

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 1

СЕНТЯБРЬ, 1965

ВЫПУСК 3

МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ С ОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ <i>А. Г. Дорошкевич</i>	255
КОЛЕБАНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ СФЕРЫ . . . . . <i>Г. А. Лупанов</i>	267
К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ОТРАЖЕНИЯ В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДАХ <i>И. Н. Минин</i>	275
ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОЕ ДИФFUЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ОТ БЕСКО- НЕЧНО ГЛУБОКОЙ ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЫ . . . . . <i>А. Г. Никогосян</i>	285
ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ <i>Н. Б. Енгибарян</i>	297
К ВОПРОСУ О НЕСТАЦИОНАРНОСТИ СКОПЛЕНИЯ ГАЛАКТИК В ДЕВЕ <i>И. Д. Караченцев</i>	303
О СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРАХ ИЗЛУЧЕНИЯ НЕПРАВИЛЬНЫХ И ПОЛУПРАВИЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ЗВЕЗД <i>Ф. И. Лукацкая, А. П. Зельцман</i>	313
НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗВЕЗДНЫЕ ОБОЛОЧКИ, СОДЕРЖАЩИЕ ЭЛЕКТРОНЫ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ . . . . . <i>Г. А. Гурзадян</i>	319
СПЕКТРОСКОПИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ $\nu$ 603 Aql (N Aql 1918) <i>Э. Р. Мустель, А. А. Боярчук</i>	337
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ ЯДРА ГАЛАКТИКИ . . . . . <i>В. Г. Малумян</i>	347

Е Р Е В А Н

## Редакционная коллегия

*В. А. Аибарцумян* (главный редактор), *А. А. Боярчук*, *Б. А. Воронцов-Вельяминов*,  
*Г. А. Гурзадян*, *С. А. Каплан*, *Б. Е. Маркарян*,  
*Л. В. Мирзоян* (зам. главного редактора), *В. В. Соболев*

Խ Մ Բ Պ Գ Ե Կ Լ Վ Ն Կ Ո Ր Ե Գ Ի Պ

Ա. Ա. Ռոյաբչուկ, Գ. Ա. Դուրգադյան, Ս. Ա. Կապլան, Վ. Հ. Համբարձումյան (գլխ. խմբագիր),  
Բ. Ե. Մարգարյան, Լ. Վ. Միրզոյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Վ. Յարդև,  
Բ. Ա. Վոռոնցով-Վելյամինով

«АСТРОФИЗИКА» — научный журнал, издаваемый Академией наук Армянской ССР. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой.

Журнал предназначается для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал выходит 4 раза в год, цена одного номера 1 рубль, подписная плата за год 4 рубля. Подписку можно произвести во всех отделениях Союзпечати, а за границей через агентство «Международная книга», Москва, 200.

## МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ С ОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

А. Г. ДОРОШКЕВИЧ

Поступила 12 июня 1965

Рассмотрен ряд точных решений для анизотропных однородных моделей Вселенной с магнитным полем и без него. Изучено поведение решений вблизи особой точки и на поздних стадиях расширения. Особое внимание уделено влиянию магнитного поля на свойства решений.

*Введение.* В последнее время всеобщее внимание привлекает концепция межгалактических магнитных полей. Такие поля рассматриваются в связи с вопросами строения галактик и разнообразием их форм, в связи с теорией космических лучей, квазизвездных объектов и т. д. [1—4]. В работе [5] показано, что с учетом межгалактических магнитных полей можно построить космологическую модель типа нестационарных моделей Фридмана. При этом сохраняется однородность пространства, хотя и имеется анизотропия. Там же выяснены некоторые свойства этих моделей. Отмечено, в частности, что требование однородности приводит к „вмороженности“ магнитного поля независимо от проводимости среды. Вихревое электрическое поле, индуцируемое изменением магнитного поля во времени, отсутствует для сопутствующего наблюдателя.

Ранее рассматривались модели с электромагнитным полем без вещества [6, 7], а также анизотропные однородные космологические модели с веществом, но без поля [8—10]. Учет магнитного поля может существенно менять эти последние лишь вблизи особой точки, то есть при больших плотностях энергии вещества и поля. Однако многие характерные черты анизотропных моделей без магнитного поля сохраняются.

Хойл [11], упоминая о возможности включить магнитное поле в космологическое решение, считал неприятной особенностью реше-

ний тот факт, что плотность энергии магнитного поля  $w$  меняется как  $S^{-4}$ , а плотность энергии вещества  $\varepsilon$  как  $S^{-3}$ , где  $S$  — линейный масштаб, и в прошлом, при  $S \rightarrow 0$ , магнитная энергия была больше энергии покоя вещества  $\varepsilon/w \sim S \rightarrow 0$ . На самом деле, для всех космологических решений с магнитным полем отношение  $w/\varepsilon$  остается конечным и вблизи особой точки ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ ). В случаях, когда модель без магнитного поля могла бы привести к нарушению этого свойства, учет магнитного поля соответствующим образом меняет это решение.

В настоящей работе приведены точные решения для анизотропных однородных моделей с магнитным полем и без него. Дан краткий анализ их свойств. Рассматриваются решения для уравнения состояния  $p = 0$ , а также поведение решений вблизи особой точки для уравнений состояния  $p = \varepsilon/3$  и  $p = \varepsilon$ . Особое внимание уделено влиянию магнитного поля на свойства решений.

1. *Общие свойства анизотропных моделей с магнитным полем.* Как и в анизотропных решениях без магнитного поля, удобно записать интервал в виде [9, 12, 13]

$$ds^2 = dt^2 - b^2(t) [dr^2 + f^2(r) d\varphi^2] - a^2(t) dz^2, \quad (1)$$

$$\text{причем } f(r) = \begin{cases} \sin r \\ r \\ \text{sh } r \end{cases}.$$

Скорость света  $c = 1$ .

Система координат (1) является синхронной, а поскольку  $R_0^0 \equiv 0$ , то она же является и сопутствующей.

Электромагнитное поле задается тензором  $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ .

В соответствии с требованием однородности, из уравнения Максвелла

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} F^{ik}) = 0 \quad (2)$$

получаем:  $A_0 = A_1 = 0$ ;  $A_2 = A_2(r)$ ;  $A_3 = A_3(t)$ ; ( $x^0 = t$ ;  $x^1 = r$ ;  $x^2 = \varphi$ ;  $x^3 = z$ ). Магнитное поле задается компонентой  $F_{12} = F_0 f(r)$ , электрическое поле задается компонентой  $F_{03} = F_1 \frac{a}{b^2}$ . Это соответствует

электрическому и магнитному полям, направленным по оси  $z$ :

$E_z = \frac{F_1}{b^2}$ ;  $B_z = \frac{F_0}{b^2}$ . В сопутствующей системе координат определенное

таким образом электрическое поле не индуцирует магнитного поля, а магнитное поле — электрического, так что однородность сохраняется (все точки пространства равноправны).

Для плотности энергии поля получаем

$$\omega = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = \frac{\Phi_0}{b^4}. \quad (3)$$

Без учета вещества эта задача рассмотрена в работах [6, 7, 14]. Метагалактическое однородное электрическое поле должно привести к появлению электрического тока — упорядоченного движения заряженных частиц, энергия которых может увеличиваться с течением времени, и к нагреву вещества. В настоящее время нет оснований предполагать наличие электрического поля. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить только о магнитном поле. Если тензор энергии-импульса вещества без магнитного поля определить обычным образом  $T_{ik} = (\varepsilon + p)u_i u_k + p g_{ik}$ , то уравнения Эйнштейна приводят к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} 2\kappa\omega &= \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\delta}{b^2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\ddot{a}}{a} \\ 2\kappa\varepsilon &= -\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\delta}{b^2} + 5\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{a}}{a} \\ 2\kappa p &= -3\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{\delta}{b^2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\ddot{a}}{a} \\ \kappa(\varepsilon + \omega) &= \frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\delta}{b^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\kappa = 8\pi G$  — гравитационная постоянная Эйнштейна,  $\delta = 1$  для  $f(r) = \sin r$ ;  $\delta = 0$  для  $f(r) = r$ ;  $\delta = 1$  для  $f(r) = \text{sh } r$ . Постоянная Хаббла теперь зависит от направления. По оси постоянная Хаббла  $\alpha = \frac{\dot{a}}{a}$ , в плоскости  $(r\varphi)$  постоянная Хаббла  $B = \frac{\dot{b}}{b}$ .

Кривизна пространства, как и в случае изотропных моделей Фридмана, зависит от соотношения между суммой плотности энергии вещества и магнитного поля и постоянными Хаббла. Критическая плотность энергии, соответствующая квазиэвклидовой метрике ( $\delta = 0$ ), определяется соотношением

$$\kappa(\varepsilon + \omega)_c = \beta^2 + 2\alpha\beta. \quad (5)$$

Если  $(\varepsilon + \omega) > (\varepsilon + \omega)_c$ , то  $\delta = 1$  и получаем модель с положительной кривизной в плоскости  $(r\varphi)$ , пространство в плоскости  $(r\varphi)$  замкнутое, подобно закрытой модели Фридмана. Если же  $(\varepsilon + \omega) <$

$\langle (\varepsilon + w)_c$ , то  $\delta = -1$  и получаем открытую модель с отрицательной кривизной. Однако следует подчеркнуть, что даже замкнутая модель ( $\delta = 1$ ) обладает бесконечным объемом и бесконечным числом частиц, так как она не замкнута по оси  $z$ . Этим она существенно отличается от замкнутой модели Фридмана.

Уравнения движения дают для плотности сохраняющихся частиц (барионный заряд)

$$nab^3 = \text{const.} \quad (6)$$

В соответствии с законами термодинамики, это соответствует условию

$$\ln ab^3 + \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = \text{const.} \quad (6^*)$$

Кроме того, мы имеем соотношение для плотности магнитной энергии

$$w = \frac{\Phi_0}{b^4}. \quad (3)$$

Предполагая сохранение числа частиц (6), с помощью уравнений (4) можно получить  $w = \frac{\Phi_0}{b^4}$ , то есть „вмороженность“ магнитного поля\*.

Система уравнений (3) и (4) совместно с уравнением состояния  $p = p(n)$ ;  $\varepsilon = \varepsilon(n)$ , или  $p = p(\varepsilon)$ , достаточна для полного решения задачи. Вместо одного из уравнений (4) можно использовать (6).

Можно показать, что плотность энергии вещества ( $\varepsilon$ ) может иметь минимум, но не может иметь максимума при конечных  $\varepsilon$  [10, 15]. Ситуация вполне аналогична изотропным моделям Фридмана.

С помощью уравнений (4) и (6\*) можно получить

$$\varepsilon = (p + \varepsilon) \left[ \frac{z}{2} (\varepsilon + 3p + 2w) + \alpha^2 + 2\beta^2 \right] > 0 \quad (7)$$

при  $\varepsilon > 0$ ,  $p > 0$  и  $w > 0$ . Таким образом, при любом уравнении состояния решения содержат особую точку ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ ).

## II. Уравнение состояния $p = 0$ .

1. *Квазиэвклидова модель без поля.* Простейшей является квазиэвклидова модель без магнитного поля с уравнением состояния  $p = 0$  [8]. Время отсчитываем от момента  $b = 0$ , хотя бы он реально и не достигался.

$$b = b_0 t^{2/3}; \quad a = a_0 \frac{t - t_0}{t^{2/3}}; \quad z = \frac{4}{3} \frac{1}{t(t - t_0)}. \quad (8)$$

\* С помощью (4) и (6\*) можно показать, что  $\frac{w}{\varepsilon} = -4\beta$ .

Постоянные  $a_0$  и  $b_0$  — произвольны, постоянная  $t_0$  может быть связана с постоянными Хаббла  $\alpha$  и  $\beta$  в некоторый момент  $t = t_1$

$$t_0 = \frac{2}{3\beta} \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0 + 1/2}, \quad \text{где } \omega_0 = \alpha/\beta.$$

При  $t \gg |t_0|$  решение изотропизуется и переходит в обычное квазиэвклидово решение Фридмана.

Вблизи особой точки ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ ) поведение решения (8) зависит от соотношения между постоянными Хаббла в плоскости ( $\beta$ ) и по оси ( $\alpha$ ).

1а) Если постоянная Хаббла по оси больше, чем постоянная Хаббла в плоскости,  $\alpha > \beta$ ,  $\omega_0 > 1$ ,  $t_0 > 0$ , то расширение начинается при  $t = t_0$  в плоскости и по оси. При  $t = t_0$   $a = 0$ ,  $b = b_0 t_0^2 > 0$  (рис. 1а).

1б) Если постоянная Хаббла по оси меньше, чем постоянная Хаббла в плоскости,  $\alpha < \beta$ ,  $\omega_0 < 1$ ,  $t_0 < 0$ , то на начальной стадии, при  $0 < t < -t_0/2$ , расширение в плоскости сопровождается сжатием по оси ( $\alpha < 0$ ). Постоянная Хаббла по оси отрицательна и для сверхдалеких объектов наблюдается синее смещение. При  $t = -t_0/2$   $a$  до-

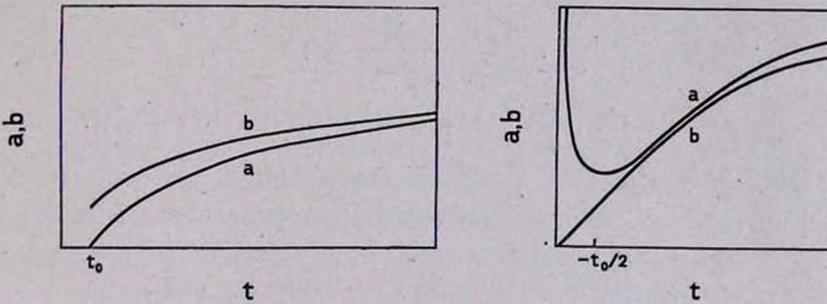


Рис. 1а, б.

стигает минимума и при  $t > -t_0/2$  расширение в плоскости сопровождается расширением и по оси (рис. 1б).

1в) Наконец, если постоянные Хаббла в плоскости и по оси равны,  $\alpha = \beta$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $t_0 = 0$ , то получаем обычную квазиэвклидову модель Фридмана.

Как будет показано ниже, подобные свойства модели вблизи особой точки характерны для любых уравнений состояния.

2. *Квазиэвклидова модель с магнитным полем.* С учетом магнитного поля решение может быть записано в виде  $(x(\varepsilon + \omega) = \beta^2 + 2\alpha\beta)$ :

$$b = b_0 x; \quad \pm (t - t_0) = \frac{2}{3} \frac{b_0^2}{V_{x\Phi_0}} (2 + x) \sqrt{x - 1};$$

$$a = a_1 \left[ x + 4 - \frac{8}{x} + a_2 \frac{\sqrt{x - 1}}{x} \right]; \quad (9)$$

$$\varepsilon = \frac{3a_1 \Phi_0}{b_0^2} \cdot \frac{1}{ab^2}; \quad \omega = \frac{\Phi_0}{b^4}; \quad 1 < x_0 \leq x < \infty.$$

$x_0$  определяется условием  $a(x_0) = 0$ . Постоянные  $a_2$  и  $\frac{\Phi_0}{b_0^4}$  можно связать с постоянными Хаббла  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\omega_0 = \frac{\alpha}{\beta}$  и  $\omega_1 = \frac{\omega}{\varepsilon}$  в некоторый момент  $t = t_1$ :

$$x_1 = 2 \frac{1 + \omega_0}{1 + 2\omega_0} + \frac{\omega_1^{-1}}{1 + 2\omega_0};$$

$$x \frac{\Phi_0}{b_0^4} = \frac{x_1^4}{x_1 - 1} \beta^2; \quad (10)$$

$$a_2 = 2\omega_1 \sqrt{x_1 - 1} [(1 - \omega_0) x_1^4 - 4x_1\omega_0 + 8(1 + \omega_0)].$$

Постоянные  $t_0$ ,  $b_0$  и  $a_1$  произвольны. При  $t \rightarrow \infty$  ( $x \gg 1$ ) решение также переходит в квазиэвклидово решение Фридмана  $b = b_0 t^{2/3}$ ,  $a = a_1 t^{2/3}$ . Плотность магнитной энергии  $\omega$  убывает быстрее, чем плотность энергии вещества  $\varepsilon$ , и магнитное поле не влияет на динамику расширения.

Вблизи особой точки  $\varepsilon \rightarrow \infty$  поведение решения может отличаться от поведения решения без поля. Возможны также два случая:

2а) При  $t > t_2$  в плоскости и по оси происходит монотонное расширение (рис. 2а). Случай вполне подобен случаю (1а) решения (8) без магнитного поля; магнитное поле „вписывается“ в решение, не меняя качественно его характера.

2б) В момент  $t = t_2$  начинается расширение в плоскости и по оси. Однако расширение по оси протекает немонотонно, и в момент  $t = t_3$  сменяется сжатием по оси. В момент  $t = t_4$  сжатие по оси вновь сменяется расширением ( $t_2 < t_3 < t_4$ ). В области  $t > t_3$  решение подобно случаю (1б) решения (8). Однако вблизи особой точки учет магнитного поля существенно меняет вид решения (рис. 2б). Отно-

шение  $\frac{\omega}{\varepsilon} = \omega_1$  проходит через максимум и стремится к нулю как при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , так и при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

3. Коротко рассмотрим решения с положительной и отрицательной кривизной в плоскости  $(r\varphi)$  (приложение 1). Для моделей без магнитного поля такие решения получены в работах [9, 10].

Вблизи особой точки ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ ) кривизна не влияет на свойства решений и анализ, проведенный в пунктах 1 и 2, полностью применим. В открытой модели ( $\chi(\varepsilon + \omega) < \frac{2}{3} + 2\alpha\beta$ ) при  $t \rightarrow \infty$  плотность магнитной энергии  $\omega$  убывает быстрее, чем плотность энергии вещества  $\varepsilon$  и динамика расширения не зависит от магнитного поля.

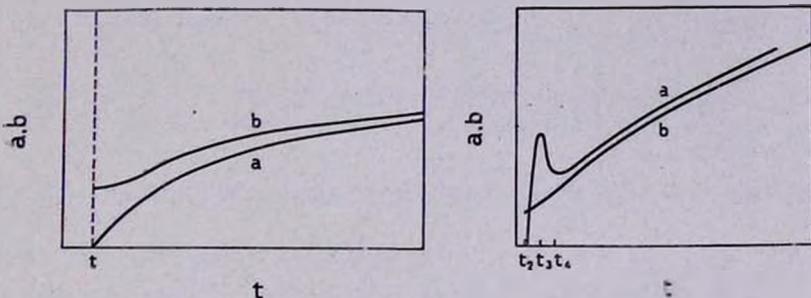


Рис. 2а, б.

Однако следует подчеркнуть, что открытая модель, в отличие от квазиэвклидовой, не изотропизуется и асимптотически ( $t \rightarrow \infty$ ) не выходит на открытую модель Фридмана. Расширение остается анизотропным. Приведем асимптотическое решение:

$$\begin{aligned}
 b &= b_0 e^{\frac{t}{t_0}}; & \pm(t - t_0) &\simeq b_0 e^{\frac{t}{t_0}}; & a &= a_2 \frac{t}{t_0}; & \chi\varepsilon &= \frac{2a_2}{ab^2}; \\
 \omega &= \frac{\Phi_0}{b^4}; & \varepsilon &\gg 1; & \beta &\simeq \frac{1}{t}; & a &\simeq \frac{1}{t \ln \frac{t}{b_0}}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

В рассматриваемых анизотропных моделях как с магнитным полем, так и без него сильное отклонение плотности от критической должно приводить к заметной анизотропии в красном смещении и яркости указанных объектов.

III. *Свойства модели вблизи особой точки. Уравнения состояния*  $p = \varepsilon/3$  и  $p = \varepsilon$ . Вблизи особой точки ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ ) уравнение состояния  $p = 0$  заведомо неверно. Следует пользоваться ультрарелятивистским уравнением состояния  $p = \varepsilon/3$  или уравнением состояния

$p = \epsilon$ , описывающим барионное отталкивание [16]. Асимптотические свойства анизотропных решений вблизи особой точки проанализированы в работах [17, 18]. Рассмотрим некоторые точные решения.

1. Для квазиэвклидовой модели без магнитного поля с уравнением состояния  $p = \epsilon/3$  возможны два решения\* (см. также [9]):

$$b = b_0 \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1}; \quad a = \frac{\bar{a}_0}{\eta(\eta^2 - 1)}; \quad x\epsilon = \frac{3(\eta^2 - 1)^4}{f_0^2 \eta^4} \quad (12a)$$

$$\pm (t - t_0) = \frac{f_0}{4} \left[ \eta \frac{1 + \eta^2}{(\eta^2 - 1)^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} \right] \quad 1 \leq \eta < \infty$$

$$b = b_0 \frac{\eta^2}{1 - \eta^2}; \quad a = \frac{a_0}{\eta(1 - \eta^2)}; \quad x\epsilon = \frac{3(1 - \eta^2)^4}{f_0^2 \eta^4}; \quad (12b)$$

$$\pm (t - t_0) = \frac{f_0}{4} \left[ \eta \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right] \quad 0 \leq \eta < 1$$

Кроме того, при  $a = b$  получаем решение Фридмана

$$a = a_0 t^{1/3}; \quad b = b_0 t^{1/3}; \quad x\epsilon = \frac{3}{4t^2}. \quad (12в)$$

При  $t \rightarrow \infty$  решения (12a) и (12б) изотропизируются и переходят в решение Фридмана (12в).

Однако вблизи особой точки решения ведут себя различно:

$$b = b_0(1 + \tau^{1/2}); \quad a = a_0 \tau \left(1 - \frac{4}{5} \tau^{1/2}\right); \quad x\epsilon = \frac{3}{f_0^2} \tau^{-1/2} \quad (13a)$$

$$b = b_0 \tau^{1/2}; \quad a = a_0 \tau^{-1/2}; \quad x\epsilon = \frac{3}{f_0^2} \tau^{-1/2}, \quad (13б)$$

где  $\tau = \frac{3}{2f_0} (t - t_0)$ .

Асимптотика решений совпадает с рассмотренной в работе [17]. Различие между решениями состоит в том, что для решения (12a)  $\alpha > \beta$ , постоянная Хаббла по оси больше постоянной Хаббла в плоскости, тогда как для решения (12б)  $\alpha < \beta$ . Решение (12a) вблизи особой точки ведет себя подобно решению (3 - 1a), а решение (12б), подобно решению (3 - 1б).

\* Две части одного и того же решения уравнений (4).

Можно показать, что учет кривизны пространства не меняет асимптотики решений при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Влияние магнитного поля на это решение вполне подобно рассмотренному выше случаю квазиэвклидовой модели с уравнением состояния  $p=0$ . Точного решения получить не удастся, однако вблизи особой точки решение совпадает с решением (13а) при любом соотношении между  $\alpha$  и  $\beta$ . Плотность энергии магнитного поля  $w$  остается конечной при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Следует подчеркнуть, что хотя метрика (13а) в пределе стремится к галилеевой\* [9, 17], четырехмерное пространство-время отнюдь не становится плоским [9]. В самом деле, из-за наличия вещества разложение  $a$  и  $b$  в ряд идет по дробным степеням  $t$ . Поэтому скаляр  $K = R_{iklm} R^{iklm} \sim \tau^{-1/2} \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

2. Рассмотрим модель с уравнением состояния  $p = \varepsilon$ . Для квазиэвклидовой модели без магнитного поля получаем простое решение:

$$b = b_0 t^\lambda; \quad a = a_0 t^{1-2\lambda}; \quad xz = 3\lambda \left( \frac{2}{3} - \lambda \right) t^{-2}; \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{2}{3}. \quad (14)$$

Время  $t$  отсчитывается от момента  $b = 0$ . При  $\lambda = 1/3$  получаем обычную квазиэвклидову модель Фридмана. Поскольку это уравнение состояния применимо лишь при больших плотностях, то мы не будем выписывать точных решений для моделей с положительной и отрицательной кривизной, так как вблизи особой точки они совпадают с (14). Посмотрим, как влияет магнитное поле на это решение.

3. Для квазиэвклидовой модели получаем

$$b = b_0 \frac{\sigma - \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \left( \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right)^{\frac{\sigma}{2}}; \quad a = a_0 \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\sigma - \eta};$$

$$\pm (t - t_0) = \frac{a_0^2}{\sqrt{2}\Phi_0} \sqrt{\sigma^2 - 1} \int \frac{\sigma - \eta}{(1 - \eta^2)^{3/2}} \left( \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right)^\sigma d\eta; \quad (15)$$

$$w = \frac{\Phi_0}{b^4}; \quad \varepsilon = \frac{\Phi_0}{b_0^4} \frac{1 - \eta^2}{(\sigma - \eta)^2} \left( \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right)^{2\sigma}$$

$$-1 \leq \eta \leq 1, \quad 1 \leq \sigma < \infty.$$

\* Если  $b = b_0$ ,  $a = a_0 t$ , то преобразование  $\xi = t \operatorname{sh} z$ ,  $\tau = t \operatorname{ch} z$  переводит метрику в галилееву [17].

Вблизи особой точки  $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$b = b_0 t^q; \quad a = a_0 t^{1-2q}; \quad \varepsilon \sim t^{-2}; \quad w \sim t^{-1q} \\ 0 < q \leq 1/2, \quad q = \frac{\sigma - 1}{2\sigma - 1}. \quad (16)$$

Асимптотика решения (15) совпадает с решением (14) при  $0 \leq \lambda < 1/2$ . Таким образом, магнитное поле „вписывается“ в решение (14) при  $0 \leq \lambda < 1/2$  и „устраняет“ решения, связанные со сжатием по оси вблизи особой точки. Влияние магнитного поля сказывается даже на таком предельно жестком уравнении состояния.

**Выводы:** 1. Концепция межгалактического однородного электрического и магнитного полей совместима с однородными анизотропными космологическими моделями, подобными моделям Фридмана.

2. Рассмотренные модели приводят к альтернативе, допускающей экспериментальную проверку: или плотность энергии в метагалактике близка к критической, или должна наблюдаться заметная анизотропия в красном смещении и яркости удаленных объектов.

3. Магнитное поле может сильно влиять на динамику расширения на начальных стадиях (вблизи особой точки) при любых уравнениях состояния. Отношение плотности магнитной энергии к плотности энергии вещества всегда конечно. На поздней стадии расширения ( $w \ll \varepsilon$ ) магнитное поле не влияет на расширение. Условие вмороженности поля не связано с проводимостью вещества и выполняется на всех стадиях расширения.

Пользуюсь случаем поблагодарить Я. Б. Зельдовича за постоянное внимание и интерес к работе.

Математический институт  
им. В. А. Стеклова АН СССР

### Приложение I.

Рассмотрим метрику с отрицательной кривизной в плоскости с учетом магнитного поля ( $\varepsilon + w < \beta^2 + 2\alpha\beta$ ):

$$b = b_0 (\text{ch } \omega \text{ ch } \xi + \gamma); \quad \pm (t - t_0) = b_0 (\text{ch } \omega \text{ sh } \xi + \gamma \xi); \\ a = a_1 \frac{\text{sh } \xi}{\text{ch } \omega \text{ ch } \xi + \gamma} + a_2 \frac{\xi \text{ ch}^2 \omega \text{ sh } \xi - (1 + \text{ch}^2 \omega) \text{ ch } \xi - 2\gamma \text{ ch } \omega}{\text{ch } \omega \text{ ch } \xi + \gamma} \quad (1. 1)$$

$$x_E = 2 \text{ch } \omega \frac{a_2}{ab^2}; \quad w = \frac{\Phi_0}{b^4}; \quad \gamma = \pm 1; \quad \text{sh } \omega = \sqrt{\frac{x \Phi_0}{b_0^2}}; \quad \xi_0 \leq \xi < \infty.$$

$\xi_0$  определяется условием  $a(\xi_0) = 0$ . Постоянные  $b_0, a_1/a_2$  и  $\text{ch } \omega$  могут быть связаны с постоянными Хаббла  $\alpha$  и  $\beta$  и плотностью энергии вещества  $\varepsilon$  и магнитного поля  $\omega$  в некоторый момент времени  $t = t_1$ . Обозначив

$$\omega_0 = \alpha/\beta, \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{\varepsilon(\varepsilon + \omega)}{\beta^2 + 2\alpha\beta} \ll 1,$$

получим

$$\text{th } \xi_1 = 2 \frac{\sqrt{(1 + 2\omega_0)(1 - \omega_2)}}{1 + \frac{1 + 2\omega_0}{1 + \omega_1}(1 + \omega_1 + \omega_2)};$$

$$h_0 = \frac{\gamma}{2\beta} \frac{(1 + 2\omega_0) \left(1 - \frac{1 + 2\omega_1}{1 - \omega_1} \omega_2\right) - 1}{(1 + 2\omega_0)^{1/2} (1 - \omega_2)^{1/2}} \quad (\text{I. 2})$$

$$\text{th}^2 \omega = \frac{4\omega_1\omega_2(1 - \omega_2)(1 + 2\omega_0)}{4\omega_1\omega_2 + (1 + \omega_1)(1 + 2\omega_0) \left[ \frac{2\omega_0}{1 + 2\omega_0} - \frac{\omega_2}{1 + \omega_1} \right]^2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \text{ch}^2 \omega \left\{ \frac{2}{\omega_2} \sqrt{(1 + 2\omega_0)(1 - \omega_2)} (1 + \omega_1 - \omega_1\omega_2) - \text{th}^2 \omega \text{c th } \xi_1 - \xi_1 \right\}.$$

Постоянные  $t_0$  и  $a_2$  — произвольны;  $t_0$  определяет начало отсчета времени. Поведение решения вблизи особой точки подобно рассмотренному в п. 3. Если положить  $\text{sh } \omega = 0, \omega_1 = 0$ , то формулы (I. 1) и (I. 2) описывают модель без магнитного поля [9, 10]. Поведение решения вблизи особой точки также подобно рассмотренному в п. 3.

Метрику с положительной кривизной в плоскости  $(r\varphi)$  с учетом магнитного поля также можно получить из (I. 1) при  $\gamma = -1$  заменой

$$b_0 = ib_0^*; \quad a_1 = ia_1^*; \quad a_2 = a_2^*; \quad \text{sh } \omega = \sin \omega^*; \quad \text{ch } \omega = \cos \omega^*; \quad \Phi_0 = -\Phi_0^*;$$

$$b_1 = -ib^*; \quad a = a^*; \quad \varepsilon = -\varepsilon^*; \quad \omega = -\omega^*; \quad \xi = i\xi^*. \quad (\text{I. 3})$$

Причем  $0 < \xi_1^* \leq \xi^* \leq \xi_2^* < 2\pi$ ;  $\xi_1^*$  и  $\xi_2^*$  определяются условием  $a^*(\xi^*) = 0$ . Модель без магнитного поля получается при  $\sin \omega^* = 0$  [9, 10].

Поведение решений в окрестностях особых точек также подобно ранее рассмотренному в п. 3.

# A WORLD MODEL WITH THE HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

A. G. DOROSHKOVICH

Some exact solutions for the anisotrope and homogeneous world model with a magnetic field and without it are considered. The behaviour of the solutions near the singularity point and in the late stages of the expansion has been studied. Special attention has been paid to the influence of the magnetic field on the properties of the solutions.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Piddington, M. N., 128, 345, 1964.
2. Т. А. Лозинская, Н. С. Кардашев, Астрон. ж., 40, 209, 1963. Н. С. Кардашев, Астрон. ж, 41, 807, 1964.
3. D. W. Sciama, M. N., 123, 317, 1962.
4. С. Б. Пикельнер, Астрон. ж., 42, 3, 1965.
5. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 48, 986, 1965.
6. G. Rozen, Phys. Rev., 136, 279 B, 1964.
7. D. R. Brillie, Phys. Rev., 133, 845 B, 1964.
8. O. Heckmann, E. Schücking, XI Conseil Solvay, Bruxelles, 1958.
9. А. С. Компанец, А. С. Чернов, ЖЭТФ, 47, 1939, 1964.
10. С. А. Холин, Астрон. ж., (в печати).
11. F. Hoyle, XI Conseil Solvay, Bruxelles, 1958.
12. Я. Б. Зельдович, Астрон. ж., 41, 873, 1964.
13. И. Д. Новиков, Астрон. ж, 38, 564, 1961.
14. И. Д. Новиков, Сообщения ГАИШ, № 120, 42, 1962.
15. А. Л. Зельманов, Труды VI Совещания по вопросам космогонии, АН СССР, М., 1959, 144.
16. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 41, 1609, 1961.
17. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН, 80, 391, 1963.
18. И. М. Халатников, ЖЭТФ, 48, 261, 1965.

## КОЛЕБАНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ СФЕРЫ

Г. А. ЛУПАНОВ

Поступила 10 апреля 1965

Исправлена 12 июня 1965

Указан более простой в сравнении с работой Чандрасекара [2] вывод уравнений пульсаций сферически-симметричных конфигураций в общей теории относительности. В качестве иллюстрации решения данного уравнения рассмотрена сингулярная ( $\rho \sim 1/r^2$ ) сфера. Найдены частоты ее колебаний и условия неустойчивости.

1. *Уравнения сферически-симметричных колебаний в общей теории относительности.* Проведенное в последние годы исследование радиоисточников ЗС 48, ЗС 273 и ряда других показало, что они являются космическими объектами совершенно нового типа. Обладая светимостью, примерно на два порядка превышающей светимость обычной крупной галактики, они вместе с тем имеют в миллион раз меньшие размеры. Для объяснения этого явления Хойл и Фаулер [1] предложили гипотезу, согласно которой данные объекты находятся в состоянии коллапса, а выделяющаяся при этом гравитационная энергия служит источником их светимости. Для этого их масса должна быть порядка  $10^9 \div 10^8 M_{\odot}$ . В связи с этой гипотезой представляется интересным исследование устойчивости столь массивных звезд в рамках общей теории относительности.

Устойчивость равновесных состояний какой-либо системы, как известно, может быть исследована с помощью уравнений малых колебаний вблизи данного равновесного состояния. Подобные уравнения сферически-симметричных колебаний сферически-симметричных конфигураций были получены Чандрасекаром [2] и независимо с приложением к политропным шарам в [3].

Чандрасекар при выводе уравнения пульсаций наряду с уравнениями гравитационного поля использовал как дополнительное ус-

ловие требование сохранения числа барионов. Следует заметить, что наложение этого условия не является обязательным. Действительно, в уравнения гравитации из величин, характеризующих саму среду, входят только давление  $p$  и плотность энергии  $\varepsilon$ ; коэффициент  $\Gamma_1$  [4] (именно при введении этого коэффициента Чандрасекару и понадобилось дополнительное условие) — отношение теплоемкостей, записанный в форме

$$\Gamma_1 = \frac{dp}{d\varepsilon} \cdot \frac{p + \varepsilon}{p} \quad (1)$$

также есть функция только  $p$ ,  $\varepsilon$  и их дифференциалов. Поэтому достаточно лишь к возмущенным уравнениям Эйнштейна для случая сферически-симметричного распределения материи (см. [2]) добавить дифференциалы  $p$  и  $\varepsilon$  (также полученные из уравнений Эйнштейна), проделать соответствующие преобразования, как мы получим для пульсаций сферически-симметричных конфигураций уравнение

$$\begin{aligned} \sigma^2 l^{\lambda-1} (p + \varepsilon) \xi = & \frac{4}{r} \frac{dp}{dr} \xi - l^{-\frac{(\lambda+2)}{2}} \frac{d}{dr} \left[ l^{\frac{3\nu+\lambda}{2}} \frac{\Gamma_1 p}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 l^{-\nu/2} \xi) \right] + \\ & + \frac{8\pi G}{c^4} l^\lambda p (p + \varepsilon) \xi - \frac{1}{p + \varepsilon} \left( \frac{dp}{dr} \right)^2 \xi, \end{aligned} \quad (2)$$

полностью совпадающее с соответствующим уравнением Чандрасекара. Здесь  $\xi$  — лагранжево смещение, введенное с помощью равенств  $\frac{\partial \xi}{\partial x^0} = v$ ,  $v = \frac{dr}{dx^0}$ ;  $G$  — гравитационная постоянная,  $l'$  и  $l''$  соответствуют метрике пространства-времени в форме

$$ds^2 = l'^{(r)} dx^{c^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - l''^{(r)} dr^2. \quad (3)$$

Таким образом, введение дополнительной переменной  $N(\varepsilon, p)$  — числа барионов на единицу объема — по существу не оправдано, а уравнение сохранения числа барионов вовсе не обязательно при выводе уравнений малых колебаний.

Введем в (2) относительное смещение

$$\eta = \frac{\xi l^{-\nu/2}}{r} \quad (4)$$

Это приводит к уравнению

$$\begin{aligned} - l^{\lambda-1} \frac{p + \varepsilon}{\Gamma_1 p} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^{c^2}} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{d\eta}{dr} \left[ \frac{4}{r} + \frac{\Gamma_1'}{\Gamma_1} + \frac{p'}{p} + \frac{3\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right] + \\ + \eta \left[ \frac{3}{r} \frac{\Gamma_1'}{\Gamma_1} + \frac{3}{r} \frac{p'}{p} + \frac{9}{2} \frac{\nu'}{r} + \frac{3}{2} \frac{\lambda'}{r} + \frac{p + \varepsilon}{\Gamma_1 p} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{l^\lambda - 1}{r^2} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

при помощи которого удобнее исследовать колебания сингулярной сферы.

2. *Колебания сингулярной сферы.* Будем называть сингулярной сферой решение уравнений общей теории относительности, описывающее сферически-симметричное распределение материи и имеющее особенность в центре при  $r = 0$ . Выбор такого решения как иллюстрации применения уравнения пульсаций обусловлен следующим. Как известно, решение уравнений гравитации даже в случае сферической симметрии и статики — задача довольно трудная. Решений в аналитическом виде насчитывается не более десятка [5]. Но даже среди них одни слишком громоздки и следовательно неудобны в математическом отношении, другие с трудом поддаются физической интерпретации. Наиболее удовлетворительными представляются неоднократно рассматривавшееся решение  $\varepsilon = \text{const}$  и решение с особенностью типа  $\sim 1/r^2$ , которое мы и называем сингулярной сферой. Данное решение получено Толменом [6]; после ряда преобразований оно может быть записано в виде

$$t^2 = 2 - n^2 \quad (6a)$$

$$l^2 = \frac{(1+n)^4}{(2-n^2)16n^2} x^{2-2n} \left[ 1 - \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^2 x^{2n} \right]^2 \quad (6b),$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1-n^2}{2-n^2} \cdot \frac{1}{x^2} \quad (6c)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} p = \frac{1}{R^2} \frac{(1-n)^2}{2-n^2} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{1-x^{2n}}{1-x^{2n} \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^2}, \quad (6d)$$

где  $x = r/R$  и  $R$  — радиус конфигурации.

Несмотря на наличие особой точки  $r = 0$ , где давление и плотность энергии обращаются в бесконечность, решение (6) приемлемо физически, поскольку оно дает конечную массу. Большое удобство (6) состоит в том, что оно позволяет изменением одного лишь параметра  $n$  переходить от нерелятивистских конфигураций к релятивистским. Рассмотрим, как меняется отношение центрального давления к центральной плотности при изменении  $n$  от единицы до нуля (при  $n < 0$  и  $n > 1$  (6) не имеет физического смысла). При  $n \rightarrow 1$  имеем  $p/\varepsilon \approx \frac{1-n}{2} \rightarrow 0$ , что соответствует нерелятивистскому приближению, при этом (6) переходит в соответствующее ( $p \sim 1/r^2$ ) решение Ньютоновских уравнений. При  $n = 1/2$  получаем  $p/\varepsilon = 1/3$ , что соответствует релятивистскому вырожденному (или фотонному) газу. Заметим,

что случай  $n = 1/2$  интерпретирован Толменом. До недавнего времени считалось, что релятивизм в качестве предельного уравнения состояния вещества допускает  $\rho = 2/3$ , однако Я. Б. Зельдовичем было показано [7], что имеют физический смысл и такие уравнения состояния, как например  $\rho \cong 2$ . Легко видеть, что сингулярная сфера при  $n \rightarrow 0$  соответствует  $\rho_c \sim 2$ .

Перейдем теперь непосредственно к изучению колебаний сингулярной сферы. Уравнение колебаний может быть легко получено подстановкой (6) в (5). Как всегда в таких случаях, будем полагать, что все возмущения имеют зависимость от мирового времени  $x^0$  в виде

$$e^{i\sigma x^0}, \quad (7)$$

где  $\sigma^2 c^2$  — квадрат характеристической частоты, знак которого позволит нам судить об устойчивости или неустойчивости соответствующего равновесного состояния. Положим также  $\frac{\partial \Gamma_1}{\partial r} = 0$ . Вообще гово-

ря, в реальных телах это условие не соблюдается (также как и решение (6) не является реальной моделью). Однако, поскольку нас интересуют эффекты, связанные с переходом к релятивизму, даже такая идеализация может оказаться полезной.

Уравнение колебаний будет иметь вид

$$\begin{aligned} & (1 - x^{2n}) [(1 + n)^2 - x^{2n} (1 - n)^2]^2 \eta'' + \frac{1}{x} \eta' [(1 + n)^4 (5 - 3n) - \\ & - x^{2n} (1 + n)^2 (5 - n) (3n^2 - 2n + 3) + x^{4n} (1 - n)^2 (5 + n) (3n^2 + 2n + 3) - \\ & - x^{6n} (1 - n)^4 (5 + 3n)] + \frac{1}{x^2} \eta \left\{ \left[ -3 (1 + n)^4 (3n - 1) + \frac{8}{\Gamma_1} (1 + n)^4 \right] + \right. \\ & \quad \left. + x^{2n} \left[ -3 (1 - n) (1 + n)^2 (3n^2 - 2n + 3) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{8}{\Gamma_1} (1 - n) (1 + n)^2 (3 + n - n^2) + \frac{\sigma^2 R^2}{\Gamma_1} \frac{32n^2 (2 - n^2)^2}{1 - n} \right] + \right. \\ & \quad \left. + x^{4n} \left[ 3 (1 - n)^2 (1 + n) (3n^2 + 2n + 3) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{8}{\Gamma_1} (1 - n)^2 (1 + n) (3 - n - n^2) - \frac{\sigma^2 R^2}{\Gamma_1} \frac{32n^2 (2 - n^2)^2}{1 + n} \right] + \right. \\ & \quad \left. + x^{6n} \left[ -3 (1 - n)^4 (1 + 3n) - \frac{8}{\Gamma_1} (1 - n)^4 \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, задача свелась к определению собственных значений

$\alpha^2 c^2$  дифференциального уравнения (8) при следующих краевых условиях: 1. обращение в нуль возмущения в давлении  $\delta p$  при  $r = R$ ; 2. конечность решения при  $r = 0$ . Последнее вытекает из того факта, что точка  $x = 0$  является особой точкой нашего дифференциального уравнения и требование, чтобы решение оставалось конечным в этой точке, будет для него специального вида краевым условием.

Решить задачу точно в такой постановке не удастся. Тем не менее некоторые следствия (8) можно получить (в дальнейшем предполагается проведение численного интегрирования данного уравнения). В частности, посмотрим, какие ограничения необходимо наложить на параметры  $n$  и  $\Gamma_1$ , чтобы получить конечное  $\eta$  при  $x = 0$ . Всякое ограниченное решение можно представить разложением по степеням малой величины (в данном случае  $x = r/R \ll 1$ ).

Подставив в (8)  $\eta = x^3$  и приравняв коэффициенты при наименьшей степени ( $x^{3-2}$ ), имеем

$$\beta^2 + \beta(4 - 3n) + \left[ \frac{8}{\Gamma_1} - 3(3n - 1) \right] = 0. \quad (9)$$

Корни квадратного уравнения (9) есть

$$\beta_{1,2} = -\frac{4 - 3n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4 - 3n}{2}\right)^2 - \left[ \frac{8}{\Gamma_1} - 3(3n - 1) \right]}. \quad (10)$$

Для конечности решения необходимо, чтобы хотя бы один из корней ( $\beta_1$  или  $\beta_2$ ) был положительной величиной; из (10) легко видеть, что для этого требуется выполнение условия

$$\left[ \frac{8}{\Gamma_1} - 3(3n - 1) \right] \geq 0. \quad (11)$$

Нижняя граница  $\Gamma_1$ , то есть значение  $\Gamma_1 = \Gamma_{1 \text{ крит.}}$ , при котором решение еще конечно для заданного  $n$ , есть

$$\Gamma_{1 \text{ крит.}} = \frac{8}{3(3n - 1)}. \quad (12)$$

Минимальное значение  $\Gamma_{1 \text{ крит.}}$  имеет при  $n \rightarrow 1$ , то есть в слабо-релятивистском приближении, когда  $\Gamma_{1 \text{ крит.}} = 4/3$ , и затем возрастает с уменьшением  $n$ , то есть с увеличением релятивистских эффектов. При  $n = 1/3$ ,  $\Gamma_{1 \text{ крит.}} = \infty$ , а при  $n < 1/3$  вообще нет конечных решений при любом (даже бесконечном)  $\Gamma_1$ .

Отметим, что при  $\Gamma_1 = \Gamma_{1 \text{ крит.}}$  мы имеем в центре  $\eta = \text{const}$ .

Как известно, краевая задача, подобная нашей, может быть сведена к вариационной задаче, именно к отысканию минимума функционала (Чандрасекар [2]).

$$\begin{aligned} \sigma^2 \int_0^R l^{\frac{3\lambda-\nu}{2}} (p + \varepsilon) r^2 \xi^2 dr &= 4 \int_0^R l^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r \left( \frac{dp}{dr} \right)^2 \xi^2 dr + \\ + \int_0^R l^{\frac{\lambda+\delta\nu}{2}} \frac{\Gamma_1 p}{r^2} \left[ \frac{d}{dr} (r^2 l^{-\nu/2} \xi) \right]^2 dr &- \int_0^R l^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \left( \frac{dp}{dr} \right)^2 \frac{r^2 \xi^2}{p + \varepsilon} dr + \\ + \frac{8\pi G}{c^4} \int_0^R l^{\frac{3\lambda+\nu}{2}} p (p + \varepsilon) r^2 \xi^2 dr. \end{aligned} \quad (13)$$

С помощью той или иной пробной функции, удовлетворяющей граничным условиям, можно оценить первую гармонику колебаний сферически-симметричной конфигурации, в том числе и интересующей нас сингулярной сферы. В качестве такой пробной функции выберем

$$\xi l^{-\nu/2} = r. \quad (14)$$

Данная пробная функция соответствует постоянному вдоль всей конфигурации  $\eta$  и, следовательно, вблизи центра описывает случай  $\Gamma_1 = \Gamma_{1 \text{ крит.}}$ .

Квадрат частоты первой гармоники колебаний оказывается равным

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \frac{1 - n^2}{R^2 20 (2 - n^2)^2 (16 - 9n^2)} [9\Gamma_1 (3n^4 + 16n^2 + 51) - \\ - (33n^4 - 257n^2 + 8 \cdot 133)]. \end{aligned} \quad (15)$$

В слаборелятивистском приближении имеем

$$\sigma^2 (n \rightarrow 1) = \frac{3(1-n)}{R^2} (3\Gamma_1 - 4), \quad (16)$$

для ультрарелятивистского газа

$$\sigma^2 (n = 1/2) = \frac{0.443 \Gamma_1 - 0.883}{R^2} \quad (17)$$

и для  $p_c \sim \varepsilon_c$

$$\sigma^2 (n = 0) = \frac{0.358 \Gamma_1 - 0.834}{R^2}. \quad (18)$$

Заметим следующее. С помощью пробной функции (14) мы нашли лишь приближенное выражение для частот колебаний. Несмотря на это, получив в (15)  $\sigma^2 < 0$ , можно с уверенностью сделать заключение о неустойчивости. Дело в том, что наша вариационная задача сводится к отысканию минимума. Следовательно, результат  $\sigma^2 < 0$ ,

полученный с помощью какой-либо пробной функции, удовлетворяющей всем необходимым условиям, означает, что  $\sigma^2$  для функции, соответствующей минимуму функционала и являющейся решением нашей задачи, тем более отрицателен.

Ход кривых  $\sigma^2(n)$  при  $\Gamma_1 = \text{const}$  изображен на графике (рис. 1). Кривая  $\Gamma_1 = 4/3$  целиком расположена в области неустойчивости, лишь при  $n \rightarrow 1$ , то есть в слаборелятивистском приближении, она по касательной приближается к области устойчивости. Кривые с  $2.32 < \Gamma_1 < 4/3$  имеют две ветви: одна, лежащая в окрестности  $n = 0$ , соответствует неустойчивым равновесным состояниям сингулярной сферы, другая, лежащая в окрестности  $n = 1$ , — устойчивым. При этом, как видно из графика, с увеличением  $\Gamma_1$  допускаются все меньшие и

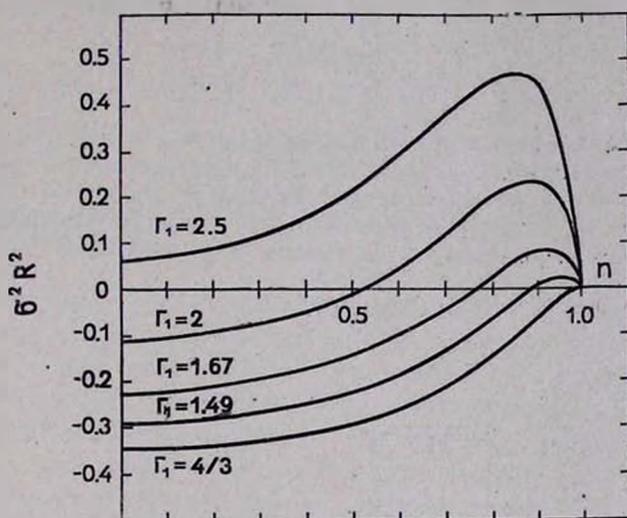


Рис. 1. Зависимость  $\sigma^2 R^2$  от параметра  $n$  при  $\Gamma_1 = \text{const}$ .

меньшие значения  $n$ , при которых конфигурация устойчива. Иными словами, в устойчивых конфигурациях уменьшение релятивизма в уравнении состояния приводит к возможности все более сильных гравитационных эффектов (увеличение красного смещения). Кривые с  $\Gamma_1 > 2.32$  целиком лежат в области  $\sigma^2 > 0$ . При этом, однако, нельзя с уверенностью заявить, что сингулярная сфера устойчива, в частности вблизи  $n = 0$ . Дело в том, что наше приближение с помощью пробной функции (14) наиболее неудовлетворительно именно вблизи  $n = 0$ , и у нас нет гарантии, что какая-либо другая пробная функция не даст здесь  $\sigma^2 < 0$ .

Автор признателен профессору С. А. Каплану за постановку задачи и ценные замечания в ходе работы.

Горьковский научно-исследовательский  
радиофизический институт

## SINGULAR SPHERE OSCILLATIONS

G. A. LUPANOV

The simple method (in comparison with the method of Chandrasekhar [2]) of derivation of the pulsation equation in general theory of relativity is found. The method is illustrated by considering the singular sphere ( $\varepsilon \sim 1/r^2$ ). The frequencies and instability conditions are found.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *F. Hoyle, W. Fowler, Nature, 197, 533, 1963.*
2. *S. Chandrasekhar, Ap. J., 140, 417, 1964.*
3. *С. А. Каплан, Г. А. Лупанов, Астрон. ж., 42, № 2, 1965.*
4. *С. Чандрасекар. Введение в учение о строении звезд, ИЛ, М., 1950.*
5. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1962.*
6. *R. C. Tolman, Phys. Rev., 55, 364, 1939.*
7. *Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 41, 1609, 1961.*

К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ОТРАЖЕНИЯ В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ  
ЗВЕЗДАХ

И. Н. МИНИН

Поступила 27 августа 1965

Рассмотрена задача о рассеянии света в одномерной полубесконечной среде с изотропным рассеянием. Принято, что среда освещается внешним излучением, интенсивность которого периодически изменяется с течением времени. Получено точное решение методом преобразования Лапласа. Результаты применены к изучению эффекта отражения в тесных двойных звездах.

При освещении горячей звездой холодного спутника в тесной двойной системе происходит увеличение температуры наружных слоев и, соответственно, яркости участков холодной звезды, обращенных к горячей звезде. Это приводит к наблюдаемому в некоторых затменных системах эффекту фазы, или эффекту отражения. Если имеет место осевое вращение холодной звезды относительно направления на горячую звезду, то каждый участок поверхности холодной звезды будет подвергаться периодическому облучению. Поскольку процесс диффузии излучения имеет некоторую длительность, то распределение яркости на поверхности холодной звезды не будет симметричным относительно направления на горячую звезду. Расчет указанного распределения яркости может представить интерес для изучения затменных переменных звезд.

Одна из задач, связанных с эффектом отражения в случае нестационарного свечения, рассмотрена недавно Суайхартон [1]. Было найдено изменение температуры в звездной атмосфере, которая получает дополнительное освещение извне. При этом считалось, что атмосфера освещается потоком параллельных лучей, падающих под некоторым углом к нормали, а до начала внешнего облучения атмосфера находилась в состоянии лучистого равновесия. Решение задачи получено численно на электронной счетной машине.

Автором [2] найдено простое аналитическое решение этой же задачи. В качестве модели звездной атмосферы была принята одномерная среда. Настоящая статья посвящена рассмотрению свечения одномерной среды под воздействием внешнего излучения, интенсивность которого периодически изменяется с течением времени.

1. Рассмотрим одномерную полубесконечную среду, в которой происходит изотропное рассеяние света. Обозначим через  $t_1$  среднее время пребывания кванта в поглощенном состоянии при элементарном акте рассеяния и будем считать, что  $t_1$  значительно превосходит  $t_2$ —среднее время пребывания кванта в пути между двумя последовательными рассеяниями. Вместо времени  $t$  будем в дальнейшем использовать новую переменную  $u = t/t_1$ , определяющую безразмерное время. Кроме того, примем, что вероятность излучения кванта в интервале безразмерного времени от  $u$  до  $u + du$  после его поглощения при  $u = 0$  равна  $e^{-u} du$ .

Имея в виду применение полученных результатов к изучению свечения звездных атмосфер, рассмотрим случай чистого рассеяния света в среде. Пусть при  $u < 0$  среда находится в состоянии лучистого равновесия с источниками, расположенными на бесконечно большой оптической глубине, а интенсивность выходящего из среды излучения равна  $I_0$ . Тогда, как известно, функция источника  $B(\tau)$  на оптической глубине  $\tau$  имеет вид

$$B(\tau) = \frac{I_0}{2} (1 + \tau). \quad (1)$$

При  $u \geq 0$  на среду падает излучение, интенсивность которого примем равной

$$\left. \begin{aligned} \beta I_0 \sin \omega u & \text{ при } \frac{2n\pi}{\omega} \leq u \leq \frac{(2n+1)\pi}{\omega}, \\ 0 & \text{ при } \frac{(2r+1)\pi}{\omega} \leq u \leq \frac{(2n+2)\pi}{\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\beta$ —параметр,  $\omega = 2\pi \frac{t_1}{P}$ ,  $P$ —период.

Для этих условий представим интенсивность выходящего из среды излучения  $I(u)$  в форме

$$I(u) = I_0 [1 + \beta H(u)], \quad (3)$$

а функцию источника  $B(\tau, u)$  в виде

$$B(\tau, u) = I_0 \left[ \frac{1 + \tau}{2} + \varepsilon b(\tau, u) \right]. \quad (4)$$

Задача состоит в определении функций  $H(u)$  и  $b(\tau, u)$ .

2. Для определения  $H(u)$  при сделанных допущениях имеем

$$H(u) = \int_0^u H_0(u') \rho(u - u') du'. \quad (5)$$

Здесь величина  $\rho(u) du$  представляет собой вероятность отражения кванта от среды в промежутке времени от  $u$  до  $u + du$  после падения на нее, а для  $H_0(u)$  из (2) и (3) находим

$$H_0(u) = \frac{\sin \omega u + |\sin \omega u|}{2}. \quad (6)$$

Используем в дальнейшем преобразование Лапласа, определяемое формулой

$$\bar{H}(s) = \int_0^\infty e^{-su} H(u) du. \quad (7)$$

Тогда из (5) в соответствии с правилами операционного исчисления следует

$$\bar{H}(s) = \bar{H}_0(s) \bar{\rho}(s), \quad (8)$$

где  $\bar{H}_0(s)$  с учетом (6) равняется ([3], стр. 167)

$$\bar{H}_0(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega} s}}. \quad (9)$$

а  $\bar{\rho}(s)$  в рассматриваемом случае имеет вид ([4], стр. 333)

$$\bar{\rho}(s) = 2s + 1 - 2\sqrt{s(s+1)}. \quad (10)$$

Для нахождения  $H(u)$  необходимо сделать обращение преобразования Лапласа. При этом следует учесть, что функция  $\bar{H}(s)$ , как видно из соотношений (8), (9) и (10), имеет при  $s = 0$  и  $s = -1$  точки разветвления, а при  $s = \pm \omega i$ ,  $\pm 2n\omega i$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) простые по-

люсы. Учитывая наличие таких особых точек и применяя метод контурного интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
 H(u) = & \frac{1}{\pi} - \frac{2\omega}{\pi} \int_0^1 e^{-uy} \frac{\sqrt{y(1-y)}}{(u^2 + y^2)(e^{\frac{\pi}{\omega}y} - 1)} dy + \omega \cos \omega u + \\
 & + \frac{1}{2} \sin \omega u - \sqrt[4]{\omega^2(1+\omega^2)} \cos \left( \omega u - \frac{\arctg \frac{1}{\omega}}{2} \right) + \\
 & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \left[ 4n\omega \sin(2n\omega u) - \cos(2n\omega u) - \right. \\
 & \left. - 2\sqrt[4]{4n^2\omega^2(1+4n^2\omega^2)} \sin \left( 2n\omega u - \frac{\arctg \frac{1}{2n\omega}}{2} \right) \right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Разумеется, при  $u \rightarrow \infty$  интегральный член в (11) исчезает и  $H(u)$  становится периодической функцией. Рассматривая именно такой случай и учтя, что  $H_0(u)$  можно представить в форме

$$H_0(u) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin \omega u}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\omega u)}{4n^2 - 1}, \quad (12)$$

из (11) находим

$$\begin{aligned}
 H(u) = & H_0(u) + \omega \cos \omega u - \sqrt[4]{\omega^2(1+\omega^2)} \cos \left( \omega u - \frac{\arctg \frac{1}{\omega}}{2} \right) + \\
 & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \left( 4n\omega \sin(2n\omega u) - 2\sqrt[4]{4n^2\omega^2(1+4n^2\omega^2)} \times \right. \\
 & \left. \sin \left( 2n\omega u - \frac{\arctg \frac{1}{2n\omega}}{2} \right) \right). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Если среда подвергается извне мгновенному импульсу излучения единичной мощности, то функция источника в этом случае совпадает с функцией  $p(\tau, u)$  (см. [2]). Функция  $p(\tau, u)$  определяет вероятность для кванта, поглощенного на оптической глубине  $\tau$  в мо-

мент времени  $u = 0$ , выйти из среды за промежуток времени  $u$ . Учитывая это обстоятельство, для определения  $b(\tau, u)$  имеем

$$b(\tau, u) = \int_0^u H_0(u') p(\tau, u - u') du'. \quad (14)$$

Применив преобразование Лапласа к (14), получим

$$\bar{b}(\tau, s) = \bar{H}_0(s) \bar{p}(\tau, s). \quad (15)$$

Для рассматриваемого случая  $\bar{p}(\tau, s)$  имеет вид ([4], стр. 334)

$$\bar{p}(\tau, s) = \left(1 - \sqrt{\frac{s}{1+s}}\right) e^{-\tau \sqrt{\frac{s}{1+s}}}. \quad (16)$$

Из соотношений (8), (9), (10), (15) и (16) следует, что особые точки  $\bar{b}(\tau, s)$  совпадают с особыми точками  $\bar{H}(s)$ . Обращая (15) методом контурного интегрирования, находим

$$\begin{aligned} b(\tau, u) = & \frac{1}{\pi} - \frac{\omega}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-uy}}{(\omega^2 + y^2)(e^{\frac{\pi}{\omega}y} - 1)} \left[ \sin\left(\tau \sqrt{\frac{y}{1-y}}\right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{y}{1-y}} \cos\left(\tau \sqrt{\frac{y}{1-y}}\right) \right] dy + \frac{1}{2} e^{-\tau \alpha \cos \psi} [\sin(\omega u - \tau \alpha \sin \psi) - \\ & - \alpha \sin(\omega u + \psi - \tau \alpha \sin \psi)] + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\tau \alpha_n \cos \psi_n}}{4n^2 - 1} [\alpha_n \cos(2n\omega u + \psi_n - \\ & - \tau \alpha_n \sin \psi_n) - \cos(2n\omega u - \tau \alpha_n \sin \psi_n)], \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad \alpha_n = \frac{\sqrt{2n\omega}}{\sqrt{1 + 4n^2\omega^2}}, \quad \psi = \frac{\arctg \frac{1}{\omega}}{2}, \quad \psi_n = \frac{\arctg \frac{1}{2n\omega}}{2}. \quad (18)$$

Формулы (11) и (17) дают решение поставленной задачи. Приведем еще выражение для  $H(u)$ , полученное с использованием (17) и соотношения

$$H(u) = \int_0^u e^{-\tau} b(\tau, u) d\tau. \quad (19)$$

Оставляя только периодическую часть, то есть опуская интегральный член, имеем

$$H(u) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{(1 + \alpha \cos \psi)^2 + \alpha^2 \sin^2 \psi} \left[ \frac{1}{2} (1 - \alpha^2) \sin \omega u - \right. \\ \left. - \alpha \sin \psi \cos \omega u \right] - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cdot \frac{1}{(1 + \alpha_n \cos \psi_n)^2 + \alpha_n^2 \sin^2 \psi_n} \times (20) \\ \times \left[ \frac{1}{2} (1 - \alpha_n^2) \cos 2n\omega u + \alpha_n \sin \psi_n \sin 2n\omega u \right].$$

Разумеется, соотношения (13) и (20) эквивалентны.

При значениях  $\omega \ll 1$  из (20) следует

$$H(u) = H_0(u) + \sqrt{\omega} H_1(u), \quad (21)$$

где

$$H_1(u) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n^2 - 1} (\cos 2n\omega u - \sin 2n\omega u) - \frac{\sin \omega u + \cos \omega u}{\sqrt{2}}. \quad (22)$$

3. Обратимся теперь к рассмотрению эффекта отражения. Пусть ось вращения холодной звезды перпендикулярна к плоскости орбиты, а период ее вращения относительно направления на горячую звезду равен  $P$ . Тогда каждый элемент поверхности холодной звезды будет подвергаться периодическому облучению горячей звездой, причем поток падающего излучения будет изменяться с течением времени по закону (2). Если мы допустим, что коэффициент поглощения в фотосферических слоях звезды не зависит от длины волны (гипотеза серого тела) и выполняется условие лучистого равновесия, то уравнения реальной задачи о периодическом облучении холодной звезды станут тождественными уравнениям, описывающим процесс рассеяния при таком же периодическом облучении, когда имеется также источник энергии в глубоких слоях. При таких условиях для исследования дополнительного свечения внешних слоев холодной звезды может быть использовано приведенное формальное решение задачи о свечении одномерной полубесконечной среды. Отметим, что тогда величина  $B(\tau, u)$ , определяемая формулами (4) и (17), должна быть пропорциональна четвертой степени температуры, а величина  $I(u)$ , определяемая формулами (3) и (20), дает поток выходящего излучения. Параметр  $\beta$  примем постоянным для каждого элемента поверхности.

Изучим более подробно величину  $I(u)$ . Согласно указанным формулам  $I(u)$  периодически изменяется с течением времени, чему соответствует некоторое распределение яркости по поверхности звезды. Это распределение зависит от параметров  $\beta$  и  $\omega$ . Величина пара-

метра  $\xi$  определяется конфигурацией двойной системы, относительной яркостью компонентов и на поверхности холодной звезды изменяется пропорционально косинусу широты, отсчитываемой от экватора вращения. В дальнейшем нас будет интересовать только эффект несимметричности распределения яркости относительно направления на горячую звезду, для нахождения которого при фиксированном  $\xi$  следует знать величину параметра  $\omega$ .

Исследуем зависимость функции  $H(u)$  от  $\omega$ . Из (20) при  $\omega \rightarrow 0$  следует  $H(u) = H_0(u)$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$  находим  $H(u) = 1/\pi$ . В первом из этих случаев дополнительное свечение совпадает с падающим потоком, тогда как во втором случае оно распределяется равномерно вдоль всего экватора вращения. Эти очевидные результаты дают симметричное распределение яркости по поверхности холодной звезды относительно направления на горячую звезду. Для промежуточных значений  $\omega$  максимум дополнительной яркости смещен в сторону вращения звезды, что может привести к эффектам, доступным наблюдению.

Оценим теперь величину параметра  $\omega = 2\pi \frac{t_1}{P}$ . Для определения  $t_1$  используем очевидное соотношение

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{E_1}{E_2}, \quad (23)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — тепловая и лучистая энергия единицы объема. В условиях термодинамического равновесия имеем

$$E_1 = \frac{R}{\mu} T\rho, \quad E_2 = aT^4, \quad (24)$$

где  $R$  — газовая постоянная,  $\mu$  — средний молекулярный вес,  $T$  — температура,  $\rho$  — плотность,  $a$  — постоянная излучения. Подставляя (24) в (23), получим

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{3R}{2a} \cdot \frac{\rho}{\mu T^3}, \quad (25)$$

а поскольку  $t_2 = \frac{1}{cx\rho}$ , то из (25) следует

$$t_1 = \frac{3R}{2ac} \cdot \frac{1}{\mu x T^3}, \quad (26)$$

где  $c$  — скорость света,  $x$  — коэффициент непрозрачности.

Соотношения (25) и (26), справедливые при термодинамическом равновесии, могут быть использованы также для оценок соответствующих величин в условиях звездных атмосфер. Для атмосферы Солнца на оптической глубине равной единице по формулам (25) и (26)

находим  $t_1/t_2 \approx 10^4$  и  $t_1 \approx 10$  сек. Заметим, что принятое при решении задачи условие  $t_1 \gg t_2$  в этом случае выполняется.

Скорости вращения холодных компонентов затменных систем неизвестны. Поэтому для оценки порядка величины  $P$  используем данные относительно вращения горячих компонентов. Спектроскопическое изучение так называемого эффекта вращения приводит к выводу о том, что часто период вращения совпадает с орбитальным периодом обращения. Таким образом получаем  $P \approx 10^4 - 10^3$  сек.

В результате, используя соотношение  $\omega = 2\pi \frac{t_1}{P}$  и приведенные оценки, имеем  $\omega \approx 10^{-3} - 10^{-2}$ .

Если холодная звезда вращается относительно направления на горячую звезду и в данной системе наблюдается эффект отражения, то кривая блеска должна быть несимметричной. При этом в зависимости от направления вращения несимметричность будет различной. Для случая, когда направление вращения совпадает с направлением орбитального движения, блеск перед вторичным минимумом будет больше, нежели после него. В противоположном случае будет наблюдаться обратная картина.

Приведенные формулы (3) и (20) дают возможность найти распределение яркости по поверхности холодной звезды и, значит, теоретически определить величину указанного явления. Здесь мы ограничимся рассмотрением интегральной характеристики несимметричности кривой блеска. В качестве такой характеристики примем величину  $q$  — отношение дополнительной яркости полушария холодной звезды, расположенного в сторону от плоскости, проведенной через центры компонентов системы и ось вращения, по направлению вращения освещаемой части звезды, к дополнительной яркости противоположного полушария.

Поскольку направлению от холодной звезды на горячую звезду соответствует значение  $\omega u = \pi/2$ , то для определения  $q$  имеем

$$q(\omega) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} H(u) d(\omega u)}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(u) d(\omega u)} \quad (27)$$

Подставляя  $H(u)$  из (20) в (27), находим

$$q(\omega) = \frac{1 + 2\alpha(\cos \psi + \sin \psi) + \alpha^2}{1 + 2\alpha(\cos \psi - \sin \psi) + \alpha^2}, \quad (28)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad 2\psi = \arctg \frac{1}{\omega}. \quad (29)$$

При  $\omega \ll 1$  из (28) следует

$$q(\omega) = 1 + 2\sqrt{2\omega}. \quad (30)$$

Значения функции  $q(\omega)$  приведены в таблице.

$\omega$	0	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	$\infty$
$q(\omega)$	1	1.03	1.09	1.28	1.74	1.49	1.05	1

Сделанная нами оценка возможных значений параметра  $\omega$  и данные таблицы говорят о том, что рассмотренный эффект может быть наблюдаемым.

Отметим высказанное В. А. Кратом ([5], стр. 36) утверждение о том, что при значительном осевом вращении холодной звезды относительно направления на горячую звезду эффект отражения вообще не имел бы места, поскольку ввиду длительности процесса диффузии излучения яркость была бы распределена равномерно по поверхности холодной звезды. Однако, как следует из приведенной таблицы, это может быть лишь при  $\omega \gtrsim 10$ , а такие значения  $\omega$  представляются не-реальными.

Ленинградский государственный  
университет

## ON THE THEORY OF THE REFLECTION EFFECT IN CLOSE BINARY SYSTEMS

I. N. MININ

The problem of isotropic light scattering in one-dimensional semi-infinite medium is considered. It is assumed that the medium is illuminated by an external radiation, the intensity of which varies periodically

with time. Exact solution of the problem is found by the method based on Laplace transformation. The results are applied to the investigation of the reflection effect in close binary systems.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *T. Swihart*, *Ap. J.*, 139, 772, 1964.
2. *И. Н. Минин*, сб. „Теория звездных спектров“, Наука, М., 1966.
3. *Г. Дѣч*, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, М., 1960.
4. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
5. *В. А. Крат*, Фигуры равновесия небесных тел, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОЕ ДИФFUЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ОТ  
БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЫ

А. Г. НИКОГОСЯН

Поступила 4 июля 1965

Рассмотрена проблема диффузного отражения света от бесконечно глубокой одномерной среды, состоящей из атомов, обладающих тремя энергетическими уровнями. Все возможные переходы между этими уровнями предполагаются разрешенными. Учтены эффекты „отрицательного поглощения“. Рассмотрен случай, когда среда освещается стационарными потоками излучения  $F_l$  в частотах  $\nu_l$  ( $l = 1, 2, 3$ ), соответствующих переходам  $3 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 1$ . Под влиянием падающих потоков происходит перераспределение атомов по уровням, приводящее к изменению прозрачности среды. Нелинейность рассмотренной задачи обусловлена тем, что параметры, характеризующие оптические свойства среды и процесс рассеяния, не являются постоянными величинами, а определяются полем излучения.

С помощью равенств (1), вытекающих из законов сохранения чисел квантов каждой спектральной серии, задача сведена к определению потока  $H_1 = \varphi(F_1)$ , отраженного от среды. С применением принципа инвариантности для  $\varphi(F_1)$  — потока, отраженного в частоте  $\nu_1$ , получено квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными. Решение этого уравнения дано в параметрической форме (16).

В настоящее время имеется ряд работ, посвященных нелинейной теории рассеяния света в мутной среде [1—3]. Часть этих работ [2, 3] посвящена группе нелинейных проблем, относящихся к диффузному рассеянию в среде, состоящей из атомов, обладающих тремя энергетическими уровнями. Нелинейность этих задач связана с перераспределением атомов по уровням под влиянием стационарных потоков излучения, падающих на среду. В результате этого, иногда даже при незначительных изменениях значений падающих потоков излучения прозрачность среды для той или иной частоты может существенно измениться. Сложность указанных задач заставляла рассматривать частные случаи, когда тот или иной параметр, входящий

в задачу, предполагался близким к нулю. В этом случае появлялась возможность частичной линейаризации задачи.

В этой связи представляет особый интерес задача о диффузном отражении света от бесконечно глубокой одномерной среды. Такая задача ранее уже ставилась в [3], но опять-таки для того частного случая, когда второй уровень являлся метастабильным и учитывались лишь переходы  $2 \rightarrow 1$  в результате ударов второго рода. Задача в такой постановке относительно проста в том смысле, что в этом случае приходится иметь дело с полем излучения лишь двух частот и потому основные параметры, характеризующие оптические свойства среды и процесс рассеяния, зависят от плотностей излучения, соответствующих этим двум частотам. В настоящей работе мы рассмотрим эту задачу при достаточно общих предположениях относительно атомов среды. Будем рассматривать атомы, имеющие три уровня энергии ( $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ ), причем будем предполагать, что все переходы между ними являются разрешенными. Мы учтем также эффекты „отрицательного поглощения“. В то же время будем пренебрегать явлениями превращения энергии возбуждения этих атомов и испускаемых ими квантов в тепло и обратно. Иными словами, будем рассматривать случай „чистого полихроматического рассеяния“.

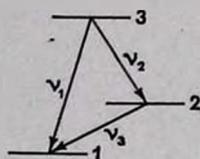


Рис. 1.

Пусть бесконечно глубокий одномерный слой, состоящий из таких атомов, освещается потоками излучения  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), соответственно для  $i$ -той частоты. Для краткости тут мы пользуемся обозначениями ( $\nu_{12} = \nu_1$ ,  $\nu_{23} = \nu_2$ ,  $\nu_{31} = \nu_3$ ) (рис. 1). Поскольку мы рассматриваем стационарную задачу, то в каждой точке будет иметь место определенное распределение атомов по состояниям; при этом установится такой режим, когда слой будет отражать определенные стационарные потоки излучения. Нашей задачей будет найти эти отраженные потоки ( $H_1, H_2, H_3$ ) как функции от потоков излучения ( $F_1, F_2, F_3$ ), падающих на среду. Однако следует отметить, что для этого достаточно определить отраженный от среды поток в одной, какой-либо частоте (например, в первой), поскольку остальные могут быть

определены с помощью законов сохранения чисел квантов, которые в нашем случае приводят к равенствам

$$\frac{F_1}{h\nu_1} + \frac{F_2}{h\nu_2} = \frac{H_1}{h\nu_1} + \frac{H_2}{h\nu_2}; \quad \frac{F_1}{h\nu_1} + \frac{F_3}{h\nu_3} = \frac{H_3}{h\nu_1} + \frac{H_3}{h\nu_3}. \quad (1)$$

В справедливости этих формул нетрудно убедиться и непосредственно. Действительно, проследим за судьбой какого-либо кванта частоты  $\nu_1$ . После его поглощения атом, совершив переход  $1 \rightarrow 3$ , должен вернуться в первое состояние, совершив до этого возвращения, быть может, один или несколько (возможно даже много) переходов между состояниями 2 и 3. Возвращение в первое состояние обязательно должно сопровождаться излучением одного из квантов  $h\nu_1$  или  $h\nu_3$ , хотя в промежутке могли излучаться и поглощаться кванты частоты  $\nu_2$ , которые в данном случае нас не интересуют. Таким образом, вместо одного поглощенного кванта  $h\nu_1$  будем иметь вновь излученный квант в одной из частот  $\nu_1$  и  $\nu_3$ . Точно так же легко увидеть, что вместо одного поглощенного кванта  $h\nu_3$  мы после возвращения атома в первое состояние вновь будем иметь один квант, соответствующий одной из частот  $\nu_1$  и  $\nu_3$ . Таким образом, при всех подобных циклах переходов суммарное количество квантов поля в частотах  $\nu_1$  и  $\nu_3$  не будет меняться. Поскольку все процессы атомных переходов могут быть разбиты на циклы указанных типов, то вообще при рассматриваемых процессах сумма чисел квантов, соответствующих частотам  $\nu_1$  и  $\nu_3$ , должна оставаться неизменной. А это значит, что общее число квантов в потоке, отраженном в этих двух частотах от бесконечно глубокой среды, должно быть равно числу квантов этих двух частот в падающем потоке. В этом как раз и заключается содержание второго из уравнений (1). Здесь следует подчеркнуть, что мы рассматриваем лишь явление диффузного полихроматического отражения, исключая тем самым возможность потока энергии, идущего из бесконечно глубоких слоев среды наружу. Общая формулировка законов сохранения числа квантов разных спектральных серий была дана В. А. Амбарцумяном в [4].

Теперь мы попытаемся написать уравнение для  $H_1 = \varphi(F_1, F_2, F_3)$  — потока излучения, отраженного от среды в первой частоте. Чтобы получить уравнение для искомой функции  $\varphi(F_i)$  (для краткости будем писать один аргумент), воспользуемся принципом инвариантности. Обобщение этого принципа на случай нелинейных задач было дано в [2]. В нелинейном случае приходится иметь дело не с коэффициентом отражения, как это было в линейной теории, а с

функцией отражения. Согласно принципу инвариантности, вид этой функции не изменится, если к отражающей среде прибавить слой бесконечно малой оптической толщины. Таким образом, поскольку отражательная способность среды не меняется, то потоки излучения, отраженные от прежней и новой границы среды, мы можем приравнять друг другу (рис. 2):

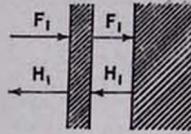


Рис. 2.

$$H_1 = H'_1(1 - \tau_1) + \lambda_1 \frac{F_1 + H_1}{2} \tau_1 \quad (2)$$

где мы ограничивались случаем изотропного рассеяния, когда коэффициент  $\chi$ , заменяющий в одномерном случае индикатрису рассеяния, равен  $1/2$ . Здесь и далее через  $\lambda_i$  мы будем обозначать вероятность „выживания“ кванта, соответствующего  $i$ -той частоте при элементарном акте рассеяния. Мы пишем о вероятности „выживания“, поскольку, вообще говоря, данный элемент объема может производить перераспределение энергии между частотами и полное количество квантов, излучаемое объемом в некоторой частоте, может отличаться от полного количества поглощенных квантов. В дальнейшем мы дадим уточнение физического смысла величин  $\lambda_i$ . Через  $\tau_i$  будем обозначать оптическую толщину прибавленного бесконечно тонкого слоя, соответствующую частоте  $\nu_i$ .

Кроме того, если через  $F'_i$  обозначить значения потоков, идущих вглубь от границы прибавленного слоя, то аналогично можно написать

$$F'_i = F_i(1 - \tau_i) + \lambda_i \frac{H_i + F_i}{2} \tau_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Принимая во внимание, что согласно принципу инвариантности  $H'_i = \varphi(F'_i)$ , будем иметь из (2)

$$\varphi(F_i) = \varphi \left[ F_i(1 - \tau_i) + \lambda_i \frac{F_i + H_i}{2} \tau_i \right] - H_1 \tau_1 + \lambda_1 \frac{F_1 + H_1}{2} \tau_1$$

Разлагая далее в ряд по степеням малой величины  $\tau_2$ , приходим к нужному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} & \left(-F_1 + \lambda_1 \frac{F_1 + H_1}{2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial F_1} + \left(-F_2 + \lambda_2 \frac{F_2 + H_2}{2}\right) \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{\partial \varphi}{\partial F_2} + \\ & + \left(-F_3 + \lambda_3 \frac{F_3 + H_3}{2}\right) \frac{\tau_3}{\tau_1} \frac{\partial \varphi}{\partial F_3} - H_1 + \lambda_1 \frac{H_1 + F_1}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Однако следует учесть, что входящие в уравнение величины  $\lambda_i$ , а также отношения  $\tau_2/\tau_1$  и  $\tau_3/\tau_1$  зависят от поля излучения и их значения не могут быть заданы заранее. Их мы определим ниже. Коэффициенты при втором и третьем членах этого уравнения можно преобразовать, если учесть, что избыток поглощенных квантов первой частоты по сравнению с количеством излученных в этой же частоте квантов связан с трансформацией последних в кванты второй частоты:

$$\begin{aligned} \left(-F_2 + \lambda_2 \frac{F_2 + H_2}{2}\right) \frac{\tau_2}{\tau_1} &= (\lambda_2 - 1) \frac{F_1 + H_2}{2} \frac{\tau_2}{\tau_1} - \frac{F_1 - H_1}{2} \frac{\tau_2}{\tau_1} = \\ &= (1 - \lambda_1) \frac{F_1 + H_1}{2} \frac{\nu_2}{\nu_1} + \frac{F_1 - H_1}{2} \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{\tau_2}{\tau_1}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались также законами сохранения (1). Аналогичные выкладки можно сделать для коэффициента при  $\partial \varphi / \partial F_3$  в (3). Тогда окончательно наше дифференциальное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & \left[-(1 - \lambda_1) \frac{F_1 + H_1}{2} - \frac{F_1 - H_1}{2}\right] \frac{\partial \varphi}{\partial F_1} + \left[(1 - \lambda_1) \frac{F_1 + H_1}{2} + \right. \\ & + \left. \frac{F_1 - H_1}{2} \frac{\tau_2}{\tau_1}\right] \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{\partial \varphi}{\partial F_2} + \left[(1 - \lambda_1) \frac{F_1 + H_1}{2} + \frac{F_1 - H_1}{2} \frac{\tau_3}{\tau_1}\right] \frac{\nu_3}{\nu_1} \frac{\partial \varphi}{\partial F_3} - \\ & - (1 - \lambda_1) \frac{F_1 + H_1}{2} + \frac{F_1 - H_1}{2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Нам остается теперь вычислить и подставить в уравнение (4) выражения для  $\lambda_i$ ,  $\tau_2/\tau_1$  и  $\tau_3/\tau_1$ .

Напишем условия стационарности чисел атомов, находящихся в единице объема в первом и третьем состояниях:

$$\begin{aligned} n_1 (B_{12} \rho_2 + B_{13} \rho_1) &= n_2 \frac{g_1}{g_2} B_{12} (\sigma_2 + \rho_2) + n_3 \frac{g_1}{g_3} B_{13} (\tau_1 + \rho_1) \\ n_1 B_{13} \rho_1 + n_2 B_{23} \rho_2 &= n_3 \left\{ \frac{g_1}{g_3} B_{13} (\tau_1 + \rho_1) + \frac{g_2}{g_3} B_{23} (\sigma_2 + \rho_2) \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $n_i$  — число атомов в единице объема в  $i$ -том состоянии,  $\rho_i$  —

плотность излучения с частотой  $\nu_i$ , которая выражается через соответствующие потоки  $\rho_i = \frac{F_i + H_i}{c}$ ;  $B_{ik}$  — эйнштейновский коэффициент вероятности перехода атома с нижнего состояния  $i$  в более высокие состояния  $k$ ; как и обычно  $\sigma_i = \frac{8\pi h\nu_i^3}{c^3}$ , а  $g_i$  — обозначают статистические веса соответствующих состояний (см. примечание).

Вероятность „выживания кванта“ первой частоты при элементарном акте рассеяния определяется следующим образом:

$$\lambda_1 = \frac{n_3 B_{31} \sigma_1}{B_{13} \left( n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_2 \right) \rho_1}.$$

Заметим, что коэффициент  $\lambda_1$  может в определенных случаях превосходить единицу. Если говорить точно, это не вероятность „выживания“, а среднее число квантов первой частоты, испускаемых вместо каждого поглощенного кванта той же частоты. Для отношений оптических толщ, как известно, будем иметь

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{B_{23} \nu_2 \Delta \nu_1}{B_{13} \nu_1 \Delta \nu_2} \frac{n_2 - \frac{g_2}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_2}; \quad \frac{\tau_3}{\tau_1} = \frac{B_{12} \nu_3 \Delta \nu_1}{B_{13} \nu_1 \Delta \nu_2} \frac{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_2},$$

где  $\Delta \nu_i$  — эффективные ширины соответствующих линий поглощения. С помощью условий стационарного состояния (5) для величин  $\tau_2/\tau_1$ ,  $\tau_3/\tau_1$  и  $1 - \lambda_1$ , которые входят в наше основное уравнение (4), окончательно будем иметь

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = k' \frac{(1-n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_2 + n(\bar{\rho}_3 + 1)}; \quad 1 - \lambda_1 = b \frac{1 + \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_3 - \frac{\bar{\rho}_2 \bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_1}}{\bar{\rho}_2 + n(\bar{\rho}_3 + 1)},$$

$$\frac{\tau_3}{\tau_1} = k' \frac{\bar{\rho}_2 - (1-n)\bar{\rho}_1 + n}{\bar{\rho}_2 + n(\bar{\rho}_3 + 1)};$$

где введены обозначения:  $\bar{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\sigma_i}$ ;  $k' = \frac{g_2 B_{23} \nu_2 \Delta \nu_1}{g_1 B_{13} \nu_1 \Delta \nu_2}$ ;

$$k' = \frac{B_{12} \nu_3 \Delta \nu_1}{B_{13} \nu_1 \Delta \nu_2}; \quad b = \frac{\sigma_3 B_{12}}{\sigma_3 B_{12} + \sigma_1 B_{13}}; \quad n = \frac{\sigma_2 B_{12} (g_1 \sigma_1 B_{13} + g_2 \sigma_2 B_{23})}{\sigma_2 g_2 B_{23} (\tau_1 B_{13} + \sigma_3 B_{12})}.$$

Для того, чтобы подставить полученные выражения в наше уравнение (4), мы должны величины потоков излучения, входящие в пос-

леднее, выразить в новых единицах, которые связаны с прежними энергетическими единицами посредством следующих равенств:

$$\bar{F}_i = \frac{F_i}{c\sigma_i}; \quad \bar{H}_i = \frac{H_i}{c\sigma_i}$$

Если для удобства теперь ввести новые обозначения  $\bar{F}_i = y_i$ ;  $\bar{H}_i = z_i$ , то окончательно уравнение (4) примет вид

$$\begin{aligned} & [-b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3) - (y_1 - z)(\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3 + n)] \frac{\partial z}{\partial y_1} + \\ & + \{b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3) + k'(y_1 - z)[(1-n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3]\} l_2 \frac{\partial z}{\partial y_2} + \quad (6) \\ & + \{b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3) + x'(y_1 - z)[\bar{\rho}_2 + (1-n)\bar{\rho}_1 + n]\} l_3 \frac{\partial z}{\partial y_3} - \\ & - b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3) + (y_1 - z)(\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= y_1 + z; \\ \bar{\rho}_2 &= 2y_2 + l_2(y_1 - z); \\ \bar{\rho}_3 &= 2y_3 + l_3(y_1 - z) \end{aligned} \quad l_2 = \frac{\sigma_1 v_2}{\sigma_2 v_1} = \frac{v_1^2}{v_2^2}; \quad l_3 = \frac{v_1^2}{v_3^2}.$$

Таким образом, задача теперь сводится к решению квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными для функции, представляющей искомую зависимость отраженного от среды потока первой частоты  $\bar{H}_1$ , от падающих на среду потоков  $\bar{F}_i$ . Ближайшая наша цель — найти три первых интеграла характеристической системы, соответствующей этому уравнению.

Напишем уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} & \frac{dy_1}{(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3) - (y_1 - z)(\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n)} = \\ & = \frac{\frac{1}{l_2} dy_2}{b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3) + k'(y_1 - z)[(1-n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3]} = \\ & = \frac{\frac{1}{l_3} dy_3}{b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3) + x'(y_1 - z)[\bar{\rho}_2 + (1-n)\bar{\rho}_1 + n]} = \\ & = \frac{dz}{b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3) - (y_1 - z)(\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n)}. \end{aligned}$$

Из этой системы нетрудно получить следующие четыре уравнения, которыми мы будем пользоваться при нахождении первых интегралов:

$$b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_3\bar{\rho}_3) d\bar{\rho}_1 = (y_1 - z)(\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n) d(y_1 - z) \quad (7)$$

$$b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_3\bar{\rho}_3) d\bar{\rho}_2 + k(y_1 - z)[(1 - n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3] d(y_1 - z) = 0 \quad (8)$$

$$b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_3\bar{\rho}_3) d\bar{\rho}_1 + k'(y_1 - z)[(1 - n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3] d\bar{\rho}_1 = \\ = -(y_1 - z)(\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n) \frac{2}{l_2} ay_2 \quad (9)$$

$$b(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_3\bar{\rho}_3) d\bar{\rho}_3 + x(y_1 - z)[\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n - \\ - (1 - n)\bar{\rho}_1 - n\bar{\rho}_3] d(y_1 - z) = 0, \quad (10)$$

где  $k = l_2 k'$ ;  $x = l_3 x'$ .

В последнем уравнении (10) выражение в квадратных скобках мы получили простым преобразованием выражения, стоящего в числителе у  $\tau_3/\tau_1$ . Возможность такого преобразования связана с существованием простой связи между оптическими толщами  $\tau_i$

$$\tau_1 = \frac{\tau_2}{k'} + \frac{\tau_3}{x'},$$

которая следует из тождества

$$n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3 = \left( n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) + \frac{g_1}{g_2} \left( n_2 - \frac{g_2}{g_3} n_3 \right).$$

Умножая (8) на  $x$  и (10) на  $k$  и затем складывая, получим

$$xb(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_3\bar{\rho}_3) d\bar{\rho}_2 + kb(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_3\bar{\rho}_3) d\bar{\rho}_3 + \\ + xk(y_1 - z)(\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n) d(y_1 - z) = 0.$$

Сопоставляя с (7), получим первый из трех независимых интегралов

$$I_1(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) = \bar{\rho}_1 + \frac{\bar{\rho}_2}{k} + \frac{\bar{\rho}_3}{x} = C_1.$$

Из (9) и (7) имеем

$$(\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n) d\bar{\rho}_2 + k[(1 - n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3] d\bar{\rho}_1 = 0.$$

Учитывая, что из первого интеграла

$$xd\bar{\rho}_1 + kd\bar{\rho}_3 + kx d\bar{\rho}_1 = 0,$$

придем ко второму интегралу

$$I_2(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) = (\bar{\rho}_2 + n)^2 + k(1 - n)\bar{\rho}_1^2 - \frac{kn}{x}\bar{\rho}_3^2 = C_2.$$

Для нахождения последнего, третьего интеграла преобразуем уравнение (8)

$$bd\bar{\rho}_2 + k(y_1 - z) \frac{(1-n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3} d(y_1 - z) = 0. \quad (11)$$

Вместе с (7) будем иметь

$$bd\bar{\rho}_2 + k(y_1 - z) d(y_1 - z) + kb \frac{n\bar{\rho}_3 - n\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 + \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} d\bar{\rho}_1 = 0$$

или же

$$bd\bar{\rho}_2 + k(y_1 - z) d(y_1 - z) + kb\bar{\rho}_3 \frac{\bar{\rho}_3 - (1-n)\bar{\rho}_1 + n}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} d\bar{\rho}_1 - \quad (12)$$

$$- kb \frac{n\bar{\rho}_3 - n\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 + \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} d\bar{\rho}_1 = 0.$$

С другой стороны, умножив (11) на  $\bar{\rho}_2$  и проделав аналогичные преобразования, получим

$$b\bar{\rho}_2 d\bar{\rho}_2 - k(y_1 - z) d(y_1 - z) - kb \frac{\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3 - n\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} d\bar{\rho}_1 = 0.$$

Складывая далее с (12), получим

$$b\bar{\rho}_2 d\bar{\rho}_2 + bd\bar{\rho}_3 + kb\bar{\rho}_3 d\bar{\rho}_1 + k(1-n)(y_1 - z) d(y_1 - z) - \quad (13)$$

$$- kb\bar{\rho}_3 \frac{(1-n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} d\bar{\rho}_1 = 0.$$

Но из (10) и (7) имеем

$$d\bar{\rho}_3 + \alpha d\bar{\rho}_1 - \alpha \frac{n\bar{\rho}_3 + (1-n)\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} = 0.$$

Сопоставляя с (13), получим

$$b\bar{\rho}_2 d\bar{\rho}_2 + bd\bar{\rho}_3 + k(1-n)(y_1 - z) d(y_1 - z) - \frac{kb}{\alpha} \bar{\rho}_3 d\bar{\rho}_3 = 0.$$

Теперь с помощью  $I_2$  нетрудно получить третий из первых интегралов:

$$I_3(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) = 2\bar{\rho}_2 + \frac{k}{b} (y_1 - z)^2 - k\bar{\rho}_1^2 - \frac{k}{z} \bar{\rho}_3^2 = C_3.$$

Для дальнейших вычислений удобно вместо  $I_2$  взять другой интеграл, полученный посредством  $I_2$  и  $I_3$ :

$$I_3(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) = \bar{\rho}_2^2 + k\bar{\rho}_1^2 + \frac{k\alpha}{b} (y_1 - z)^2 = C_2.$$

Уравнение

$$\Phi(I_1, I_2, I_3) = 0, \quad (14)$$

где  $\Phi$  — произвольная функция своих аргументов, в неявной форме дает общее решение дифференциального уравнения (6), являющегося основным уравнением нашей задачи. Однако наша физическая задача должна иметь одно единственное решение, и естественно, это решение должно быть частным случаем общего решения, определяемого из (14). Вместе с тем очевидно, что это частное решение должно определяться заданием начальных условий. Прежде, чем перейти к ним, заметим, что решение (14) можно написать также в параметрической форме:

$$I_1 = f_1(\zeta, \eta); \quad I_2 = f_2(\zeta, \eta); \quad I_3 = f_3(\zeta, \eta),$$

где  $f_1, f_2, f_3$  — в общем случае произвольные функции своих аргументов. Эти функции мы должны определить из начальных условий. Для нахождения начальных условий рассмотрим то состояние, когда между падающими потоками имеет место соотношение

$$y_1 = \frac{2y_2 y_3}{1 + 2y_2 + 2y_3}. \quad (15)$$

Исходя из физических соображений, можно утверждать, что в этом случае отраженный поток в каждой частоте будет равен соответствующему падающему потоку, то есть  $z_1 = y_1, z_2 = y_2, z_3 = y_3$ . В самом деле, при этом условии все  $\lambda_i = 1$ , по крайней мере в нашем дополнительном слое  $\tau_i$ . Следовательно, в каждой частоте будет происходить „чистое“ рассеяние. Таким образом, будут удовлетворяться как уравнения стационарного состояния (5), так и принцип инвариантности. По существу это будет состояние, при котором во всей среде будет соблюдаться детальное равновесие, то есть положение дела в смысле отношений между потоками излучения не будет отличаться от термодинамического равновесия.

Итак, наши функции  $f_1, f_2, f_3$  должны быть выбраны таким образом, чтобы при условии (15) имело место  $z_1 = y_1$ . Очевидно, эти условия удовлетворятся, если

$$f_1(\zeta, \eta) = \frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta} + \frac{\zeta}{k} + \frac{\eta}{z}$$

$$f_2(\zeta, \eta) = \zeta^2 + k \left( \frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta} \right)^2$$

$$f_3(\zeta, \eta) = 2\zeta + k \left( \frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta} \right)^2 - \frac{k}{z} \eta^2$$

Поэтому частное решение дифференциального уравнения (6), удовлетворяющее нашим начальным условиям, будет иметь вид

$$y_1 + z + \frac{2y_2 + l_2(v_1 - z)}{k} + \frac{2y_3 + l_3(y_1 - z)}{z} = \frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta} + \frac{\zeta}{k} + \frac{\eta}{z}$$

$$[2y_2 + l_2(y_1 - z)]^2 + k(y_1 + z)^2 + \frac{kn}{b}(y_1 - z)^2 = \zeta^2 +$$

$$+ k\left(\frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta}\right)^2 - \frac{k}{z}\eta^2. \quad (16)$$

$$2[2y_2 + l_2(y_1 - z)] + \frac{k}{b}(y_1 - z)^2 - k(y_1 + z)^2 - \frac{k}{z}[2y_2 + l_2(y_1 - z)]^2 =$$

$$= 2\zeta + k\left(\frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta}\right)^2 - \frac{k}{z}\eta^2.$$

Следует отметить, что все постоянные, входящие в решение задачи, зависят лишь от взаимного расположения энергетических уровней атома, потому все они являются наперед заданными числами для каждой среды, состоящей из атомов данного типа. Решение задачи заданное в таком виде, позволяет нам исследовать и построить зависимости  $z$  от падающих потоков  $y_i$ .

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

*Примечание:* Формула  $\rho_i = \frac{F_i + H_i}{c}$  справедлива в одномерном

случае. Мы могли бы, как известно, в качестве грубого приближения применить результаты решения одномерной задачи и к трехмерной проблеме. Однако, в трехмерной задаче с плоскопараллельными слоями

$$\rho_i = \frac{1}{c} \int I_i d\omega.$$

Этот интеграл может быть разбит на две части, в которых интегрирование будет производиться, соответственно, по внешней и по внутренней полусфере направлений. С другой стороны, учитывая, что

$$H_i = \int_{2\pi} I_i \cos \theta d\omega; \quad F_i = \int_{(2\pi)^-} I_i \cos \theta d\omega,$$

где интегрирование ведется по соответствующим полусферам и заменяя среднее значение  $\cos \theta$  на  $1/2$ , мы легко получим, что

$$p_i = \frac{2}{c} (F_i + H_i).$$

В связи с этим, в окончательные результаты вошли бы небольшие изменения. Однако в настоящей статье нашей целью было дать формальное решение одномерной задачи, и потому мы не рассматривали те изменения, которые необходимо будет внести для применения наших результатов к трехмерной задаче.

## POLYCHROMATIC DIFFUSE REFLECTION OF LIGHT FROM AN INFINITELY DEEP ONE-DIMENSIONAL MEDIUM

A. G. NICOGHOSSIAN

The problem of diffuse reflection of light from an infinitely deep one-dimensional medium consisting of atoms with three energetic levels has been discussed. All possible transitions between these levels are assumed to be permitted. The effects of „negative absorption“ were taken into account. The case of the illuminated medium by the radiation fluxes  $F_i$  with the frequencies  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) corresponding to the transitions  $3 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 1$  has been considered. Under the influence of incident fluxes the redistribution of atoms between different states occurs bringing into the change of the medium transparency.

Nonlinearity of the considered problem is due to the fact that the parameters characterizing the optical properties of the medium and scattering process are not constant, but are determined by the radiation field.

By means of equations (1) followed from the law of conservation of the quantum number in each spectral series the problem is reduced to the determination of the flux  $\varphi(F_i) = H_i$ , reflected from the medium in the frequency  $\nu_i$ . Using the invariance principle for flux  $\varphi(F_i)$ , reflected in the frequency  $\nu_i$ , the quasilinear differential equation with partial derivatives has been received. The solution of this equation is given in the parametrical form (16).

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, **39**, 159, 1964.
2. В. А. Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, **38**, 225, 1964.
3. А. Г. Никогосян, ДАН Арм. ССР, **39**, 227, 1964.
4. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. I, 78, АН Арм. ССР, Ереван, 1960.

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА  
ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Поступила 20 июня 1965

В статье рассматриваются два частных случая нелинейной трехмерной задачи переноса излучения, решение которых на основании метода самосогласованных оптических глубин, введенного В. А. Амбарцумяном в работе [2], сводится к решению некоторой линейной задачи и нахождению значения параметра  $u_0$  из уравнения (6) в первой задаче и  $u_1^0$ ,  $u_2^0$  из (21) и (22)—во второй задаче.

В статье [1] В. А. Амбарцумяном показано, что принцип инвариантности иногда с успехом применяется при решении нелинейных задач переноса излучения. В другой статье В. А. Амбарцумяна [2] на основании идеи о самосогласованных оптических глубинах разработан новый подход к нелинейным задачам: сперва решается в общем виде линейная задача для любой зависимости реальных оптических глубин (в разных частотах) от некоторой предельной (когда все атомы находятся в основном состоянии), а затем эта зависимость подбирается так, чтобы полученное поле излучения приводило к возбуждению атомов, которое соответствует той же зависимости.

В данной статье рассматриваются две трехмерные нелинейные задачи, которые вышеуказанным способом можно свести к линейным.

а) *Монохроматическое рассеяние в плоско-параллельной среде.* Пусть имеется плоско-параллельный слой, состоящий из атомов одного сорта, каждый из которых может находиться в двух состояниях— в нормальном и возбужденном. Пусть  $n_1$  и  $n_2$  будут числа атомов в соответствующих состояниях в единице объема. Пусть, наконец, на одну из плоских границ слоя падает излучение, интенсивность которого описывается выражением  $J_0(\gamma)$ . Связь между предельной опти-

ческой толщиной  $d\tau$  и реальной оптической толщиной  $dy$  слоя с линейной толщиной  $dl$  при данном режиме возбуждения атомов определяется формулами

$$d\tau = (n_1 + n_2) k dl \quad (1)$$

$$dy = \left( n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) k dl, \quad (2)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  — статистические веса соответствующих состояний.

Из (1) и (2) будем иметь

$$d\tau = \frac{\frac{n_1}{n_2} + 1}{\frac{n_1}{n_2} - \frac{g_1}{g_2}} dy. \quad (3)$$

Условие стационарности дает

$$n_1 \rho - n_2 \frac{g_1}{g_2} (\nu + \sigma) = 0; \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \left( 1 + \frac{\sigma}{\nu} \right), \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность излучения в единичном интервале частот на данной глубине.

Подставляя (4) в (3), получим

$$d\tau = \left[ 1 + \frac{g_1 + g_2}{g_1 \sigma} \rho \right] dy. \quad (5)$$

Интегрируя это равенство по  $\tau$  от 0 до  $\tau_0$ , получим

$$\tau_0 = y_0 + \frac{g_1 + g_2}{g_1 \sigma} Q(y_0), \quad (6)$$

где  $Q(y_0) = \int_0^{y_0} \rho(y) dy$ ,  $\tau_0$  — полная предельная, а  $y_0$  — полная реальная оптическая толщина среды. Наша первая цель — определить значение  $y_0$ . Функция  $\rho(y)$  удовлетворяет хорошо известному из линейной теории интегральному уравнению (см. например [3])

$$\rho(y) = \rho_0(y) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{y_0} \rho(x) E_1 |y - x| dx, \quad (7)$$

где

$$\rho(y_0) = \frac{2\pi}{c} \int_0^1 J_0(\eta) e^{-\frac{y}{\eta}} d\eta. \quad (8)$$

Достаточно из уравнения (7) определить  $Q(y_0)$ , подставляя которое в (6), получим уравнение относительно  $y_0$ .

Пусть функция  $B(y, \eta)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$B(y, \eta) = e^{-\frac{y}{\eta}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^y B(x, \eta) E_1|y-x| dx. \quad (9)$$

Уравнения (7) и (9) отличаются только свободными членами, причем свободный член уравнения (7) является суперпозицией членов типа свободного члена уравнения (9), поэтому решение уравнения (7) является суперпозицией решений уравнения (9) при различных значениях  $\eta$ , то есть

$$\rho(y) = \frac{2\pi}{c} \int_0^1 J_0(\eta) B(y, \eta) d\eta. \quad (10)$$

Для определения функции  $Q(y_0)$  можно также использовать следующее уравнение, которое эквивалентно уравнению (7):

$$Q(y) = \int_0^1 \eta J_0(\eta) (1 - e^{-\frac{y}{\eta}}) d\eta + \frac{\lambda}{2} Q(y_0) \int_0^y E_1(y-x) dx + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_0^y Q(x) [E_1|y-x| - E_1(x)] dx. \quad (11)$$

б) *Один частный случай полихроматического рассеяния.* Рассмотрим плоско-параллельный слой, состоящий из атомов, имеющих три состояния, но второе состояние является метастабильным (переход 1—2 запрещен). Пусть на одну из плоских границ слоя падают излучения, соответствующие переходам 1—3 и 2—3, описываемые выражениями  $J_1(\eta)$  и  $J_2(\eta)$ .

Вследствие отсутствия циклических переходов имеет место чистое рассеяние в каждой частоте.

Находим зависимость между реальными оптическими толщинами в каждой частоте и предельной оптической толщиной в первой частоте (то есть оптической толщиной в первой частоте в случае, когда

все атомы находятся в первом состоянии) слоя с линейной толщиной  $dl$ .

$$d\tau = (n_1 + n_2 + n_3) k_1 dl; \quad (12)$$

$$dy_i = \left( n_i - \frac{g_i}{g_3} n_3 \right) k_i dl \quad (i=1, 2) \quad (13)$$

Условия стационарности дают

$$n_1 \rho_1 - n_3 \frac{g_1}{g_3} (\rho_1 + \tau_1) = 0, \quad (14)$$

или

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{g_1}{g_3} \left( 1 + \frac{\tau_1}{\rho_1} \right); \quad \frac{n_1}{n_3} - \frac{g_1}{g_3} = \frac{g_1}{g_3} \frac{\tau_1}{\rho_1}. \quad (15)$$

Из (13) будем иметь

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\left( \frac{n_1}{n_3} - \frac{g_1}{g_3} \right) k_1}{\left( \frac{n_2}{n_3} - \frac{g_2}{g_3} \right) k_2}; \quad (16)$$

или, используя (15), получим

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\frac{g_1}{g_3} \frac{\tau_1}{\rho_1} k_1}{\frac{g_2}{g_3} \frac{\tau_2}{\rho_2} k_2}; \quad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{g_1 \tau_1 k_1 \rho_2}{g_2 \tau_2 k_2 \rho_1}. \quad (17)$$

Из (12) и (13) (при  $i=1$ ) имеем

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3} dy_1 = \frac{\frac{n_1}{n_3} + \frac{n_2}{n_3} + 1}{\frac{g_1}{g_3} \frac{\tau_1}{\rho_1}} dy_1 = \\ &= \frac{\frac{g_1}{g_3} \left( 1 + \frac{\tau_1}{\rho_1} \right) + \frac{g_2}{g_3} \left( 1 + \frac{\tau_2}{\rho_2} \right) + 1}{\frac{g_1}{g_3} \frac{\tau_1}{\rho_1}} dy_1 = \\ &= \left[ \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\tau_1 g_1} \rho_1 + 1 + \frac{g_2}{g_1} \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] dy_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая (17), из (18) получаем

$$d\tau = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_1 g_1} \rho_1 dy_1 + dy_1 + \frac{k_1}{k_2} dy_2. \quad (19)$$

Аналогичным образом получаем

$$d\tau = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_2 g_2} \frac{k_1}{k_2} \rho_2 dy_2 + \frac{k_1}{k_2} dy_2 + dy_1. \quad (20)$$

Интегрируя (19) и (20) от 0 до  $\tau_0$ , получим

$$\tau_0 = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_1 g_1} Q_1(y_1^0) + \frac{k_1}{k_2} y_2^0 + y_1^0 \quad (21)$$

$$\tau_0 = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_2 g_2} \frac{k_1}{k_2} Q_2(y_2^0) + \frac{k_1}{k_2} y_2^0 + y_1^0, \quad (22)$$

где

$$Q_k(y) = \int_0^y \rho_k(x) dx \quad (k = 1, 2). \quad (23)$$

Функции  $\rho_k(y)$  ( $k = 1, 2$ ) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\rho_k(y) = \frac{2\pi}{c} \int_0^1 J_k(\eta) e^{-\frac{y}{\eta}} d\eta + \frac{1}{2} \int_0^{y_k^0} \rho_k(x) E_1 |y - x| dx \quad (k = 1, 2). \quad (24)$$

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну за руководство.

Институт математики и механики  
АН АрмССР

## ON ONE PROBLEM OF THE RADIATION NON-LINEAR TRANSFER

N. B. YENGIBARIAN

Two particular cases of non-linear three-dimensional problem of the radiation transfer are considered. The solutions of this problem are brought to the solution of some linear problem by Ambartsumian's method of self-coordinated optical depths [2]. The parameters of these solutions  $y_0$  from the equation (6) and  $y_1^0$ ,  $y_2^0$  from equations (21) and (22) are found.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, **38**, 225, 1964.
2. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, **39**, 159, 1964.
3. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии, М., 1956.

К ВОПРОСУ О НЕСТАЦИОНАРНОСТИ СКОПЛЕНИЯ  
ГАЛАКТИК В ДЕВЕИ. Д. КАРАЧЕНЦЕВ  
Поступила 10 апреля 1965

Критически рассмотрено предположение Вокулера о существовании отдельных E и S облаков в области Девы. Присутствие в скоплении многих пар со смешанными (E и S) компонентами не согласуется с идеей пространственного разделения эллиптических и спиральных галактик. Применение теоремы вириала к скоплению дает для отношения массы к светимости  $f=665 M_{\odot} L_{\odot}$ . Показано, что учет слабых галактик почти не меняет  $f$ , несмотря на увеличение интегральной светимости скопления. Приводятся данные о сегрегации галактик по яркостям и типам вдоль радиуса скопления. Применение теоремы вириала дает для групп галактик в Деве  $\bar{f}=375 \pm \pm 180$ , а для пар  $\bar{f}=137 \pm 74$ . Анализируется влияние возможного присутствия „скрытой“ материи на величины  $f$  для пар, групп и скопления. Делается вывод, что никакими видами „скрытой“ материи невозможно удовлетворительно объяснить полученные значения  $f$ . Нестационарность и расширение скопления и входящих в него подсистем наряду с образованием новых галактик в нем наилучшим образом согласуется со всей совокупностью наблюдательных данных. Обнаружено ожидаемое при расширении уменьшение дисперсии лучевых скоростей галактик к краю скопления.

1. Известно, что применение теоремы вириала к скоплению галактик в Деве в предположении его стационарности дает для членов скопления отношение массы к светимости  $f$  намного больше нормальных значений, определяемых по внутреннему вращению отдельных галактик. Расхождение достигает почти двух порядков. Попытки устранения его осуществлялись тремя принципиально различными путями. Предполагалось, что:

а) на дисперсию скоростей галактик, определяющую кинетическую энергию скопления, влияют систематические эффекты (наложение галактик фона, наличие подскоплений) [1],

б) в скоплении присутствует большое количество невидимой темной материи [2],

в) скопление нестационарно и распадается [3].

Благодаря относительно богатому материалу по лучевым скоростям и звездным величинам галактик в области Девы, имеется возможность применить теорему вириала не только ко всему скоплению в целом, но и к отдельным динамически изолированным образованиям внутри него. Это позволяет сделать более определенное заключение о причине большого значения  $f$ .

2. Но прежде всего рассмотрим вопрос о физическом единстве наблюдаемой совокупности галактик в Деве. Вокулер [4], основываясь на лучевых скоростях галактик в центральной части скопления, выделяет два пространственно разделенных и проектирующихся друг на друга облака галактик. Одно состоит из эллиптических и линзовидных галактик и имеет среднюю лучевую скорость  $v_E = 950$  км/сек, другое, со спиральным населением, имеет скорость  $v_S = 1450$  км/сек. Однако такое сугубо кинематическое разделение скопления на две части вызывает некоторые возражения. Известно, что в области Девы много тесных пар галактик. Подсчет показывает, что только небольшая часть их объяснима эффектом случайного проектирования, то есть большинство пар следует считать физическими. Поэтому, если бы E и S облака галактик случайным образом проектировались друг на друга, то число смешанных (E + S) пар было бы значительно меньше, чем пар с только эллиптическими (E + E) или спиральными (S + S) компонентами. Подсчеты и классификация галактик на картах Паломарского атласа до предельного углового диаметра  $d_n = 1'.12$  показывает, что в области радиусом в  $5^\circ$  вокруг центра скопления Девы имеются 4 (E + E), 7 (E + S) и 8 (S + S) пар с угловым расстоянием компонентов менее  $5'.6$ . Таким образом, недостатка в смешанных парах по сравнению с (E + E) и (S + S) парами не наблюдается. Вероятность того, что смешанные пары образованы при случайном проектировании E и S галактик, менее 0.03. Наглядными примерами могут служить спирали NGC 4438 в известной цепочке из эллиптических галактик и NGC 4647 в группе эллиптических галактик к востоку от центра скопления. Обе спирали расположены в группах на расстоянии менее  $5'.6$  от соседних эллиптических галактик.

Более детальное распределение средних лучевых скоростей в зависимости от морфологического типа галактик также вызывает сомнение в реальности существования отдельных E и S облаков. В табл. 1 представлены средние лучевые скорости галактик для пяти хаббловских типов E, S0, Sa, Sb, Sc. Чтобы судить о влиянии размеров площади, на которой проводилось усреднение лучевых ско-

ростей, а также точности классификации, приведены в отдельности данные для выделенной Вокулером области (первая строка) и по всему району скопления  $\alpha = 12^h \div 13^h$ ,  $\delta = 0^\circ \div +20^\circ$  (вторая строка). Для последней строки морфологические типы брались по Хьюмасону, Мэйоллу и Сандэйджу [5]. Из анализа таблицы можно заключить, что средняя лучевая скорость для S<sub>b</sub> галактик, а в последней строке и для S<sub>b</sub>, почти не отличается от таковых для эллиптических и линзовидных галактик. Таким образом, исходя из лучевых скоростей было бы правильнее говорить не о E и S, а о E—S0—Sa—(Sb) и (Sb)—Sc облаках. Однако не видно никаких физических причин, способных объяснить такое странное разделение различных подтипов спиралей.

Таблица 1

	E	S0	Sa	Sb	Sc
Вокулер E и S области	981	957	942	1283	1604
Вокулер Все поле	994	1016	953	1371	1431
ХМС Все поле	1018	1020	1152	1096	1395

Распределение средних исправленных лучевых скоростей в км/сек по типам галактик. В первой строке данные только для выделенной Вокулером области; во второй и третьей—по всему полю  $\alpha = 12^h \div 13^h$ ,  $\delta = 0^\circ \div +20^\circ$ . Хаббловские типы в последней строке взяты по определениям Хьюмасона, Мэйолла и Сандэйджа. Компактная группа вокруг NGC 4261 при анализе не учитывалась.

3. Для вычисления массы скопления по теореме вириала воспользуемся распределением галактик до  $15^m 7$  в области Девы, содержащихся в I и II томах каталога Цвикки [6]. Ввиду явной несферичности скопления в Деве, удобно массу его вычислять посредством подсчетов галактик в параллельных полосах. При этом подсчеты следует делать в полосах, ориентированных как вдоль большой оси скопления, то есть при  $\alpha = \text{const}$ , так и в перпендикулярном направлении. Считая, что все члены скопления имеют одинаковую массу, для полной массы всего скопления имеем выражение

$$M = 233 \frac{N^2}{\sum_{i=1}^{\infty} [N_i(y) \Delta y]^2} \langle \Delta v^2 \rangle \Delta y, \quad (1)$$

где  $\langle \Delta v^2 \rangle$  — среднее значение квадрата дисперсии пространственных скоростей галактик в км/сек,  $\Delta y$  — ширина полосы в парсеках,

$N_i(y) \Delta y$  — число галактик в  $i$ -той полосе, а  $N$  — полное число галактик. Масса скопления при этом получается в единицах солнечной. Чтобы в значительной мере исключить влияние эффекта подскоплений на дисперсию скоростей галактик, в выражение (1) подставлялось  $\langle \Delta v^2 \rangle$  не для отдельных галактик, а для центров групп и пар, члены которых имеют измеренные лучевые скорости. Подсчеты в полосах вдоль  $\delta = \text{const}$  дали для массы скопления величину  $M_s = 9.34 \cdot 10^{14} M_\odot$ ; подсчеты в перпендикулярном направлении —  $M_s = 6.86 \cdot 10^{14} M_\odot$ . Естественно, что реальное значение массы скопления соответствует среднему от этих крайних случаев. Таким образом получаем  $M = (8.1 \mp 1.3) \cdot 10^{14} M_\odot$ . Интегральную светимость скопления можно вычислить по фотометрическим данным каталога Цвикки. При этом следует учитывать, что звездные величины Цвикки систематически слабее величин Холмберга и Хьюмасаона, Мэйолла, Сандэйджа [1] на  $+0^m.40$ . Приводя к системе Холмберга и учитывая галактическое поглощение ( $0^m.25$ ), для интегральной фотографической звездной величины скопления имеем  $m_{рк} = 5^m.91$ . При средней лучевой скорости скопления  $v = 1182 \text{ км/сек}$ , значении параметра Хаббла  $h = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{мпс}$  и абсолютной фотографической величине Солнца  $+5^m.37$  интегральная светимость скопления равна  $1.21 \cdot 10^{13} L_\odot$ . Заметим, что использованный нами ранее [7] прием оценки интегральных светимостей скоплений по угловым диаметрам галактик с помощью калибровочной зависимости  $m_{рк} \sim 5 \lg d$ , дал для скопления в Деве светимость  $1.02 \cdot 10^{13} L_\odot$ . Согласие между двумя оценками следует считать хорошим, если учесть еще, что в последнем случае предельная звездная величина подсчетов меньше, чем у Цвикки примерно на  $0^m.7$ . Интегральная видимая величина скопления по Холмбергу [1]  $m_{рк} = 6^m.0$  также близка к приведенному выше значению. Итак, при  $M = 8.1 \times 10^{14} M_\odot$  и  $L = 1.21 \cdot 10^{13} L_\odot$  отношение массы к светимости для скопления в Деве равно  $668 M_\odot / L_\odot$  с точностью  $\pm 20\%$ . Представляет интерес выяснить, в какой степени отношение массы к светимости  $f$  зависит от предельной звездной величины измеряемых галактик. С этой целью подсчеты галактик в полосах по каталогу Цвикки проводились отдельно до  $15^m.7$ ,  $15^m.0$  и  $14^m.0$  звездных величин. Соответствующие значения  $f$  получились следующими:  $f_{15.7} = 668$ ,  $f_{15.0} = 665$  и  $f_{14.0} = 694$ . Таким образом, несмотря на увеличение интегральной светимости скопления при учете более слабых галактик, отношение массы к светимости меняется всего на  $4\%$ . Такое постоянство  $f$  объясняется тем, что в скоплении имеется сегрегация ярких и слабых галактик. Относительно большая распространенность слабых га-

лактик на периферии скопления, чем в центре, обуславливает увеличение эффективного радиуса скопления с ростом предельной звездной величины измеряемых галактик. А это влечет за собой увеличение массы скопления, находимой из теоремы вириала. Поэтому одностороннее изменение отношения  $f$  с 400 до 200, которое сделал Цвикки [8] для скопления  $01^h23^m - 01^s38'$  при учете слабых галактик, выглядит малооправданным и нуждается в проверке.

4. Распределение галактик в области скопления Девы крайне неоднородно. Статистические соображения показывают, что флуктуации распределения не могут быть вызваны случайными причинами. Малое галактическое поглощение в направлении Девы также не способно объяснить наблюдаемые неоднородности. Естественно предположить, что галактики скопления образуют физические группы и кратные системы. На основе имеющегося материала [5, 9] представляется возможность применить теорему вириала к 6 парам и 5 группам галактик и вычислить для них соответствующие значения массы и отношения массы к светимости. Результаты расчетов приведены в табл. 2 и 3. Суммарные массы групп вычислялись по формуле

$$M = \gamma^{-1} \frac{3\pi}{2} \frac{N}{N-1} \langle \Delta v_r^2 \rangle \rho, \quad (2)$$

Таблица 2

NGC	$\langle \Delta v_r^2 \rangle^{1/2}$	$\rho_{\text{кнс}}$	$\Sigma L/L_{\odot}$	$f/f_{\odot}$
4374, 4387, 4406, 4435, 4438, 4458, 4461, 4473, 4477, 4479.	850	182	$1.4 \cdot 10^{11}$	1137
4464, 4467, 4472, 4492.	274	70	$9.3 \cdot 10^{10}$	81
4478, 4486, апоп.	91	40	$6.6 \cdot 10^{10}$	9
4550, 4551, 4552.	317	64	$2.5 \cdot 10^{10}$	482
4621, 4638, 4647, 4649, 4660.	368	88	$9.8 \cdot 10^{10}$	168

В первом столбце приведены номера галактик по NGC, входящих в группы, во втором и третьем, соответственно, — дисперсия лучевых скоростей в км/сек и среднее расстояние между компонентами в клс. В четвертом столбце даны интегральные светимости групп, а в последнем — отношение массы к светимости в единицах солнечного.

где  $\gamma$  — постоянная тяготения,  $\langle \Delta v_r^2 \rangle$  — среднее значение дисперсии лучевых скоростей галактик,  $N$  — число их в рассматриваемой системе, а  $\bar{r}$  — среднее расстояние между членами системы в проекции на картинную плоскость.

Таблица 3

NGC	$\Delta v_r$	$R_{12 \text{ кпс}}$	$\Sigma L/L_\odot$	$f/f_\odot$
4294 4299	203	26	$5.7 \cdot 10^9$	175
4382 4394	<50	36	$5.2 \cdot 10^{10}$	<1.5
4527 4536	204	128	$4.3 \cdot 10^{10}$	110
4567 4568	129	6.2	$1.7 \cdot 10^{10}$	5
4647 4749	204	13	$5.5 \cdot 10^{10}$	10
4754 4762	393	47	$2.8 \cdot 10^{10}$	523

Данные о парях галактик. Обозначения те же, что и в табл. 2.

Для расчета масс пар галактик использовалось выражение:

$$M = \gamma^{-1} \frac{12}{\pi} \langle \Delta v_{12}^2 \rangle \rho_{12}; \quad (3)$$

здесь  $\rho_{12}$  — расстояние между компонентами пары в проекции на картинную плоскость,  $\langle v_{12}^2 \rangle$  — квадрат разности лучевых скоростей, а  $12/\pi$  — фактор проекции в предположении, что члены пар движутся по эллиптическим орбитам.

Обе формулы были получены из теоремы вириала при условии, что массы членов систем одинаковы. Пары галактик считались изолированными на том основании, что вклад окружающих галактик в потенциальную энергию пары составлял менее 20%.

Как видно из табл. 2 и 3, дисперсия значений  $f$  и  $u$  группы и  $u$  пар большая. Среднее арифметическое отношение массы к светимости для групп составляет 375 с квадратичной погрешностью  $\pm 180$ . Среднее значение для пар заметно меньше:  $f_{\text{пар}} = 137 \pm 74$ . Суммарная светимость рассмотренных групп составляет 35% от всей светимости скопления. Светимость пар — 16%.

5. Прежде чем перейти к обсуждению полученных результатов, рассмотрим еще несколько морфологических характеристик скопления в Деве как целого. Подсчеты и классификация галактик на Па-

ломарских картах до предельного диаметра  $1'.12$  позволили выявить отчетливые сегрегации членов скопления по яркостям и типам. Результаты в виде изменения среднего углового диаметра галактик  $\bar{d}$  и процентного состава E и S0 галактик вдоль радиуса скопления  $R$  представлены в табл. 4. Центр скопления отождествлялся с радиогалактикой NGC 4486, имеющей пекулярную скорость всего  $12 \text{ км/сек}$ . Последняя строка табл. 4 дает зависимость от радиуса скопления дисперсии лучевых скоростей галактик. Как видим, уменьшение всех трех величин вдоль радиуса довольно монотонное.

Таблица 4

$R^\circ$	0—2	2—4	4—8	8—16
$\bar{d}$	2'.54	2'.20	2'.06	2'.02
E+S0 (%)	64	41	31	20
$ \overline{v-v}  \text{ км/сек}$	629	613	482	332

Изменение среднего углового диаметра галактик  $\bar{d}$ , процентного содержания E и S0 типов E+S0 (%) и дисперсии лучевых скоростей галактик  $|\overline{v-v}|$  вдоль радиуса скопления. Последняя зона 8—16° охватывает в основном южный сектор скопления.

6. Рассмотрим различные возможности объяснения большого значения  $f$  для скопления в целом. Интуитивно кажется очевидным, что учет эффектов, искажающих реальную дисперсию скоростей галактик, не может менять значение  $f$  на порядок. Действительно, при вычислении  $f$  использовался прием, автоматически учитывающий эффект подскоплений. Влияние же галактик переднего и заднего фона должно быть несущественным по следующей причине. Если выделить две группы галактик с экстремальными значениями скоростей, скажем, с  $v_r < 400 \text{ км/сек}$  и  $v_r > 2000 \text{ км/сек}$ , то средняя звездная величина 8 галактик в первой группе будет  $11^m3$ , а для 9 галактик второй группы  $11^m7$ . Поскольку скопление в Деве имеет угловые размеры  $\sim 20^\circ$ , то галактики, находящиеся на передней границе скопления, должны быть ярче галактик на задней границе в среднем на  $0^m7$ . Если бы в выделенных нами группах содержалась ощутимая доля галактик фона, то разность звездных величин была бы заметно больше, чем  $0^m7$ . Следовательно, влияние эффекта фона на дисперсию скоростей галактик в действительности невелико.

Обсудим возможность присутствия в Деве „скрытой“ материи. Поскольку находимые по внутреннему вращению отдельных галактик значения  $f$  заключены в среднем в пределах 5—20, то на долю тем-

ной материи в Деве следует отнести 80% вычисленной по теореме вириала массы. Цвикки полагает, что существенный вклад в массу скопления могут вносить компактные галактики. Однако первые определения  $f$  для компактных галактик [10] дали  $\bar{f} < 115$ . Таким образом, если бы даже скопление в Деве целиком состояло из компактных галактик, то и тогда расхождение устранить не удалось бы. В качестве курьеза отметим, что в одной из групп (возле NGC 4486) находится компактная галактика  $12^{\text{h}}28^{\text{m}}0 + 12^{\circ}46'$ , но именно у этой группы отношение массы к светимости самое меньшее из всех пяти групп. Предполагать наличие большого количества пыли в скоплении также не приходится, так как в области Девы видно много далеких скоплений галактик. Если допустить, что за большое значение  $f$  ответственен некий метагалактический фон невидимой (скажем, пейтринной) материи, то плотность его должна быть на два порядка больше критической при  $h=75 \text{ км}\cdot\text{сек}^{-1}\cdot\text{мпс}^{-1}$ . А это не было бы незамеченным по наблюдениям далеких скоплений галактик. Остается последняя мыслимая форма „скрытой“ материи — темные компактные образования с массами порядка масс звезд или галактик. Однако распределение ее в скоплении Девы должно быть очень причудливым. Действительно, так как  $f$  для пар галактик на порядок выше нормальных значений, то в малом объеме между членами пар должно концентрироваться большое количество подобных объектов. Для групп галактик отношение  $f$  в среднем еще в 2.5 раза больше, чем для пар. Но по сравнению с  $f$  для всего скопления, отношение массы к светимости в группах приблизительно в два раза меньше. Следовательно, темные объекты должны быть рассредоточены между группами галактик. Вряд ли такая запутанная картина может служить подходящей основой для объяснения аномальных значений  $f$ .

Проще и разумнее всего допустить, что скопление галактик в Деве нестационарно и расширяется. Тогда применение теоремы вириала к скоплению, а также к подсистемам галактик в нем, дает фиктивное значение массы. Величина отношения массы к светимости при этом отражает степень нестационарности или кинетического избытка системы. Единственным серьезным возражением против расширения скопления является малое время экспансии. Для Девы оно равно  $4 \cdot 10^9$  лет. Поэтому за время  $\sim 10^{10}$  лет большинство скоплений рассеялось бы и не наблюдалось. Но при последовательном объяснении больших значений  $f$  у групп и пар галактик следует допустить, что и эти образования распадаются. Тогда экспансионный возраст групп и пар в Деве получается порядка  $3 \cdot 10^9$  лет. Молодость этих образований определенно указывает на то, что в скоплении

идет процесс возникновения новых галактик. Благодаря ему скопление не рассеивается и не теряется на общем фоне.

Подтверждением нестационарности скопления и молодости отдельных образований в нем могут служить несимметричная форма скопления, присутствие в нем голубых галактик Aro, наличие выброса из ядра радиогалактики NGC 4486 и другие пекулярные особенности. Убывание дисперсии лучевых скоростей галактик от центра скопления к периферии указывает на радиальный характер движений в скоплении, что естественным образом объясняется его расширением.

Автор признателен академику В. А. Амбарцумяну и чл.-корр. АН АрмССР Б. Е. Маркарян за обсуждение результатов работы.

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

## ON INSTABILITY OF THE VIRGO CLUSTER OF GALAXIES

I. D. KARACHENTSEV

It is shown, that the presence of many pairs of galaxies with mixed (E and S) components in the cluster does not agree with Vaucouleurs's assumption on the existence of separate E and S clouds in Virgo cluster region.

The Virial Theorem gives for the ratio of mass to the luminosity in this cluster  $f=665 M_{\odot}/L_{\odot}$ . Possible presence of faint galaxies can not change  $f$  appreciably. The data on the segregation of the galaxies by the brightnesses and the types along the radii of the cluster are given.

The values  $\bar{f}=375 \pm 180$  for 5 groups of the galaxies and  $\bar{f}=137 \pm 74$  for the pairs have been obtained. The influence of possible presence of all kinds of „latent“ matter can not explain these values of  $f$ . The instability and the expansion of the cluster together with the origin of new galaxies in it, is in the best agreement with the observational data. The decrease of the dispersion of the radial velocities of the galaxies to the boundary of the cluster, expected for this case, has been found.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. E. Holmberg, A. J., 66, 10, 620, 1961.
2. F. Zwicky, Morphological astronomy, Berlin, Springer, 1957.
3. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 2, 298, АН АрмССР, Ереван, 1960.
4. G. de Vaucouleurs, Ap. J., Suppl. ser., VI, 56, 213, 1961.

5. *M. L. Humason, N. U. Mayall, A. R. Sundage, A. J.*, 61, 3, 97, 1956.
6. *F. Zwicky, E. Herzog, P. Wild*. Catalogue of galaxies and of clusters of galaxies, I, California Institute of technology, 1961.
7. *F. Zwicky, E. Herzog*. Catalogue of galaxies and of clusters of galaxies, II, California Institute of technology, 1963.
8. *И. Д. Караченцев*, Изв. АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), 17, 4, 109, 1964.
9. *N. U. Mayall, A. de Vaucouleurs, A. J.*, 67, 6, 363, 1962.
10. *F. Zwicky*, Ap. J., 140, 4, 1467, 1964.

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРАХ ИЗЛУЧЕНИЯ  
НЕПРАВИЛЬНЫХ И ПОЛУПРАВИЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ЗВЕЗД

Ф. И. ЛУКАШКАЯ и А. П. ЗЕЛЫЦМАН

Поступила 10 июля 1965

Исправлена 3 сентября 1965

Статья представляет собой некоторое развитие работы Граттона, изучавшего модель В. А. Амбарцумяна для быстрых неправильных переменных звезд. В случае экспоненциального характера возгорания и спадания вспышки найдено интегральное выражение для распределения амплитуд вспышек, основывающееся на наблюдаемых распределениях блеска исследуемых звезд. При гамма-распределении для интенсивности излучения, вызванного вспышками, распределение амплитуд получено в явном виде. В качестве иллюстрации рассмотрены вспыхивающие звезды PZ Моп и AE Aqr. Обсуждаются некоторые следствия полученных соотношений.

Исследования функций распределения блеска ряда неправильных и полуправильных переменных звезд приводят к выводу о возможности рассмотрения процесса изменения блеска этих звезд как стационарного случайного процесса [1—3]. Для звезд типа Т Тау такой характер изменения блеска был предсказан В. А. Амбарцумяном еще в 1957 г. [4]. Ему же принадлежит модель таких звезд, которая исследовалась Граттоном [5]. Согласно этой модели, интенсивность излучения неправильной переменной звезды равна сумме начальной интенсивности  $I_{\min}$  и добавки  $\Delta I$ , являющейся суммой вкладов отдельных вспышек, происходящих на звезде с постоянной средней частотой через случайные интервалы времени. В данной работе мы будем исходить из формулы (1), в которую переходит формула Граттона (формула (21) в [5]), если освободиться от предположения об одинаковой форме кривых изменения интенсивности вспышек со временем для разных вспышек.

$$\ln \psi(w) = v \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a) da \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\log(a, t)} - 1] dt. \quad (1)$$

Здесь 
$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \Delta l} p(\Delta l) d(\Delta l), \quad (2)$$

$\nu$  — средняя частота вспышек,  $g(a, t)$  — функция, описывающая форму вспышки, через  $a$  обозначен набор параметров, определяющих амплитуду  $E$  и форму вспышки,  $f_1(a)$  и  $p(\Delta l)$  — плотности вероятностей. Примем далее

$$\begin{aligned} a &= [E, \gamma_1, \gamma_2] \\ g(a, t) &= g(E, \gamma_1, \gamma_2, t) \\ f_1(a) &= f(E) \varphi(\gamma_1, \gamma_2) dE d\gamma_1 d\gamma_2 \\ g(E, \gamma_1, \gamma_2, t) &= \begin{cases} Ee^{\gamma_1 t} & \text{при } t < 0 \\ Ee^{-\gamma_2 t} & \text{при } t > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Форма вспышки согласно (3) изображена на рис. 1.  $g(E, \gamma_1, \gamma_2, t)$  имеет смысл интенсивности излучения вспышки с амплитудой  $E$ , скоростью возгорания  $\gamma_1$  и скоростью затухания  $\gamma_2$  через промежуток времени  $t$  от начала спада блеска.  $E$  не зависит от  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

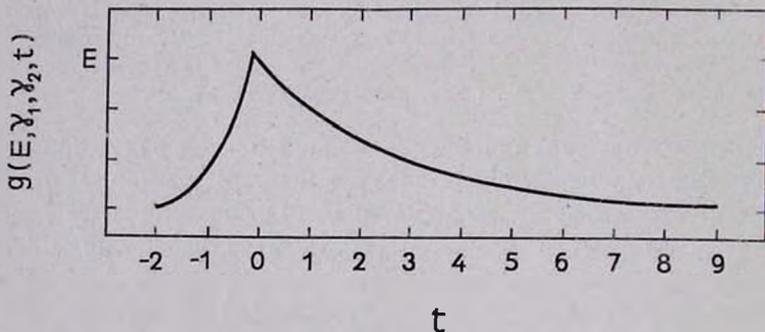


Рис. 1.

При этих предположениях удается разрешить интегральное уравнение (1) относительно  $f(E)$ . Подействовав для этого на (1) оператором  $\omega \frac{d}{d\omega}$ , получим

$$\omega \frac{d}{d\omega} \ln \psi(\omega) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\gamma_1, \gamma_2) \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) d\gamma_1 d\gamma_2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(E) e^{i\omega E} dE - 1 \right]. \quad (4)$$

Обозначим

$$v \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\gamma_1, \gamma_2) \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) d\gamma_1 d\gamma_2 = b. \quad (5)$$

Пусть

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(E) e^{i\omega E} dE = 0, \quad (6)$$

тогда из (4)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \frac{d}{d\omega} \ln \psi(\omega) = -b. \quad (7)$$

Учтя (5) и (7), при помощи обратного преобразования Фурье получим из (4) искомое распределение

$$f(E) = \frac{1}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ b + \omega \frac{d}{d\omega} \ln \psi(\omega) \right] e^{-i\omega E} d\omega. \quad (8)$$

Так как  $\psi(\omega)$  может быть определена из наблюдений блеска звезд при помощи соотношения (2), а  $b$  — при помощи соотношения (7),  $f(E)$  определяется из наблюдений. Оказывается, что для ряда неправильных и полуправильных переменных  $p(\Delta I)$  можно считать плотностью вероятности гамма-распределения, то есть

$$p(\Delta I) = \frac{7}{\Gamma(\alpha + 1) \beta^{\alpha+1}} \Delta I^\alpha e^{-\frac{\Delta I}{\beta}}, \quad (9)$$

так как в этом случае вычисленные из (9) и наблюдаемые функции распределения для блеска хорошо согласуются.

Аналитические выражения функций распределения для изменения блеска получались при помощи известной формулы для функции распределения функции по функции распределения аргумента и определения

$$\frac{I_{\min} + \Delta I}{I_{\min}} = 2.512^{m_{\min} - m}$$

Если  $p(\Delta I)$  имеет вид (9), то распределение для  $\Delta m = m_{\min} - m$  запишется

$$\varphi(m_{\min} - m) = \frac{0.9211}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{I_{\min}}{\beta} \right)^{\alpha+1} 2.512^{m_{\min} - m} (2.512^{m_{\min} - m} - 1)^{\alpha} \times \\ \times e^{-\frac{I_{\min}}{\beta} (2.512^{m_{\min} - m} - 1)} \quad (10)$$

Параметры этого распределения  $\beta/l_{\min}$  и  $\alpha$  определяются из двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial (m_{\min} - m)} &= 0 \\ \varphi(m_{\min} - m) &= \varphi_{\max} \end{aligned} \right\} \text{при } m_{\min} - \overset{\Delta}{m} = \Delta \overset{\Delta}{m}. \quad (11)$$

Значения предпочтительного блеска  $\overset{\Delta}{m}$  и величина максимальной вероятности  $\varphi_{\max}$  снимаются с наблюдаемых функций распределения. Система (11) решается графически. Вычисленные функции распределения и их сравнение с наблюдениями для достаточно типичных функций PZ Mon [6] и AE Aqr [7] приведены на рис. 2. Их согласие является основанием для принятия для  $p(\Delta l)$  распределения (9). По-видимому, (10) — одно из возможных аналитических представлений функций распределения блеска неправильных и полуправильных переменных звезд.

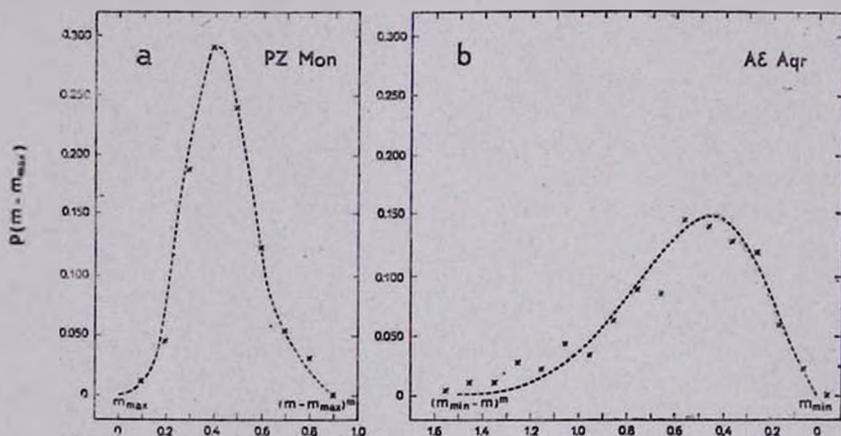


Рис. 2. а. PZ Mon,  $\alpha = 7$ ,  $\frac{l_{\min}}{\beta} = 12.6$  б. AE Aqr,  $\alpha = 1.54$ ;  $\frac{l_{\min}}{\beta} = 3.66$ .

Крестиками обозначены наблюдаемые значения.

Если принять для  $p(\Delta l)$  распределение (9), то  $f(E)$  удастся получить в явном виде. Действительно,

$$\psi(\omega) = C \int_0^{\infty} \Delta l^{\alpha} e^{-\Delta l \left( \frac{1}{\beta} - i\omega \right)} d(\Delta l) = C' \left( \frac{1}{\beta} - i\omega \right)^{-(\alpha+1)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \frac{d}{d\omega} \ln \psi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -(\alpha + 1) \frac{i\omega}{i\omega - \frac{1}{\beta}} = -(\alpha + 1),$$

откуда из (7)

$$b = \alpha + 1, \quad b + \omega \frac{d}{d\omega} \ln \psi(\omega) = - \frac{\alpha + 1}{\beta \left( i\omega - \frac{1}{\beta} \right)}. \quad (12).$$

Отсюда и из (8) искомое распределение имеет вид

$$f(E) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{E}{\beta}} \quad \text{при } E > 0,$$

$$f(E) = 0 \quad \text{при } E < 0. \quad (13)$$

Заметим, что (6) для него выполняется. Из наблюдаемых функций распределения при помощи (11) определяются  $\alpha + 1$  и  $\frac{\beta}{I_{\min}} = t$ .

Они связаны со средним значением модуля дополнительной интенсивности. Действительно, из (9) вытекает, что

$$\frac{|\Delta I|}{I} = (\alpha + 1) t.$$

Откуда, учтя (5) и (12), получим

$$\beta = \frac{|\Delta I|}{v \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right)}.$$

Из формулы (10) видно, что функции распределения блеска будут совпадать, когда  $\alpha_1 = \alpha_2$  и  $\frac{I_{\min 1}}{\beta_1} = \frac{I_{\min 2}}{\beta_2}$ . По-видимому, такие равенства могут иметь место для звезд с очень различающимися состояниями, так как близкие по форме функции распределения наблюдаются для ряда быстрых неправильных карликов и медленных полуправильных гигантов и сверхгигантов, например для PZ Моп и UX Aug, T Тау и Y Gem [8]. Если сделать естественное предположение, что у звезд с быстрыми изменениями блеска  $\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}$  меньше, чем у медленных переменных, то на основании (5) и (12) можно сделать вывод, что у первых вспышки происходят с большей средней частотой.

Распределение (13) имело бы место, если бы

$$E = \left( \frac{x_1}{\sigma} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{\sigma} \right)^2,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — нормально распределенные случайные величины с

параметрами распределений  $0$  и  $\varepsilon = \sqrt{\frac{\beta}{2}}$ . Если под  $x_1$  и  $x_2$  понимать проекции на координатные оси некоторой характерной длины области, охваченной вспышкой, то  $E$  будет пропорционально размерам области.

ГАО АН УССР

## ON THE STATISTICAL PARAMETERS OF THE RADIATION OF IRREGULAR AND SEMIREGULAR VARIABLE STARS

F. I. LUKATSKAJA, A. P. ZELTSMAN

The paper is concerned with a certain development of the Gratton study of the Ambartsumian model for rapid irregular stars. In the case of exponential increase and decrease of each flare an integral expression for the distribution of flare amplitudes has been found. It is based on observed distribution functions of light. The amplitude distribution in evident form is given for gamma-distribution of the flare intensity. Flare stars AE Aqr and PZ Mon are considered as examples. Some consequences of obtained expressions are discussed.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. И. Лукацкая, АИ АН СССР, № 223, 1961.
2. Ф. И. Лукацкая, ПЗ 14, № 4, 1963.
3. Ф. И. Лукацкая, Исследования по физике звезд и диффузной материи, „Наукова думка“, Киев, 1964.
4. В. А. Амбарцумян, „Нестационарные звезды“, 11, АН АрмССР, Ереван, 1957.
5. L. Gratton, „Atti. conv. astron. Milano-Merale, 1962“, Pavia, 1963.
6. S. Garoschkin, ТТВ, № 13, 39, 1955.
7. F. Leououvet, J. Daquillon, Ann. d'Aph., 17, 416, 1954.
8. Ф. И. Лукацкая, ПЗ, 15, № 5.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗВЕЗДНЫЕ ОБОЛОЧКИ, СОДЕРЖАЩИЕ  
ЭЛЕКТРОНЫ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

Г. А. ГУРЗАДЯН

Поступила 13 апреля 1965

Рассматривается следующая задача: в атмосфере какой-нибудь звезды, непосредственно над фотосферой, появляются нетепловые, но и не крайне релятивистские электроны с кинетической энергией, превышающей собственную энергию, то есть  $E > mc^2$ . Рассеяние фотонов на таких электронах будет сопровождаться увеличением частоты рассеянного после столкновения фотона (обратный комптон-эффект). Ищется спектр излучения, выходящего из слоя или облака, состоящего из упомянутых электронов, если известен планковский спектр фотосферического излучения звезды. Поставленная задача решена в первом приближении для случаев монохроматических и немонахроматических электронов.

Показано, что эффект рассеяния фотосферического излучения на быстрых электронах приводит к усилению коротковолновой части спектра и ослаблению его инфракрасной части. Определены теоретические показатели цвета и амплитуды колебания яркости при „вспышке“ звезды, то есть при появлении быстрых электронов над ее фотосферой. Эффект повышения яркости и посинения звезды наиболее сильно выражается у холодных карликов и быстро уменьшается с переходом к звездам ранних типов. Отмечается возможность выделения  $\gamma$ -излучения при вспышке и неизбежность нагрева фотосферы вспыхивающих звезд „извне“, под действием собственного  $\gamma$ -излучения.

Обычно в астрофизике приходится иметь дело с двумя типами совокупностей электронов—тепловых и крайне релятивистских. При этом средняя энергия тепловых электронов бывает порядка нескольких электрон-вольт, в отдельных случаях (например, в солнечной короне)—нескольких сот электрон-вольт, а энергия крайне релятивистских электронов —  $10^9$ — $10^{12}$  эв. Тепловые электроны возникают главным образом в результате фотоионизации атомов и ионов; ими обусловлен широкий круг хорошо изученных явлений, известных как „тепловых“. В противоположность этому, процессы, связанные с

релятивистскими электронами, в частности, генерируемое ими магнитотормозное (синхротронное) излучение, имеют исключительно „тепловой“ характер. Менее ясны условия возникновения релятивистских электронов в той или иной среде; возможно, что они в одних случаях появляются в результате ядерных превращений, а в других — в результате ускорения обычных электронов в магнитных полях среды.

Наряду с этим можно допустить априори возможность появления в звездных атмосферах электронов с энергией, несколько превышающей собственную энергию, то есть когда  $E \gtrsim mc^2$ . Такие электроны не являются тепловыми, но их нельзя считать и крайне релятивистскими. Поэтому в дальнейшем их будем называть „быстрыми электронами“. Не затрагивая пока вопроса о том, в результате каких именно явлений возможно возникновение быстрых электронов в атмосфере звезды, ограничимся в настоящей статье чисто формальным рассмотрением задачи о взаимодействии таких электронов с полем фотосферического излучения самой звезды. Полученные при этом результаты могут иметь отношение к некоторым, широко известным в астрофизике, явлениям нестационарного характера.

1. *Основные положения.* Как известно, при кинетических энергиях электронов  $E$ , меньших собственной, столкновение электронов с фотонами кончается только изменением направления первоначального движения фотона, без изменения его частоты (чистое рассеяние). Эффективность такого столкновения выражается коэффициентом томсоновского рассеяния, равным  $\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ .

Но при  $E > mc^2$ , хотя поперечное сечение столкновения остается тем же, то есть  $\sigma_e$  (по крайней мере до достаточно высоких значений  $E$ ), происходит увеличение энергии рассеянного после столкновения фотона, то есть увеличение частоты первичного фотона. Если частота фотона до столкновения с электроном была  $\nu'$ , а после столкновения  $\nu$ , то связь между ними представляется в следующем виде (см. например, [1, 2])

$$\nu = \nu' \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2 (1 - \beta \cos \theta), \quad (1)$$

где  $\beta = v/c$ ,  $v$  — скорость электрона,  $\theta$  — угол между направлениями движения электрона и фотона в „неподвижной“ системе отсчета, в данном случае в системе, связанной с звездой.

Однако, если мы имеем дело с изотропным излучением, или же изотропным распределением электронов по направлениям, то можно написать взамен (1)

$$\nu \approx \nu' \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2. \quad (2)$$

Разумеется, учет члена в (1), зависящего от направления, следует производить, если ставится задача построения точной теории.

Соотношение (2) предполагает лобовую или почти лобовую встречу кванта с электроном. Поскольку речь идет о звездных атмосферах, то нетрудно убедиться, что даже самые слабые магнитные поля в них приводят к тому, что быстрые электроны окажутся в состоянии криволинейного движения. Вследствие этого всегда какая-то часть электронов будет двигаться навстречу исходящим из фотосферы световым квантам, столкновение с которыми приводит к изменению частоты в сторону увеличения. Если к тому же эффективное количество таких электронов значительно, этот процесс может привести к существенному изменению первоначального планковского спектра выходящего из слоя быстрых электронов фотосферического излучения; произойдет *усиление его коротковолновой части за счет ослабления инфракрасной*. В конечном счете дополнительная энергия кванта берется из энергии быстрого электрона за счет комптоновских потерь. Вместе с тем, полное количество квантов, испускаемых фотосферой во всем диапазоне спектра, остается неизменным.

Если появление быстрых электронов в атмосфере данной звезды носит импульсивный характер, то есть когда они появляются быстро и так же быстро исчезают, вызванное ими усиление коротковолновой границы спектра излучения звезды будет носить характер вспышки, в данном случае—ультрафиолетовой вспышки. Этот процесс ничего общего не имеет с тепловыми процессами, и поэтому выходящее из слоя быстрых электронов излучение фотосферы будет иметь нетепловой характер.

Наша задача заключается в том, чтобы вывести теоретический спектр излучения, выходящего из слоя быстрых электронов, прилегающего к фотосфере, в зависимости от энергии быстрых электронов и при заданном планковском спектре фотосферы.

2. *Случай монохроматических электронов.* Пусть интенсивность выходящего из фотосферы звезды излучения в частоте  $\nu$  представляется формулой Планка и равна  $B_\nu(T)$ , где  $T$  есть эффективная температура фотосферы. Пусть над фотосферой (или на некотором расстоянии от нее) находится слой, состоящий исключительно из быстрых электронов, эффективное количество которых в столбе с основанием  $1 \text{ см}^2$  равно  $N$  (см. рис. 1), а эффективная оптическая толщина  $\tau$  равна

$$\tau = \sigma_e \int_0^z n dz; \quad \tau_0 = \sigma_e \int_0^{z_0} n dz = \sigma_e N, \quad (3)$$

причем  $\tau = 0$  на основании упомянутого слоя (линейная толщина которого считается меньше радиуса звезды) или на поверхности фотосферы; в (3)  $n$  — концентрация быстрых электронов на высоте  $z$  от поверхности фотосферы.

Нашей целью является определение интенсивности  $J_\nu$  выходящего из слоя быстрых электронов излучения в частоте  $\nu$  как функции полной оптической толщи среды  $\tau_0$ , энергии быстрых электронов  $E$  и эффективной температуры звезды  $T$ .

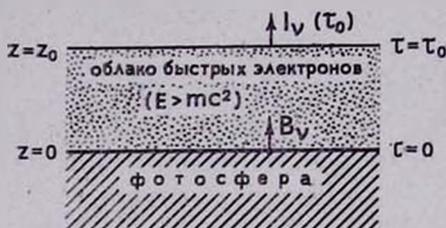


Рис. 1. К выводу теоретического спектра вспышки.

Рассмотрим сперва случай монохроматического потока быстрых электронов, то есть когда энергия всех электронов одинакова и равна  $E$ , причем  $E > mc^2$ . Влиянием тепловых электронов пренебрегаем.

Уравнение переноса энергии запишется в виде

$$\cos \theta \frac{dJ_\nu}{dz} = -n\sigma_e J_\nu + \varepsilon_\nu, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_\nu$  есть объемный коэффициент излучения в частоте  $\nu$ .

В дальнейшем введем обозначение

$$\mu = \frac{E}{mc^2}. \quad (5)$$

Условие лучистого равновесия в нашем случае имеет вид

$$4\pi\varepsilon_\nu = n\sigma_e\mu^2 B_\nu e^{-\tau} + n\sigma_e\mu^2 \int J_\nu d\omega, \quad (6)$$

где первый член обусловлен квантами прямого излучения звезды частоты  $\nu'$ , трансформируемого в  $\nu$  при элементарном акте рассеяния, а второй член — квантами диффузного излучения той же частоты. Переизлучение с сохранением частоты отсутствует.

Подставляя (6) в (4), получим следующее дифференциальное уравнение относительно функции  $J$ :

$$\cos \theta \frac{dJ}{d\tau} = -J + \frac{1}{4\pi} \mu^2 B_\nu e^{-\tau} + \mu^2 \int J_\nu d\omega. \quad (7)$$

Решение этого уравнения даст нам величину интенсивности выходящего из облака быстрых электронов излучения  $J_1(\mu, \tau_0)$  в зависимости от энергии ( $\mu$ ) и эффективной оптической толщи  $\tau_0$ , или эффективного количества самих электронов ( $N$ ), при заданной температуре фотосферы ( $B$ ).

Если  $\tau_0$  не очень велико, то рассеянием второго порядка можно будет пренебречь, и тогда найдем из (7), после интегрирования (приняв также  $\cos \theta = 1$ ),

$$J_1(\mu, \tau_0) = B e^{-\tau_0} + \frac{1}{4\pi} \mu^2 B_\nu e^{-\tau_0}, \quad (8)$$

где использовано условие  $J_1 = B$  при  $\tau = 0$ , а  $B$  и  $B_\nu$  представляются формулой Планка; только во втором случае следует подставить  $\nu' = \frac{\nu}{\mu^2}$ , то есть

$$B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}; \quad (9)$$

$$B_{\nu'}(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{(\nu')^3}{e^{\frac{h\nu'}{kT}} - 1} = \frac{2h}{c^2} \frac{\left(\frac{\nu}{\mu^2}\right)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT\mu^2}} - 1}. \quad (10)$$

Соотношение (8) представляет собой приближенный спектр дошедшего до наблюдателя излучения звезды, когда над ее атмосферой появляется облако или слой из быстрых электронов небольшой оптической толщины.

Анализ формулы (8) показывает, что при достаточно низких температурах звезды, когда максимум ее фотосферического излучения находится в инфракрасной области спектра (звезды поздних классов), происходит своеобразный дрейф квантов из длинноволновой области спектра в коротковолновую область. Это приводит,

даже при сравнительно небольших значениях энергии быстрых электронов ( $\mu \lesssim 1$ ) — к резкому увеличению интенсивности наблюдаемого излучения в фотографической и в особенности ультрафиолетовой областях спектра. В этом случае имеется основание говорить о *выделении непрерывной эмиссии нетепловой природы*.

В качестве примера на рис. 2 приведены вычисленные с помощью формулы (8) теоретические спектры для звезды типа М5 ( $T = 2800^\circ\text{K}$ ), то есть кривые распределения интенсивности  $J$ , (в произвольных единицах) по длине волны, при  $\tau_0 = 1$  и различных значениях  $\mu^2$ , то есть при различных величинах энергии электронов (при  $\mu = 1$  энергия электрона равна  $E = mc^2 = 5 \cdot 10^5$  эв). На этом рисунке сплошной линией проведен нормальный, „невозмущенный“ спектр излучения звезды класса М5, то есть при  $N = 0$  или  $\tau_0 = 0$ .

На этом рисунке хорошо виден рост интенсивности  $J$ , в области коротких волн с увеличением  $\mu$ , то есть с увеличением энергии электронов. Это явление сопровождается, как и следовало ожидать, убылью энергии в длинноволновой области излучения фотосферы.

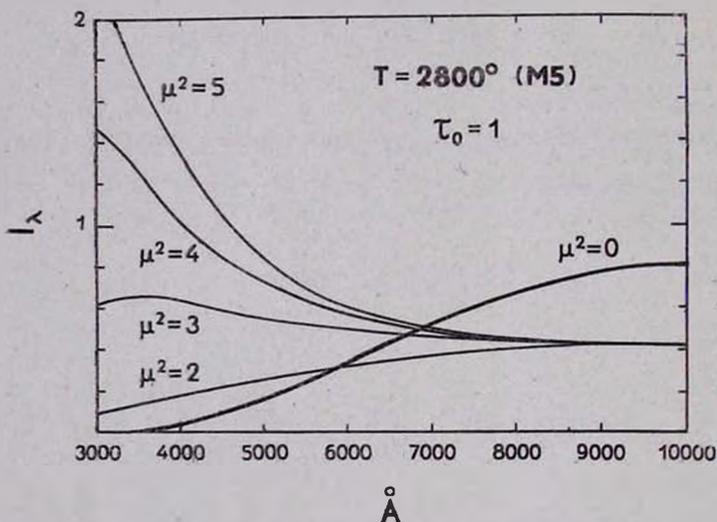


Рис. 2. Теоретический спектр вспышки звезды типа М5 (тонкие линии). Толстой линией обозначен нормальный спектр звезды данного типа (когда  $\tau_0 = 0$  или  $\mu = 0$ ).

С другой стороны, относительное усиление интенсивности, то есть отношение  $J_i/B$ , увеличивается в сторону коротких волн. В приведенном примере это отношение порядка десяти в фотографической области спектра, и от ста до нескольких тысяч — в ультрафиолетовой области. Отсюда следует, что общее увеличение яркости звезды в фо-

тографических лучах, вызванное появлением вокруг нее быстрых электронов, должно сопровождаться изменением ее цвета; звезда должна стать голубее.

Чтобы представить полученные результаты в форме, удобной для сравнения с наблюдениями, были вычислены теоретические показатели цвета в системе  $U, B, V$ , а также величины  $\Delta m_V, \Delta m_B$  и  $\Delta m_U$ , то есть рост (или уменьшение) яркости звезды при различных значениях  $\mu^2$ , по сравнению с нормальным ее состоянием (когда  $\tau_0 = 0$ ). Это было сделано с помощью следующих соотношений:

$$B - V = -2.5 C_y + 1.04; \quad (11)$$

$$U - B = 2.5 C_n - 1.12; \quad (12)$$

$$\Delta m_V = m_V(0) - m_V(\mu, \tau_0) = 2.5 \lg \frac{V}{V_0}; \quad (13)$$

$$\Delta m_B = m_B(0) - m_B(\mu, \tau_0) = 2.5 \lg \frac{B}{B_0}; \quad (14)$$

$$\Delta m_U = m_U(0) - m_U(\mu, \tau_0) = 2.5 \lg \frac{U}{U_0}, \quad (15)$$

где

$$C_y = \lg \frac{B}{V}; \quad C_n = \lg \frac{B}{U}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V &= \int J_\lambda(\mu, \tau_0) V_\lambda d\lambda; & V_0 &= \int B_\lambda(T) V_\lambda d\lambda; \\ B &= \int J_\lambda(\mu, \tau_0) B_\lambda d\lambda; & B_0 &= \int B_\lambda(T) B_\lambda d\lambda; \\ U &= \int J_\lambda(\mu, \tau_0) U_\lambda d\lambda; & U_0 &= \int B_\lambda(T) U_\lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (17)$$

В этих соотношениях значение  $J_\lambda(\mu, \tau_0)$  берется из (8), (предварительно переходя от шкалы частот в шкалу длин волн),  $B_\lambda(T)$  — из (9), а  $U_\lambda, B_\lambda$  и  $V_\lambda$  суть относительные чувствительности ультрафиолетовой, фотографической и фотовизуальной систем Джонсона и Моргана [3].

В табл. 1 приведены вычисленные с помощью этих соотношений значения  $B - V, U - B$ , а также  $\Delta m_V, \Delta m_B$  и  $\Delta m_U$  при появлении быстрых электронов с энергией  $\mu$  в атмосфере звезды или, короче, при вспышке звезды типа М 5. Из этих данных следует, что, во-первых, с ростом  $\mu$  звезда становится голубее и во-вторых, амплитуда яркости

растет в сторону коротких волн; она порядка  $1^m$  — в фотовизуальных лучах,  $\sim 3^m$  — в фотографических лучах и  $\sim 5 - 6^m$  — в ультрафиолетовых лучах.

Таблица 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЦВЕТ И АМПЛИТУДЫ В  $U, V, V$  ЛУЧАХ  
ПРИ ПОЯВЛЕНИИ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ЭНЕРГИИ  $\mu$   
В АТМОСФЕРЕ ЗВЕЗДЫ ТИПА М5 ( $T = 2800$  К),  $\tau_0 = 1$

$\mu^2$	$B-V$	$U-B$	$\Delta m_V$	$\Delta m_B$	$\Delta m_U$
0	$1^m80$	$-1^m14$	—	—	—
2	0.79	-0.38	0.1	$1^m0$	$2^m5$
3	0.44	-0.87	0.8	2.2	5.2
4	0.20	-1.22	1.0	2.8	5.0
5	0.04	-1.33	1.1	2.9	5.4
10	-0.16	-1.57	1.0	3.0	5.7
20	-0.16	-1.63	0.6	2.5	5.3

Обращает на себя внимание очень малое значение величины  $U-B$  при значениях  $\mu^2 \sim 5-10$ . Минимальное значение  $U-B$  при планковском распределении энергии в спектре излучения достигается при  $T \rightarrow \infty$  и равно  $-1^m00$  [4]. Между тем, при рассмотренном механизме вспышки звезды (рассеяние фотосферического излучения на быстрых электронах) величина  $U-B$ , оказывается, может доходить до  $-1^m70$  при энергиях электронов  $E$  порядка  $10^7$  эв; при еще больших значениях  $E$  происходит медленное увеличение  $U-B$ .

Любопытно, что даже при очень малых значениях оптической толщи  $\tau_0$  — порядка 0.01—0.001, ультрафиолетовая амплитуда  $\Delta m_U$  доходит до одной звездной величины и больше (см. табл. 2). При этом яркость звезды в фотовизуальных лучах остается практически неизменной, то есть  $\Delta m_B \approx 0$ .

Таблица 2

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АМПЛИТУДА  $\Delta m_U$  В  
ЗАВИСИМОСТИ ОТ  $\mu^2$  И  $\tau_0$ ,  $T=2800^\circ\text{K}$  (М5)

$\mu^2$	0	2	3	4	5
$\tau_0=0.01$	0	1.4	2.5	2.9	3.0
$\tau_0=0.001$	0	0.2	0.7	0.9	1.0

В приведенных выше вычислениях было сделано допущение, что слой из быстрых электронов покрывает всю поверхность фотосферы звезды более или менее равномерно. Если же этот слой будет занимать только часть поверхности звезды, то дошедшая до

наблюдателя интенсивность излучения звезды в целом  $J_*(y)$  определится из следующего выражения:

$$J_*(y) = yJ_*(\mu, \tau_0) + (1 - y)B_*,$$

где  $y$  есть доля поверхности звезды, занимаемой слоем быстрых электронов.

3. *Случай немонохроматических электронов.* Выше был рассмотрен случай монохроматического энергетического спектра быстрых электронов, когда все электроны обладают одинаковой энергией. Аналогичный результат мы будем иметь в случае, когда осуществляется нормальное распределение скоростей с очень малой дисперсией энергии электронов.

Возможно, однако, существование и других энергетических спектров электронов в интересующем нас явлении, например, степенная зависимость концентрации быстрых электронов от энергии

$$\frac{dN_e}{dE} = KE^{-\gamma}, \tag{18}$$

или, имея в виду (5),

$$\frac{dN_e}{d\mu} = K (mc^2)^{1-\gamma} \mu^{-\gamma}. \tag{19}$$

Этот спектр должен иметь предел со стороны малых энергий. Пусть он будет при  $\mu_{np} = \mu_m$ . Со стороны высоких энергий такого предела нет ( $\mu \rightarrow \infty$ ). Очевидно, не все электроны в таком энергетическом спектре могут принимать участие в процессах трансформации длинноволновых квантов в коротковолновые; электроны, для которых  $\mu < 1$ , могут вызвать только обычное томсоновское рассеяние световых квантов, без существенного изменения их частоты (рис. 3).



Рис. 3. К выводу теоретического спектра вспышки в случае немонохроматического потока электронов.

Составление условия лучистого равновесия и решения уравнения переноса излучения для более общего случая, когда  $\mu_{\text{пр}} > 1$  или  $\mu_{\text{пр}} < 1$ , не представляет труда. Однако во избежание введения новых параметров мы ограничимся пока решением поставленной задачи для случая  $\mu_{\text{пр}} \sim 1$ .

Прежде всего напишем выражение для оптической толщи, одинаковой для всех длин волн. Оно имеет вид

$$d\tau = \sigma_e N_0 dz = \sigma_e dz \int_{\mu_m}^{\infty} dN_e = \sigma_e K \frac{(mc^2)^{1-\gamma}}{\gamma-1} \frac{dz}{\mu_m^{1-\gamma}}. \quad (20)$$

Отсюда

$$\tau = \sigma_e K \frac{(mc^2)^{1-\gamma}}{\gamma-1} \mu_m^{1-\gamma} z. \quad (21)$$

Поскольку в нашем случае  $\mu \approx 1$ , то все кванты, поглощенные в частоте  $\nu$  непосредственно от фотосферы звезды, будут переизлучаться в частотах  $\nu' > \nu$ . В частоте  $\nu$  будут переизлучаться только те кванты, у которых частота меньше  $\nu$ . Поэтому можем написать для объемного коэффициента излучения  $d\varepsilon_\nu$  в частоте  $\nu$

$$4\pi d\varepsilon_\nu = dN_e \sigma_e \frac{B_{\nu'}}{h\nu'} e^{-\tau h\nu}. \quad (22)$$

Подставляя значение  $dN_e$  из (19), а также имея в виду, что

$$\nu = \nu' \mu^2, \quad (23)$$

$$d\mu = -\frac{1}{2} \nu'^{1/2} \nu^{-3/2} d\nu', \quad (24)$$

найдем из (22), после интегрирования в пределах от  $u = 0$  ( $\mu = \infty$ ) до  $u = x$  ( $\mu = 1$ )

$$\varepsilon_x = K \frac{\sigma_e}{8\pi} e^{-\tau (mc^2)^{1-\gamma}} x^{-\frac{\gamma-3}{2}} \int_0^x B_u(T) u^{\frac{\gamma-5}{2}} du, \quad (25)$$

где введены обозначения

$$x = \frac{h\nu}{kT}; \quad u = \frac{h\nu'}{kT}. \quad (26)$$

а  $B_u(T)$  есть планковская функция с заменой  $\nu'$  на  $u$ .

Уравнение переноса лучистой энергии по-прежнему имеет вид (4). Поэтому, подставляя значение  $\varepsilon_x$  из (25) в (4) и интегрируя, получим

$$J_*(\gamma, \tau_0) = B_* e^{-\tau_0} + \delta \tau_0 e^{-\tau_0} x^{-\frac{\gamma-3}{2}} \int_0^x B_* u^{\frac{\gamma-5}{2}} du, \quad (27)$$

где обозначено

$$\delta = \frac{K}{8\pi N_0} (mc^2)^{1-\gamma} = \frac{\gamma-1}{8\pi} \mu_m^{\gamma-1}. \quad (28)$$

Формулу (27) удобно написать в следующем виде

$$J_*(\gamma, \tau_0) = B_*(T) A_*(\gamma, \tau_0), \quad (29)$$

где

$$A_*(\gamma, \tau_0) = e^{-\tau_0} + \delta \tau_0 e^{-\tau_0} (e^{\tau_0} - 1) x^{-\frac{\gamma+3}{2}} \int_0^x \frac{u^{\frac{\gamma-1}{2}} du}{e^u - 1}. \quad (30)$$

Очевидно, безразмерная величина  $A_*(\gamma, \tau_0)$  показывает, во сколько раз интенсивность выходящего из среды излучения, то есть  $J_*(\gamma, \tau_0)$ , больше или меньше по сравнению с интенсивностью излучения в той же частоте  $\nu$  на внешней границе фотосферы, то есть по сравнению с  $B_*(T)$ .

Анализ формулы (30) показывает, что для холодных звезд  $A_*(\gamma, \tau_0) > 1$  в области фотографических лучей и  $A_*(\gamma, \tau_0) < 1$  — в области визуальных и инфракрасных лучей. Отсюда следует, что и при энергетическом спектре быстрых электронов типа  $N_e \sim E^{-1}$  будет иметь место увеличение яркости звезды в фотографических лучах, а, следовательно, ее покраснение. Конкретные примеры расчетов, приведенные ниже, подтверждают сказанное.

На рис. 4 приведены теоретические спектры выходящего из атмосферы „вспыхивающей“ звезды типа М5 ( $T = 2800^\circ\text{K}$ ) излучения при различных значениях  $\gamma$  и  $\delta$ . Качественно эти кривые не отличаются от того, что мы имели раньше, в случае монохроматических электронов (рис. 2).

Следует обратить внимание на большое разнообразие теоретических спектров „вспыхнувших“ звезд, вытекающее из (30). Однако есть нечто общее в этом разнообразии. Прежде всего, во всех случаях происходит сильное повышение интенсивности излучения в фотографическом и, в особенности, ультрафиолетовом диапазонах длин волн. Вследствие этого уменьшается показатель цвета звезды, то есть она становится голубее. Для большей убедительности с помощью соотношений (11)—(17), (29) и (30) были определены числовые значения  $B-V$ ,  $U-B$ ,  $\Delta m_V$ ,  $\Delta m_B$  и  $\Delta m_U$  при вспышке звезды типа М5; результаты приведены в табл. 3. Как следует из данных этой таб-

лицы, при всех значениях  $\delta$  вспыхнувшая звезда типа М 5 оказывается синее, чем при  $\delta = 0$ , то есть при отсутствии быстрых электронов в ее атмосфере; в этом случае она имеет нормальную для звезд типа М 5 величину  $B-V$ , равную  $+1^m80$  и  $U-B$ , равную  $+1^m14$ .

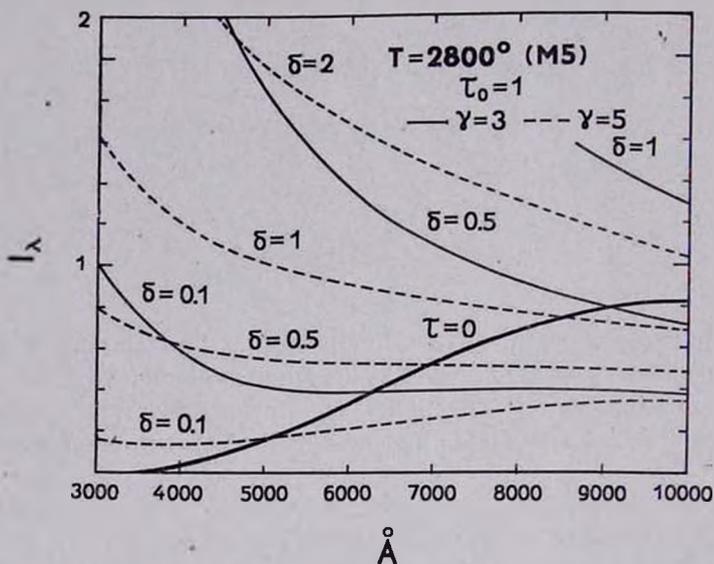


Рис. 4. Теоретический спектр вспышки звезды типа М 5 при различных спектрах электронов.

Далее с увеличением  $\delta$  быстро увеличивается  $\Delta m_B$  — амплитуда блеска в фотографических лучах, достигая  $5^m$ . Еще сильнее увеличивается  $\Delta m_U$ , доходя до  $7-8^m$ . Что касается  $\Delta m_V$ , то хотя он также увеличивается с увеличением  $\delta$ , но медленнее, чем, скажем,  $\Delta m_B$ ; отношение  $\Delta m_B/\Delta m_V$  в этом случае находится в пределах  $1.5 \div 5$ . В определенных случаях (например, при  $\delta \leq 0.1$  и  $\gamma = 5$ ) звезда может посинеть даже за счет уменьшения ее яркости в фотовизуальных лучах. При еще меньших значениях  $\delta$  посинение звезды может сопровождаться общим падением ее яркости не только в фотовизуальных лучах, но и в фотографических.

Аналогичные результаты — большие амплитуды колебания яркости, посинение звезды — получаются и для звезд типа К и, в меньшей степени, типа G. Однако ожидаемый эффект, как показывают вычисления, становится меньше и меньше при переходе к звездам раннего спектрального класса ( $T = 10000^\circ$  и больше). Например, для звезд типа А колебания яркости (как в сторону увеличения, так и в сто-

рону уменьшения) составляют уже доли звездной величины (см. табл. 4), а для еще более ярких звезд (тип В или О) они практически равны нулю.

Таблица 3

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ ЦВЕТА И АМПЛИТУД  
 $T=2800^{\circ}(M5), \tau_0=1, \gamma=3, \gamma=5$

$z$	$\gamma=3$					$\gamma=5$				
	$B-V$	$U-B$	$\Delta m_V$	$\Delta m_B$	$\Delta m_U$	$B-V$	$U-B$	$\Delta m_V$	$\Delta m_B$	$\Delta m_U$
0	$1^m80$	$+1^m14$	—	—	—	$1^m80$	$+1^m14$	—	—	—
0.1	0.29	-1.32	0.4	2.0	4.5	0.84	-0.82	-0.4	0.6	2.6
0.5	0.09	-1.35	1.9	3.7	6.2	0.44	-1.02	0.7	1.6	4.3
1	0.06	-1.32	2.6	4.5	6.9	0.25	-1.10	1.4	2.5	5.1
2	0.15	-1.33	3.4	5.2	7.6	0.33	-1.08	2.0	3.0	5.8

Таким образом, мы приходим к интересному заключению о том, что появление слоя или облака из быстрых электронов в атмосфере холодных звезд ( $K-M$ ) может привести к сильному повышению их яркости (в особенности в коротковолновом диапазоне), в то время как появление таких электронов вокруг горячих звезд не вызовет никаких наблюдаемых последствий в доступной нам области длин волн.

Таблица 4

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ ЦВЕТА  
 И АМПЛИТУД  
 $T=10000^{\circ}(A0), \tau_0=1, \gamma=3$

$z$	$B-V$	$\Delta m_V$	$\Delta m_B$
0	$+0^m06$	—	—
1	-0.08	-0.30	$+0.16$
2	-0.10	$+0.10$	$+0.28$

Иначе говоря, при выдвинутом механизме генерации непрерывной эмиссии нетепловой природы, эмиссия должна наблюдаться у холодных звезд и не должна наблюдаться у горячих.

В заключение этого раздела оценим численные величины входящих в вышеприведенные формулы параметров, то есть величины  $\mu_m$  и  $K$ , характеризующие теоретический спектр быстрых электронов, а также их концентрацию в атмосфере звезды в момент „вспышки“. Поскольку при вычислениях было принято  $\tau_0 \sim 1$ , то найдем из (20) и (21) для полной концентрации электронов, энергия которых больше  $\mu_m$ ,

$$n = \frac{\tau_0}{N_0 z_0} = \frac{1.5 \cdot 10^{24}}{z_0} \text{ см}^{-3}.$$

Отсюда найдем  $n \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$  при линейной толщине слоя  $z_0 \sim 10^9 \text{ см}$ , и  $n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$  — при  $z_0 \sim 10^{10} \text{ см}$ . Для определения  $\mu_m$  имеем из (28)

$$\mu_m = \left( \frac{8\pi}{\gamma - 1} \delta \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Числовые значения  $\mu_m$  для различных значений  $\gamma$  и  $\delta$  приведены в табл. 5.

Таблица 5  
ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  $\mu_m$

$\delta$	1	0.1	0.01
$\gamma=3$	3.5	1.1	0.36
$\gamma=5$	1.6	0.9	0.5

Из этих данных следует, что  $\mu_m$  близко к единице, а следовательно принятая выше схема расчетов ( $\mu_m \sim 1$ ) недалеко от истины.

Наконец, из (28) найдем для  $K$  (в CGS — системе):  $K \sim 10^5$  при  $z_0 = 10^9 \text{ см}$  и  $K \sim 10^4$  — при  $z_0 = 10^{10} \text{ см}$ .

4. *Энергетические потери электронов.* Продолжительность выделения непрерывной эмиссии при импульсивном или мгновенном выбросе быстрых электронов, очевидно, зависит от скорости потери кинетической энергии быстрых электронов. Поэтому необходимо знать порядок величины этих потерь.

В рассмотренном случае быстрые электроны могут терять свою энергию следующими путями: 1) потери на магнитотормозное (синхротронное) излучение; 2) потери на обратный комптон-эффект; 3) ионизационные потери; 4) радиационные потери, то есть излучение  $\gamma$ -фотонов при столкновении электронов с другими частицами.

Как показывает количественный анализ, наиболее существенным в данном случае является последний — радиационные потери. При этом предполагается, что в облаке быстрых электронов присутствуют также протоны в таком же количестве. Взаимодействие быстрых (релятивистских) электронов с протонами приводит к резкому торможению электрона, вследствие чего его энергия будет освобождена в виде  $\gamma$ -кванта; в нерелятивистском случае это соответствует обычному непрерывному излучению при свободно-свободных переходах.

Выражение для радиационных потерь имеет следующий вид (см., например, [2] стр. 149):

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = 8.0 \cdot 10^{-16} \cdot n_p \text{ сек}^{-1}. \quad (31)$$

Отсюда найдем для времени  $t_0$ , в течение которого энергия электрона в среднем уменьшится из-за радиационных потерь в  $e$  раз, следующее соотношение:

$$t_0 = 1.25 \cdot 10^{13} \cdot n_p^{-1} \text{ сек}, \quad (32)$$

где  $n_p$  — концентрация протонов. Очевидно  $t_0$  одновременно может характеризовать среднюю продолжительность выделения непрерывной эмиссии. При значениях  $n_p$ , равных  $10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $10^{14} \text{ см}^{-3}$  и  $10^{13} \text{ см}^{-3}$  найдем из (34) соответственно:  $t_0 \sim 1 \text{ сек}$ ,  $\sim 10 \text{ сек}$  и  $100 \text{ сек}$ . Анализ конкретных вспышек показывает, что в отдельных случаях  $\tau_0 \sim 0.001$ , что соответствует значению  $n_p \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . В этом случае продолжительность вспышки будет  $\sim 1000 \text{ сек}$ , то есть порядка десяти минут.

Из сказанного следует одновременно, что практически вся энергия быстрых электронов будет освобождена в виде  $\gamma$ -квантов (вернее, мягких  $\gamma$ -квантов или жестких рентгеновских фотонов). Суммарная энергия  $\gamma$ -квантов при этом может достигать значительной величины. Так, например, если при одной вспышке появляются  $10^{24}$  электронов на  $1 \text{ см}^2$  поверхности звезды (когда  $\tau_0 = 1$ ), то полное их количество будет  $4\pi R^2 \cdot 10^{24}$ , или около  $10^{40}$  (при  $R \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ см}$ ). При энергии одного электрона  $\sim 10^8 \text{ эв} \sim 10^{-6} \text{ эрг}$ , найдем отсюда для полной энергии всех электронов  $\sim 10^{40} \text{ эрг}$ , что примерно в  $10^7 - 10^8$  раз превышает тепловую энергию, излучаемую самой звездой в 1 сек. Очевидно, это одновременно будет полная энергия  $\gamma$ -излучения, если предположить, что все быстрые электроны задерживаются в атмосфере звезды и энергия каждого из них в конечном счете идет на образование  $\gamma$ -кванта. Половина этой энергии покинет звезду, а остальная половина будет направлена в сторону фотосферы звезды, где она будет поглощена, в результате чего может произойти прогрев фотосферы. Однако нетрудно убедиться, что из-за большой проникающей способности  $\gamma$ -квантов слой наиболее интенсивного прогрева будет находиться достаточно глубоко (больше  $10000 \text{ км}$ ) от поверхности фотосферы. Поэтому последствия подобного прогрева могут сказываться на тепловом состоянии фотосферы не сразу. Но повышение яркости фотосферы рано или поздно должно произойти и, как показывают простые расчеты, оно может значительно — на два-три порядка превышать нормальную яркость звезды, при предположении, что в день происходит по одной вспышке с  $\tau_0 = 1$ . Однако при вспышке, например, с  $\tau_0 = 0.001$  повышение светимости звезды из-за нагрева  $\gamma$ -лучами будет незначительное.

Так или иначе, нагрев фотосферы  $\gamma$ -лучами при появлении быстрых электронов в атмосфере звезды, по-видимому, неизбежен. Это следует считать одним из любопытных моментов в изучаемой нами задаче. Дело в том, что обычно принято было думать, что термический нагрев фотосферы осуществляется только изнутри, за счет выделения во внутренних частях звезды тепловой энергии. Теперь мы приходим к выводу о возможности *нагрева фотосферы за счет тепловой энергии, выделяемой в виде  $\gamma$ -квантов в атмосфере звезды, далеко от ее поверхности.*

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность В. А. Амбарцумяну за интересное обсуждение этой работы и сделанные при этом ценные замечания, а также В. Г. Горбачкову за критические замечания, которые были сделаны при прочтении рукописи работы.

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

## THE NON-STEADY STELLAR ENVELOPES CONTAINING HIGH-ENERGY ELECTRONS

G. A. GURZADIAN

The following problem is considered: in the atmosphere of some star there are nonthermal but not ultrarelativistic electrons with energies somewhat exceeding the proper energy,  $E \lesssim mc^2$  (fast electrons). Although the scattering of the photons on such electrons must be neutral in character but an increase of the energy or the frequency of the scattered photon after the collision with the fast electron must have place (converse Compton-effect). The question is to determine the spectrum of radiation emitted from the layer of fast electrons if the black body spectrum of the photospheric radiation is known. This problem is solved in the first approximation for the cases both of monochromatic and non-monochromatic electrons. It is shown that the intensity in the shortwave region of the spectrum increases and at long waves (infrared) decreases.

The theoretical color indexes and amplitudes of the variation of the brightness of the „flare“ star, in the case of the presence of fast electrons in their atmospheres is calculated. The effect of the increase of the brightness is stronger in the cool dwarfs and quickly decreases when passing to the early type stars.

The possibility of the generation of  $\gamma$ -radiation during the flare of the star and the effect of heating of the photosphere „from outside“ under the action of own  $\gamma$ -radiation are noted.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. E. Feenberg, H. Primakoff, Phys. Rev., **73**, 449, 1948.
2. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, Происхождение космических лучей, М., 1963
3. H. L. Johnson, W. W. Morgan, Ap. J., **117**, 313, 1953.
4. H. Arp, Ap. J., **133**, 874, 1961.



СПЕКТРОСКОПИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ  $\nu$  603 Aq1 (N Aq1 1918)

Э. Р. МУСТЕЛЬ, А. А. БОЯРЧУК

Поступила 30 августа 1965

На основании щелевых и бесщелевых спектрограммы была изучена „бывшая“ Новая  $\nu$  603 Aq1. Найдено, что звезда имеет температуру 30 000°K и радиус  $3 \cdot 10^{10}$  см. Она окружена оболочкой, имеющей размеры  $R_{об} = 5R_{зв}$  и массу  $M_{об} \approx 10^{22}$  г. Электронная плотность в оболочке составляет  $n_e \approx 10^{13}$  см<sup>-3</sup>. В оболочке происходят движения газов со скоростью  $\sim 300$  км/сек.

Новые звезды являются одним из наиболее интересных небесных объектов. Их изучению уделяется большое внимание. Однако подавляющее число работ по исследованию Новых посвящено изучению их вспышек. Изучению Новых в их нормальном состоянии уделяется очень мало внимания. Лишь после открытия Уокером [1] двойственности N Her 1934 интерес к „бывшим“ новым повысился. Дальнейшие исследования, выполненные главным образом Крафтом [2], показали, что двойственность Новых звезд весьма распространенное явление. Однако, физические условия в атмосферах этих звезд и в газовых оболочках, окружающих их, практически не изучались. Подобное изучение было выполнено лишь только для N Her 1934 [3, 4]. Настоящая работа является продолжением серии работ [5, 6], посвященных изучению условий в „бывшей“ Новой Aq1 1918 ( $\nu$  603 Aq1).

1. *Непрерывный спектр.* Непрерывный спектр  $\nu$  603 Aq1 изучался нами ранее [5]. В этой работе было показано, что распределение энергии в спектре  $\nu$  603 Aq1 соответствует распределению энергии в излучении абсолютно черного тела с температурой, близкой к 30 000°K. Однако, в настоящее время не известно, меняется ли распределение энергии в спектре  $\nu$  603 Aq1 со временем или нет. Поэтому нами вновь в 1964 году было проведено изучение непрерывного спектра. На бесщелевом спектрографе СП 79 [7] телескопа ЗТШ

было получено 4 спектрограммы  $\nu$  603 Aq1 и 7 спектрограмм 4 Aq1, взятой как и ранее [5], в качестве звезды сравнения. Все спектрограммы были обработаны с использованием методики, описанной в [7].

В результате обработки спектрограмм выяснилось, что распределение энергии в спектре Новой в 1964 г. практически не отличается от распределения энергии в спектре звезды в 1962 г. [5], то есть распределение энергии в непрерывном спектре  $\nu$  603 Aq1 не меняется существенно со временем.

Недавно были опубликованы результаты исследования межзвездного поглощения в области неба, расположенной очень близко к  $\nu$  603 Aq1 [8]. Принимая расстояние до  $\nu$  603 Aq1 равное 376 пс [9], получаем на основании [8] величину межзвездного поглощения  $A_{PR} = 0^m.72$ . Эта величина несколько меньше более грубой оценки  $A_{vis} = 1^m.1$ , использованной в предыдущей работе [6].

Используя найденную величину  $A_{PR}$ , мы исключили влияние межзвездного поглощения на распределение энергии в спектре звезды. Результаты представлены на рис. 1. Из этого рисунка видно, что спектрфотометрическая температура  $\nu$  603 Aq1 в 1964 г. была близкой к  $29\,000^\circ\text{K}$ . Небольшой „бугор“ в ультрафиолетовой части кривой, по-видимому, вызван эмиссией за пределом бальмеровской серии.

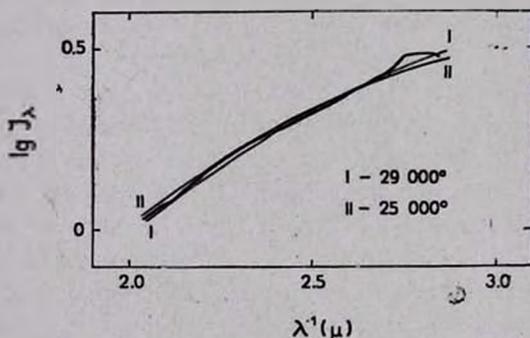


Рис. 1. Распределение энергии в непрерывном спектре  $\nu$  603 Aq1 в 1964 (жирная линия) и абсолютно черного тела (тонкая линия).

Найденное высокое значение спектрфотометрической температуры, около  $29\,000^\circ$ , не противоречит линейчатому эмиссионному спектру звезды, содержащему довольно интенсивные линии HeII, NIII и CIII.

На основании имеющихся данных мы можем определить размеры  $\nu$  603 Aq1. Принимая указанное выше расстояние до Новой, температуру излучения  $T_{изл} = 29\,000^\circ$  и видимую фотографическую вели-

чину, исправленную за межзвездное поглощение  $m_{pg} = 10^m$ . 1, по известным формулам [10], находим, что радиус фотосферы звезды  $R_{\nu 603} = \frac{1}{2} R_{\odot}$ , то есть  $R_{\nu 603} = 3 \cdot 10^{10}$  см. Как будет показано ниже, пренебрежение излучением оболочки не внесет заметной ошибки в определяемые размеры звезды.

2. *Линейчатый спектр звезды.* С целью изучения возможных изменений интенсивностей эмиссионных линий в спектре  $\nu$  603 AqI со временем мы вновь получили в течение 29 VI — 5 VIII 1964 г. пять спектрограмм на щелевом спектрографе СП 72 [11] телескопа ЗТШ с дисперсией 80 Å/мм. Использовались пластинки ПаО. Спектрограммы имеют хорошую плотность в районе 5000 — 3300 Å. Кроме того, мы имели возможность использовать три спектрограммы  $\nu$  603AqI, полученных Р. Крафтом в июле 1962 г. с помощью спектрографа кудэ (дисперсия 38 Å/мм) 200" — телескопа обсерватории Маунт Паломар и предоставленных любезно в наше распоряжение.

На основании всех этих спектрограмм были определены эквивалентные ширины эмиссионных линий. Результаты представлены в столбцах 3 (для паломарских спектров) и 5 (для спектров ЗТШ) табл. 1. В этой же таблице в столбцах 2 и 4 приведены величины эквивалентных ширин, опубликованные ранее [6, 12]. Из табл. 1 видно, что эквивалентные ширины эмиссионных линий водорода и ионизованного гелия меняются заметно со временем. Относительно других, более слабых и менее четко выраженных линий сказать что-либо определенное трудно. Эквивалентная ширина линии  $H_{\beta}$ , определенная на основании паломарских спектров, намного меньше значения  $w_{\lambda}$ , полученного на основании спектров ЗТШ. Причиной является переналожение спектров II и III порядков на спектрографе кудэ 200"-телескопа. Вследствие этого уровень континуума в районе  $H_{\beta}$  фиктивно завышается. Этот эффект быстро уменьшается с длиной волны и для  $H_{\gamma}$  он уже равен нулю.

Отмеченные выше изменения величин  $w_{\lambda}$  для водородных и гелиевых линий указывают на то, что и по истечении большого интервала времени после вспышки активность во внешних слоях  $\nu$  603 AqI продолжается. Подобное явление, по-видимому, является довольно распространенным среди бывших Новых звезд [13].

На основании измеренных эквивалентных ширин бальмеровских линий и найденного распределения энергии в непрерывном спектре  $\nu$  603 AqI был вычислен бальмеровский декремент. В столбце 6 табл. 1 приведен в качестве примера декремент, полученный по наблюдениям 1964 г. По эквивалентным ширинам видно, что в другие даты

Таблица 1

Элемент линия	$w_\lambda$				$F_{\lambda_i}/E_{H\beta}$
	1958 [12]	1962	1963 [6]	1964	1964
H					
3	2.8	2.4	5.0	6.7	1.00
7	3.0	3.7	3.4	4.6	1.00
6	2.4	3.9	3.0	3.8	1.00
4	2.3	2.8	2.8	3.3	0.90
8		2.5	2.8	2.8	0.91
9		1.6	2.2	2.0	0.86
10		1.5		1.2	0.63
11		1.2		1.3	0.64
12				1.1	0.55
13				0.9	0.49
14				0.7	0.42
HeI					
5015				1.0	0.13
4922				1.0	0.14
4388	0.3	0.2	0.2	0.2	0.04
4471	0.5	0.5	0.6	1.2	0.27
4026	0.7	0.7	0.4	0.6	0.16
3820		0.3		0.3	0.09
HeII					
4686	1.7	1.7	1.1	2.3	0.39
CIII, N IV					
4647	} 1.1	1.0	0.8	} 1.5	0.20
4638		0.8	1.0		
D				0.05	

наблюдений бальмеровский декремент не сильно отличался от приведенного. Отличительной особенностью наблюдаемого декремента является его необычайная пологость. Этот факт отмечался нами уже ранее [6]. Такой же характер имеет декремент и у другой бывшей Новой — DQ Her (1934) [3].

Для объяснения вида наблюдаемого декремента мы сравнили его с теоретическими декрементами, вычисленными для прозрачной среды [14], для непрозрачной неподвижной среды [15] и для непрозрачной среды, движущейся с градиентом скорости [16]. Это сравнение представлено графически на рис. 2. Лучшее согласие между наблюдаемым и теоретическим декрементами имеет место для случая среды, движущейся с градиентом скорости, при  $T_{\text{эв}} = T_e = 40\,000^\circ$ , коэффициенте диллюции  $W = 10^{-1}$  и вероятности выхода  $L_\alpha$ -кванта  $\beta_{21}^0 = 10^{-3}$ . Сравнивая отношение интенсивности линии  $H_\beta$  и континуума при  $\lambda = 3640 \text{ \AA}$ , мы можем сделать независимое определение параметров среды. Используя значение эмиссионного бальмеровского

скачка, эквивалентную ширину линии  $H_{\beta}$  и распределение энергии в спектре v 603 AqI находим, что  $\frac{I_{H_{\beta}}}{I_{3640}(\Delta\lambda - 1\text{Å})} = 25$  в то время, как это отношение при  $T_e = 30\,000^\circ$  для случая среды, прозрачной для излучения в линиях, равно 250 [17]. Таким образом, наблюдаемое и теоретическое отношение отличаются в 10 раз, то есть величина

$$K = \lg \left( \frac{I_{H_{\beta}}}{I_{\lambda - 3640}} \right)_{\text{набл.}} - \lg \left( \frac{I_{H_{\beta}}}{I_{\lambda - 3640}} \right)_{\text{теор.}} = -1. \quad (1)$$

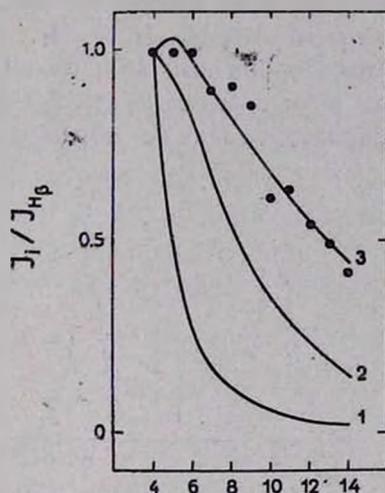


Рис. 2. Сравнение наблюдаемого и теоретических декрементов. Точки соответствуют наблюдаемым интенсивностям линий: 1 — случай  $B$  для  $T_e = 20\,000^\circ$  [14], 2 — декремент для  $\tau_{H_{\alpha}} = 250$  и  $T_e = 20\,000^\circ$  [15], 3 — декремент для движущейся среды с параметрами:  $\xi_{21}^0 = 10^{-3}$ ,  $W = 10^{-1}$ ,  $T_e = T_{зв} = 40\,000^\circ$ .

Согласно [16], этому значению величины  $K$  соответствует значение параметра  $\xi_{21}^0 = 1.5 \cdot 10^{-3}$ , при  $W = 10^{-1}$  и  $T_e = T_{зв} = 40\,000^\circ$ , что хорошо согласуется с первым определением. Следует отметить, что v 603 AqI имеет температуру  $30\,000^\circ$ , а не  $40\,000^\circ$ , которой соответствует теоретический декремент. Из [16] можно путем интерполяции найти, что при  $T_e = T_{зв} = 30\,000^\circ$  наблюдаемый и теоретический декременты будут совпадать при  $\xi_{21}^0 = 2.5 \cdot 10^{-4}$  и  $W = 10^{-1}$ . Если  $W = 10^{-2}$ , то наблюдаемый и теоретический декремент совпадут при  $\xi_{21}^0 = 5 \cdot 10^{-5}$ .

Таким образом можно считать, что оболочка в 603 AqI в настоящее время имеет сравнительно небольшие размеры  $R_{об} = (3 \div 10) R_{зв}$ . В ней имеются довольно большие движения газов, позволяющие значительной доле ( $\beta_{21}^0 \sim 10^{-4}$ )  $L_{\alpha}$ -квантов покидать ее. Линии бальмеровской серииотягощены сильным самопоглощением. Решать вопрос о наличии заметного самопоглощения в эмиссионных линиях других элементов трудно из-за их малочисленности. Все это, к сожалению, сильно затрудняет количественный анализ химического состава и условий в оболочке в 603 AqI.

Помимо интенсивностей, нами были построены по паломарским спектрам контуры бальмеровских линий. На рис. 3 в качестве примера показаны контуры линий  $H_{\gamma}$ ,  $H_{\beta}$ ,  $H_{\alpha}$  и  $H_{\epsilon}$ . Все линии довольно широкие и имеют колоколообразный вид; их полуширина составляет около 300 км/сек. При этом следует иметь в виду, что спектры получались и фотометрировались таким образом, чтобы орбитальное

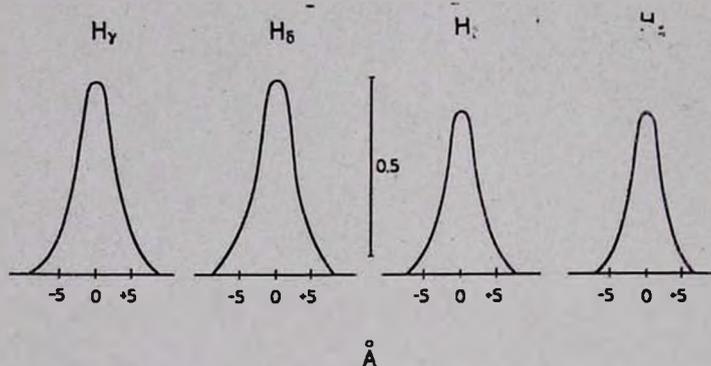


Рис. 3. Контурсы водородных линий  $H_{\gamma}$ — $H_{\epsilon}$ . По оси абсцисс отложено расстояние от центра линий в ангстремах.

движение, соответствующее лучевой скорости  $v_r = 40$  км/сек [2], не влияло бы на контуры эмиссионных линий. В связи со сравнительно малой дисперсией использованных спектрограмм ( $\sim 38 \text{ \AA}/\text{мм}$ ) и наличия самопоглощения точный количественный анализ рассматриваемых контуров связан со значительными трудностями. Однако, тот факт, что линии разных элементов имеют практически одинаковую полуширину, позволяет считать, что линии расширены в основном из-за эффекта Допплера. Если предположим, что период обращения в 603AqI вокруг своей оси равен периоду орбитального движения, что весьма вероятно для случая тесных двойных систем, то скорость вращения будет  $\sim 100$  км/сек. Но мы наблюдаем в 603 AqI под небольшим уг-

лом к оси вращения, что следует из характера выброшенной после вспышки оболочки [18], а также из того факта, что у этой системы отсутствует затмение. Поэтому расширением линий вследствие вращения можно пренебречь. Турбулентные движения в оболочке v 603 Aq1 и истечение вещества остаются в качестве наиболее вероятной причины расширения эмиссионных линий.

3. *Заключение.* На основании имеющихся данных мы попытаемся определить условия в оболочке v 603 Aq1. Для этой цели мы воспользуемся наблюдаемым бальмеровским скачком. Величина бальмеровского скачка равна

$$D = \lg \frac{I_{\lambda 3647}^-}{I_{\lambda 3647}^+} = \lg \frac{I_{\text{зв}}}{I_{\text{зв}} + I_{06}}. \quad (2)$$

Здесь мы будем рассматривать только излучение оболочки, возникающее при рекомбинациях на второй уровень, поскольку в рассматриваемой области спектра при  $T_e = 30\,000^\circ\text{K}$  излучение, возникающее из-за рекомбинаций на более высокие уровни и при свободно-свободных переходах не превышает 30% [16]. Будем считать, что звезда излучает как абсолютно черное тело при  $T = 30\,000^\circ$ . Тогда будем иметь

$$\frac{I_{06}}{I_{\text{зв}}} = \frac{4\pi \varepsilon_2(\nu) V}{4\pi R_{\text{зв}}^2 B_\nu(T_{\text{зв}})}, \quad (3)$$

где  $V$  — объем светящегося газа,  $B_\nu(T_{\text{зв}})$  — функция Планка и коэффициент излучения при рекомбинациях на второй уровень при  $\lambda = 3647$  [19]

$$4\pi \varepsilon_2(\nu) = 2.7 \cdot 10^{-33} g_2 T_e^{-1/2} n_e^2, \quad (4)$$

где  $g_2$  — фактор Гаунта. Полагая  $g_2 = 1$ ,  $T_e = T_{\text{зв}} = 30\,000^\circ$  и  $R_{\text{зв}} = 2 \cdot 10^{11}$  см, получим

$$\frac{I_{06}}{I_{\text{зв}}} = 1.5 \cdot 10^{-59} n_e^2 V. \quad (5)$$

При наблюдаемом значении  $D = 0.045$  имеем  $I_{06}/I_{\text{зв}} = 0.10$ . Тогда

$$n_e^2 V = 6.7 \cdot 10^{58} \text{ см}^{-3} \quad (6)$$

или, если  $\mathfrak{M}_{06}$  — масса светящегося газа, имеем

$$n_e \mathfrak{M}_{06} = 1.1 \cdot 10^{35} \text{ г/см}^3. \quad (7)$$

Из формул (6) и (7), зная величину электронной плотности, мы можем определить объем и массу светящейся части оболочки. В

табл. 2 представлены результаты расчетов для некоторых значений  $n_e$ .

Таблица 2

$n_e$	$10^{11}$	$10^{12}$	$10^{13}$	$10^{14}$
$V$ см <sup>3</sup>	$6.7 \cdot 10^{26}$	$6.7 \cdot 10^{24}$	$6.7 \cdot 10^{22}$	$6.7 \cdot 10^{20}$
$R$ см	$2 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^{11}$	$9 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{10}$
$W$	$6 \cdot 10^{-5}$	$10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	0.7
$\Sigma z$	$10^{24}$	$10^{22}$	$10^{22}$	$10^{21}$

Здесь  $W \approx 1/4 (R_{30}/R_{00})^2$ . Раньше, сравнивая наблюдаемый и теоретический бальмеровский декремент, мы нашли, что  $W$  близко к  $10^{-2} - 10^{-1}$ . Тогда из табл. 2 следует, что  $n_e \sim 10^{13}$ . Плотность больше, чем  $10^{14}$ , приводит к значению  $W > 0.7$ , что невозможно, так как это означает, что оболочка имеет размер меньше, чем звезда.

Мы можем определить  $n_e$  другим независимым способом, используя параметр  $\beta_{21}^0$ . Согласно [20], имеем

$$\beta_{21}^0 = \frac{1}{2u\alpha_{12}} \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|, \quad (8)$$

где средний коэффициент поглощения

$$\alpha_{12} = \frac{n_1 B_{21} h \nu_{12}}{c \Delta \nu_{12}} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (9)$$

и

$$n_1 = b_1 n_e^2 \frac{h^3}{(2\pi m k T_e)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\chi}{k T_e}}, \quad (10)$$

$u$  — скорость теплового движения атомов и  $|\partial v/\partial s|$  — градиент скорости в оболочке. Подставляя (10) и (9) в (8) и принимая  $T_e = 30\,000^\circ$ , получим

$$n_e = 1.6 \cdot 10^{13} \sqrt{\frac{|\frac{\partial v}{\partial s}|}{b_1 \beta_{21}^0}}. \quad (11)$$

Можно предположить, что  $\partial v/\partial s = v/R_{00}$ , где скорость движения газа  $v$  определяется по ширине эмиссионных линий. Как было отмечено выше, она равна 300 км/сек. Окончательно имеем

$$n_e = 7.2 \cdot 10^{11} \sqrt{\frac{W^{1/2}}{b_1 \beta_{21}^0}}. \quad (12)$$

При найденном ранее значении  $\frac{30}{21}$  и  $b_1$ , взятом из [16], мы имеем  $n_e = 5 \cdot 10^{13}$  для  $W = 10^{-1}$  и  $n_e = 3 \cdot 10^{13}$  для  $W = 10^{-2}$ . Эти значения находятся в удовлетворительном согласии с найденными ранее.

На основании проделанного рассмотрения можно принять для  $v$  603 Aql и ее оболочки следующие значения параметров:

$$T_{зв} = 30\,000^\circ$$

$$R_{зв} = 3 \cdot 10^{10} \text{ см} = 0.5 R_\odot$$

$$R_{об} = 5 R_{зв} = 3 R_\odot$$

$$\mathfrak{M}_{об} = 10^{22} z = 10^{-11} \mathfrak{M}_\odot$$

$$n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

В заключение авторы приносят благодарность директору обсерватории Маунт Вилсон и Паломар д-ру Бибкоку и д-ру Крафту за представленную возможность использовать паломарские спектры  $v$  603 Aql. Кроме того, авторы выражают благодарность Р. Е. Гершбергу за помощь во время наблюдений и Г. Н. Шариповой за помощь в обработке спектрограмм.

Крымская астрофизическая  
обсерватория АН СССР

Астрономический Совет  
АН СССР

## A SPECTROSCOPIC STUDY OF $v$ 603 Aql (N Aql 1918)

E. R. MUSTEL, A. A. BOYARCHUK

A study of a „former“ Nova  $v$  603 Aql is made, based on a number of slit and slitless spectrograms. The temperature of the star  $T = 30\,000^\circ$  and the radius  $3 \cdot 10^{10} \text{ cm}$  have been determined. The star is surrounded by a shell, with  $R_{shell} = 5 R_{st}$  and  $\mathfrak{M}_{shell} \approx 10^{22} \text{ gm}$ . The electron density in the shell is of the order of  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ . There are irregular motions of gases in the shell with velocities of the order of  $300 \text{ km/sec}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. M. F. Walker, PASP, 66, 230, 1954.
2. R. P. Kraft, Ap. J., 139, 457, 1964.
3. J. L. Greenstein, R. P. Kraft, Ap. J., 130, 99, 1959.
4. R. P. Kraft, Ap. J., 130, 110, 1959.
5. Э. Р. Мустель, А. А. Боярчук, Т. М. Барташ, Изв. КрАО, 30, 19, 1963.
6. А. А. Боярчук, Э. Р. Мустель, Астрон. ж., 41, 587, 1964.
7. Т. С. Беякина, А. А. Боярчук, Р. Е. Гершберг, Изв. КрАО, 30, 25, 1963.

8. В. И. Ворошилов, Изв. ГАО АН УССР, 5, 117, 1963.
9. Д. Б. Мак-Лафлин, сб. „Звездные атмосферы“, 575, ИЛ, М., 1963.
10. Д. Я. Мартынов, Курс практической астрофизики, 454, Физматгиз, М., 1960.
11. А. А. Боярчук, Р. Е. Гершберг, Изв. КраО, 35 (в печати).
12. Дж. Гринстейн, сб. „Звездные атмосферы“, 668, ИЛ, М., 1963.
13. D. V. Mc. Langhlin, Ap. J., 117, 279, 1953.
14. M. J. Seaton, M. N., 120, 326, 1960.
15. E. R. Capriotti, Ap. J., 139, 225, 1964.
16. А. А. Боярчук, Изв. КраО, 34 (в печати).
17. А. А. Боярчук, Р. Е. Гершберг, В. И. Пролик, Изв. КраО, 29, 291, 1963.
18. Э. Р. Мустель, Астрон. ж., 33, 182, 1956.
19. С. А. Каплан, С. Б. Пикельнер, „Межзвездная среда“, 39, Физматгиз, М., 1963.
20. В. В. Соболев, Астрон. ж., 36, 753, 1959.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

## РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ ЯДРА ГАЛАКТИКИ

Согласно современным данным, радиоизлучение ядра Галактики (центрального яркого компонента источника Стрелец-А диаметром порядка  $4'$ ) нельзя объяснить тепловым механизмом [1—3]. Появляются все новые и новые данные, которые указывают на нетепловой характер излучения ядра. Эти данные относятся, в основном, к диапазону  $3—30$  см. Согласно [3], спектральный индекс радиоизлучения ядра в этом диапазоне равен  $0.72 \pm 0.05$ . Очень важно продолжить наблюдения ядра Галактики и на более длинных волнах для уточнения его спектра и других физических параметров.

Важные наблюдения Стрельца-А на метровых волнах были проведены Милсом на  $3.5$  м с помощью крестообразной антенной системы с диаграммой  $50'$  [4]. На месте узкого центрального компонента Стрельца-А он обнаружил глубокий минимум. Этот минимум Милс объяснил поглощением излучения протяженного компонента центральным компонентом, которому в то время приписывался тепловой механизм излучения. Но даже если бы ядро имело тепловую природу, то очень трудно было бы с диаграммой  $50'$  обнаружить его в поглощении на фоне протяженного компонента, так как угловые размеры ядра составляют всего  $3'—5'$  [5, 6].

С целью получения данных о ядре Галактики в диапазоне метровых волн в Бюраканской обсерватории проводились наблюдения источника Стрелец-А на волне  $3.6$  м с помощью большого интерферометра [7]. Наблюдения проводились методом фазового переключения. Ширина лепестка диаграммы направленности интерферометра составляла  $30'$ . Таким образом, фон и протяженный компонент не регистрировались, что давало возможность выделить излучение ядра в чистом виде. Эти интерферометрические наблюдения не позволили

обнаружить центральный компонент. Это означает, что наблюдаемая плотность потока от центрального источника на этой волне менее  $10 \cdot 10^{-26}$  *вт/м<sup>2</sup> гц.*

Между тем, если предположить, что спектральный индекс радиоизлучения ядра в метровом диапазоне не сильно отличается от 0.7, то поток от него должен был быть порядка  $4000 \cdot 10^{-26}$  *вт/м<sup>2</sup> гц.*

Столь сильное уменьшение потока на метровых волнах по сравнению с потоками в сантиметровом и дециметровом диапазонах можно объяснить поглощением излучения ядра Галактики в областях НII, расположенных между центром Галактики и Солнцем. Если это так, то из условия  $4000 \cdot e^{-\tau} < 10$  (где  $\tau$  — оптическая толщина областей НII) находим  $\tau > 6$  на волне 3.6 м. Для меры эмиссии областей ионизованного водорода, проектирующихся на центр Галактики, получим  $ME > 10^5$ .

Как известно, в направлении центра Галактики существует сильное поглощение пылью оптического излучения и поэтому эта область, в частности, эмиссионные туманности, поглощающие радиоизлучение ядра, невидимы в оптических лучах. Для поглощения пылью излучения этих туманностей в линии H<sub>α</sub> получаем  $\Delta m > 8^m 5$  (при предположении, что минимальная видимая мера эмиссии, которую еще можно обнаружить, равна 100).

Эти результаты, полученные нами, не противоречат данным полученным другими методами [8, 9].

Таким образом, объяснение сильного уменьшения потока радиоизлучения ядра Галактики на метровых волнах не требует ни наличия ионизованного водорода, локализованного в области самого ядра, ни специального вида спектра его радиоизлучения.

Этот факт легко объясняется поглощением излучения в эмиссионных туманностях, расположенных между Солнцем и центром Галактики. Эти туманности, по всей вероятности, расположены во внутреннем рукаве Галактики. Они должны производить поглощение излучения находящегося за ними протяженного нетеплового компонента Стрельца-А. Именно это поглощение наблюдал Милс во время своих пионерских наблюдений области центра.

Целью настоящего сообщения является также привлечь еще раз внимание радиоастрономов к детальному исследованию этой области во всех диапазонах длин волн, с помощью радиотелескопов высокой разрешающей способности.

*The radio emission of the galactic nucleus. The flux density of the radio emission of the galactic nucleus at wavelength 3.6 m has been*

measured by the Byurakan large radio interferometer. It is less than  $10 \cdot 10^{-26} \text{ wt/m}^2 \text{ c/s}$ . This fact is interpreted by absorption of radio emission in the regions H II situated between Sun and galactic center.

16 июня 1965

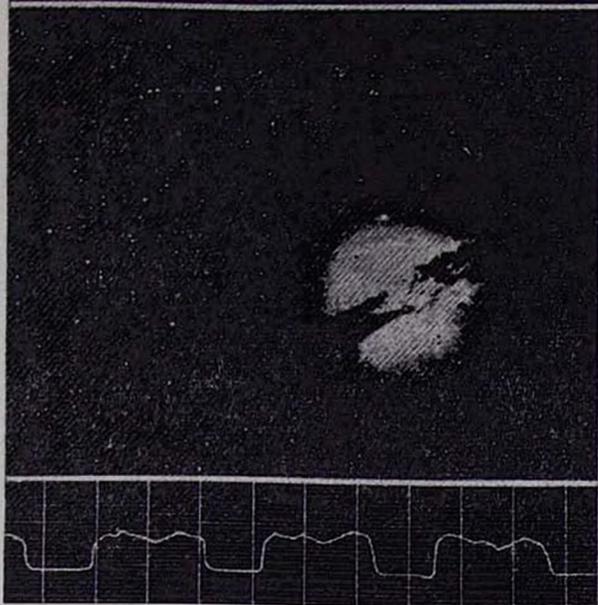
Бюраканская астрофизическая  
обсерватория

В. Г. МАЛУМЯН

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. Howard, H. Rood, P. Bruce, *Ap. J.*, **136**, 133, 1962.
2. В. Г. Малумян, *Астрон. ж.*, **39**, 752, 1962.
3. A. Maxwell, D. Downes, *Nature*, **204**, 865, 1964.
4. V. Mills, *Observatory*, **76**, 65, 1956.
5. Ю. Н. Парийский, *Астрон. ж.*, **38**, 242, 1961.
6. В. Г. Малумян, *Сообщ. Бюр. обс.*, **31**, 3, 1962.
7. В. А. Санамян, Г. С. Минасян, *Сообщ. Бюр. обс.*, **27**, 35, 1959.
8. F. Drake, *A. J.*, **64**, 329, 1959.
9. J. Dufay, *Comptes Rendus*, **248**, 647, 1959.

# ВНЕЗЕМНЫЕ ЦИВИЛИЗАЦИИ



Сборник трудов первого Всесоюзного совещания по проблемам внеземных цивилизаций.

Совещание имело место в Бюраканской астрофизической обсерватории Академии наук Армянской ССР в мае 1964 г. Среди авторов докладов — академики *В. А. Амбарцумян*, *Я. Б. Зельдович*, *В. А. Котельников*, члены-корреспонденты АН СССР *А. А. Пистелькорс*, *В. И. Сифоров*, профессора *С. Э. Хайкин*, *И. С. Шкловский* и другие.

В книге рассматриваются вопросы возможности существования внепланетных цивилизаций с различными уровнями развития, возможных способов установления связи с ними, критерии распознавания искусственных радиосигналов и методы их выделения среди естественных космических радиосигналов, принимаемых радиотелескопами.

Книга представляет большой интерес как для астрономов, радиоастрономов, специалистов по радиосвязи и смежным областям, так и для широкого круга читателей.

Цена 60 коп.

*Заказы направлять по адресу: г. Ереван, ул. Абовяна 15,  
Издательство Академии Наук Армянской ССР.*

## НОВЫЕ КНИГИ

Готовятся к печати в серии трудов „Результаты исследований по международным геофизическим проектам“, публикуемой Советским геофизическим комитетом при Президиуме АН СССР, следующие книги:

„КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ“, № 6. Отв. редакторы С. Н. Вернов, Л. И. Дорман. В книгу включены работы по вариациям космических лучей.

Г. Д. Асланова, Р. Ф. Затрутина, Р. Г. Озолина, В. А. Соколова. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ. МЕЖДУНАРОДНЫЙ ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ ГОД\* ЗА 1962 г. Отв. редактор Б. И. Силкин. Указатель содержит библиографические описания и аннотации всех работ, посвященных исследованиям по программе МГГ, вышедших в 1962 г.

„СЕЙСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ“, № 6. Отв. редакторы Н. В. Шебалин, Т. А. Проскуракова. В книгу включены работы по изучению поверхностных волн, микросейсм, по определению мощности земной коры, по исследованию строения верхней мантии.

„МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ“, № 9. Отв. редактор Х. П. Погосян. Публикуются доклады на Всесоюзной конференции по итогам МГГ, посвященные вопросам энергетики, динамики, общей циркуляции атмосферы, радиационного режима, облачности и осадков, серебристых облаков и т. д.

Е. А. Романкевич, П. Л. Безруков, В. И. Баранов, Л. А. Христианова. „СТРАТИГРАФИЯ И АБСОЛЮТНЫЙ ВОЗРАСТ ГЛУБОКОВОДНЫХ ОСАДКОВ ЗАПАДНОЙ ЧАСТИ ТИХОГО ОКЕАНА“. Отв. редактор В. П. Петелин.

А. В. Нудельман. „СОВЕТСКИЕ ЭКСПЕДИЦИИ В АНТАРКТИКУ 1961—1963 гг.“. Отв. редактор Б. И. Силкин.

В. И. Бардин. „ГОРЫ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТИ ЗЕМЛИ КОРОЛЕВЫ МОД (АНТАРКТИДА)“. Отв. редакторы К. К. Марков, В. М. Котлаков.

Х. П. Погосян. „СЕЗОННЫЕ И ВНУТРИСЕЗОННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ, ГЕОПОТЕНЦИАЛОВ И АТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В СТРАТОСФЕРЕ“. Отв. редактор Д. Л. Дрогайцев.

ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ БЮЛЛЕТЕНЬ, № 15. Отв. редактор А. Х. Хргиан. Номер содержит материалы Международного года спокойного Солнца, статьи по гляциологии, океанологии, изучению атмосферного электричества и озона, исследованию комет и др. разделам планетарной геофизики.

К. Н. Кашин. „ВЫСОТЫ ВОЛН В СЕВЕРНОЙ АТЛАНТИКЕ“. Отв. редактор И. С. Бровиков.

„СОЛНЕЧНАЯ АКТИВНОСТЬ“, № 2. Отв. редакторы Э. И. Могилевский, Э. Р. Мустель, М. А. Лившиц. Приводятся новые данные о корпускулярных потоках, о солнечной короне и пятнах, о связи солнечной активности с нижними слоями земной атмосферы, а также о конструкции приборов для измерения локальных магнитных полей на Солнце.

Все перечисленные издания можно получить наложенным платежом, обратившись по адресу: Москва, Центр, Б. Черкасский пер. 2/10, Контора „Академ-книги“, отдел „Книга-почтой“. Заказы рекомендуется делать заблаговременно.

## CONTENTS

A WORLD MODEL WITH THE HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD		255
	<i>A. G. Doroshkevich</i>	
ON SINGULAR SPHERE OSCILLATIONS . . . . .	<i>G. A. Lupanov</i>	267
ON THE THEORY OF THE REFLECTION EFFECT IN CLOSE BINARY SYSTEMS . . . . .	<i>I. N. Minin</i>	275
POLYCHROMATIC DIFFUSE REFLECTION OF LIGHT FROM AN INFINITELY DEEP ONE-DIMENSIONAL MEDIUM . . . . .	<i>A. G. Nicoghossian</i>	285
ON ONE PROBLEM OF THE RADIATION NON-LINEAR TRANSFER		
	<i>N. B. Yengibarian</i>	297
ON INSTABILITY OF THE VIRGO CLUSTER OF GALAXIES		
	<i>I. D. Karachentsev</i>	303
ON THE STATISTICAL PARAMETERS OF THE RADIATION OF IRREGULAR AND SEMIREGULAR VARIABLE STARS		
	<i>F. I. Lukatskaja, A. P. Zeltsman</i>	313
THE NON-STEADY STELLAR ENVELOPES CONTAINING HIGH-ENERGY ELECTRONS . . . . .	<i>G. A. Gurzadian</i>	319
A SPECTROSCOPIC STUDY OF $\nu$ $\epsilon$ 03 Aql (N Aql 1918)		
	<i>E. R. Mustel, A. A. Boyurchuk</i>	337
NOTES		
THE RADIO EMISSION OF THE GALACTIC NUCLEUS . . . . .	<i>V. H. Malumian</i>	347