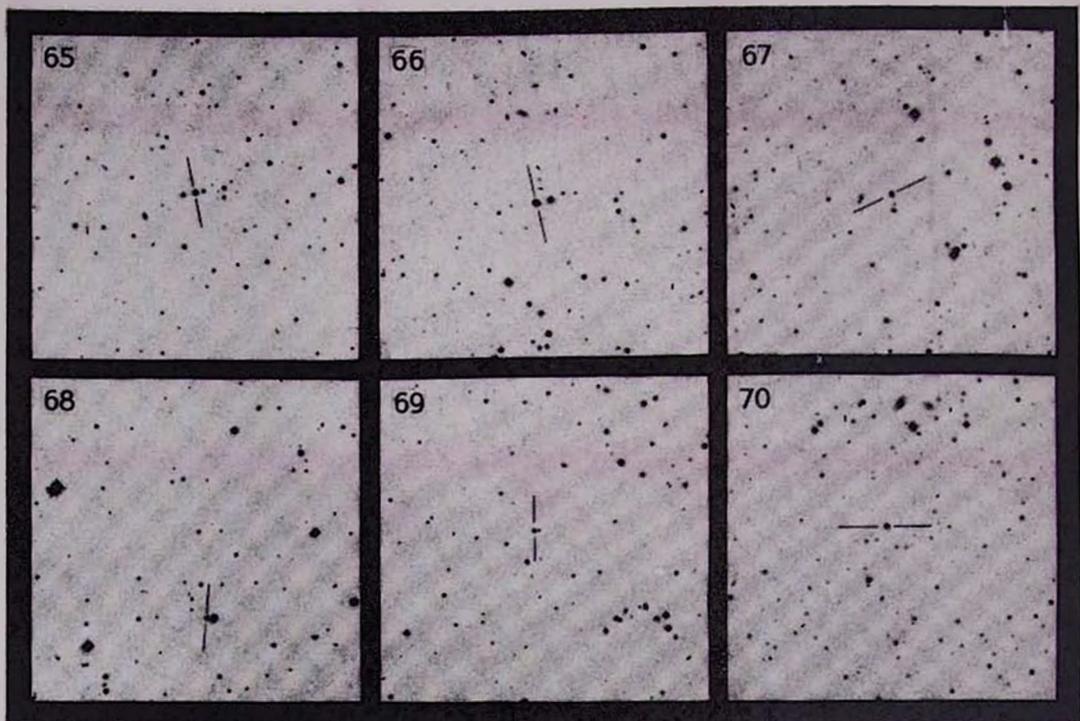


63



64





АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

ФЕВРАЛЬ, 1967

ВЫПУСК 1

О МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ЭФФЕКТЕ ОТРАЖЕНИЯ
В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДАХ

И. Б. ПУСТЫЛЬНИК

Поступила 29 октября 1966

Выдвинуто предположение, что учет несерости вещества отражающей звезды и гравитационное потемнение могли бы объяснить отрицательные $O-C$ амплитуды эффекта отражения в тесных двойных звездах. Методом Чандрасекара решены уравнения переноса для плоско-параллельной атмосферы в состоянии локального термодинамического равновесия и с коэффициентом поглощения, слабо зависящим от λ (ионы H^-) и освещаемой точечным источником. Решение используется для определения монохроматической амплитуды эффекта отражения. Отражающая поверхность отождествляется с критической поверхностью Роша.

Природа эффекта отражения в тесных двойных звездах пока остается во многом неясной. В последнее время было опубликовано несколько работ, рассматривающих это явление как с точки зрения чистого рассеяния [1], так и в предположении поглощения с последующим переизлучением в условиях локального термодинамического равновесия [2, 3]. Каков бы ни был предполагаемый механизм эффекта отражения, с его помощью следовало бы объяснить, почему определяемые из анализа кривых блеска амплитуды эффекта отражения, как правило, оказываются систематически ниже теоретических оценок. Со времени пионерских работ Эддингтона [4] и Милна [5] было предпринято несколько попыток [6—8] найти этому разумное объяснение.

Недавно Собеским [2] и нами [3] была рассмотрена задача о реэмиссии излучения атмосферой с коэффициентом поглощения, слабо зависящим от длины волны. Применив решение этой задачи к отражению от сферической звезды, Собески [9] пришел к заключению, что одним только учетом несерости вещества нельзя объяснить отрицательные $O-C$ амплитуды эффекта отражения, в особенности, когда реэмитирующая звезда—субгигант или гигант позднего спектрального

класса, а освещающая ее звезда раннего спектрального класса В5 — А0. В свете этих результатов приходится усомниться в обоснованности предположения о сферичности реэмитирующей звезды. Правда, анализ кривых блеска полуразделенных систем приводит, как будто, к довольно умеренным значениям эллипсоидальности субгигантов. Но у этих систем отмечается целый ряд пекулярностей, которые у американских исследователей затменно-двойных звезд принято именовать отклонениями от классической модели (*departures from Russel model*). Это заставляет с известной осторожностью относиться к „наблюденным“ значениям эллипсоидальности компонент двойной звезды. Анализируя причины неудовлетворительного согласия теории с наблюдениями, Собески ссылается на более ранние работы Хосокава [8, 10, 11], из которых следует, что у систем с отрицательными $O-C$ амплитуды эффекта отражения отмечаются и аномальные значения эллипсоидальности. Упомянем также работу Одинцова [7], который, рассмотрев отражение в интегральном свете от эллипсоидальной звезды, получил довольно обнадеживающие результаты.

Проблема фигур равновесия компонент тесных двойных звезд, вообще, довольно сложна. Тем более запутанной выглядит она, когда речь заходит о фигурах субгигантов, которые заполняют критические поверхности Роша и обнаруживают целый ряд сопутствующих нестационарных явлений (выброс или перенос массы, образование полустойчивых колец и т. п.). Для таких звезд будем отождествлять переизлучающую поверхность с критической поверхностью Роша. Такая идеализация, по-видимому, не менее оправдана, чем допущение сферичности, пока мы не будем располагать надежными данными о фигурах субгигантов.

Эффект отражения от поверхности Роша должен заметно отличаться от сферического случая, ввиду сильного гравитационного потемнения. Используем данные Копала [12] о критических фигурах Роша. Для примера рассмотрим типичную полуразделенную систему с отношением масс $q = 0.3$ (RS Vul или TX UMa). Отношение $\frac{OA}{OM}$ (см. рис. 1) порядка 0.7, а, следовательно, поток излучения в точке M , в соответствии с теоремой фон Цейпеля, вдвое меньше чем в точке A . Если механизм эффекта отражения состоит в поглощении с последующим переизлучением, то от вершины приливного горба в момент максимума блеска будет излучаться в направлении наблюдателя существенно меньше энергии, чем в случае сферической звезды, то есть болометрическая амплитуда эффекта отражения будет ниже, чем в сферическом случае. Видимо, многое зависит от формы поверхности переизлучающей звезды в точках, близких к линии, соединяющей центры

компонент. Но так как мы не располагаем надежными данными об их фигурах, то и приходится прибегать к идеализированной модели. Впрочем, с теоретической точки зрения, она довольно удобна, так как параметры критической фигуры Роша в первом приближении зависят только от отношения масс, а оно в большинстве интересующих нас случаев известно.

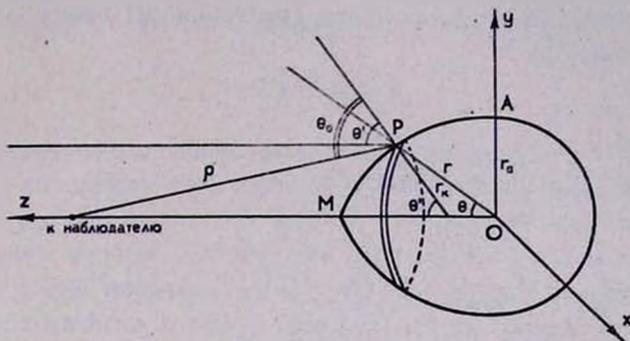


Рис. 1.

Ниже мы рассмотрим задачу о спектральном распределении излучения полубесконечной плоско-параллельной атмосферы, находящейся в локальном термодинамическом равновесии, с коэффициентом поглощения, слабо зависящим от λ , и освещаемой точечным источником. Результаты решения будут использованы для оценки величины амплитуды монохроматического эффекта отражения от звезды, отождествляемой с критической фигурой Роша.

1. *Решение уравнения переноса для переизлучающей атмосферы.* Задачу о спектральном распределении отраженного излучения будем решать методом последовательных приближений, разработанным Чандрасекаром [13] для интерпретации непрерывного спектра Солнца. В первом приближении рассматривается случай серой атмосферы, на которую падает пучок лучей от точечного источника.

Уравнение переноса излучения имеет вид

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I d\mu - \frac{1}{4} S e^{-\tau/\mu_0}, \quad (1)$$

где πS — интегральный поток излучения точечного источника, попадающий в данную точку атмосферы, μ_0 и μ — соответственно косинусы углов падения и реэмиссии излучения. В методе дискретных ординат

Чандрасекара—Вика это интегральное уравнение заменяется системой $2n$ линейных уравнений (n -тое приближение)

$$\mu_1 \frac{dI_i}{dz} = I_i - \frac{1}{2} \sum_j a_j I_j - \frac{1}{4} S e^{-\tau/\mu_0} \quad (i, j = \pm 1, \dots, \pm n), \quad (2)$$

где μ_1 — нули полинома Лежандра $P_{2n}(\mu)$ и a_j — соответствующие веса квадратурной формулы Гаусса.

Общее решение неоднородного уравнения (2) имеет вид (подробнее см. [14] или [3])

$$I_i = I_i^1 + I_i^2,$$

где

$$I_i^1 = \frac{3}{4} F_0 \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha e^{-k_\alpha \tau}}{1 + \mu_1 k_\alpha} + \tau + \mu_1 + Q \right\}, \quad (3a)$$

$$I_i^2 = \frac{1}{4} \frac{\gamma}{1 + \mu_j/\mu_0} S e^{-\tau/\mu_0}, \quad (i, j = \pm 1, \dots, \pm n). \quad (3b)$$

Здесь I_i^1 — общее решение однородного уравнения, которое соответствует обычной задаче переноса излучения с нулевым потоком падающего извне излучения, I_i^2 — частное решение неоднородного уравнения (2), L_α ($\alpha = 1, \dots, n-1$) и Q — постоянные, подлежащие определению из граничных условий $I_{-1} = 0$ ($i = 1, \dots, n$) при $\tau = 0$, πF_0 — интегральный поток излучения, а γ — известная константа, определяемая при данном μ_0 через нули полинома Лежандра $P_{2n}(\mu)$ и веса a_j

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sum_j \frac{a_j}{1 + \mu_j/\mu_0}}. \quad (4)$$

Имея общее решение (3), находим для функции источника $B(\tau, \mu_0)$, которая в условиях локального термодинамического равновесия непосредственно определяет температурное распределение,

$$B(\tau, \mu_0) = \frac{3}{4} F_0 \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-k_\alpha \tau} + \tau + Q \right\} + \frac{1}{4} \gamma(\mu_0) S e^{-\tau/\mu_0}. \quad (5)$$

Учтем теперь приближенно влияние несерости вещества отражающей звезды. Поскольку нас интересует эффект отражения в двойной системе, состоящей из яркой звезды спектрального класса В8—А5 и спутника субгиганта G0—K5, будем предполагать, что поглощение падающего излучения происходит на ионах H⁻. Такой выбор эффективного источника поглощения определяется не только спектральным

классом, но и тем обстоятельством, что в падающем излучении имеется определенное число квантов лаймановского континуума. Ионизация атомов водорода поглощающей среды этими квантами приведет к повышенной электронной концентрации и ионы H^- непременно должны стать основным источником непрерывного поглощения. Наблюдения над красными гигантами [15] свидетельствуют в пользу того, что основным источником непрозрачности в них служат ионы H^- .

Представим объемный коэффициент поглощения H^- в виде

$$\alpha_\nu = \bar{\alpha} (1 + \delta_\nu), \tag{6}$$

где $\bar{\alpha}$ — средний объемный коэффициент поглощения по Chandrasekhar, взвешенный по потоку излучения. Он может быть найден для любой оптической глубины на основе решения для серой материи. Величина δ_ν , зависящая, вообще говоря, от оптической глубины, трактуется в виде небольшой поправки к $\bar{\alpha}$, хотя метод, рассматриваемый ниже, применим практически и при δ_ν порядка 2 — 3. Введя среднюю оптическую глубину через $\bar{\alpha}$, запишем уравнение переноса излучения и условие лучистого равновесия в следующем виде:

$$\mu \frac{dI_\nu^{(2)}}{d\tau} = I_\nu^{(2)} - B_\nu^{(2)} + \delta_\nu (I_\nu^{(1)} - B_\nu^{(1)}),$$

$$\bar{I}^{(2)} - B^{(2)} + \int_0^\infty \delta_\nu (\bar{I}^{(1)} - B_\nu^{(1)}) d\nu + \frac{1}{4} \int_0^\infty S_\nu e^{-\int_0^\tau (1 + \delta_\nu) d\tau} (1 + \delta_\nu) d\nu = 0, \tag{7}$$

где πS_ν — монохроматический поток падающего извне излучения. Индекс (2) относится к случаю несерой атмосферы, а (1) — к серому приближению, рассмотренному выше. Пусть δ_ν не зависит от оптической глубины. Вычислим δ_ν для определенной „представительной“ оптической глубины и будем считать, что подобная зависимость имеет место для всех оптических глубин. Отметим, что Мюнх [16, 17], полагая δ_ν не зависящим от τ , получил хорошее согласие между теоретической и наблюдаемой для Солнца зависимостью коэффициента поглощения от частоты.

Для спектрального диапазона $\lambda > 1.2 \mu$ вследствие незначительной роли свободно-свободных переходов, коэффициент поглощения можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от частоты, а другая только от τ . Тогда зависимость δ_ν от τ вызывается только различием в распределении интегрального потока по частотам на разных оптических глубинах, что приводит

к сдвигу эффективной частоты при определении $\bar{\alpha}$. Поэтому степень нестрогости, вносимой допущением $\frac{d\delta_\nu}{d\tau} = 0$, зависит от градиента температуры и, по-видимому, от доли полного потока, находящейся в длинноволновой части ($\lambda > 1.2 \mu$) спектра.

При δ_ν , не зависящем от τ с помощью соотношения

$$\int_0^\infty \delta_\nu F_\nu^{(1)} d\nu = 0, \quad (8)$$

вытекающего из определения $\bar{\alpha}$ и уравнения переноса излучения в сером случае

$$\bar{I}_\nu^{(1)} - B_\nu^{(1)} = \frac{dF_\nu^{(1)}}{d\tau}, \quad (9)$$

легко получить, что

$$\int_0^\infty \delta_\nu (\bar{I}_\nu^{(1)} - B_\nu^{(1)}) d\nu = 0. \quad (10)$$

При этом система уравнений (7) заметно упростится и после интегрирования по частотам может быть заменена следующим интегро-дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI^{(2)}}{d\tau} = I^{(2)} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I^{(2)} d\mu + \mu \int_0^\infty \delta_\nu \frac{d}{d\tau} I_\nu^{(1)} d\nu - \\ - \frac{1}{4} \int_0^\infty S_\nu e^{-(1+\delta_\nu)\tau/\mu_0} (1 + \delta_\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (11)$$

Решая это уравнение методом дискретных ординат, заменяем его в n -том приближении системой из $2n$ линейных уравнений

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{dI_i^{(2)}}{d\tau} = I_i^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_j a_j I_j^{(2)} + \mu_i \int_0^\infty \delta_\nu \frac{d}{d\tau} I_{\nu i}^{(1)} d\nu - \\ - \frac{1}{4} e^{-\tau/\mu_0} \int_0^\infty S_\nu e^{-\delta_\nu \tau/\mu_0} (1 + \delta_\nu) d\nu, \quad (i, j = \pm 1, \dots, \pm n). \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (12) отличается от рассмотренной Чандрасекаром наличием последнего члена в правой части. Систему (12) можно решать методом вариации произвольных постоянных. Так как соответствующая однородная система совпадает с рассмотренной ранее для серой атмосферы, то ее решение имеет вид (3а), но $L_n^{(2)} (\alpha=1, \dots, n-1)$ и $Q^{(2)}$ зависят от τ . Однако, как можно убедиться, при выборе \bar{a} по Чандрасекару $Q^{(2)}$ и в несером случае остается постоянной. Амплитуды же экспоненциальных членов L_n малы по сравнению с Q и мы пренебрежем их изменениями здесь, считая, таким образом, что $L_n^{(2)}$ как и $Q^{(2)}$, константы, определяемые из новых граничных условий.

Займемся теперь отысканием частного решения системы уравнений (12), пользуясь методом вариации произвольных постоянных. Будем считать, что решение имеет вид (3б), но под γ понимается некоторая функция от τ . Тогда имеем

$$I_{\nu,1}^{(1)} = \frac{1}{4} \frac{\gamma}{1 + \mu_1/\mu_0} a_\nu Se^{-\tau/\mu_0}, \tag{13}$$

где a_ν — известная функция, характеризующая спектральное распределение в сером случае на оптической глубине τ , для которой определено δ_ν , причем имеет место нормировочное соотношение

$$\int_0^\infty a_\nu d\nu = 1, \tag{14}$$

а γ — константа, которая по-прежнему определяется формулой (4).

При небольших δ_ν , то есть $\delta_\nu \tau/\mu_0 \ll 1$, система уравнений (12) окончательно примет вид

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{dI_1^{(2)}}{d\tau} = I_1^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_j a_j I_j^{(2)} - \frac{1}{4} Se^{-\tau/\mu_0} [1 - k(\tau/\mu_0 - 1)] - \\ - \frac{1}{4} Se^{-\tau/\mu_0} \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{\gamma l}{1 + \mu_1/\mu_0}, \quad (i, j = \pm 1, \dots, \pm n), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$k = \int_0^\infty \delta_\nu b_\nu d\nu, \quad l = \int_0^\infty \delta_\nu a_\nu d\nu \quad \text{и} \quad b_\nu = \frac{S_\nu}{S}.$$

Частное решение этой системы ищем в виде

$$I_1^{(2)} = \frac{1}{4} (p_1 \tau/\mu_0 + q_1) Se^{-\tau/\mu_0}. \tag{16}$$

Подставив (16) в (15), получаем следующие условия, которым должны удовлетворять постоянные p_1 и q_1 :

$$p_1(1 + \mu_1/\mu_0) = \frac{1}{2} \sum_j a_j p_j - k, \quad (17a)$$

$$q_1(1 + \mu_1/\mu_0) - \mu_1/\mu_0 p_1 - \frac{\gamma l}{\mu_0} \frac{\mu_1}{1 + \mu_1/\mu_0} = \frac{1}{2} \sum_j a_j q_j + k + 1. \quad (17b)$$

Отсюда найдем

$$p_1 = \frac{\eta}{1 + \mu_1/\mu_0}, \quad (18)$$

где постоянная η равна

$$\eta = \frac{1}{2} \gamma \sum_j \frac{a_j}{1 + \mu_j/\mu_0} - k, \quad (19)$$

то есть

$$\eta = -\gamma k. \quad (20)$$

На основании (17b) имеем

$$q_1 = \frac{\delta}{1 + \mu_1/\mu_0} + \frac{\gamma(l-k)}{\mu_0} \frac{\mu_1}{(1 + \mu_1/\mu_0)^2}, \quad (21)$$

а постоянную δ находим по формуле

$$\delta = \frac{1}{2} \gamma \sum_j \frac{a_j}{1 + \mu_j/\mu_0} + \frac{1}{2} \frac{\gamma(l-k)}{\mu_0} \sum_j \frac{a_j \mu_j}{(1 + \mu_j/\mu_0)^2} + k + 1, \quad (22)$$

или после введения обозначения

$$\frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\mu_0} \sum_j \frac{a_j \mu_j}{(1 + \mu_j/\mu_0)^2} = \beta \quad (23)$$

получим

$$\delta = \gamma(1 + k) + \beta(l - k). \quad (24)$$

Новая константа β определяется при данном μ_0 , как и γ , через нули полинома Лежандра $P_{2n}(\mu)$ и веса a_j .

Общее решение системы (12) с учетом (3a), (16), (18), (20), (21), (24) примет вид

$$I_1 = I_1^1 + I_1^2,$$

где

$$I_i^1 = \frac{3}{4} F_0 \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha^{(2)} e^{-k_\alpha \tau}}{1 + \mu_1 k_\alpha} + \tau + \mu_1 + Q^{(2)} \right\}, \quad (25a)$$

$$I_i^2 = \frac{1}{4} S e^{-\tau/\mu_0} \left\{ \frac{\gamma^{(2)} - \gamma k \tau / \mu_0}{1 + \mu_1 / \mu_0} \right\}, \quad (25b)$$

а

$$\gamma^{(2)}(\mu_1, \mu_0) = \gamma(1+k) + (l-k) \left(\beta + \frac{\gamma \mu_1}{\mu_1 + \mu_0} \right).$$

Отсюда получаем следующее выражение для функции источника в несером приближении

$$B^{(2)}(\tau, \mu_0) = \frac{3}{4} F_0 \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha^{(2)} e^{-k_\alpha \tau} + \tau + Q^{(2)} \right\} + \frac{1}{4} S e^{-\tau/\mu_0} [(1+k-k\tau/\mu_0)\gamma(\mu_0) + (l-k)\beta(\mu_0)]. \quad (26)$$

При $\delta_\alpha = k = l = 0$ имеем $\gamma^{(2)} = \gamma$, а формула (26), естественно, обращается в (5). Постоянные $L_\alpha^{(2)}$ ($\alpha = 1 \dots n-1$) и $Q^{(2)}$ определяются из граничных условий $I_{-1} = 0$ при $\tau = 0$, то есть из условий

$$3F_0 \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha^{(2)}}{1 - \mu_1 k_\alpha} + S \frac{\gamma^{(2)}(\mu_1, \mu_0)}{1 - \mu_1 / \mu_0} + 3F_0(Q^{(2)} - \mu_1) = 0, \quad (27)$$

$(i = 1, \dots, n),$

имеющих точно такой же вид и для случая серой атмосферы.

Интересно отметить появление в (26) члена с $l-k$, который можно было бы охарактеризовать как поправку к температурному распределению на разность в цвете компонент двойной звезды. Интересно было бы также выяснить, в какой степени те или иные аномалии в спектральном распределении энергии S_ν у звезд раннего спектрального класса способны повлиять на температурное распределение, а, следовательно, на характер переизлучаемой энергии. Мы имеем здесь в виду хорошо известные результаты Стючера и Милигана [18], которые обнаружили сильную депрессию в ультрафиолетовом излучении В-звезд.

В связи с тем, что при определении температурного распределения в форме (26) были сделаны некоторые упрощающие предположения, можно заметить следующее. Учет несерости звездного вещества двояким образом сказывается на характере спектрального распре-

деления выходящего излучения: во-первых, через соотношение между монохроматическим и средним коэффициентами поглощения и, во-вторых, через температурное распределение. При этом распределение энергии в непрерывном спектре, как правило, довольно нечувствительно к характеру принятого температурного распределения. Весьма возможно поэтому, что поправки к температурному распределению на несерость звездного вещества играют второстепенную роль и можно было бы ограничиться приближением Эддингтона, как это делает Собески. Но без соответствующих расчетов делать такой вывод преждевременно, в особенности, учитывая, что поток реэмитированного излучения πF , является разностной величиной довольно сложного вида

$$F_{\nu} = 2 \int_0^{\infty} \int_0^1 (B_{\nu}^s - B_{\nu}^0) e^{-(1+\delta_{\nu})\tau/\mu} d\mu (1 + \delta_{\nu}) d\tau, \quad (28)$$

где B_{ν}^s — функция Планка при наличии потока падающего излучения πS , а B_{ν}^0 — при нулевом потоке падающего излучения.

Кроме того, при заметной анизотропии излучения во внешних слоях отражающей звезды точность приближения Эддингтона может оказаться все же недостаточной. Наконец, отметим, что использованное нами предположение о независимости δ_{ν} от τ представляется в этой задаче более оправданным (конечно, при наличии локального термодинамического равновесия) чем в том случае, [16], когда это предположение было первоначально применено, то есть для $\pi S = 0$. Действительно, величина πS составляет на поверхности отражающей звезды типичной двойной системы порядка 70% от величины πk_0 . Тогда градиент температуры в атмосфере отражающей звезды будет значительно ниже, чем в традиционном случае $\pi S = 0$, и перераспределение интегрального потока по частотам с оптической глубиной будет, вероятно, незначительным. Разумеется, это можно проверить и непосредственными расчетами.

2. Монохроматический эффект отражения. Перейдем теперь к рассмотрению монохроматического эффекта отражения от звезды, поверхность которой мы отождествляем здесь с критической поверхностью Роша. При этом предполагается, что двойная система находится в фазе, близкой к π , и что наклонность орбиты $i = 90^\circ$.

Введем сферическую и декартову системы координат (см. рис. 1), общее начало которых совпадает с центром невозмущенной отража-

ющей звезды, ось OZ — с направлением на наблюдателя, а ось OY — перпендикулярна к плоскости орбиты. Тогда имеем

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \Phi = r \lambda, \\ y &= r \sin \theta \sin \Phi = r \nu, \\ z &= r \cos \theta = r \mu. \end{aligned} \quad (29)$$

Разобьем отражающую поверхность на конечное число достаточно узких зон, симметричных относительно направления на освещающий источник. К каждой такой зоне с полубесконечной оптической глубиной можно применить в первом приближении полученное выше решение. В таком приближенном рассмотрении задача нахождения монохроматической амплитуды отраженной энергии сводится к суммированию, с учетом реальной фигуры отражающего тела и гравитационного потемнения, долей переизлученной энергии $\Delta I_{k\nu}$ в направлении на наблюдателя от каждой зоны k , то есть

$$\Delta L_\nu = \sum_k \Delta I_{k\nu}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta I_{k\nu} &= 2\pi \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} [I_\nu(0, \mu, \mu_0) - I_\nu(0, \mu)] \mu' r^2 x d\mu, \quad \text{а} \\ x &= \sqrt{1 + \left(\frac{r\mu'}{r}\right)^2 (1 - \mu^2)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Далее, в предположении, что эффект отражения состоит в чистом поглощении с последующим переизлучением, имеем

$$I_\nu(0, \mu, \mu_0) - I_\nu(0, \mu) = \int_0^\infty (B_\nu^s - B_\nu^0) e^{-(1+\delta_\nu)\tau/\mu} (1 + \delta_\nu) d\tau/\mu. \quad (32)$$

При этом надо учесть, что в отличие от B_ν^s функция B_ν^0 соответствует невозмущенной форме звезды и отсутствию потока πS . Кроме того, из геометрических соображений получаем

$$\mu' = \frac{1}{x} \left[\mu - \frac{r\mu'}{r} (1 - \mu^2) \right], \quad \text{где } \mu' = \cos \theta'. \quad (33)$$

Найти приближенную зависимость $r(\mu, \nu)$, а с ней и производ-

ную $r'_\mu = \frac{dr}{d\mu}$ можно, рассмотрев полный потенциал сил, действующих на некоторую точку P фигуры Роша

$$\Psi = G \frac{m}{r} + G \frac{m'}{\rho} + \frac{\omega^2}{2} \left\{ \left(z - \frac{m'}{m+m'} \right)^2 + x^2 \right\}. \quad (34)$$

Здесь m и m' — массы компонент, G — константа всемирного тяготения, ω — угловая скорость орбитального обращения. Приняв за единицу длины полуось относительной орбиты, получим

$$\rho = \sqrt{1 - 2r\mu + r^2}.$$

Далее, введем отношение масс компонент $q = \frac{m'}{m}$, а угловую скорость заменим кеплеровой скоростью ($\omega^2 = G(m+m')$). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Psi = G \frac{m}{r} + G \frac{m'}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} + \\ + G \frac{m+m'}{2} \left[r^2(1-\nu^2) - \frac{2m'}{m+m'} r\mu + \left(\frac{m'}{m+m'} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Введем безразмерную константу Ω соотношением

$$\Omega = \frac{\Psi}{Gm} - \frac{m'^2}{2m(m+m')} - q \frac{R^2}{1-R} - \frac{q+1}{2} R^2, \quad (36)$$

где $R = OM$. Тогда получаем вместо (35)

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{1}{r} + q \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} - \mu r \right\} + \frac{q+1}{2} r^2(1-\nu^2) - \\ - q \frac{R^2}{1-R} - \frac{q+1}{2} R^2 \end{aligned} \quad (37)$$

или

$$\begin{aligned} (\Omega - q)r = 1 + \left\{ q \sum_{j=2}^{\infty} r^{j+1} P_j(\mu) + \frac{q+1}{2} r^3(1-\nu^2) - \right. \\ \left. - qr \frac{R^2}{1-R} - \frac{q+1}{2} rR^2 \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $P_j(\mu)$ — полиномы Лежандра. Величина Ω выбрана так, что для $r = R$ ($\mu = 1, \nu = 0$) имеем просто

$$(\Omega - q)R = 1. \quad (39)$$

Следуя Копалу, разложим r в ряд Тейлора в окрестности точки R и ограничимся линейным членом разложения, отбросив последующие

$$r = R \left(1 + \frac{\Delta r}{R} \right). \quad (40)$$

Подставим последнее выражение в (38). Ввиду малости по сравнению с единицей члена в фигурной скобке имеем приближенно

$$\frac{\Delta r}{R} = q \sum_{j=2}^{\infty} R^{j+1} [P_j(\mu) - 1] - \frac{q+1}{2} R^3 \nu^2 \quad (41a)$$

или более точно

$$\frac{\Delta r}{R} = \frac{q \sum_{j=2}^{\infty} R^{j+1} [P_j(\mu) - 1] - \frac{q+1}{2} R^3 \nu^2}{1 - \left\{ q \sum_{j=2}^{\infty} R^{j+1} [(j+1) P_j(\mu) - 1] - \frac{q+1}{2} R^3 (3\nu^2 + 1) \right\}}. \quad (41b)$$

Соотношения (41a) или (41b) действуют в пределах достаточно узкой зоны. Для соседней зоны следует провести разложение около некоторой иной точки $r = R_1$ (значение R_1 находим в соответствии с $r(\mu, \nu)$ из (40) и (41)) и т. д.

Наконец, конкретизируем величины πF_0 и πS в решении (26), то есть величины потоков собственного и „чужого“ излучения. Пусть T_{e1} — эффективная температура первичной компоненты, а T_{e2} — эффективная температура сферической отражающей звезды, которую мы условно припишем точке A (см. рис. 1). Тогда имеем

$$\pi F_0 = \sigma T_{e2}^4 \frac{g(r)}{g_0}, \quad (42a)$$

$$\pi S = \sigma T_{e1}^4 \left[\frac{r_1}{\rho(r)} \right]^2 \mu_0, \quad (42b)$$

где r — по-прежнему определяется (40) и (41) или аналогичным выражением для случая произвольной зоны, r_1 — радиус первичной компоненты, а $g(r)$ — ускорение силы тяжести в данной точке критической поверхности Роша. Гравитационное ускорение $g(r)$ равно производной от потенциала Ψ по направлению внешней нормали к поверхности

$$g(r) = -\frac{d\Psi}{dn} = -\frac{d\Psi}{dr} \frac{dr}{dn} \quad (43)$$

Преобразовав (42а) с помощью соотношения (43), а также (36) и (37), получим

$$\pi F_0 = \sigma T_{e2}^4 \frac{\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + q r_0^2 \left[\mu - \frac{\mu - r}{(1 - 2r\mu + r^2)^{1/2}} \right] - (q+1) r r_0^2 (1 - v^2)}{x^{-1} \left[1 + q \left(\frac{r_0}{\sqrt{1 + r_0^2}} \right)^2 \right]} \quad (44)$$

Окончательно имеем следующую формулу для температурного распределения в отражающей атмосфере

$$T^4(\tau, \mu_0) = \frac{3}{4} T_{e2}^4 \frac{\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + q r_0^2 \left[\mu - \frac{\mu - r}{(1 - 2r\mu + r^2)^{1/2}} \right] - (q+1) r r_0^2 (1 - v^2)}{x^{-1} \left[1 + q \left(\frac{r_0}{\sqrt{1 + r_0^2}} \right)^2 \right]} \times \\ \times \left\{ \sum_{a=1}^{n-1} L_a^{(2)} e^{-k_a \tau} + \tau + Q^{(2)} \right\} + \frac{1}{4} T_{e1}^4 \frac{r_1^2 \mu_0}{1 - 2r\mu + r^2} e^{-\tau/\mu_0} \times \\ \times [(1 + k - k\tau/\mu_0)\gamma(\mu_0) + (l - k)\beta(\mu_0)]. \quad (45)$$

Легко также видеть из рис. 1, что

$$\mu_0 = \frac{x\mu' - r_k}{\rho}, \quad x = 1 - r\mu + r_k\mu',$$

$$\text{где } \mu_0 = \cos \theta_0 \text{ и } r_k = \frac{r\sqrt{1 - \mu^2}}{\sqrt{1 - \mu'^2}} \quad (46)$$

Уравнения (30) — (33) и (40) — (46) позволяют решить, таким образом, поставленную задачу и найти амплитуду эффекта отражения в монохроматическом свете. Решение задачи будет зависеть, в основном, от значений параметров T_{e1} , T_{e2} и q .

Учет несерости вещества отражающей звезды и искажений формы ее поверхности должен, по-видимому, существенно повлиять на величину амплитуды эффекта отражения, но из-за громоздкого вида полученных формул количественные оценки связаны с расчетами на ЭВМ. Результаты таких расчетов мы предполагаем опубликовать в изданиях Тартуской астрономической обсерватории.

В заключение автор выражает признательность А. Сапару и Г. Г. Кузмину за критические замечания и помощь при подготовке данной работы.

Институт физики и астрономии
АН ЭССР

ON THE MONOCHROMATIC REFLECTION EFFECT IN CLOSE BINARIES

I. V. PUSTYLNICK

An assumption is made that the due regard for the nongreyness of matter of the reflecting star, as well as for the gravitational darkening, could have explained the negative O—C values of the reflecting effect amplitude in close binaries. Chandrasekhar's iterative technique is used to solve the transfer equations for an irradiated, plane-parallel atmospheres with the H⁻ ions presenting the main source of absorption. The solution is used to evaluate the monochromatic reflection amplitude with the reflecting surface being that of the critical Roche figure.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Н. Минин, *Астрофизика*, 1, 275, 1965.
2. S. Sobieski, *Ap. J., Suppl. ser.*, 12, 263, 1965.
3. И. В. Пустыльник, *Публ. Тарту обс.*, 35, 377, 1966.
4. A. S. Eddington, *M. N.*, 86, 320, 1926.
5. E. A. Milne, *M. N.*, 87, 43, 1927.
6. В. А. Крат, *Астрон. ж.*, 11, 5, 1934.
7. М. Г. Одинцов, *Астрон. ж.*, 19, 80, 1942.
8. Y. Hosokawa, *Sendaj Astr. Raportoj*, 70, 207, 1959.
9. S. Sobieski, *Ap. J., Suppl. ser.*, 12, 275, 1965.
10. Y. Hosokawa, *Sendaj Astr. Raportoj*, 52, 208, 1957.
11. Y. Hosokawa, *Sendaj Astr. Raportoj*, 56, 226, 1958.
12. Z. Kopal, *Close binary systems*, ch. III, 1—3, London, 1959.
13. S. Chandrasekhar, *F. Breen*, *Ap. J.*, 105, 461, 1947.
14. С. Чандрасекар, *Перенос лучистой энергии*, М., 1953, 89.
15. N. J. Woolf, M. Schwarzschild, W. K. Rose, *Ap. J.*, 140, 3, 833, 1964.
16. G. Münch, *Ap. J.*, 102, 385, 1945.
17. S. Chandrasekhar, G. Münch, *Ap. J.*, 104, 446, 1946.
18. T. P. Stetcher, J. E. Milligan, *A. J.*, 66, 296, 1961.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

ФЕВРАЛЬ, 1967

ВЫПУСК I

OBSERVATIONS OF THE SUPERNOVA 1959 b IN NGC 4921

ROBERTO BARBON

Поступила 11 ноября 1966

Photovisual and photographic observations of the supernova 1959 b in NGC 4921 are reported. The comparison with previous observations made in Byurakan seems in fair agreement with the existence of a flat maximum as shown by type III and IV supernovae.

The supernova, shown in Fig. 1, was found by M. Humason [1] on May 4, 1959 at $16''$ East and $48''$ South of the nucleus of the galaxy NGC 4921, a member of the Coma Cluster, at the position: R.A. = $12^{\text{h}} 59^{\text{m}}.2$, Decl. = $+28^{\circ}7'$ (1950). The magnitude reported by Humason was

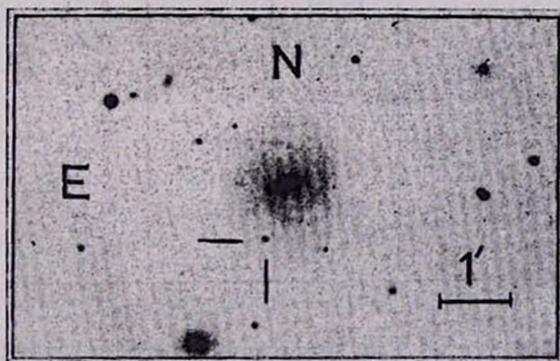


Fig. 1. The supernova in NGC 4921. Scale as indicated.

18.5 mag. Later on, Shakhbazian [2] announced that the supernova was visible in four plates taken at Byurakan with the $21''$ Schmidt telescope, in the prediscovery period between April 11 and May 3, 1959. Moreover

another plate, dating February 8 of the same year, showed the supernova at the apparent brightness of 18.5 mag. Shakhbazian suggested two hypotheses: a) the supernova was, on February 8, in the increase of its brightness, later exceeding the observed magnitude of 18.5. b) the supernova had a flat maximum lasting 2 or 3 months. The possibility of a bright maximum before February 8 and that all the observations refer to the fading period, was also presented.

In view of the above, the reduction of all the material still available appears worthwhile.

The supernova is visible in 13 plates taken with the 48" Schmidt telescope on Palomar Mountain during the two months following the discovery. All of the plates are Kodak 103a-D plus an amber filter, except two which are blue-sensitive 103a-O. S. A. 57, in which photoelectric magnitudes by Baum are available, is visible in the field of every plate; so it was easy to derive the magnitude of the supernova without

Table 1

Date	m_p	m_{pg}	M. E.
May 4, 1959	18.24		0.03
June 3, "	18.04		0.04
" 4, "	17.86		0.04
" 7, "	17.80		0.05
" 8, "	18.12		0.05
" 9, "	18.00		0.04
" 10, "	17.87		0.06
" 11, "	18.02		0.03
" 26, "	18.21		0.14
" 28, "		18.90	0.03
" 30, "		18.92	0.08
July 1, "	18.50		0.03
" 2, "	18.57		0.03

establishing secondary standard sequences. In every plate the brightness of the supernova was estimated four times by visual comparison with the standard stars, because the background light of the galaxy prevented the use of the photometer. The mean errors are shown in the last column of the following table in which the visual and the photographic magnitudes are reported. The reason for such a low error is easily understood by the fact we have the object and a well established stan-

standard sequence on the same plate. The plate of June 26 is rather poor so the derived magnitude must be considered fairly uncertain.

In Fig. 2, we plotted our magnitudes together with the Byurakan observations. Two of these latter ones, namely on April 11 and 12, are on Kodak OaE plates behind an orange filter and may be compared fairly well with our yellow magnitudes. According to Fig. 2, the resulting light curve is rather strange. The photovisual observations seem to be in fair agreement with the possibility of a flat maximum (as shown in supernovae of type III and IV, Zwicky [3],) lasting at least two months. Unfortunately no plate is available in the period February-April 1959, but if a bright maximum had occurred in February or earlier, the supernova would have shown a different behaviour in brightness during the following months. With regard to the blue magnitudes, the difference of 0.6 mag. between the last Byurakan observation and the

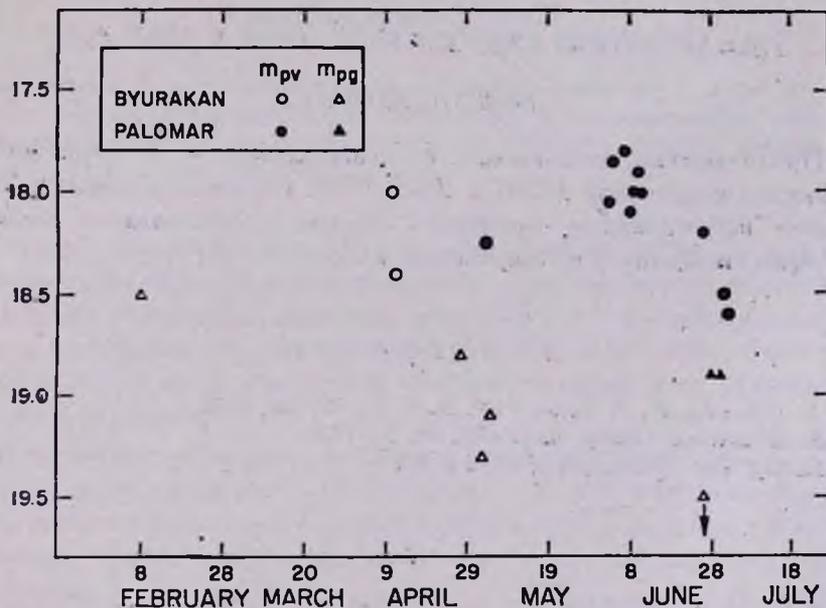


Fig. 2. Photovisual m_{pv} and photographic m_{pg} observations of the supernova 1959b in NGC 4921.

two Palomar plates taken in the same period may be explained by the existence of a slight shift in the comparison scale and by the difficulty of the eye-estimation of images near to the plate limit. A further increase in brightness of the supernova is quite improbable because there is no trace of it in the photovisual curve.

Finally, we have not even ruled out the possibility of an interpretation in terms of a galactic variable. Therefore we looked at the same field from 1949 through 1966 inspecting almost 160 plates, but no trace of the star was found except during the 1959 outburst.

Because we have no observation between August 1958 and May 1959, except for a few 18" Schmidt films taken on November 1958 and January 1959, in which the star is not visible, any other data referring to the prediscovery period would be very interesting.

I am indebted to Dr. F. Zwicky, for the suggestion of this interesting object. This work was financially supported by a grant of the National Science Foundation.

California Institute of Technology
and
Asiago Astrophysical Observatory

НАБЛЮДЕНИЯ СВЕРХНОВОЙ 1959Ь В NGC 4921

РОБЕРТО БАРБОН

Представлены паломарские фотовизуальные и фотографические наблюдения сверхновой 1959Ь в NGC 4921. Их сопоставление с Бюраканскими наблюдениями говорит в пользу существования плоского максимума, известного у сверхновых классов III и IV.

REFERENCES

1. *M. L. Humason, H. S. Gates*, Publ. A. S. P., 72, 208, 1960.
2. *P. K. Шахбазян*, Сообщ. Бюр. обс., 28, 33, 1960.
3. *F. Zwicky*, Ann. d'Astrophys., 27, 300, 1964.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

ФЕВРАЛЬ, 1967

ВЫПУСК 1.

ЗАМЕЧАНИЕ О ПЛОТНОСТИ ВОДОРОДА В СКОПЛЕНИЯХ
ГАЛАКТИК

И. Д. КАРАЧЕНЦЕВ
Поступила 2 декабря 1966

Основываясь на вероятном случае проектирования скопления галактик на квазар 1116 + 12 [2] вычисляется плотность нейтрального и ионизированного водорода в скоплении. Показано, что эти плотности не могут объяснить большие виртуальные массы типичных скоплений галактик.

Хорошо известно, что массы скоплений галактик, определяемые из теоремы вириала в предположении стационарности скоплений, много больше нормальных значений, вычисляемых по внутренним движениям в галактиках. Это обстоятельство часто используется как указание на присутствие в скоплениях галактик больших масс невидимого диффузного вещества.

Обнаружение квазаров с большими красными смещениями ($z \sim 2$), у которых линия излучения L_{α} выползает в наблюдаемую область спектра, позволяет проверить это предположение. Салпетер и Бэхолл [1] показали, что математическое ожидание числа наблюдаемых линий L_{α} (с $\lambda > 3200 \text{ \AA}$), вызванных поглощением в скоплениях галактик между наблюдателем и квазаром с $z = 2$, приблизительно равно единице. Бэхолл, Петерсон и Шмидт [2] сообщили о вероятном случае проектирования скопления на квазар 1116 + 12 с $z = 2.118$. В спектре его заметны линии поглощения L_{α} и C IV, смещенные относительно линий излучения на -17000 км/сек . Ширина этих линий составляет $20 - 30 \text{ \AA}$, что соответствует дисперсии радиальных скоростей в проектирующемся скоплении $\sigma_r \sim 1000 \text{ км/сек}$ (величина, равная σ_r у скопления Coma). Если считать отождествление [2] правильным, то можно

вычислить плотность нейтрального и ионизированного водорода в данном проектирующемся скоплении.

Оптическая толща в центре линии поглощения L_α от скопления радиуса R со средней плотностью нейтрального водорода n_{II} и дисперсией σ_r равна

$$\tau = 1.2 \cdot 10^{-7} n_{II} R \sigma_r^{-1}. \quad (1)$$

Откуда при $\tau \sim 1$ и $R \sim 3$ мпс, $\sigma_r \sim 1000$ км/сек

$$n_{II} = 0.8 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-3}. \quad (2)$$

Нетрудно показать, что при расстоянии между скоплением и квазаром ≈ 230 мпс ($\Delta v = 17000$ км/сек и $H = 75$ км/сек мпс) жесткое излучение квазара будет играть определяющую роль в процессе установления ионизационного равновесия в скоплении. Другими процессами (например, ионизацией космическими лучами) в данном случае можно пренебречь.

Составим уравнение ионизационного равновесия и примем мажорирующие оценки для входящих в него параметров. При средней светимости квазара $\sim 10^{46-47}$ эрг/сек будем считать, что за лаймановским континуумом излучается существенная доля всей энергии ($\sim 10^{46}$ эрг/сек). Тогда поток энергии ионизирующего излучения квазара на расстоянии скопления будет $1.6 \cdot 10^{-9}$ эрг/см² сек, а поток ионизирующих фотонов F при средней энергии кванта $\bar{\varepsilon} \geq h\nu_c = 2.2 \cdot 10^{-11}$ эрг, меньше 73 квантов/см² сек.

В уравнение ионизационного равновесия

$$k_1 n_{II} F = n_e^2 C(T_e) \quad (3)$$

подставим значение коэффициента фотоионизации k_1 и коэффициента рекомбинации $C(T_e)$ при наиболее вероятной температуре $T_e \leq 10^4 \text{ K}$. Тогда

$$\frac{n_e^2}{n_{II}} \leq 1.5 \cdot 10^{-4} F \leq 1.1 \cdot 10^{-2}, \quad (4)$$

откуда, используя (2), имеем среднюю электронную концентрацию в скоплении

$$n_e \leq 10^{-6} \text{ см}^{-3}. \quad (5)$$

Для объяснения больших вириальных масс у скоплений галактик присутствием газа требуется предполагать, что его концентрация

$$n = \frac{3 M_{\text{вир.}}}{4 \pi R^3 m_p}. \quad (6)$$

У типичного богатого скопления галактик $R = 2.7$ мпс и $M_{\text{вир.}} = 2.3 \cdot 10^{15} M_{\odot}$ [3], следовательно $n \approx 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}$. Сопоставление этой оценки с (2) и (3) показывает, что присутствие в скоплениях галактик как нейтрального, так и ионизированного водорода, не может быть ответственным за большие вириальные массы скоплений.

Следует заметить, что время установления ионизационного равновесия в межгалактическом газе довольно велико. Оно определяется характерным временем рекомбинации

$$t_{\text{рек}} = 1.0 \cdot 10^8 T_e^{7/2} n_e^{-1} \text{ (лет)}. \quad (7)$$

При $T_e \leq 10^6 \text{ K}$ и $n_e \sim 10^{-6} \text{ см}^{-3}$ $t_{\text{рек}} \sim 3 \cdot 10^{12}$ лет, а это значительно больше возраста Метагалактики ($\sim 10^{10}$ лет). Однако, допустив, что концентрация равна вириальной то есть $n_e \sim 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}$, мы получим для времени рекомбинации $t_{\text{рек}} \leq 3 \cdot 10^9$ лет. Это означает, что при этом предположении можно пользоваться формулой ионизационного равновесия и вывод о невозможности объяснить вириальные массы скоплений наличием в них масс диффузного вещества сохраняет свою силу.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

A NOTE ON THE HYDROGEN DENSITY IN THE CLUSTERS OF GALAXIES

I. D. KARACHENTSEV

Taking as a basis the probable case of projection of the cluster of galaxies on the quasi-stellar radio source 1116 + 12 [2] the densities of H I and H II in the cluster are estimated. It is shown, that with the help of these densities it is impossible to explain the high virial masses of clusters of galaxies.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. N. Bahcall, E. E. Salpeter, Ap. J., 144, 847, 1966.
2. J. N. Bahcall, B. A. Peterson, M. Schmidt, Ap. J., 145, 369, 1966.
3. И. Д. Караченцев, Астрофизика, 2, 81, 1966.

О ПОЛОЖЕНИИ ГАЗОПЫЛЕВОГО СЛОЯ
В ГАЛАКТИКЕ М 31

Е. Н. МАКАРЕНКО

Поступила 9 августа 1966

Исправлена 9 февраля 1967

Указывается на возможность отслоения газовых и пылевых масс от плоскости звездных спиральных рукавов М 31. Показано, что спиральная структура системы эмиссионных туманностей по наблюдениям [1] выявляется наилучшим образом в допущении $i_1 = 11^\circ$ и $\theta_1 = 33^\circ.7$ для плоскости газа и пыли и $i_2 = 16^\circ$ и $\theta_2 = 39^\circ.7$ для плоскости звезд. Получено значение угла между плоскостями $\varphi = 7^\circ.5$ и позиционного угла проекции на картинную плоскость линии пересечения плоскостей $\psi = 21^\circ$.

Предложенная гипотеза объясняет наблюдаемое распределение эмиссионных туманностей и некоторые особенности карт радиояркости М 31.

Обсуждаются фотометрические эффекты, подтверждающие возможность отслоения газопылевой составляющей.

За последние годы появилось значительное число работ, посвященных всестороннему изучению М 31. В этих работах содержится, на наш взгляд, ряд свидетельств в пользу отслоения газопылевой галактической составляющей от спиральных рукавов. Такая составляющая образует слой, который наклонен под сравнительно небольшим углом к основной галактической плоскости. В предлагаемой статье приводятся некоторые аргументы, подтверждающие эту точку зрения.

В результате исследований спиральной структуры М 31 по наблюдениям эмиссионных газовых туманностей [1] Арп показал следующее [2]:

а) Ход звездных рукавов наилучшим образом представляется двурукавной спиралью

$$r = 30' e^{0.13 \theta}, \quad (1)$$

которая соответствует углу наклона плоскости рукавов к лучу зрения, равному 16° .

б) Двухрукавная плоская спираль не может представить наблюдаемое расположение цепочек эмиссионных туманностей.

в) Удовлетворительного согласования эмиссионных туманностей с ветвями спирали можно достичь, если принять для юго-восточной половины видимого изображения М 31 угол наклона $i = 16^\circ$ и позиционный угол большой оси $\theta = 37^\circ.7$, а для северо-западной $i = 11^\circ$ и $\theta = 34^\circ.7$.

Для объяснения такого различия Арп выдвинул гипотезу о корблении галактической плоскости у М 31. При этом вращение позиционного угла можно считать кажущимся эффектом, отражающим изменение в наклоне спиральных ветвей. Возможное искривление галактической плоскости связывалось с магнитно-плазменным взаимодействием М 31 и М 32, осуществляющимся непосредственно через связывающий их рукав. Однако против такой интерпретации наблюдаемой картины выдвинуто следующее возражение: как показали радионаблюдения нейтрального водорода на волне 21 см, проведенные Эрджлом [3], вблизи М 32 отсутствует повышение контуров лучевых скоростей, которое должно было бы наблюдаться в случае магнитноплазменного ускорения, вызывающего искривление галактической плоскости.

Гораздо более правдоподобной представляется нам возможность реального отклонения газовых и пылевых масс от плоскости звездных рукавов. Как указывает Б. А. Воронцов-Вельяминов [4], перекося слоя газопылевой материи является одним из проявлений взаимодействия между галактиками. А. В. Засов, исследовавший вопрос о деформации поглощающей материи в галактиках [5], нашел, что наклон газопылевого слоя к основной плоскости — явление не очень редкое: из числа 80 галактик, видимых с ребра, более чем у 20% плоскость пыли не совпадает с экваториальной плоскостью. Деформация газового диска обнаружена и у нашей Галактики [6]. В настоящее время механизм межгалактического взаимодействия еще не известен. Но если, в случае М 31 газопылевой слой действительно наклонен к плоскости, в которой лежат спиральные ветви, то это обстоятельство должно отразиться на распределении эмиссионных туманностей и вызвать целый ряд фотометрических эффектов.

Нами сделана попытка оценить величину угла между основной плоскостью и плоскостью газопылевого слоя. В связи с этим были построены картины расположения эмиссионных туманностей в основной плоскости (то есть „виды сверху“) для различных углов i (от 10° до 16° через 1°) и θ (от $33^\circ.7$ до $41^\circ.7$ с тем же шагом).

Сопоставление этих картин с двухрукавной спиралью (1), полученной по звездам, показало, что систему эмиссионных туманностей удает-

ся наилучшим образом уложить на двурукавную спираль, если допустить, что:

1. Газопылевой слой, концентрирующийся близ плоскости с $i_1 = 11^\circ$, $\theta_1 = 33.7$ пересекает плоскость звездных рукавов с $i_2 = 16^\circ$ и $\theta_2 = 39.7$.

2. Эмиссионные туманности возникают в местах „соприкосновения“ водородной составляющей газопылевого слоя с горячими звездами. На рис. 1 в координатной системе Арпа представлены: двурукавная спираль (сплошная линия), эмиссионные туманности, лежащие

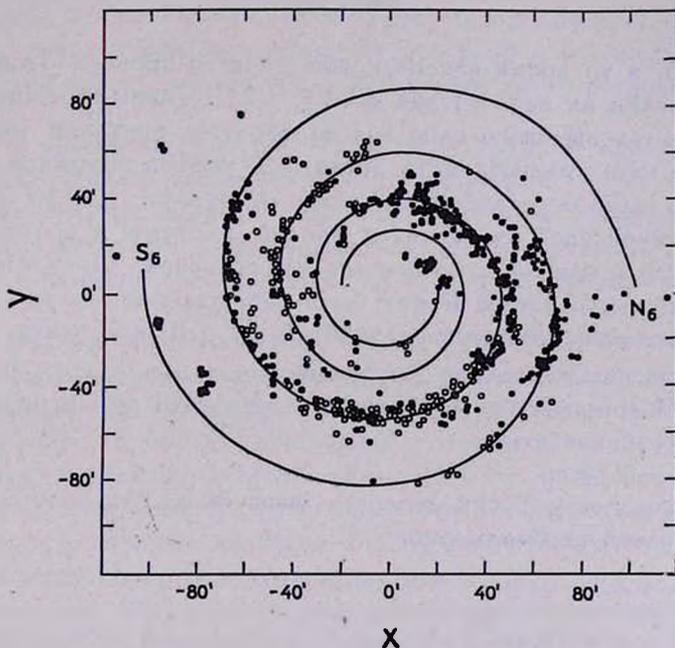


Рис. 1. Спиральная структура системы эмиссионных туманностей. В координатной системе Арпа представлены: двурукавная спираль (сплошная линия), эмиссионные туманности, лежащие в основной плоскости М 31 (темные точки) и положения, которые заняли бы эмиссионные туманности, повторяющие структуру газопылевых рукавов, если совместить плоскости. Буквами S_6 и N_6 отмечены соответственно шестая южная и шестая северная звездные спиральные ветви.

в основной плоскости М 31 (темные точки) и положение, которое заняли бы эмиссионные туманности, повторяющие структуру газопылевых рукавов, если бы обе указанные плоскости удалось совместить (кружки).

Допустим, что каждая из двух основных плоскостей (то есть плоскость звезд и плоскость пыли) проходит через ядро галактики; в прямоугольной координатной системе с началом в ядре, осью z совпадающей с лучом зрения и осью x , направленной на север, каждая из таких плоскостей описывается уравнением

$$x \sin \theta - y \cos \theta + z \operatorname{tg} i = 0; \quad (2)$$

угол φ между этими плоскостями находится из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1) + \operatorname{tg} i_1 \operatorname{tg} i_2}{\sec i_1 \cdot \sec i_2} \quad (3)$$

и равен 7.5° , в то время как позиционный угол проекции на картинную плоскость линии их пересечения есть $\psi = 21^\circ$. Таким образом, наибольший подъем газопылевого слоя над плоскостью звездных рукавов достигается в юго-западной части диска, а в противоположной его части слой газа и пыли опускается за звездные рукава. Весьма возможно, что газопылевой слой не является вполне плоским, а его отклонение увеличивается в наиболее удаленных от основной плоскости частях. Следствием такого изгиба может быть наблюдаемое (на рис. 1) спрямление цепочек эмиссионных туманностей в I и III квадрантах.

Предложенная гипотеза о наклоне газопылевого слоя к основной плоскости М 31 позволяет естественно объяснить целый ряд наблюдаемых эффектов.

1. Наблюдаемое распределение эмиссионных туманностей по квадрантам довольно неравномерно:

квадрант	I $X > 0; Y > 0$	II $X < 0; Y > 0$	III $X < 0; Y < 0$	IV $X > 0; Y < 0$
число объектов	250	131	121	186

В свете предложенной гипотезы такая неравномерность понятна: в пределах звездных рукавов поглощение невелико, и мы можем наблюдать почти все эмиссионные туманности в тех частях галактики, где газ лежит, в основном, за звездными рукавами — то есть у М 31 в северо-восточной части (I и примыкающие к нему части II-го и IV-го квадрантов на рис. 1); в то же время в юго-западной части для наблюдений доступна лишь некоторая доля всех туманностей, не экранируе-

мых полосами пыли (наблюдаемые здесь туманности располагаются в промежутках между темными полосами и „повторяют“ их структуру).

2. В I и III квадрантах на удалении пятой (по Бааде) спиральной ветви (на расстоянии $57'$ от ядра) видно значительное уменьшение числа эмиссионных туманностей. В то же время по данным ван ден Берга [7] в этой области присутствуют горячие звезды ОВ-ассоциаций, а радионаблюдения на волне 21 см [3] не показывают заметного падения плотности водорода. Это противоречие можно объяснить, если учесть, что в местах наибольшего расхождения плоскостей звезд и газа расстояние между ними на уровне 5 и 6 ветвей превышает 1.3 клс . Правда, если провести аналогию с нашей Галактикой, в наиболее отклоняющихся от основной плоскости частях водородный слой может значительно увеличивать свою толщину.

3. По внешнему контуру карты радиояркости атомарного водорода у М 31 Эрджл нашел значение позиционного угла большой оси $\theta = 33^\circ$ [3]. Это довольно близко согласуется с позиционным углом для газопылевого слоя, найденным выше по эмиссионным туманностям ($\theta_1 = 33.7^\circ$), и такое согласие вряд ли является случайным.

4. Предложенная гипотеза может в целом объяснить также и возникновение выступа на картах радиояркости М 31 в частотах 1415 [8], 1400 [9] и 600 [8] мц , заключенного в интервале позиционных углов $12 - 24^\circ$. В местах наибольшего проникновения газа и пыли в пространство между звездами — то есть близ линии пересечения основных плоскостей — существует повышенная концентрация ионизованного водорода, который является основным источником теплового излучения, преобладающего на этих частотах.

Рассмотрим теперь некоторые фотометрические данные, которые подтверждают, как нам кажется, отслоение газопылевой составляющей от звездных рукавов в случае М 31.

1. В видимой структуре западной и восточной половин оптического изображения М 31 имеются хорошо известные различия. На западе спиральная структура выявляется, в основном, благодаря присутствию резких полос темной материи, на востоке — благодаря звездным рукавам. Восточная половина в целом является более яркой и голубой. На картах изофот М 31 ясно видна асимметрия общей фотометрической картины [10, 11]. Все это, как кажется, подтверждает предложенную точку зрения.

2. Как следует из описания ОВ-ассоциаций в М 31, данного ван ден Бергом [7], на ближнем северо-западном крае, близ ОВ-61, ассоциации вытянуты вдоль темной полосы, причем они ограничены этой полосой с одной стороны, а по мере продвижения на юг начинают проглядывать между темными полосами. Так, ассоциация ОВ-72 расчленена полосой пыли на две части, единой расчлененной ассоциацией представляется также ОВ-67 и ОВ-68; блеск ассоциаций наружного кольца в этой части видимого изображения галактики ослаблен. На западном крае (III квадрант) в промежутке между внешним и внутренним кольцами ассоциаций значительно ослаблен блеск звезд поля. Причина здесь видимо кроется не в том, что эта часть галактики бедна звездами или содержит звезды пониженной светимости, а в том, что она экранируется от наблюдателя слоем пылевой материи. Здесь очень отчетливо видны длинные узкие полосы пыли, которые тянутся почти через четверть всего диска. Ширина и направление этих полос позволяют предположить, что пылевые слои образуют с лучом зрения меньший угол, чем звездный диск.

3. Анализируя поглощение в южной части М 31 можно опереться на данные о 414 исследованных здесь цефеидах [12 — 14]. Приняв средний модуль расстояния

$$M = 24^m 20 \pm 0^m 14, \quad (4)$$

найденный Бааде по цефеидам IV поля и подтвержденный Арпом [15] по Новым, и используя наклон зависимости „период-светимость“ по Крафту [16] совместно с нульпунктом Арпа [17], можно для цефеид М 31 вычислить значения светимостей по их периоду:

$$M_B = 24^m 20 - 1^m 33 - 2^m 52 \lg P. \quad (5)$$

Уклонения наблюдаемых медианных величин от вычисленных оказываются положительными и превышают у ряда звезд 2^m . Такие уклонения могут обуславливаться многими причинами: ошибками наблюдений, собственной дисперсией, связанной с конечной шириной полосы неустойчивости, занимаемой цефеидами на диаграмме Г-Р, дифференциальными эффектами, связанными с поглощением в М 31, ошибками при учете поглощения света в Галактике, различиями между звездными величинами, найденными в результате осреднения интенсивностей и медианными величинами — и т. п. При грубом анализе можно наблюдаемые уклонения полностью отнести на счет поглощения света в пределах М 31 (остальные факторы либо оказывают относительно слабое влияние, либо примерно одинаково воздействуют на величины уклоне-



Рис. 2. Карта уклонений наблюдаемых медианных величин блеска цефеид от вычисленных по соотношению (5). Используются обозначения: \blacktriangle $O-C > 2^m 0$, \bullet $1^m 0 < O-C^m 20$, \circ $O-C < 1^m 0$. Север справа. Восток сверху.



Рис. 3. Положения цефеид типа С в южной части М 31.

ний у всех звезд). Оправданность этого допущения подтверждается при анализе относительных цветов цефеид в М 31. Карта уклонений $O - C$ приводится на рис. 2; все цефеиды разбиты здесь на 3 группы в соответствии с величиной уклонений (см. подпись к рисунку). Легко усмотреть следующее:

а) Наибольшие уклонения ($O - C > 2^m 0$) присущи цефеидам, процирующим на картинную плоскость совместно с облаками темной материи; эти звезды просвечивают сквозь слой поглощающего вещества.

б) В юго-восточной части, где пылевой слой проникает в звездную спираль, наибольшее ослабление испытывают цефеиды, лежащие к юго-востоку от темных полос. Звезды, лежащие к северо-западу, ослабления блеска не показывают. Это можно рассматривать как подтверждение правильности обычно принимаемой ориентации М 31 в пространстве, соответствующей закручиванию спиральных ветвей при галактическом вращении.

в) Почти все цефеиды, располагающиеся в слабо светящемся поле звезд в юго-западной части, к западу от узкой вытянутой пылевой полосы испытывают поглощение, превышающее 1^m . Эта область галактики экранируется слоем пыли.

4. Среди цефеид М 31 имеются звезды типа C_1 , для которых характерны почти синусоидальные кривые блеска с малыми амплитудами. Подобные объекты в наблюдаемой части нашей Галактики располагаются в довольно узкой полосе вдоль спирального рукава [18]. Распределение таких звезд в случае М 31 показано на рис. 3; видно, что эти объекты относятся к населению спиральных рукавов и локализируются в их внутренних частях. Положение этих цефеид в юго-западной части М 31 дает основание считать, что ось рукава не совпадает с линией наибольшей наблюдаемой яркости и что значительная часть всей ширины звездной спирали скрыта здесь полосами пыли, располагающимися над основной плоскостью.

Следует отметить, что, если гипотеза об отслоении газопылевой составляющей у М 31 верна, то несколько иную интерпретацию может получить построенная Кинманом [19] карта расположения скоплений. Выделенные им по признаку различия в цвете группы скоплений „b“ ($0^m 5 \leq B - V < 1^m 0$) и „c“ ($B - V \geq 1^m 0$) характеризуются различной локализацией в галактике: скопления „c“ группируются в западной части видимого диска, а основная масса скоплений „b“ в его восточной половине. По мнению Кинмана состав этих двух групп определяется, в основном, шаровыми скоплениями, испытывающими раз-

личную степень покраснения; это допущение позволяет истолковать наблюдаемую асимметрию в распределении групп вдоль малой оси как свидетельство правильности принятой ориентации основной плоскости М 31 (северо-западная часть — более близкая). Однако, при этом не находит объяснения резко выраженная асимметрия в распределении групп „b“ и „c“ вдоль большой оси М 31. Различия форм и звездного состава у скоплений разных типов приводят к слишком широким и перекрывающимся пределам изменения их собственных интегральных цветов. Поэтому не исключена возможность того, что значительная часть наблюдаемых скоплений в М 31 относится к числу открытых и группируется вблизи галактической плоскости. В этом случае наблюдающееся покраснение и ослабление скоплений в той части галактики, где газопылевой слой возвышается над плоскостью звездных спиралей, становится вполне понятным; указанная выше асимметрия получает рациональное объяснение.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Б. А. Воронцову-Вельяминову и В. П. Цесевичу за полезные советы.

Одесская астрономическая
обсерватория

ON THE POSITION OF GAS-DUST LAYER IN GALAXY M 31

E. N. MAKARENKO

The possibility of the exfoliation of gas and dust masses from the plane of stellar spiral arms of M 31 is pointed out. It is shown that the spiral structure of the system of emission nebulae according to the observations [1] makes itself apparent in the best way at the admission $i_1 = 11^\circ$ and $\theta_1 = 33^\circ.7$ for gas and dust plane and $i_2 = 16^\circ$ and $\theta_2 = 39^\circ.7$ for the star plane. The value of the angle between the two planes is $\varphi = 7.5^\circ$ and the position angle of projection on the sky of the intersection line of the planes is $\psi = 21^\circ$.

The proposed hypothesis explains the observed distribution of the emission nebulae and some peculiarities of the maps of the radio-brightness.

The photometric effects are discussed, confirming the possibility of the exfoliation of the gas-dust component.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *W. Baade, H. C. Arp, Ap. J., 134, 1027, 1964.*
2. *H. C. Arp, Ap. J., 124, 1045, 1964.*
3. *E. Argyle, Ap. J., 141, 750, 1965.*
4. *Б. А. Воронцов-Вельяминов, Труды VI совещания по вопросам космогонии, М., 1957.*
5. *А. В. Засов, Астрон. ж., 42, 959, 1965.*
6. *Т. А. Лозинская, Н. С. Кардашев, Астрон. ж., 39, 840, 1962.*
7. *S. van den Bergh, Ap. J., Suppl. ser., 9, 65, 1964.*
8. *J. D. Kraus, Nature, 202, 269, 1964.*
9. *J. D. Kraus, Nature, 198, 844, 1963.*
10. *B. Lindblad, R. Brahe, Stockholm Obs. Medd., № 58.*
11. *G. de Vaucouleurs, Ap. J., 128, 465, 1958.*
12. *W. Baade, H. H. Swope, A. J., 68, 435, 1963.*
13. *W. Baade, H. H. Swope, A. J., 70, 212, 1965.*
14. *S. Garvachkin, A. J., 67, 334, 1962.*
15. *H. C. Arp, A. J., 61, 15, 1956.*
16. *K. P. Kraft, Ap. J., 134, 616, 1961.*
17. *H. C. Arp, A. J., 65, 404, 1960.*
18. *Е. Н. Макаренко, сб. „Физика звезд и диффузной материи“, Киев, „Наукова думка“, 1966.*
19. *T. D. Kinman, Ap. J., 137, 213, 1963.*

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

ФЕВРАЛЬ, 1967

ВЫПУСК 1

О ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТИ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ НА
ДИАГРАММЕ ЦВЕТ — СВЕТИМОСТЬ

А. М. ЭЙГЕНСОН

Поступила 8 октября 1966

Исправлена 10 декабря 1966

При обычных предположениях относительно структуры белых карликов получена формула для их фазовой плотности на диаграмме цвет—светимость. Сопоставление результатов с наблюдательными данными свидетельствует в пользу правильности используемой модели.

Согласно обычной модели [1, 2], белый карлик состоит из выродившегося ядра и относительно тонкой оболочки. В таком случае светимость связана с внутренней температурой соотношением

$$L = A M T_{tr}^{3.5}, \quad (1)$$

где M — масса,

T_{tr} — температура переходного слоя, равная температуре практически изотермического ядра,

A — величина, зависящая от химического состава и равная [2]

$$A = 5.7 \cdot 10^4 \frac{\mu}{\mu_e^2} \cdot \frac{t/g}{Z(1+X)} \cdot \frac{1}{M_{\odot}}$$

Здесь

$$\frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z; \quad \frac{1}{\mu_e} = \frac{1}{2}(1+X),$$

g — множитель Гаунта,

t — гильотинный множитель, а остальные обозначения обычные.

С другой стороны, если единственным источником излучения является тепловая энергия атомных ядер, то светимость

$$L = - \frac{d}{d\tau} (B T_{\text{tr}} \cdot \mathfrak{M}). \quad (2)$$

$$\tau - \text{время}, \quad B = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu_{\lambda} \cdot H}; \quad \frac{1}{\mu_{\lambda}} = X + \frac{1}{4} Y.$$

Исключая L из (1) и (2) и интегрируя, получаем

$$T_{\text{tr}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_{\text{tr}(0)}^{2.5}} + 2.5 \frac{A}{B} \tau \right)^{0.4}}. \quad (3)$$

$$T_{\text{tr}(0)} = T_{\text{tr}} \text{ при } \tau = 0.$$

Подставим (3) в (1):

$$L = \frac{A \mathfrak{M}}{\left(\frac{1}{T_{\text{tr}(0)}^{2.5}} + 2.5 \frac{A}{B} \tau \right)^{1.4}}. \quad (4)$$

Перейдем к звездным величинам. Поскольку

$$M_{\text{bol}} = M_{\odot \text{bol}} - 2.5 \lg \frac{L}{L_{\odot}} = C_1 - 2.5 \lg L, \quad (5)$$

то, подставляя (4) в (5), получаем

$$M = C_1 - 2.5 \lg (A \mathfrak{M}) + 3.5 \lg \left(\frac{1}{T_{\text{tr}(0)}^{2.5}} + 2.5 \frac{A}{B} \tau \right). \quad (6)$$

(Здесь индекс при M_{bol} опускается).

Для дальнейшего полезно образовать из (6)

$$\frac{1}{T_{\text{tr}(0)}^{2.5}} + 2.5 \frac{A}{B} \tau = 10^{0.2857 \cdot M} \cdot 10^{-0.2857 \cdot C_1} \cdot A^{3/7} \mathfrak{M}^{5/7}. \quad (7)$$

Известно, что светимость связана с эффективной температурой соотношением

$$L = 4 \pi R^2 \cdot \sigma T_e^4. \quad (8)$$

Исключив L из (8) и (1), получим следующее соотношение между T_{tr} и T_e :

$$T_e = \left(\frac{A \mathfrak{M}}{4 \pi R^2 \sigma} \right)^{0.25} \cdot T_{\text{tr}}^{0.675}. \quad (9)$$

Примем такую систему цветов [3], при которой

$$CI \equiv C = \frac{\alpha}{T_{\text{цв}}} - \beta, \quad (10)$$

где $T_{\text{цв}}$ — цветовая температура, $\alpha = 7200$, $\beta = 0.55$.

Полагая $T_{\text{цв}} = T_e$, из (9) и (10) получаем с помощью (3)

$$C = \alpha \left(\frac{4 \pi R^2 \sigma}{A \Sigma R} \right)^{0.25} \left(\frac{1}{T_{\text{тр}(0)}^{2.5}} + 2.5 \frac{A}{B} \tau \right)^{0.35} - \beta. \quad (11)$$

Образум функцию

$$\rho(M, C) = \rho_1(\Sigma R, \tau) \cdot \frac{1}{\frac{D(M, C)}{D(\Sigma R, \tau)}}, \quad (12)$$

имеющую смысл фазовой плотности звезд на M, C -диаграмме, причем $\rho_1(\Sigma R, \tau)$ — плотность на диаграмме масса — возраст. Здесь

$$\frac{D(M, C)}{D(\Sigma R, \tau)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial M}{\partial \Sigma R} & \frac{\partial M}{\partial \tau} \\ \frac{\partial C}{\partial \Sigma R} & \frac{\partial C}{\partial \tau} \end{array} \right|. \quad (13)$$

Дифференцируя (6) и (11) и используя (7), после некоторых преобразований получаем для $\rho(M, C)$

$$\rho(M, C) = 10^{0.0857 \cdot M} \cdot (C + \beta) \Sigma R^{3/2} \left| \frac{\partial \Sigma R}{\partial R} \right| \rho_1(\Sigma R) N, \quad (14)$$

где

$$N = A^{-3/2} B \frac{1}{P};$$

$$P = 3.5 \cdot 0.43429 \cdot 2.5 \cdot 0.5 \alpha^2 (4 \pi \sigma)^{0.5} 10^{0.0857 C_1},$$

причем нами использовано то обстоятельство, что вдоль линий постоянной массы фазовая плотность не меняется, то есть

$$\rho_1(\Sigma R, \tau) = \rho_1(\Sigma R).$$

Это допущение основывается на стационарности состава звездного населения нашей звездной системы.

Перепишем (14) в виде

$$\rho(M, C) = \varphi(M, C) \psi \rho_1(\Sigma R) N, \quad (15)$$

где

$$\varphi(M, C) = 10^{0.04857 \cdot M} (C + \beta)$$

$$\Psi = \mathfrak{X}^3, \left| \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial R} \right|.$$

Поскольку $R = R(M, C)$, то функция ψ может быть затабулирована для различных значений M, C . Действительно, исключая R из (8) и используя (5) и (10), получаем

$$R = \frac{10^{0.2(C, -M)}}{(4\pi\tau)^{0.5}} \cdot \frac{(C + \beta)^2}{a^2} \quad (16)$$

или, подставляя значения $L_{\odot} = 3.86 \cdot 10^{33}$ эрг/сек; $M_{\text{бел}\odot} = 4.74$, имеем для R

$$R = 3.98258 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-0.2 \cdot M} \cdot (C + 0.55)^2. \quad (17)$$

Согласно [4—6], белые карлики сосредоточены в основном в области диаграммы, ограниченной неравенствами: $8 \leq M \leq 15$; $-0.3 \leq C \leq 0.5$. При малых M и больших C (положительных) радиусы, в соответствии с (17), оказываются большими, чем для конфигураций, рассчитанных Чандрасекаром [1]. Поэтому было выполнено решение уравнения, описывающего структуру белого карлика, также для центральной плотности, соответствующей значению параметра $1/y_0^2 = 0.9$. Уравнение

$$\frac{1}{\eta^3} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^3 \frac{d\Phi}{d\eta} \right) = - \left(\Phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \quad (18)$$

с граничным условием $\Phi(\eta_1) = 1/y_0$ решалось при этом обычным численным методом, причем интегрирование начиналось из центра при помощи предложенного в [1] разложения в ряд. Для интересующего нас значения параметра $1/y_0^2 = 0.9$ получены следующие величины массы и радиуса: $\mathfrak{X}_{\odot} = 0.5157$; $R = 3.4346 \cdot 10^9$ см (при $\mu_e = 1$, что соответствует водородному составу).

Значения \mathfrak{X} и $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial R}$ для получения таблицы функции ψ снимались с графика $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(R)$ при $\mu_e = 1$ и $\mu_e = 2$, причем последний случай соответствует гелиевому составу. Табулирование функции ψ является тривиальным.

Таким образом, соотношение (14) должно давать для различных значений M и C числа, соответствующие вероятности „попадания“

звезд в определенные интервалы светимости и цвета, или, при соответствующей нормировке, просто числа звезд в интервалах

$$(M, M + dM), \quad (C, C + dC).$$

Величина $\rho_1(\mathcal{M})$ имеет смысл функции распределения белых карликов по массам; величина N для данного химического состава является постоянной.

Для сравнения результатов с наблюдательными данными необходимо ввести поправочный множитель, учитывающий эффект селекции: во-первых, абсолютно яркие звезды мы видим в большем объеме; во-вторых, мы обнаруживаем главным образом те белые карлики, которые обладают достаточно большими собственными движениями.

Будем считать, что мы вычерпываем белые карлики до видимой величины m_0 . Тогда для предельного расстояния это даст

$$r_0 = 10^{0.2(m_0 - M) + 1}. \quad (19)$$

Если считать пространственную плотность белых карликов в окрестностях Солнца постоянной, то значения функции $\rho(M, C)$, относящиеся к различным M , должны умножаться на объемы, определяемые соотношением $r_0^3 \sim 10^{-0.6M}$. Оказалось, однако, что это дает заниженные оценки для числа звезд с большими M .

Просмотр списка белых карликов в [4—6] показывает, что, согласно [4], большинство их имеет собственные движения, большие, чем 0.1. Будем считать, что мы обнаруживаем белые карлики с собственными движениями, большими некоторого предельного значения μ_0 . Тогда, если скорость есть v , то для расстояния получаем неравенство $r_0 \leq \frac{v}{\mu_0}$. Теперь для учета эффекта селекции имеются два неравенства

$$r_0 \leq 10^{0.2(m_0 - M) + 1} \quad (20)$$

$$r_0 \leq \frac{v}{\mu_0}.$$

При этом, если v выражается в км/сек, а μ_0 в угловых секундах в год, то для расстояния в парсеках вместо второго неравенства имеем

$$r_0 \leq 0.211067 \frac{v}{\mu_0}.$$

Таким образом, для каждого значения M функцию $\rho(M, C)$ надо теперь умножать на объем, удовлетворяющий обоим неравенствам.

При этом нас интересуют не сами объемы, а их отношения, соответствующие различным M .

Полагая $m_0 = 16$, для μ_0 и ν мы принимали значения $\mu_0 = 0.1$; $\nu = 30$ км/сек. Тогда функция $V(M, \mu_0)$, где V — отношение объемов, будет равна

$$\begin{array}{lll} V(M, \mu_0) \approx 1 & \text{при} & 8 < M < 12 \\ 10^{-0.6} & \text{„} & M = 13 \\ 10^{-1.2} & \text{„} & M = 14 \\ 10^{-1.8} & \text{„} & M = 15. \end{array}$$

Ниже приводится таблица функции $\varphi(M, C) \cdot \psi \cdot V(M, \mu_0)$. Эта таблица представляет собой теоретическое распределение белых карликов для случая $\rho_1(\mathcal{M}) = \text{const}$. Функция Ψ подсчитывалась для водородного состава, причем масса выражалась в единицах солнечной массы, а радиус в единицах 10^6 см.

Таблица

$M \backslash C$	-0.3	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
8	0.78	1.14	0.61	0.14	<0.07				
9	0.45	1.54	1.74	1.11	0.38	<0.11			
10	0.43	1.38	2.39	2.70	2.16	1.07	0.44	<0.17	
11	0.37	0.84	2.16	2.99	4.17	4.05	2.72	1.51	0.76
12	0.37	0.77	1.31	3.24	4.42	5.74	6.39	6.18	4.27
13	0.08	0.15	0.30	0.49	0.64	1.52	1.74	2.21	2.46
14	0.02	0.04	0.07	0.11	0.15	0.20	0.34	0.59	0.66
15	0.005	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.07	0.08	0.13

В соответствии с таблицей построена искусственная диаграмма цвет — светимость для белых карликов (рис. 1).

Были получены также таблицы и диаграммы для функции ψ , соответствующей гелиевому составу. Сравнение показало, что химический состав мало влияет на характер диаграммы.

Добавим еще, что при других разумных значениях μ_0 и ν , например при $\nu = 20$ км/сек, $\mu_0 = 0.05$ величина $V(M, \mu_0)$, а следовательно и диаграмма, меняются незначительно.

Введение функции распределения белых карликов по массам $\rho_1(\mathcal{M})$ в виде, например, гауссовой кривой может изменить дисперсию звезд на диаграмме. В связи с этим отметим, что, согласно [4], имеет место разделение белых карликов на диаграмме на две различные группы,

соответствующие, как полагают авторы, различным средним массам. Нетрудно видеть, что введение, например, двухвершинной функции $\rho_1(M)$ в $\rho(M, C)$ даст возможность учесть это обстоятельство.

Далее, привлечение большего наблюдательного материала и более точный учет эффекта селекции может позволить в принципе определить характер функции $\rho_1(M)$, если считать левую часть (14) заданной.

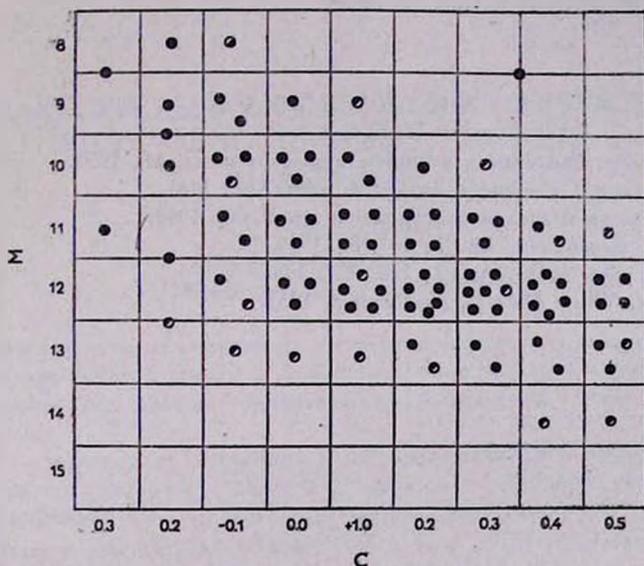


Рис. 1. Количество кружков в клеточках приблизительно соответствует числам таблицы, а полуоткрытые кружки относятся к числам порядка 0.5.

Кружок в правом верхнем углу диаграммы условно обозначает сумму чисел в этой области, два закрытых кружка в первом столбце—сумму чисел в (8—12) строках этого столбца.

Рассмотрение таблицы и диаграммы показывает удовлетворительное согласие с наблюдательными данными [4—6], на основании чего можно сделать следующий вывод.

Распределение на диаграмме цвет—светимость соответствует гипотезе о том, что свечение белых карликов происходит за счет внутренней энергии, то есть за счет остывания. Источники энергии не играют существенной роли, точнее, не влияют существенно на характер диаграммы.

В заключение приношу искреннюю благодарность В. А. Амбарцумяну за руководство работой.

Астрономическая обсерватория
Львовского университета

ON THE PHASE DENSITY OF WHITE DWARFS ON THE
COLOR-LUMINOSITY DIAGRAM

A. M. EIGENSON

By considering the usual assumptions about the structure of the white dwarfs, a formula for their phase density on the color-luminosity diagram is obtained. Comparing the results with observational data we see that the employed model is valid.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Чандрасекар, Введение в учение о строении звезд, М., 1950.
2. М. Шварцшильд, Строение и эволюция звезд, М., 1961.
3. Курс астрофизики и звездной астрономии, т. II, М., 1962.
4. O. Eggen, J. Greenstein, Ap. J., 141, 83, 1965.
5. O. Eggen, J. Greenstein, Ap. J., 142, 925, 1965.
6. E. Schatzman, White Dwarfs, Amsterdam, 1957.

НАБЛЮДАТЕЛЬНАЯ СЕЛЕКЦИЯ И СТАТИСТИКА
ВИЗУАЛЬНО-ДВОЙНЫХ СИСТЕМ.

II. СТАТИСТИКА

Б. И. ФЕСЕНКО

Поступила 25 июня 1966

Исправлена 10 декабря 1966

Приводятся некоторые результаты статистики с учетом наблюдательной селекции 412 визуально-двойных систем с известными спектральными классами или цветами двух компонентов; один из компонентов каждой системы близок к главной последовательности.

Плотность вероятности логарифмов линейных расстояний R между компонентами двойных систем в интервале $1.5 < \lg R < 3.5$ оказалась линейной убывающей функцией $\lg R$ (R выражено в а. е.). Абсолютные визуальные величины главных компонентов заключались при этом в интервале $0^m < M < +5^m$, а разности величины компонентов Δm не превышали 1^m .

При возрастании M от $+2.5^m$ до $+3.5^m$ процент визуально-двойных систем увеличивается в 4.4 ± 0.7 раза ($\Delta m < 1^m$, $1.5 < \lg a < 3.0$, a — проекция расстояния R на картинную плоскость, выраженная в а. е.).

Плотность вероятности величины Δm при увеличении Δm возрастает при малых значениях Δm , затем достигает максимума, который сдвигается в сторону больших значений Δm при переходе к системам с меньшей светимостью главного компонента ($-2^m < M < +3$).

Красные гиганты и субгиганты рассмотренных систем по расположению на диаграмме спектр — светимость напоминают звезды рассеянных скоплений M 11, M 41 и M 67.

Дисперсия разностей показателей цвета компонентов равного блеска значительно меньше, чем у звезд равного блеска в скоплении M 67 (считается старым) или в скоплении NGC 2362 (считается очень молодым). Компоненты рассмотренных двойных систем напоминают звезды главной последовательности в скоплении Ясая.

Метод учета наблюдательной селекции в статистике визуально-двойных систем изложен в первой части этой работы. Там же указан материал, который подвергнут статистической обработке — это двой-

ные системы, у которых измерены спектральные классы или цвета каждого компонента, а разности величин Δm известны из каталога Валленквиста [1]. У этих систем по крайней мере один компонент имеет класс светимости V. Общее число систем после исключения оптических двойных равно 412. Каждой системе приписан вес, определенный так, чтобы сумма весов систем данного типа соответствовала с точностью до постоянного множителя числу этих систем в единице объема в окрестности Солнца.

Рассмотрим результаты статистики этих систем.

Распределение расстояний между компонентами. Пусть a — проекция на картинную плоскость линейного расстояния R между компонентами, выраженного в астрономических единицах. Распределение значений a изучалось при различных визуальных абсолютных величинах главных компонентов M и разностях величин компонентов Δm . В табл. 1 приводятся суммарные веса с их средними ошибками σ . Для оценки последних использовано приближенное равенство:

$$\sigma \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n W_i^2}, \quad (1)$$

где W_i — вес i -той системы, попавшей в данный интервал значений $\lg a$; n — число всех систем в том же интервале. Предполагалось, что числа n распределены по закону Пуассона.

Таблица 1

СУММАРНЫЕ ВЕСА ВИЗУАЛЬНО-ДВОЙНЫХ СИСТЕМ

$\lg a$	$0^m < \Delta m < 1^m$			$1^m < \Delta m < 2^m$			$2^m < \Delta m < 4^m$
	$0 < M < 2$	$2 < M < 4$	$4 < M < 5$	$0 < M < 2$	$2 < M < 4$	$4 < M < 5$	$2 < M < 4$
1.00—1.49			1010±660				
1.50—1.99	62±30	990±330	3050±950				
2.00—2.49	45±15	890±220	1400±500	65±25	1500±540	1210±630	3600±1500
2.50—2.99	40±9.5	630±150	1030±340				
3.00—3.49	10.4±3.8	72±33	325±160	81±20	660±230	1000±430	2400±730
3.50—3.99	8.4±3.1						

Для сравнения распределений значений a при различных M и Δm они были нормированы к единице в интервале $1.50 < \lg a < 3.50$. На рис. 1 полученные распределения приводятся для случая $\Delta m < 1^m$

и интервалов значений $\lg a$ шириною в 0.50. Относительное число систем в таких интервалах обозначено $p_1(\lg a)$.

Учитывая случайные ошибки, можно сделать вывод, что в интервале $0^m < M < 5^m$ распределение a не зависит от M ($\Delta m < 1^m$).

Предположим, что функция $p_1(\lg a)$ имеет вид:

$$p_1(\lg a) = a - \beta \lg a. \quad (2)$$

Применение способа наименьших квадратов позволило оценить α и β :

$$p_1(\lg a) = 0.850 - 0.240 \lg a. \quad (3)$$

$$\pm .077 \pm .030$$

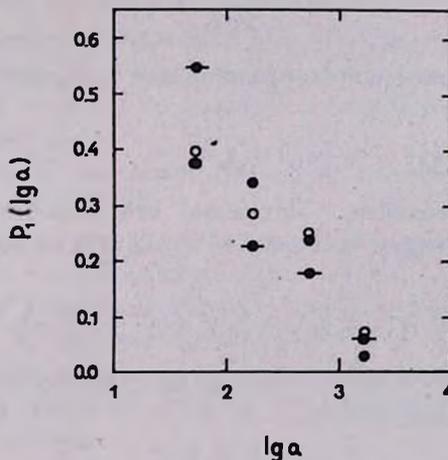


Рис. 1. Нормированное распределение значений $\lg a$ при $\Delta m < 1^m$.

○ $0^m < M < 1^m$ ● $2^m < M < 4^m$ —●— $4^m < M < 5^m$.

Учитывая ширину интервалов $\lg a$, в которых определялась функция $p_1(\lg a)$, получаем выражение для плотности вероятности $\lg a$:

$$p(\lg a) = 1.700 - 0.480 \lg a, \quad (4)$$

$$\pm .154 \pm .060$$

$$1.50 < \lg a < 3.5.$$

Обозначим $\varphi(a)$ плотность вероятности a . Из соотношения

$$\varphi(a) = \frac{0.434}{a} p(\lg a) \quad (5)$$

и равенства (4) получаем

$$\varphi(a) = \frac{0.738 - 0.208 \lg a}{a}, \quad 31 \text{ а. е.} < a < 3200 \text{ а. е.} \quad (6)$$

Анализ средних ошибок показывает, что закон (4) хорошо описывает наблюдения. Однако экстраполяция этого закона на значения $a > 3500 \text{ а. е.}$ невозможна. Из (6) следует, что при $a > 3500 \text{ а. е.}$ $\varphi(a) < 0$. На самом деле двойные системы встречаются и при $a > 3500 \text{ а. е.}$, хотя и редко. Поэтому в более широком интервале закон (4) должен быть заменен более точным законом.

Перейдем к выводу закона распределения истинных расстояний R . Введем обозначение:

$$\delta = \lg R.$$

Пусть в некотором широком интервале значений δ плотность вероятности δ имеет вид

$$F(\delta) = \alpha_0 + \alpha_1 \delta + \alpha_2 \delta^2 + \dots + \alpha_n \delta^n, \quad (7)$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ — постоянные. Покажем, что аналогичный вид будет иметь в соответствующем интервале и плотность вероятности величины $\eta = \lg a$:

$$p(\eta) = \beta_0 + \beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2 + \dots + \beta_n \eta^n, \quad (8)$$

где n — то же, что и в (7), а β_0, \dots, β_n — постоянные.

Учитывая соотношение

$$a = R \sin \vartheta, \quad (9)$$

где ϑ — острый угол между отрезком, соединяющим компоненты, и лучом зрения, имеем

$$\eta = \delta + \gamma,$$

где

$$\gamma = \lg \sin \vartheta.$$

Обозначим $\Phi(\delta, \gamma)$ и $\Psi(\eta, \gamma)$ плотности вероятности совместных распределений пар δ, γ и η, γ . Учитывая, что якобиан преобразования переменных δ и γ в переменные η и γ по абсолютной величине равен единице, имеем

$$\Psi(\eta, \gamma) = \Phi[\delta(\eta, \gamma), \gamma]$$

или

$$\Psi(\eta, \gamma) = \Phi(\eta - \gamma, \gamma). \quad (10)$$

Случайные величины δ и γ взаимно-независимы, поэтому

$$\Phi(\delta, \gamma) = F(\delta) q(\gamma), \quad (11)$$

где $q(\gamma)$ — плотность вероятности γ .

Из (10) и (11) получаем:

$$\Psi(\eta, \gamma) = F(\eta - \gamma) q(\gamma). \quad (12)$$

Теперь находим выражение для $p(\eta)$:

$$p(\eta) = \int_{(7)} \Psi(\eta, \gamma) d\gamma = \int_{(7)} F(\eta - \gamma) q(\gamma) d\gamma. \quad (13)$$

Подставив сюда выражение для F из (7) и выполнив интегрирование по γ , убеждаемся в справедливости равенства (8).

Заметим, что $0 < \sin \varphi < 1$; повтому $-\infty < \gamma < 0$. Для строгого выполнения равенства (8) следует потребовать, чтобы функция F в (13) подчинялась закону (7) в бесконечном интервале δ . Это невозможно, так как функция типа (7) не может быть нормирована к единице в бесконечном интервале.

Таким образом, равенство (8) — приближенное; оно тем точнее, чем шире интервал δ в (7).

Было показано, что из выражения (7) следует (8). Можно доказать и обратное — из (8) следует (7).

Рассмотрим некоторые частные случаи выражения (7).

Пусть $n = 0$. Тогда $F(\delta) = \alpha_0$ и $p(\eta) = \beta_0$. В этом случае плотности вероятностей R и a пропорциональны соответственно $1/R$ и $1/a$. Это — известный факт, который был использован В. А. Амбарцумяном [2] и другими авторами.

Пусть $n = 1$. Тогда $F(\delta) = \alpha_0 + \alpha_1 \delta$ и $p(\eta) = \beta_0 + \beta_1 \eta$. Из (13) получаем теперь $p(\eta) = \alpha_0 - \alpha_1 \bar{\gamma} + \alpha_1 \eta$,
где

$$\bar{\gamma} = \int_0^{\pi/2} (\lg \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что отрезки, соединяющие компоненты, ориентированы равномерно-случайно, откуда следует, что плотность вероятности ϑ пропорциональна $\sin \vartheta$.

Из (14) получаем:

$$\bar{\gamma} = -0.132.$$

Таким образом, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \beta_0 - 0.132 \beta_1, \\ \alpha_1 &= \beta_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда видно, что функции $F(\delta)$ и $p(\eta)$ нормированы в различных интервалах.

Аналогично простые соотношения между постоянными в (7) и (8) устанавливаются при $n > 1$. Кстати, эти соотношения удобно использовать (если n невелико) при исследованиях распределений плотности в скоплениях звезд и галактик.

Используя соотношения (15), определим функцию $F(\lg R)$, соответствующую наблюдаемому закону (4). Нормировав эту функцию к единице в интервале $1.5 < \lg R < 3.5$, получим:

$$F(\lg R) = 1.57 - 0.43 \lg R. \quad (16)$$

$$\pm .14 \pm .053.$$

Плотность вероятности R имеет вид:

$$\Psi(R) = (0.68 - 0.185 \lg R) \frac{1}{R}, \quad 31 \text{ а. е.} < R < 3200 \text{ а. е.} \quad (17)$$

$$\pm .061 \pm .023$$

Почти такой же закон получен при решении интегрального уравнения, связывающего функции $\varphi(a)$ и $\Psi(R)$ (численный метод).

Закон (17) справедлив для систем, у которых $0^m < M < 5^m$ и $\Delta m < 1^m$. Он отличается от того, что было получено другими авторами ([2 - 4]) для систем с любыми M и Δm (без полного учета селекции). В указанных работах получен закон $\Psi(R) \sim \frac{1}{R}$. Интересно, что в малых интервалах R этот закон почти не отличается от закона (17).

Если главные компоненты всех систем поместить в одну точку, то число спутников в сферических кольцах, описанных вокруг этой точки, окажется пропорциональным $\Psi(R)$ (R — средний радиус кольца). Это будет искусственное звездное скопление с плотностью, убывающей к периферии. Интересно сравнить такое скопление с реальными шаровыми звездными скоплениями. Оказывается, что между ними существует сходство (если рассматривать внешние области шаровых скоплений М 3 и М 92).

Рассмотрим визуально-двойные системы при $\Delta m > 1^m$. Число систем в интервалах шириною в 1^m невелико. Веса систем зависят от Δm . Объединение их в группы по значениям Δm не приводит к заметному уменьшению роли случайных флуктуаций, так как при этом увеличивается дисперсия весов (см. (1)). Поэтому распределение $\lg a$ не удается исследовать детально.

При $\Delta m > 1^m$ было рассмотрено всего два интервала значений $\lg a$: от 1.5 до 2.5 и от 2.5 до 3.5. Обозначим f отношение числа.

систем в первом интервале к числу систем во втором. Ниже приводятся значения f при различных Δm (указаны средние ошибки).

Δm	f
$0^m - 1^m$	2.70 ± 0.27
1 — 2	1.32 ± 0.43
2 — 4	1.36 ± 0.72

При возрастании Δm относительное число систем с большими значениями a увеличивается.

Распределение абсолютных величин главных компонентов. В табл. 2 приводятся логарифмы суммарных весов двойных систем при различных $\lg a$ и M для случая $\Delta m < 1^m$. Учитывалось, что среднее значение логарифма случайной величины меньше логарифма среднего значения этой же величины, а именно

$$\overline{\lg W} \approx \lg(\overline{W}) - 0.217 \frac{\sigma^2\{W\}}{\overline{W}},$$

где W — суммарный вес, $\sigma^2\{W\}$ — дисперсия.

Табличное значение логарифма вычислялось по формуле:

$$(\lg W)_{\text{табл.}} = \lg W + 0.217 \frac{\sigma^2\{W\}}{W}. \quad (18)$$

Второе слагаемое в правой части равенства (18) обычно не превышало 0.05.

Таблица 2

ЛОГАРИФМЫ СУММАРНЫХ ВЕСОВ СИСТЕМ $\Delta m < 1^m$

$\lg a \backslash M$	0—2	2—4	4—6	6—8
1.5—2.0	1.84	3.02	3.56	4.09
2.0—2.5	1.68	2.96	3.64	4.17
2.5—3.0	1.63	2.85	3.35	3.32

Обозначим $\nu(M)$ число систем в интервале от $M-1$ до $M+1$. На рис. 2 сравнивается функция $\lg[\nu(M)/\nu(1)]$ у двойных систем и у всех звезд (по данным Г. А. Стариковой). Сравнение показывает, что ход этой функции почти одинаков при всех $1.5 < \lg a < 3.0$. В то

же время у двойных систем указанная функция возрастает значительно быстрее, чем у всех звезд, вместе взятых. В табл. 3 значения $\lg [\nu(M)/\nu(1)]$ сравниваются у всех систем при $1.5 \lg \alpha < \lg \alpha < 3.0$ и у всех звезд.

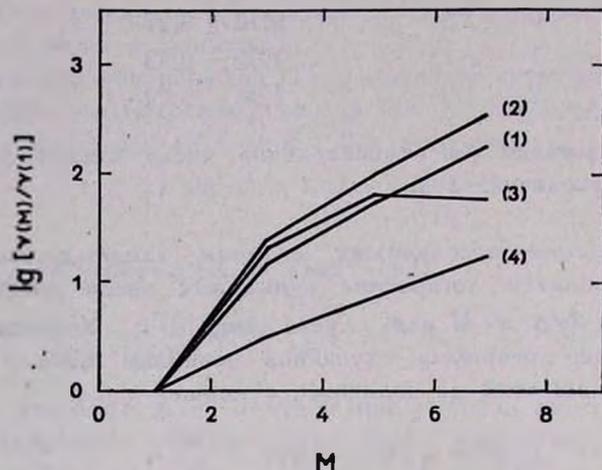


Рис. 2. (1) $1.5 < \lg \alpha < 2.0$, (2) $2.0 < \lg \alpha < 2.5$, (3) $2.5 < \lg \alpha < 3.0$, (4) — все звезды.

Пусть $\zeta(M)$ — доля систем, у которых $\Delta m < 1$, $1.5 < \lg \alpha < 3.0$ и абсолютные величины главных компонентов от $M-1$ до $M+1$, среди всех звезд в том же интервале абсолютных величин. Имеем

$$\lg [\zeta(M)/\zeta(1)] = \lg [\nu_2(M)/\nu_2(1)] - \lg [\nu(M)/\nu(1)], \quad (19)$$

Таблица 3

ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ $\lg [\nu(M)/\nu(1)]$

M	0—2	2—4	4—6	6—8
Системы, у которых $\Delta m < 1^m$	0.00	$1.23 \pm .028$	$1.80 \pm .08$	$2.14 \pm .24$
Все звезды	0.00	0.51	0.87	1.22

где ν_2 соответствует двойным системам, а ν — всем звездам. В табл. 4 приводятся значения величины $\zeta(M)/\zeta(1)$, полученные из (19) по данным табл. 3. При увеличении абсолютных величин звезд от $+1^m$ до

+7^m процент систем, у которых $\Delta m < 1^m$ и $1.5 < \lg a < 3.0$, увеличивается в 9 раз.

Таблица 4

M	0-2	2-4	4-6	6-8
$\zeta(M)/\zeta(1)$	1.00	5.25 ± 0.40	9.3 ± 2.0	9 ± 5

Наиболее резкое увеличение числа двойных систем по отношению ко всем звездам происходит внутри интервала $2^m < M < 4^m$. Абсолютное число систем при переходе от интервала $2^m < M < 3^m$ к интервалу $3^m < M < 4^m$ увеличивается следующим образом:

интервал $\lg a$	увеличение числа систем в количество раз
1.5 — 2.0	6.7
2.0 — 2.5	8.9
2.5 — 3.0	8.7
3.0 — 3.5	4.2

Считая, что различие этих чисел вызвано случайными флуктуациями, для всего интервала $1.5 < \lg a < 3.5$ получаем увеличение числа систем в 7.1 ± 1.1 раза (если же не учитывать селекцию, то только в 2.2 раза). Число всех звезд увеличивается при этом только в 1.6 раза.

В случае $\Delta m > 1^m$ сравнительно надежные данные получаются только в интервале $2.5 < \lg a < 3.0$; ограничимся рассмотрением этого интервала. Логарифмы суммарных весов систем приводятся в табл. 5;

Таблица 5

ЛОГАРИФМЫ СУММАРНЫХ ВЕСОВ СИСТЕМ

 $\Delta m > 1^m$ и $2.5 < \lg a < 3.0$

$\Delta m \backslash M$	0-2	2-4	4-6
1-2	1.66 ± 0.22	2.82 ± 0.16	3.47 ± 0.27
2-3	2.19 ± 0.19	3.12 ± 0.19	—
3-4	2.54 ± 0.26	—	—

прочерк означает, что данные слишком ненадежны. На рис. 3 значения $\lg [\nu(M)/\nu(1)]$ сравниваются при различных Δm . Разности этих значений при одном и том же M не выходят за пределы случайных ошибок.

Полученное выше увеличение процента визуально-двойных систем в 9 раз при возрастании значений M от $+1^m$ до $+7^m$ нельзя считать окончательно установленным, так как возможна иная интерпретация наблюдательных данных. Фиктивное возрастание процента двойных систем может быть получено из-за систематических ошибок в значениях M в формуле (17) первой части работы. Абсолютная величина

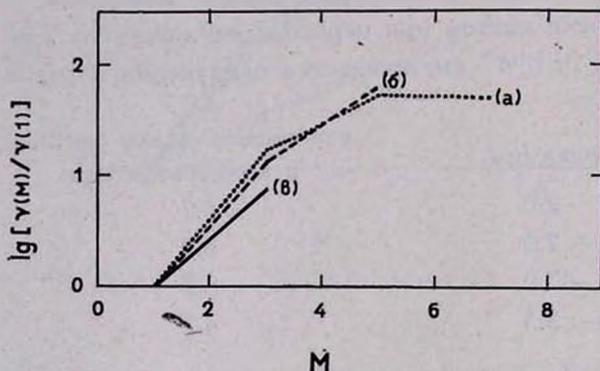


Рис. 3. (а) $\Delta m < 1^m$; (б) $1^m < \Delta m < 2^m$; (в) $2^m < \Delta m < 3^m$.

главного компонента обычно получалась путем вычитания Δm из абсолютной величины второго компонента M' . В большинстве случаев значение M' находилось по спектральному классу из условия принадлежности звезды к главной последовательности диаграммы $S_p - M$, построенной для *всех* звезд. Фиктивное увеличение процента двойных с ростом M произойдет, если наклон главной последовательности для вторых компонентов систем меньше, чем для *всех* звезд. Тогда, чем меньше значение M , тем больше недооценка веса, так как звездам ошибочно приписываются слишком большие светимости.

Если учитывать только этот эффект, то при переходе от $M = +3^m.5$ к $M = +2^m.5$ ($\Delta m < 1^m$) отклонение вторых компонентов систем вниз от стандартной главной последовательности [5] должно увеличиться на $1^m.1$, то есть последовательность вторых компонентов должна здесь располагаться горизонтально.

Такое сильное отличие компонентов двойных систем от *всех* звезд едва ли возможно. Остается допустить, что в указанном интервале абсолютных величин происходит увеличение процента визуально-двой-

ных систем, хотя, может быть, и не такое значительное, как получено выше. Известно, что в том же интервале абсолютных величин процент спектрально-двойных звезд уменьшается.

Распределение разностей величин компонентов. Эти распределения были нормированы к единице в интервале $0^m < \Delta m < 5^m$. Оценка средних ошибок получена при сравнении распределений Δm в соседних интервалах $\lg a$ ($M = \text{const}$). Возможная зависимость этих распределений от a не учитывалась. Результаты для $M < 3^m$ приводятся в табл. 6. Общая особенность распределений Δm при $-2^m < M < 3^m$:

Таблица 6

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ Δm , НОРМИРОВАННОЕ В ИНТЕРВАЛЕ $0 < \Delta m < 5$

M	$\lg a$	Δm				
		0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
< -2	4.0-4.5	.17	.26	.17	.35	.06
$-2-0$	2.5-4	.045 $\pm .023$.086 $\pm .031$.569 $\pm .072$.278 $\pm .135$.022 $\pm .017$
$0-1$	2.5-4	.087 .026	.051 .016	.110 .137	.451 .084	.301 .082
$1-2$	2-3.5	.053 .016	.078 .048	.208 .058	.228 .121	.433 .190
$2-3$	2-3.5	.042 .015	.047 .024	.183 .121	.238 .061	.491 .126

с ростом Δm число систем увеличивается, достигая максимума. С увеличением M максимум сдвигается вправо (в сторону больших Δm). При $M < -2^m$ и $M > 3^m$, $\Delta m > 4^m$ данные ненадежны. В интервале $3^m < M < 4^m$ распределение систем в промежутке $0^m < \Delta m < 4^m$ приблизительно равномерное.

Статистика систем, у которых главный компонент—гигант класса G или K. В интервале абсолютных величин главных компонентов $-2^m < M < 3^m$ ($\Delta m < 4^m$) таких систем оказалось 42. Проценты этих систем среди всех систем с соответствующими абсолютной величиной главного компонента и расстоянием между компонентами указаны в табл. 7. На рис. 4 схематически показано распределение на диаграмме $Sp-M$ главных компонентов-гигантов после учета наблюдательной селекции. Интервалы значений $\lg a$ те же, что и в табл. 7.

Таблица 7

СИСТЕМЫ С ГЛАВНЫМ КОМПОНЕНТОМ-ГИГАНТОМ ИЛИ СУБГИГАНТОМ

M	$\lg a$	Процент среди всех систем
-2-0	2.5-4.0	51
0-1	2.5-4.0	37
1-3	2-3.5	11

Во всем интервале $-2^m < M < +3^m$ наблюдается одно и то же, двукратное увеличение числа систем при изменении спектральных классов от G до K.

В шаровых скоплениях, таких как M 3 и M 92, почти не встречаются звезды-гиганты ($M > -2^m$), у которых показатель цвета

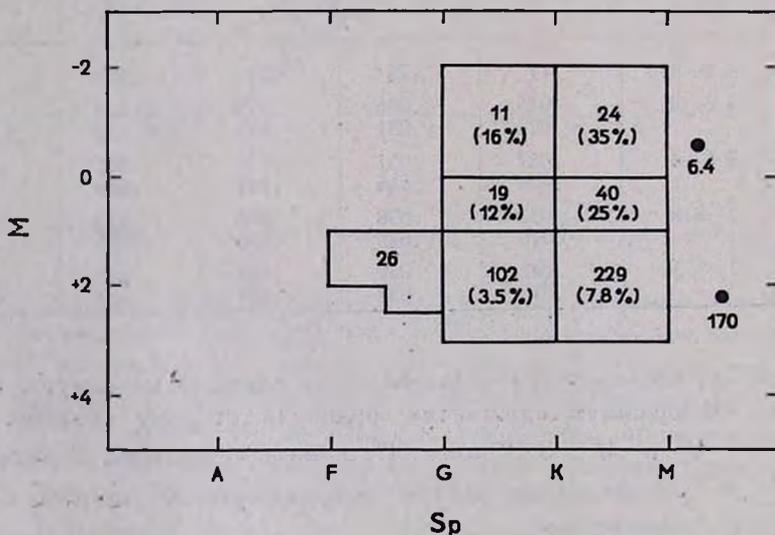


Рис. 4. Распределение главных компонентов-гигантов и субгигантов на диаграмме $Sp - M$. Точками изображены компоненты, не попавшие в очерченные области, рядом указаны веса. В прямоугольниках указаны суммарные веса попавших туда систем. Проценты указаны по отношению ко всем системам соответствующих абсолютных величин.

$B - V$ превышает $+0^m90$ (у гигантов это соответствует спектральному классу более позднему, чем G 8). В этом отношении звезды шаровых скоплений отличаются от звезд в двойных системах общего галактического фона. Гиганты и субгиганты классов G и K двойных

систем соответствуют красным гигантам и субгигантам в рассеянных скоплениях M 11, M 41 и M 67. При $M > 0^m$ у большинства гигантов и субгигантов двойных систем спектральные классы не позднее K 3.

Заметного изменения расстояний между компонентами при переходе от спектрального класса G к классу K не обнаружено.

Системы с одинаковыми светимостями компонентов. Изучение таких систем дает возможность проверить некоторые предположения о происхождении и эволюции звезд.

Предположим, что состояние звезды в данный момент определяется тремя параметрами: возрастом, начальной массой и начальным химическим составом. Если современные светимости компонентов двойной системы равны, то при равенстве их возрастов и начальных химических составов либо современные цвета их должны быть одинаковы, либо разность показателей цвета примет дискретный набор значений. Последняя возможность реализуется в том случае, когда современные светимости и указанные три параметра не связаны взаимно однозначной зависимостью.

Было рассмотрено 27 систем с известными спектральными классами или цветами каждого компонента и с разностью величин компонентов, не превышающей $0^m 10$. Один из компонентов каждой системы

Таблица 8

СИСТЕМЫ С КОМПОНЕНТАМИ РАВНОГО БЛЕСКА

ADS	$(B-V)_1$	Δm	$\Delta(B-V)$	Примечание
1507	+0.02	0.09	-0.04 ± 0.04	тройная
5436	+0.47	0.08	0.03 ± 0.05	тройная
6815	+0.12	0.04	0.03 ± 0.02	
8630	+0.33	0.02	0.00 ± 0.04	четверная
9728	+0.50	0.09	0.01 ± 0.03	тройная
10628	+0.08	0.02	-0.03 ± 0.02	тройная
11089	+0.14	0.04	-0.01 ± 0.02	

находился недалеко от главной последовательности. Оказалось, что во всех случаях разность показателей цвета компонентов не выходит за пределы случайных ошибок ее определения. В табл. 8 приводятся данные для 7 систем с наиболее надежно определенными разностями показателей цвета $\Delta(B-V)$ (в смысле, второй компонент минус пер-

вый). Показатель цвета первого компонента обозначен $(B - V)_1$. Средние ошибки разностей показателей цвета того же порядка, что и сами разности. Среднее значение указанных разностей близко к нулю. Если бы оба компонента принадлежали к главной последовательности, то при среднем значении Δm равном $0^m.054$, средняя разность показателей цвета составила бы $0^m.01$ (при $0^m < B - V < + 0^m.50$). Среднее квадратичное отклонение наблюдательных значений $\Delta(B - V)$ равно $0^m.027$, однако здесь не учитывался эффект случайных ошибок. Средняя ошибка значений $\Delta(B - V)$ составляет $0^m.036$, поэтому истинное значение среднеквадратичного отклонения разностей $\Delta(B - V)$ не может быть определено даже с точностью до порядка величины. Во всяком случае, оно не превышает $0^m.027$.

Такой результат согласуется с предположением, что компоненты двойной системы — это звезды с весьма одинаковыми возрастaми и начальными химическими составами. Компоненты одинаковой светимости гораздо больше тяготеют друг к другу на диаграмме цвет — светимость, чем звезды одинаковой светимости в рассеянных скоплениях NGC 2362 (считается молодым), NGC 752 и M 67 (считаются старыми). Значительно лучшее сходство наблюдается у компонентов двойных систем со звездами рассеянного скопления Ясли (предполагаемый возраст 4×10^8 лет, [6]), если в последнем исключить возможные двойные системы.

Для более точного определения среднего квадратичного отклонения величины $\Delta(B - V)$ желательны дальнейшие измерения цветов в системах с компонентами равного блеска.

Ниже приводятся данные для систем, у которых оба компонента — гиганты или субгиганты, причем цвета измерены или вычислены по спектральным классам достаточно уверенно.

ADS	$(B - V)_1$	Δm	$\Delta(B - V)$
683	+ 0.36	0.03	0.01 ± 0.04
10171	+ 0.75	0.10	0.03 ± 0.08
10905	+ 0.02	0.09	0.97
11558	+ 0.07	0.06	0.49 ± 0.06

Здесь встречаются и малые и большие значения $\Delta(B - V)$. Однако материал слишком беден, чтобы можно было обсуждать значение полученного результата.

Основные выводы. 1. Плотность вероятности расстояний R между компонентами двойных систем в интервале $1.5 < \lg R < 3.5$ при $\Delta m < 1^m$ и $0^m < M < 5^m$ подчиняется закону

$$\Psi(R) = (a - b \lg R) \frac{1}{R},$$

где a и b — постоянные, R выражено в астрономических единицах.

2. При возрастании значений Δm процент двойных систем с большими значениями R увеличивается.

3. Процент двойных систем в интервалах $\Delta m < 1^m$, $1.5 < \lg a < 3.0$ увеличивается приблизительно в 4 раза при возрастании абсолютной величины главного компонента M от $+2^m.5$ до $+3^m.5$. Некоторое увеличение процента двойных систем происходит и при дальнейшем возрастании значений M .

4. Плотность вероятности разностей величин компонентов Δm возрастает с увеличением Δm и достигает максимума. Максимум сдвигается в сторону больших значений Δm при переходе к системам с меньшей светимостью главного компонента. Этот вывод получен для систем в интервале $-2^m < M < 3^m$.

5. Среди систем со вторым компонентом на главной последовательности системы с главным компонентом — гигантом или субгигантом спектрального класса К встречаются в два раза чаще, чем системы с главным компонентом — гигантом или субгигантом класса G. По расположению на диаграмме спектр — светимость компоненты таких систем сходны со звездами рассеянных скоплений M 11, M 41 и M 67 и не похожи на звезды шаровых скоплений.

При получении всех этих выводов учитывалась наблюдательная селекция.

6. Результаты рассмотрения систем с одинаковыми светимостями компонентов не противоречат предположению, что звезды одной системы имеют одинаковые возрасты и одинаковые начальные химические составы.

7. Системы кратности, большей 2, встречаются чаще, чем чистые двойные системы (см. первую часть этой работы). Этот вывод справедлив для интервала $-2^m < M < +7^m$.

OBSERVATIONAL SELECTION AND STATISTICS OF THE VISUAL DOUBLE SYSTEMS.

II. STATISTICS

B. I. FESSENKO

Some results of statistics on the 412 visual double systems are given. Spectral types or colors of two components for each system under consideration are known; one of the components is near the main sequence.

The probability density of the logarithm of the linear distance (R) between the components is a decreasing linear function of $\lg R$ ($\Delta m < 1^m$, $0^m < M < +5^m$, $1.5 < \lg R < 3.5$, Δm is the difference of the component magnitudes, R is expressed in a. u.). The percentage of the visual double systems increases 4.4 ± 0.7 times when the value of M_v increases from $+2^m.5$ to $+3^m.5$ ($\Delta m < 1^m$, $1.5 < \lg R < 3.0$). The probability density of Δm increases at small values of Δm and gains at maximum values. This maximum moves towards larger values of Δm if the systems with smaller luminosity of the primary star are considered ($-2^m < M < +3^m$).

On the $H-R$ diagram the red giants and the subgiants in visual double systems and in open star clusters M 11, M 41, and M 67 occupy the same regions.

Visual double systems with values of Δm smaller than $0^m.11$ are examined. For these systems dispersion of color indices of the components is smaller than for stars of equal luminosities in open cluster M 67 (old) or NGC 2362 (young). Components of the double systems under consideration correspond to the stars of the main sequence in open cluster NGC 2632 (Praesepe).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ake Wallenquist*, Ann. Uppsala Astr. Obs., 4, № 2, 1954.
2. *В. А. Амбарцумян*, Астрон. ж., 14, 207, 1937.
3. *Е. Ј. Örik*, Publ. Tartu obs., 25, № 6, 1924.
4. *И. В. Васильев, А. Г. Мейер*, Уч. зап. ЛГУ, № 31, серия мат. наук, вып. 3, 1939.
5. Курс астрофизики и звездной астрономии, т. II, 43, ГИФМЛ, М., 1962.
6. *В. Бааде*, Эволюция звезд и галактик, Изд. "Мир", М. 1966, 123.

О ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ И КОЛОРИМЕТРИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЭРУПТИВНЫХ ЗВЕЗД. IV

Р. Е. ГЕРШБЕРГ

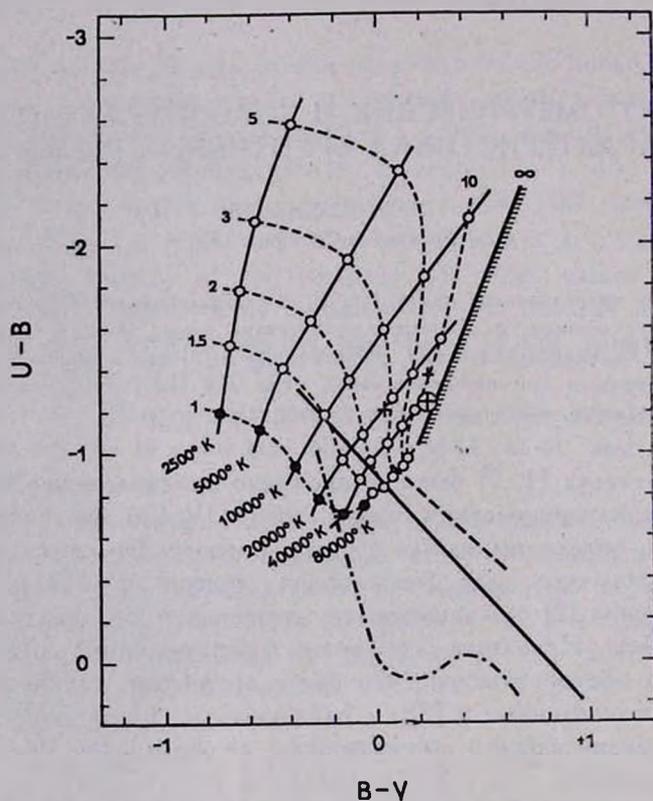
Поступила 25 июня 1966

Оценены теоретические цвета ($U-B$, $B-V$) горячего газа, оптически тонкого в непрерывном спектре и имеющего оптическую толщю порядка нескольких единиц в линиях бальмеровской серии. Вычисленные в [3] цвета дополнительного излучения, возникающего при вспышках звезд типа UV Cet, попадают на двуцветной диаграмме в область, соответствующую такому газу.

1. В статьях [1, 2] было рассмотрено предположение, что колориметрические характеристики звезд типа UV Cet во время вспышки могут быть объяснены как результат совместного свечения холодной звезды и горячего газа (небулярная модель вспышки). В заметке Л. В. Мирзояна [3] высказываются сомнения в справедливости этого предположения. Исходным моментом в рассуждениях Л. В. Мирзояна является то обстоятельство, что цвета оптически тонких газовых образований, вычисленные в [2], и наблюдаемые цвета дополнительного излучения, возникающего при вспышках, не совпадают. Рис. 1 поясняет это утверждение.

На рис. 1 представлена двуцветная диаграмма ($U-B$, $B-V$) из [4], где сделаны небольшие уточнения по сравнению с расчетами [2]. Черными кружками на диаграмме представлены теоретические положения оптически тонких газовых образований при $T_e = 2500 \div 80\,000^\circ\text{K}$ и $n_e > 10^8 \text{ см}^{-3}$; сплошная линия соответствует излучению абсолютно черного тела при различных температурах, пунктир — синхротронному излучению с различными спектральными индексами и штрих-пунктир — звездам главной последовательности. Крестиками на диаграмме отмечены цвета дополнительного излучения во вспышках AD Leo и H II 1306, вычисленные в [3]. Из рассмотрения этой диаграммы формально

следует, что собственное излучение вспышки можно было бы отождествить с излучением горячего газа, если бы ее цвет ($U - V$) был на $0^m.6$ „краснее“ или если бы цвет ($B - V$) был на $1^m.0$ „синее“, чем это дают наблюдения, либо если, скажем, ее цвет ($U - B$) был на $0^m.3$, „краснее“ и одновременно ($B - V$) был на $0^m.5$, „синее“, чем это следует из наблюдений, и так далее. Рассмотрим это несоответствие — основной аргумент критической заметки Л. В. Мирзояна [3] — подробнее.



Фиг. 1. Двухцветная диаграмма источников излучения различного спектрального состава.

2. Случайная ошибка вычисленных цветов вспышки — ошибка, найденная формально по случайным ошибкам фотовольметрических измерений блеска — не превышает $0^m.1$ и не может объяснить указанного расхождения. Но поскольку использованные в [3] наблюдения велись на одноканальном фотометре и быстро меняющийся блеск звезды записывался попеременно в каждой спектральной области, то по суще-

ству речь идет не об одновременных наблюдениях, которые могли бы дать собственные цвета вспышки с точностью, соответствующей точности обычных фотозлектрических наблюдений. Все приведенные в [3] цвета получены с помощью интерполяции, причем по необходимости для двух из трех кривых блеска интерполяцией получен и блеск в момент максимума. Интерполяция кривых блеска проводилась на сравнительно больших временных интервалах и выполнена, естественно, по принципу сохранения подобия всех трех кривых блеска, что в значительной степени соответствует предположению о постоянстве цветов вспышки на разных стадиях ее развития. Однако, имеющиеся наблюдения противоречат такому предположению. В статье [5] приведены изменения собственного цвета ($B - V$) четырех вспышек EV Lac. Эти наблюдения велись с частым переключением фильтров и интерполирование кривых блеска проводилось на сравнительно небольших участках плавной нисходящей ветви вспышек. Согласно [5], вблизи максимума вспышки ее цвет ($B - V$) = $-0^m.2 \div -0^m.3$ и затем быстро „краснеет“ до $+0^m.2$ и даже $+0^m.4$. Наблюдения, аналогичные [5], в области U не проводились, но так как ультрафиолетовое излучение вспышек подвержено наибольшим временным изменениям, то можно ожидать, что цвет ($U - B$) будет меняться в ходе развития вспышки не меньше, чем цвет ($B - V$). Независимо от физических причин этого быстрого изменения цвета вспышек, сам факт такого изменения заставляет критически относиться к цветам, вычисленным в [3] по наблюдениям, в ходе которых смена спектральных областей производилась довольно медленно: цвета вспышки $U - B$ и $B - V$, полученные в разные моменты времени, могут дать на двуцветной диаграмме точку ($U - B$, $B - V$), которая не соответствует цветам вспышки ни в какой момент времени. Следовательно, полученные в [3] результаты нельзя рассматривать как решительный аргумент против небулярной модели вспышек звезд типа UV Cet.

3. Обратимся теперь к другой стороне вопроса — к точности вычисленных теоретических положений горячего газа на двуцветной диаграмме. Разумеется, речь идет не о математической точности вычислений, а о правомерности физических допущений, использованных при вычислениях.

Небулярная модель вспышки является естественной альтернативой модели горячего пятна, модели, ошибочность которой была убедительно показана в [6, 7]. Расчеты [1, 2, 4] выполнены для простейшего случая небулярной модели — для случая, когда горячий газ является оптически тонким во всем диапазоне частот видимой области

спектра. Предположение о малой оптической толще горячего газа не только в континууме, но и в линиях является, естественно, довольно сильным физическим ограничением, и оно было использовано для проведения предварительных расчетов. Ослабим теперь это ограничение и допустим, что оптическая толща в центре бальмеровских линий не мала, а составляет несколько единиц. С точки зрения возможностей высвечивания и охлаждения газа такая модель мало отличается от рассмотренной ранее. Действительно, значительная часть энергии горячего газа высвечивается в спектральной области, охватываемой системой UBV ; далее, согласно [4], большая часть энергии в U , заметная часть энергии в B и около половины энергии в V излучается горячим газом в частотах непрерывного спектра; поскольку при оптической толще в бальмеровских линиях $\tau_{Bal} \sim 1 \div 10$, оптическая толща в континууме $\tau_{cont} \ll 1$, то запасенная газом энергия излучается почти также свободно, как и в рассчитанной ранее модели $\tau_{Bal} \rightarrow 0$. Иными словами, модель с $\tau_{Bal} \sim 1 \div 10$ является вполне приемлемой с точки зрения требований, накладываемых на теоретические схемы характерными временами возгорания и затухания вспышек. Вместе с тем, как было отмечено в [2], с ростом оптической толщи в линиях будет иметь место ощутимое изменение цветов горячего газа.

Точный расчет величин, необходимых для вычисления теоретических цветов горячего газа при $\tau_{Bal} \sim 1 \div 10$, является исключительно трудной задачей, поскольку в нашем случае поле излучения L_c и L_d , степень ионизации вещества и населенности возбужденных уровней атомов являются функциями времени. Однако общий характер изменения цветов ясен: это изменение будет связано с уменьшением доли линий в общем излучении горячего газа. Основной вклад в линейчатую эмиссию горячего газа в областях UBV дают линии H_6 , H_7 , H_8 , и H_9 . Для грубой оценки искомого эффекта можно пренебречь изменениями относительных интенсивностей этих линий (то есть пренебречь температурной зависимостью бальмеровского декремента, различиями эффекта дробления разных бальмеровских квантов при рассеянии, разницей в оптических толщинах для разных линий) и оценить изменения цветов горячего газа в предположении, что с ростом τ_{Bal} все эмиссионные линии, входящие в UBV , ослабляются одинаковым образом. Для таких оценок можно воспользоваться расчетами [4], где приведены порознь цвета линейчатого и непрерывного излучения горячего газа, а также доля этих компонентов в общем излучении газа в областях UBV . На рис. 1 приведены результаты соответствующих вычислений. Правее и выше черных кружков, которые соответствуют цветам горя-

чего газа, оптически тонкого во всех частотах видимого спектра, светлыми кружками нанесены цвета горячего газа, в котором интенсивности эмиссионных линий относительно небулярного континуума уменьшены в 1,5, 2, 3, 5 и 10 раз. (Согласно расчетам [8], в стационарном случае такое ослабление $H\beta$ соответствует оптической толщине в центре линии в несколько единиц). Сплошная линия со штриховкой справа соответствует цветам небулярного континуума и ограничивает область, доступную для цветов рассматриваемой модели. Вычисленные в [3] цвета вспышек оказываются левее этой предельной линии. Таким образом, если даже считать вычисления [3] методически корректными, то учет эффекта ненулевой оптической толщины в линиях снимает возражения, выдвинутые Л. В. Мирзояном против небулярной модели вспышек звезд типа UV Cet.

Что же касается вычисленных в [3] цветов вспышки SS Cyg (на рис. 1 они обозначены крестиком в кружке), то они тоже оказываются в пределах области, соответствующей цветам горячего газа. Это обстоятельство формально снимает возражения Л. В. Мирзояна и в этом случае. Однако следует подчеркнуть, что вспышки звезд типа SS Cyg имеют принципиальные отличия от вспышек звезд типа UV Cet — по спектральным особенностям в максимуме блеска, по длительности и мощности вспышек. Поэтому расчеты небулярной модели, выполненные в применении к вспышкам звезд типа UV Cet, и выводы, полученные из сравнения этих расчетов с наблюдениями, не могут быть автоматически перенесены и на звезды типа SS Cyg. В частности, применимость небулярной модели к звездам этого типа может быть подтверждена или отвергнута лишь в результате детального анализа имеющихся фотометрических, колориметрических и спектральных наблюдений.

4. В заключение необходимо отметить, что предположение об оптической толщине $\tau_{\text{Bal}} \sim 1 \div 10$ горячего газа, возникающего при вспышке звезд типа UV Cet, представляется весьма правдоподобным, так как оно дает естественное объяснение ряду важных наблюдательных фактов. В частности, в рамках этой модели можно понять характерный излом на нисходящей ветви кривой блеска, отмечавшийся многими наблюдателями; обнаруживается возможная причина изменения цвета вспышки по мере ее угасания; можно просто объяснить повышенное излучение в эмиссионных линиях по окончании фотометрической фазы вспышки. Все эти вопросы будут подробно рассмотрены при обсуждении спектрографических наблюдений вспышек AD Leo [9] и UV Cet [10].

Выражаю глубокую благодарность А. А. Боярчуку за полезное обсуждение работы и Э. А. Витриченко за помощь в вычислениях.

Крымская астрофизическая
обсерватория

PHOTOMETRIC AND COLORIMETRIC CHARACTERISTICS OF ERUPTIVE STARS. IV

R. E. GERSHBERG

Theoretical colors ($U-B$, $B-V$) of a hot gaseous body which is optically thin in continuum and which has the optical thickness about several units in Balmer lines are evaluated. On the two-color diagram the colors of the additional radiation which appears during flares of the UV Cet type stars are located in the region corresponding to such a hot gaseous body.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. Е. Гершберг, Изв. КрАО, 32, 133, 1964.
2. Р. Е. Гершберг, Изв. КрАО, 23, 206, 1965.
3. Л. В. Мирзоян, Астрофизика, 2, 121, 1966.
4. Р. Е. Гершберг, Изв. КрАО, 36, 216, 1966.
5. П. Ф. Чурайнов, Изв. КрАО, 23, 215, 1965.
6. В. А. Амбарцумян, Сообщ. Бюр. обс., 13, 1954.
7. В. А. Амбарцумян, Non-stable stars, IAU Symposium № 3, Edited by G. H. Herbig, Cambridge, 1957, 177.
8. А. А. Боярчук, Изв. КрАО, 35, 45, 1966.
9. Р. Е. Гершберг, П. Ф. Чурайнов, Астрон. ж., 43, 1168, 1966.
10. Р. Е. Гершберг, Р. Ф. Чурайнов, Астрон. ж., 44, 1967, (в печати).

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

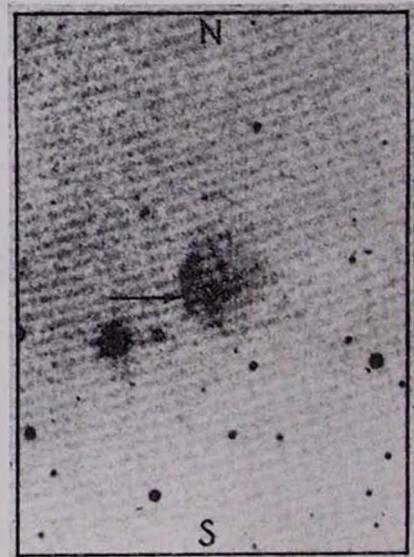
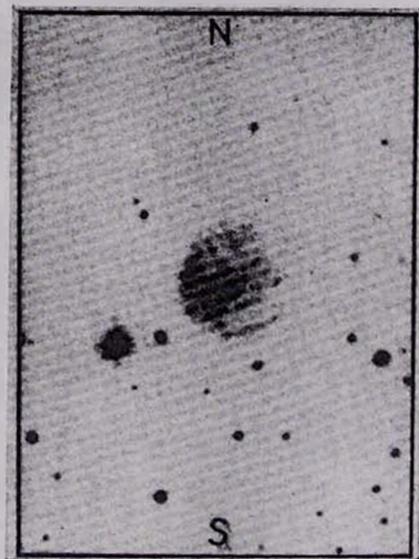
СВЕРХНОВАЯ В NGC 2276

На снимках, полученных С. Г. Искударян в 1962 году с помощью 21" телескопа Шмидта Бюраканской обсерватории, в галактике NGC 2276 нами обнаружен звездообразный объект, который по всей вероятности представляет собой сверхновую. Объект очень хорошо виден на снимках 25-го февраля и 8-го марта 1962 года. На полученных позднее фотографиях этой области (август 1964 и октябрь 1966 года) объект этот совершенно не виден, хотя другие, более слабые по яркости звезды отчетливо видны. На картах Паломарского атласа изображение NGC 2276 довольно передержано, но все же можно утверждать, что найденный объект отсутствует.

Надо сказать, что этот объект был отмечен нами еще в 1962 году и за неимением дополнительных снимков был ошибочно принят за сверхассоциацию наряду с двумя другими сверхассоциациями, обнаруженными в этой галактике.

Галактическая широта NGC 2276 равна $+29^\circ$. Хотя в принципе нельзя совершенно исключить возможность того, что это переменная нашей Галактики, спроектировавшаяся на ветвь NGC 2276, но эта возможность кажется слишком мало вероятной. Поэтому предположение, что это — сверхновая, является единственным естественным допущением.

Снимки от 25-го февраля и 8-го марта получены на пластинках Eastman Kodak OaO. Оба снимка имеют снятые в ту же ночь и совместно проявленные стандартные области сравнения, что дало возможность измерить яркость сверхновой, однако, поскольку сверхновая находится в рукаве, это может вносить в оценки серьезные ошибки.



Галактика NGC 2276. Слева—снимок от 16 августа 1964 г. Справа—снимок от 8 марта 1962 г. Масштаб 1 мм = 8".

оговоркой мы приводим значения, полученные в результате
рных оценок:

25 февраля $m_{pg} = 17.3$,
8 марта $m_{pg} = 16.9$.

NGC 2276 — интересная по структуре сверхгигантская галактика (20"7) со множеством тонких разветвляющихся и пересекающихся ветвей, выходящих как от ядра, так и от многочисленных узлов галактики. Сверхновая находится на одной из этих ветвей на расстоянии 10" к юго-западу от ядра галактики.

По-видимому, именно такая сложная структура галактики NGC 2276 (вила Арпа включить ее в Атлас пекулярных галактик [1] под № 10. Обнаружение сверхновой в ней указывает на то, что усложненная структура Sc галактик не является признаком, уменьшающим частоту сверхновых в них.

A supernova in NGC 2276. The supernova in NGC 2276, shown in Fig. 1, has been found on the plates taken at Byurakan with the 21" Schmidt telescope on February 25 and March 8 1962. The photographic magnitudes estimated visually are: $m_{pg} = 17.3$ (February 25), $m_{pg} = 16.9$ (March 8).

13 декабря 1966

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

С. Г. ИСКУДАРЯН
Р. К. ШАХБАЗЯН

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. H. Arp, Atlas of peculiar galaxies, California Institute of Technology, Pasadena, 1966.

CONTENTS

NUMBER OF SCATTERINGS OF DIFFUSING PHOTONS. III	<i>V. V. Sobolev</i>	5
THE MATRIX EQUATIONS OF THE DIFFUSION OF RADIATION. II	<i>R. I. Kostik</i>	17
TO THE NON-RELATIVISTIC THEORY OF THE ROTATING CONFIGURATIONS	<i>V. V. Papoyan, D. M. Sedrakian, E. V. Chubartan</i>	41
GALAXIES WITH AN ULTRAVIOLET CONTINUUM	<i>B. E. Markartan</i>	55
ON THE MONOCHROMATIC REFLECTION EFFECT IN CLOSE BINARIES	<i>I. B. Pustyl'nick</i>	69
OBSERVATIONS OF THE SUPERNOVA 1959b IN NGC 4921	<i>R. Barbon</i>	85
A NOTE ON THE HYDROGEN DENSITY IN THE CLUSTERS OF GALAXIES	<i>I. D. Karachentsev</i>	89
ON THE POSITION OF GAS-DUST LAYER IN GALAXY M 31	<i>F. N. Makarenko</i>	93
ON THE PHASE DENSITY OF WHITE DWARFS ON THE COLOR-LUMINOSITY DIAGRAM	<i>A. M. Elgenson</i>	103
OBSERVATIONAL SELECTION AND STATISTICS OF THE VISUAL DOUBLE SYSTEMS. II. STATISTICS	<i>B. I. Fessenko</i>	111
PHOTOMETRIC AND COLORIMETRIC CHARACTERISTICS OF ERUPTIVE STARS. IV	<i>R. E. Gershberg</i>	127
NOTES		
A SUPERNOVA IN NGC 2276	<i>S. G. Iskudartan, R. K. Shahbazian</i>	133