

КОНТАКТНО-ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЙ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛАДЫШЕМ

Н. А. КУТУЗЯН

Кандидат физикоматематических наук, доцент

Л. А. ШЕКЯН

Кандидат физикоматематических наук, доцент

Проведено теоретическое исследование контактного взаимодействия для такого подшипника скольжения, вкладыш которого имеет эллиптическое поперечное сечение. Предполагается, что подшипник находится в режиме граничного трения, при этом учитывается износ трущихся поверхностей и тепловыделение от трения.

Задача сведена к замкнутой системе нелинейных интегральных уравнений. Полное математическое исследование этой системы проведено на основании принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций. Получено приближенное аналитическое решение задачи.

Результаты исследования могут быть использованы в расчетах оптимизации подшипников скольжения.

1. Пусть упругий сплошной цилиндр 1 с радиусом R и с коэффициентами упругости μ и ν (соответственно коэффициент сдвига и коэффициент Пуассона) под действием внешних сил равномерно вращается вокруг своей оси и вдоль своих образующих вдавливает в неподвижное недеформируемое цилиндрическое отверстие 2, поперечное сечение которого имеет форму эллипса с полуосями a и b , притом $a > b > R$ (фиг.1). Предполагается, что цилиндр и отверстие находятся в режиме граничного трения.

Требуется определить положение и размеры области контакта между цилиндром и отверстием (т.е. угловые координаты α и β -соответствующих началу и концу области контакта, и угол ε , образующий линией действия заданных внешних сил с линией, проходящей через центры O_1 цилиндра и отверстия O_2), законы распределения нормальных $\sigma(\varphi)$ и касательных $\tau(\varphi)$ контактных напряжений, действующих в контактной области $\varphi \in [-\alpha; \beta]$, расстояние $l = O_1O_2$ центров O_1 и O_2 (фиг.1), а также потери в узле трения.

Основными математическими соотношениями задачи являются условия равенства радиальных перемещений в области контакта $\varphi \in [-\alpha, \beta]$

$$u_E(\varphi) + u_W(\varphi) + u_T(\varphi) = R + l \cos(\varphi + \varepsilon) - ab \left[a^2 \cos^2(\varphi + \gamma) + b^2 \sin^2(\varphi + \gamma) \right]^{0.5} \quad (1)$$

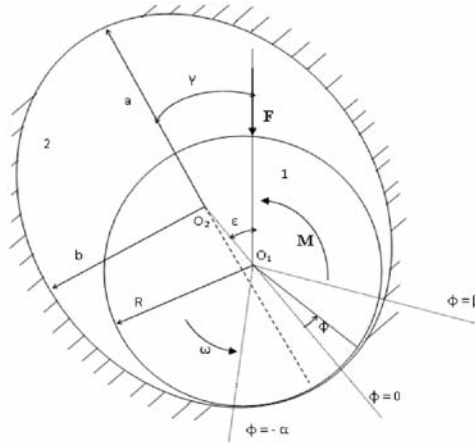
и условия равновесия цилиндра

$$\int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \sin(\varphi + \varepsilon) + \tau(\varphi) \cos(\varphi + \varepsilon)] d\varphi = 0, \quad (2)$$

$$\int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \cos(\varphi + \varepsilon) - \tau(\varphi) \sin(\varphi + \varepsilon)] d\varphi = F, \quad (3)$$

$$R^2 \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) d\varphi = M, \quad (4)$$

где $u_E(\varphi)$, $u_W(\varphi)$ и $u_T(\varphi)$ - радиальные перемещения граничных точек контактирующих тел, обусловленных упругой деформацией, износом и тепловыделением от трения соответственно, F и M - соответственно, внешняя радиальная сила и вращающий момент пары, действующие на единицу длины цилиндра, γ - угол между линией действия силы F с линией, проходящей через центры O_1 и O_2 (фиг. 1).



Фиг. 1 (Схема контактного взаимодействия сел)

При решении задачи будем пользоваться также законом трения Кулона

$$\tau(\varphi) = f p(\varphi), \quad \varphi \in [-\alpha, \beta], \quad (5)$$

и условиями непрерывности поверхностных нормальных напряжений на границах контактной области

$$p(-\alpha) = 0, \quad p(\beta) = 0. \quad (6)$$

Здесь f - коэффициент трения цилиндра с отверстием в режиме граничного трения.

Пользуясь известным методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили о представлении решения плоской задачи теории упругости [1], определим упругие радиальные перемещения $u_E(\vartheta)$ граничных точек цилиндра, возникающих вследствие действия на граничной области $\varphi \in [-\alpha, \beta]$ нормальных $p(\varphi)$ и касательных $\tau(\varphi)$ контактных напряжений. Эти перемещения, согласно [2], выражаются формулой

$$\begin{aligned} u_E(\vartheta) = & \frac{\chi+1}{4\pi\mu} R \int_{-\alpha}^{\beta} p(\varphi) \ln 2 \left| \sin \frac{\vartheta-\varphi}{2} \right| d\varphi + \frac{\chi-1}{8\mu} R \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) \operatorname{sgn}(\vartheta-\varphi) d\varphi - \\ & - R \int_{-\alpha}^{\beta} p(\varphi) K^{(1)}(\vartheta-\varphi) d\varphi - R \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) K^{(2)}(\vartheta-\varphi) d\varphi + \frac{R}{2\pi\mu} \int_{-\alpha}^{\beta} p(\varphi) \cos(\vartheta-\varphi) d\varphi + f_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$K^{(1)}(z) = \frac{\chi+1}{4\pi\mu} K_{11}(z) + \frac{\chi-1}{8\pi\mu} K_{12}(z), \quad K_{11}(z) = 2 \sin^2 \frac{z}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{z}{2} \right|,$$

$$K_{12}(z) = (\pi \operatorname{sgn} z - z) \sin z, \quad K^{(2)}(z) = \frac{\chi+1}{4\pi\mu} K_{21}(z) + \frac{\chi-1}{8\pi\mu} K_{22}(z) - \frac{\chi-1}{8\pi\mu} z, \quad (8)$$

$$K_{21}(z) = \sin z \ln \left| 2 \sin \frac{z}{2} \right|, \quad K_{22}(z) = -2(\pi \operatorname{sgn} z - z) \sin^2 \frac{z}{2}, \quad \vartheta \in [-\alpha, \beta].$$

Здесь $\chi = 3 - 4\nu$ - при толстом (длинном) диске, находящийся в состоянии плоской деформации, и $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ - при тонкой цилиндре (обобщенно плоское напряженное состояние), f_1 - постоянное, обусловленное жестким перемещением цилиндра и определяется из условия $u_E(0) = 0$

Перемещения $u_W(\vartheta)$ определяются на основе экспериментальных данных [3], согласно которым скорость изнашивания может быть выражена степенной функцией

$$\frac{\partial u_W}{\partial t} = \lambda [p(\vartheta)]^m (\omega R)^n, \quad 1 \leq m < 3, \quad n \approx 1, \quad \vartheta \in [-\alpha, \beta], \quad (9)$$

где λ - коэффициент пропорциональности, t - время, ω - угловая скорость цилиндра. Величины параметров λ и m зависят от материалов тел, образующих пары трения, геометрии трущихся поверхностей и от режима трений. Их значения приведены в [3].

Считаем, что цилиндр находится в однородном температурном поле $T(r) = T_1 = \text{const}$, притом рост температуры цилиндра $(T_1 - T_0)$ пропорционален средней мощности сил трения [4]

$$T_1 - T_0 = K_1 \omega R^2 \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) d\varphi, \quad (10)$$

где T_0 - температура окружающей среды, а K_1 - температурный эквивалент мощности сил трения. При таких предположениях радиальные температурные перемещения u_T граничных точек цилиндра определяются формулой [5]

$$u_T = \frac{(1 + \nu)\alpha_T}{2(1 - \nu)} (T_1 - T_0). \quad (11)$$

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи сводится к определению $p(\varphi)$, $\tau(\varphi)$, α , β , ε , T_1 и M из соотношений (1)-(11), которые образуют замкнутую систему нелинейных уравнений, относительно указанных неизвестных.

2. Математическое исследование полученной системы нелинейных уравнений, следуя [6], проводим на основе принципа сжимающих отображений [7]. С этой целью, введя новые безразмерные величины

$$U(\vartheta) = \frac{u_W(\vartheta)}{R}, \quad a_0 = \frac{a}{R}, \quad b_0 = \frac{b}{R}, \quad l_0 = \frac{l}{R}, \quad F_0 = (\lambda \omega t)^{1/m} F, \quad (12)$$

и принимая во внимание то, что изменение со временем положения и размеров контактной области, а также законы распределения контактных давлений в начальной ста-

дии контактного взаимодействия незначительны, из (9) и (5), получим

$$p(\vartheta) = [U(\vartheta)/\lambda\omega t]^{1/m}, \quad \tau(\vartheta) = f[U(\vartheta)/\lambda\omega t]^{1/m}. \quad (13)$$

Тогда из соотношений (1), на основании (7), (12) и (13) получим относительно $U(\vartheta)$ нелинейное интегральное уравнение типа:

$$U(\vartheta) = \int_{-\alpha}^{\beta} \Phi(\vartheta, \varphi) [U(\varphi)]^{1/m} d\varphi + \Psi(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\alpha, \beta], \quad (14)$$

где $\Phi(\vartheta, \varphi)$ и $\Psi(\vartheta)$ известные функции. В уравнении (14), кроме неизвестной функции $U(\vartheta)$, входят также неизвестные параметры α , β (в качестве пределов интегрирования), ε и l_0 . Уравнение (14), вместе с условиями равновесия (2) и (3), а также с условиями непрерывности напряжений на границах контактной области (6), образуют полную систему нелинейных уравнений относительно неизвестных $U(\vartheta)$, α , β , ε и l_0 . Как только будут определены эти неизвестные, из третьего уравнения равновесия (4) можно определить вращающий момент M , следовательно, и мощность потерянной энергии $N = M\omega$ в узле трения.

Систему нелинейных уравнений (2), (3), (6) и (14) приведем к виду, удобному для применения метода последовательных приближений. Из уравнения равновесия (2), с учетом (13), получим

$$\varepsilon = \arctg \frac{\int_{-\alpha}^{\beta} (\sin \varphi + f \cos \varphi) [U(\varphi)]^{1/m} d\varphi}{\int_{-\alpha}^{\beta} (f \sin \varphi - \cos \varphi) [U(\varphi)]^{1/m} d\varphi}, \quad (15)$$

а на основании (1), (12) и (13), из условий (6) будем иметь

$$\alpha = \arccos \left\{ \frac{U_E(-\alpha) - 1}{l_0} + \frac{a_0 b_0}{l_0 \sqrt{a_0^2 \cos^2(\alpha - \gamma) + b_0^2 \sin^2(\alpha - \gamma)}} \right\} + \varepsilon, \quad (16)$$

$$\beta = \arccos \left\{ \frac{U_E(\beta) - 1}{l_0} + \frac{a_0 b_0}{l_0 \sqrt{a_0^2 \cos^2(\beta + \gamma) + b_0^2 \sin^2(\beta + \gamma)}} \right\} - \varepsilon. \quad (17)$$

При этом, уравнение равновесия (3) принимает вид

$$F_0 = \int_{-\alpha}^{\beta} [\cos(\varphi + \varepsilon) - f \sin(\varphi + \varepsilon)] [U(\varphi)]^{1/m} d\varphi. \quad (18)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы нелинейных уравнений (14)-(18) относительно неизвестных $U(\vartheta)$, α , β , ε и l_0 . Структура уравнения (18) позволяет решать эту систему существенно упрощенным способом, временно, в уравнениях задачи считая неизвестной также силу F и, взамен чего, одновременно считая заданное расстояние $l = O_1 O_2$, принимая для него некоторые возможные значения из области его изменения $b - R < l < a$. Отметим, что получившаяся при такой замене зависимость F от l можно трактовать как искомую зависимость l от F . Тогда урав-

нения (14)-(18), при каждом допустимом значении l , образуют относительно $U(\mathcal{G})$, $\alpha, \beta, \varepsilon$ и F_0 систему нелинейных уравнений, которую запишем в операторном виде $x = A(x)$, где $x = \{U(\mathcal{G}), \alpha, \beta, \varepsilon, F_0\}$. Эта система имеет наиболее удобный вид для получения ее решения методом последовательных приближений.

Математическое исследование о существовании и единственности решения уравнения $x = A(x)$, а также допустимость применения к ней метода последовательных приближений, следуя [4,6], нетрудно проводить в некотором метрическом пространстве X , являющейся совокупностью всех элементов $x = \{V(\eta), \alpha, \beta, \varepsilon, F_0\}$, в которой расстояние его произвольных двух элементов $x_i = \{V_i(\eta), \alpha_i, \beta_i, \varepsilon_i, F_{0,i}\} \in X$ ($i=1;2$) определяется формулой

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{0 \leq \eta \leq 1} |V_1(\eta) - V_2(\eta)| + |\alpha_1 - \alpha_2| + |\beta_1 - \beta_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |F_{0,1} - F_{0,2}|, \quad (19)$$

где $U(\mathcal{G}) = V((\alpha + \mathcal{G})/(\alpha + \beta))$, $V_i(\eta)$ - произвольные непрерывные функции на отрезке $0 \leq \eta \leq 1$, $\alpha_i, \beta_i, \varepsilon_i$ и $F_{0,i}$ ($i=1;2$) произвольные числа. При этом, доказываемое существование области изменения характерных параметров задачи, где оператор A имеет единственную неподвижную точку $x_* = \{V_*(\eta), \alpha_*, \beta_*, \varepsilon_*, F_{0,*}\}$, к которой по метрике (19) стремится последовательность элементов $x_0, x_1, x_2, \dots$, определенных формулами $x_i = A(x_{i-1})$ ($i=1,2,\dots$) исходя из любого начального элемента $x_0 = \{V_0(\eta), \alpha_0, \beta_0, \varepsilon_0, F_{0,0}\}$ из определенного замкнутого подмножества H пространства X . Тогда решением системы уравнений (14)-(19) будет функция $U_*(\mathcal{G}) = V_*((\alpha_* + \mathcal{G})/(\alpha_* + \beta_*))$ и числа $\alpha_*, \beta_*, \varepsilon_*, F_{0,*}$.

Принимая $x_0 = \{0, \pi/6, \pi/6, 0, 0\}$ в качестве нулевого приближения, решение уравнения $x = A(x)$ в первом приближении будет $x_1 = A(x_0)$. откуда, на основании (14)-(16), будем иметь

$$U_1(\mathcal{G}) = \Psi(\mathcal{G}), \quad \varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \frac{\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (\sin \varphi + f \cos \varphi) [\Psi(\varphi)]^{1/m} d\varphi}{\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (f \sin \varphi - \cos \varphi) [\Psi(\varphi)]^{1/m} d\varphi},$$

$$\alpha_1 = \arccos \left\{ \frac{U_E(-\pi/6) - 1}{l_0} + \frac{a_0 b_0}{l_0 \sqrt{a_0^2 \cos^2(\gamma - \pi/6) + b_0^2 \sin^2(\gamma - \pi/6)}} \right\},$$

$$\beta_1 = \arccos \left\{ \frac{U_E(\pi/6) - 1}{l_0} + \frac{a_0 b_0}{l_0 \sqrt{a_0^2 \cos^2(\gamma + \pi/6) + b_0^2 \sin^2(\gamma + \pi/6)}} \right\},$$

$$F_{0,1} = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (\cos \varphi - f \sin \varphi) [\Psi(\varphi)]^{1/m} d\varphi.$$

При этом, контактные напряжения в первом приближении будут

$$p_1(\mathcal{G}) = [\Psi(\mathcal{G})/\lambda \omega t]^{1/m}, \quad \tau_1(\mathcal{G}) = f [\Psi(\mathcal{G})/\lambda \omega t]^{1/m}$$

В частном случае $a = b$, т.е. при круговом отверстии, полученные результаты совпадают с результатами [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966, 707с.
2. *Мхитарян С. М., Торосян Ф. С.* О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием // Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, т. 31, N 5, с. 3-19.
3. Трение, изнашивание и смазка. Справочник. Кн. 1. М., Наука, 1978, 400с.
4. *Шекян А. Л.* Контактное взаимодействие цилиндра и втулки в режиме граничного трения // Изв. НАН РА, Механика, 2006, т. 59, N 3, с. 66-72.
5. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., Наука, 1979, 560 с.
6. *Мхитарян С. М., Шекян А. Л.* Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изд. АН АрмССР, Механика, 1977, т. 30, N 3, с.15-32.
7. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965, 360с.

ԿՈՆՏԱԿՏԱԶԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՆԵՐԴՐԱԿՈՎ ՍԱՀՔԻ ԱՌԱՆՑՔԱԿԱՆՈՒՄ

**Ն. Ա. Կուտուզյան
Լ. Ա. Շեկյան**

Կատարված է կոնտակտային փոխազդեցության տեսական հետազոտություն այնպիսի սահքի առանցքակալի համար, որի ներդրակը ունի էլիպտական լայնական կտրվածք: Ենթադրվում է, որ առանցքակալը գտնվում է սահմանային շփման ռեժիմում, ընդ որում՝ հաշվի է առնված շփվող մակերևույթների մաշումը և շփումից անջատված քերմությունը:

Խնդիրը բերված է ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների փակ համակարգի: Այդ համակարգի լրիվ մաթեմատիկական հետազոտությունը կատարված է սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա՝ անընդհատ ֆունկցիաների տարածության մեջ: Ստացված է խնդրի մոտավոր վերլուծական լուծումը:

Հետազոտության արդյունքները կարող են կիրառվել սահքի առանցքակալների օպտիմացման հաշվարկներում:

CONTACT-THERMAL STRESSES IN THE BEARING OF THE SLIDING WITH THE ELLIPTIC LOOSE LEAF

**N. A. Kutuzyan
L. A. Shekyan**

The contact interaction in the bearing of the sliding loose leaf with elliptic cross-section is considered. It is supposed, that the bearing of the sliding is in a mode of a boundary friction, deterioration of their surfaces and a thermal emission from a friction is considered.

The problem of the closed system of the nonlinear integrated equations is discussed. Full mathematical research of this system is carried out on the basis of a principle of compressing displays in space of continuous functions. The approached analytical decision of a problem is received and its numerical analysis is resulted.

This results can be applicated in calculations for optimization of the bearings of the sliding.