

# КОЛЕБАНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Н. А. КУТУЗЯН

Кандидат физ. мат. наук, доцент

В данной работе рассматриваются поперечные колебания упругой анизотропной (имеющей одну плоскость упругой симметрии в каждой точке) пластинки, находящейся в переменном температурном поле. Модули упругости и коэффициенты Пуассона материала пластинки считаются линейно зависящими от температуры. Имея в виду обобщенный закон Гука с учетом гипотезы Неймана, получено уравнение поперечных колебаний анизотропной прямоугольной пластинки:

$$L[W] + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} L_1[W] = f(x, y) \quad (1).$$

Применяя метод Фурье разделения переменных, представим прогиб  $W$  как произведение временной функции  $T(\tau)$ , удовлетворяющей начальным условиям движения пластинки, и некоторой функции координат  $\omega(x, y)$ , удовлетворяющей граничным условиям:

$$W(x, y, \tau) = T(\tau)\omega(x, y) \quad (2).$$

Подставив (2) в однородное уравнение, соответствующее уравнению (1) и разделив переменные, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} L[\omega(x, y)] = \lambda L_1[\omega(x, y)] \\ T''(\tau) + \lambda T(\tau) = 0 \end{cases} \quad (3),$$

где  $\lambda$  - постоянная величина.

В качестве  $\omega(x, y)$  и  $\lambda$  можно взять собственные функции  $\omega_p(x, y)$  и собственные значения  $\lambda_p$  дифференциального оператора  $L[\ ]$ . Временная функция  $T_p(\tau)$  примет вид

$$T_p(\tau) = a_p \cos \sqrt{\lambda_p} \tau + b_p \sin \sqrt{\lambda_p} \tau \quad (4),$$

т.е.  $\sqrt{\lambda_p}$  представляет из себя собственные частоты колебаний пластинки. Если зависимость жесткости  $D_{ij}$  от координат не линейна, то в каждом конкретном случае следует проверить положительную определенность и самосопряженность оператора  $L[\ ]$ . При этом целесообразно выражение  $D_{ij}$  разложить в ряд Маклорена. Используя метод Релея-Ритца, прогиб  $\omega(x, y)$  разлагаем в ряд по собственным функциям  $\omega_p(x, y)$ :

$$\omega(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \omega_p(x, y) \quad (5).$$

Подставив в отношение Релея и определив его минимум, приходим к уравнению:

$$\sum_{s=1}^p \alpha_s (m_{ks} - \bar{\lambda} n_{ks}) = 0 \quad (6),$$

$$\text{где } m_{ks} = \iint_0^b \omega_k L[\omega_s] dx dy, \quad n_{ks} = \iint_0^b \omega_k L_1[\omega_s] dx dy, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Получаем систему  $p$  линейных однородных уравнений для получения  $\alpha_s$ , которая имеет нетривиальное решение, когда главная матрица системы этих уравнений имеет определитель, равный нулю:

$$\begin{vmatrix} m_{11} - \bar{\lambda} n_{11} & \dots & m_{1p} - \bar{\lambda} n_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p1} - \bar{\lambda} n_{p1} & \dots & m_{pp} - \bar{\lambda} n_{pp} \end{vmatrix} = 0 \quad (7),$$

Уравнение (7) представляет из себя алгебраическое уравнение  $p$ -ой степени относительно  $\bar{\lambda}$ , оно имеет  $p$  действительных корней которые можно рассматривать в качестве верхних границ значений, т.е. таким образом мы имеем частоту собственных колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. Москва. Наука, главная редакция физ. мат. литературы, 1984, 368 с.
2. Подстригач Я. С. Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. Изд. "Наукова думка", Киев, 1976

#### ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՈՒՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

**Ն. Ա. ԿՈՒՏՈՒԶՅԱՆ**

Հոդվածում ուսումնասիրված է անիզոտրոպ ուղղանկյուն սալի ընդլայնական տատանումները փոփոխական ջերմաստիճանային դաշտում, երբ առաձգականության և Պուասոնի գործակիցները կախված են ջերմաստիճանից գծորեն:

#### VIBRATIONS OF ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATE

**N. A. KUTUZYAN**

In this work the shear vibrations of anisotropic (having plane of elastic symmetry in each point one) plate situated in variable thermal field are considered. Plate's materials elastic modulus and Poisson's coefficient have linear dependence on temperature.

Having into consideration Hooke's generalized law with account of Neumann's hypothesis, we get equation of shear vibrations of anisotropic rectangular plate. Using Raleigh-Ritz method the upper and lower boundaries of Eigen vibrations frequencies are obtained.