ՋԵՐՄԱՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ

Ն. Ա. ԿՈՒՏՈՒՁՅԱՆ
Ֆիզմաթ. գիտությունների թեկնածու, դոցենտ

Աշխատանքում դիտարկված է օրթոտրոպ նյութից պատրաստված և տարբեր ջերմային հատկություններ ունեցող երկու շերտերից բաղկացած բաղադրյալ շերտի ջերմահաղորդականության խնդիր: Շերտերը միմյանցից ջերմամեկուսացված են, բացառությամբ որոշակի տեղամասի, որտեղ տրված է ջերմության հոսքը: Ստացվել է ջերմաստիճանային դաշտի բաշխման ֆունկցիան բաղադրյալ շերտում, որոշվել է չմեկուսացված տեղամասի չափը՝ կախված շերտերի հաստությունից, ջերմահաղորդականության գործակիցներից և ջերմության հոսքի ինտենսիվությունից:

Դիտարկենք բաղադրյալ օրթոտրոպ շերտ՝ բաղկացած երկու տարբեր ջերմահաղորդականության գործակիցներ ունեցող շերտերից, որը գտնվում է ստացիոնար ջերմաստիճանային դաշտում: Առաջին շերտի $(-\infty < x < \infty, -h_1 \le y \le 0)$ ջերմահաղորդականության գործակիցները՝ λ_{11}, λ_{12} է և $y = -h_1$ եզրում տրված է $T_0 + t_c$, ջերմաստիճան (T_0-ն բացարձակ ջերմաստիճանն է): Երկրորդ շերտի $(-\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le h_2)$ ջերմահաղորդականության գործակիցները՝ λ_{21}, λ_{22} $y = h_2$ եզրում տրված է $T_0 + t_{c2}$ ջերմաստիճան: Բաղադրյալ շերտում ջերմաստիճանի ֆունկցիան նշանակենք

$$T_m(x, y) = T_0 + t_m(x, y) \qquad m = 1\ ;2,$$

համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ շերտերի համար: Երկու շերտերն իրենց միացման գծով միմյանցից ջերմամեկուսացված են, բացառությամբ -a<x<a տեղամասի: 2a երկարությամբ այս տեղամասում հայտնի է ջերմության հոսքը՝

$$Q = \int_{-a}^{a} q(x) dx :$$

Խնդրի մաթեմատիկական ձևակերպումը հետևյալն է՝ յուրաքանչյուր շերտի համար լուծել ջերմահաղորդականության հավասարումը՝

$$\frac{\partial^2 t_m}{\partial y^2} + k_m \frac{\partial^2 t_m}{\partial x^2} = 0 \qquad m = 1;\ 2\ , \quad (1.1)$$

որտեղ $k_m = \dfrac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}$ $m = 1;\ 2$, հետևյալ եզրային պայմաններով՝

երբ՝ $y = -h_1 \quad t_1 = t_{c1}$ (1.2)

$y = h_2 \quad t_2 = t_{c2}$

$y = 0 \quad \frac{\partial t_m}{\partial y} = q_m(x)[H(x+a) - H(x-a)] \qquad m =$ 1; 2,

որտեղ $H(x+a) - H(x-a) = \begin{cases} 1, \text{երբ } |x| \le a \\ 0, \text{երբ } |x| > a \end{cases}$,

q(x) –ը ջերմության հոսքի ինտենսիվությունն է՝ $q_m(x) = \frac{1}{\lambda_{m2}} q(x) \qquad m =$ 1, 2,

նշանակելով $\theta_m = t_m - t_{cm} \qquad m =$ 1; 2 (1.1), (1.2) կվերածվի՝

$$k_m \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial y^2} = 0 \tag{1.3}$$

$y = -h_1 \qquad \theta_1 = 0$ (1.3)/

$y = h_2 \qquad \theta_2 = 0$

$y = 0 \qquad \frac{\partial \theta_m}{\partial y} = q_m(x)[H(x+a) - H(x-a)] \qquad m =$ 1; 2,

եթե նշանակենք $\xi = \frac{x}{\sqrt{k_1}}, \quad k = \frac{k_2}{k_1}$, ապա (1.3), (1.3)/ կվերածվեն.

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = 0 \quad -h_1 \le y \le 0$$

$$k \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \le y \le h_2$$

եզրային պայմաններով՝

երբ՝ $y = -h_1 \qquad \theta_1 = 0$

$y = h_2 \qquad \theta_2 = 0$

$y = 0 \qquad \frac{\partial \theta_m}{\partial y} = q_m[H(\xi + a) - H(\xi - a)] \qquad m =$ 1; 2,

որտեղ $H(\xi + a) - H(\xi - a) = \begin{cases} 1, \quad \text{երբ} \quad |\xi| < \frac{a}{\sqrt{k_1}} \\ 0, \quad \text{երբ} \quad |\xi| > \frac{a}{\sqrt{k_1}} \end{cases}$

Օգտագործենք Ֆուրեյի ինտեգրալ ձևափոխությունը, նշանակելով՝

$\phi_1(\delta)=\int\limits_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}} q_1(\xi)e^{i\delta\xi}d\xi$ $\phi_2(\delta)=\int\limits_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}} q_2(\xi)e^{i\delta\xi}d\xi$, կստանանք հետևյալ եզրային

խնդիրը՝ $$\frac{d^2\overline{\theta_1}}{dy^2}-\delta^2\overline{\theta_1}=0 \quad -h_1\le y\le 0 \quad , \tag{1.4}$$

$$\frac{d^2\overline{\theta_2}}{dy^2}-k\delta^2\overline{\theta_2}=0 \quad 0\le y\le h_2 \tag{1.5}$$

երբ՝ $y=-h_1 \quad \bar{\theta}_1=0$

$y=0 \quad \dfrac{d\bar{\theta}_m}{dy}=\phi_m(\delta) \quad m=$ 1; 2

$y=h_2 \quad \bar{\theta}_2=0$

(1.4) հավասարման լուծումը կլինի՝ $\overline{\theta}_1=C_1e^{\delta y}+C_2e^{-\delta y}$,

քանի որ $y=-h_1 \quad \bar{\theta}_1=0$, հետևաբար $C_1=-C_2e^{2h_1\delta}$, իսկ $\bar{\theta}_1=C_2\left(e^{-\delta y}-e^{\delta(y+2h_1)}\right)$:

Ունենք նաև $\left.\dfrac{d\bar{\theta}_1}{dy}\right/_{y=0}=\phi_1(\delta)=-C_2\delta\left(1+e^{2\delta h_1}\right)$, որտեղից՝ $C_2=-\dfrac{\phi_1(\delta)}{\delta\left(1+e^{2\delta h_1}\right)}$,

հետևաբար $\bar{\theta}_1(\delta,y)=\dfrac{\phi_1(\delta)\left(e^{\delta(y+2h_1)}e^{-\delta y}\right)}{\delta\left(1+e^{2\delta h_1}\right)}$ կամ $\bar{\theta}_1(\delta,y)=\dfrac{\phi_1(\delta)}{\delta}\cdot\dfrac{sh\delta(y+h_1)}{ch\delta h_1}$: (1.6)

Կատարելով նույն գործողությունները և ձևափոխությունները՝ երկրորդ շերտի համար կստանանք.

$$\bar{\theta}_2(\delta,y)=\frac{\phi_2(\delta)}{\delta\sqrt{k}}\cdot\frac{sh\delta\sqrt{k}(y-h_2)}{ch\delta\sqrt{k}h_2} : \tag{1.7}$$

Օգտվելով Ֆուրիեյի հակադարձ ձևափոխությունից՝ ջերմաստիճանի ֆունկցիան շերտերում կունենա հետևյալ տեսքերը.

առաջին շերտի համար՝ $t_1(\xi,y)=t_{c1}+\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}} q_1(z)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta(z-\xi)}\dfrac{sh\delta(y+h_1)}{\delta ch\delta h_1}d\delta dz$ (1.8)

երկրորդ շերտի համար՝ $t_2(\xi,y)=t_{c2}+\dfrac{1}{2\pi\sqrt{k}}\int\limits_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}} q_2(z)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta(z-\xi)}\dfrac{sh\delta\sqrt{k}(y-h_2)}{\delta ch\delta\sqrt{k}h_2}d\delta dz$: (1.9)

Քանի որ y = 0 եզրագծի վրա, երբ $-\frac{a}{\sqrt{k_1}} < \xi < \frac{a}{\sqrt{k_1}}$ երկու շերտերի

ջերմաստիճաններն իրար հավասար են, կարող ենք դիտարկել հետևյալ հավասարումը.

$$\int_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}} q(z) \int_0^{\infty} \frac{\cos\delta(z-\xi)}{\delta}\left[\frac{th\delta h_1}{\lambda_{12}} + \frac{th\sqrt{k}\delta h_2}{\sqrt{k}\lambda_{22}}\right] d\delta dz = \pi\left(t_{c2} - t_{c1}\right), \tag{1.10}$$

հաշվելով ինտեգրալները՝ (1.10)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}} q(z)\left[\frac{1}{\lambda_{12}}\ln\left(cth\frac{\pi|\xi - z|}{4h_1}\right) + \frac{1}{\lambda_{22}\sqrt{k}}\ln\left(cth\frac{\pi|\xi - z|}{4\sqrt{k}h_2}\right)\right] dz = \pi\left(t_{c2} - t_{c1}\right) : \tag{1.11}$$

Նկատի ունենալով այն հանգամանքը, որ $q(z)$ ֆունկցիան զույգ է (1.11)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int_0^{a/\sqrt{k_1}} q(z)\left[\frac{1}{\lambda_{12}}\ln\left|cth\frac{\pi(\xi - z)}{4h_1}\cdot cth\frac{\pi(\xi + z)}{4h_1}\right|\right] dz + \int_0^{a/\sqrt{k_1}} q(z)\left[\frac{1}{\lambda_{22}\sqrt{k}}\ln\left|cth\frac{\pi(\xi - z)}{4\sqrt{k}h_2}\cdot cth\frac{\pi(\xi + z)}{4\sqrt{k}h_2}\right|\right] dz = \pi\left(t_{c2} - t_{c1}\right) :$$

Այս հավասարումը դիտարկենք այն դեպքի համար, երբ h1=h2=h , պարզության համար ենթադրենք k=1, հետևաբար հավասարումը կգրվի՝

$$\int_0^{a/\sqrt{k_1}} q(z)\left[\frac{1}{\lambda_{12}}\ln\left|\frac{ch\frac{\pi z}{2h} + ch\frac{\pi\xi}{2h}}{ch\frac{\pi z}{2h} - ch\frac{\pi\xi}{2h}}\right| + \frac{1}{\lambda_{22}}\ln\left|\frac{ch\frac{\pi z}{2h} + ch\frac{\pi\xi}{2h}}{ch\frac{\pi z}{2h} - ch\frac{\pi\xi}{2h}}\right|\right] dz = \pi\left(t_{c2} - t_{c1}\right) : \tag{1.12}$$

Ներմուծենք նոր փոփոխականներ՝

$$ch\frac{\pi z}{2h} = \frac{1}{t}\ , \quad ch\frac{\pi\xi}{2h} = \frac{1}{\tau}\ , \quad ch\frac{\pi a}{2\sqrt{k_1}h} = \frac{1}{d}\ ,$$

հետևաբար՝ $dz = -\dfrac{dt}{t^2\frac{\pi}{2h}sh\frac{\pi z}{2h}}$, երբ $z = 0,\ t = 1$, երբ $z = a/\sqrt{k}\,,\ \ t = d$, որի

հետևանքով (1.12) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$-\int_1^d q(t)\ln\left|\frac{\tau + t}{\tau - t}\right|\frac{dt}{t^2\frac{\pi}{2h}sh\frac{\pi z}{2h}} = \frac{\lambda_{12}\lambda_{22}}{\lambda_{12} + \lambda_{22}}\pi\left(t_{c2} - t_{c1}\right) :$$

Նշանակենք՝ $q(z)=P(t)\frac{\lambda_{12}\lambda_{22}}{\lambda_{12}+\lambda_{22}}\pi(t_{c2}-t_{c1})\frac{\pi}{2h}t^2 sh\frac{\pi z}{2h}$, տեղադրելով

նախորդ հավասարման մեջ կստանանք՝ $\int_d^1 P(t)\ln\left|\frac{\tau+t}{\tau-t}\right|dt=1 \quad (d<\tau<1)$: (1.13)

(1.13) հավասարման լուծումը [1] ստացվում է.

$P(\tau)=\frac{c}{\sqrt{(1-\tau^2)(\tau^2-d^2)}}$, որտեղ $\frac{1}{c}=\int_d^1\frac{\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}}{\sqrt{(1-\tau^2)(\tau^2-d^2)}}d\tau=const$:

Ցույց է տրված [1], որ $C=\frac{1}{\pi K(d)}$, որտեղ $K(d)$-ն առաջին սեռի լրիվ էլիպտա-

կան ինտեգրալ է՝ $K(d)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-d^2\sin^2 x}}$: Հաշվի առնելով՝ $Q=\int_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}}q(\xi)d\xi$

կունենանք՝ $(t_{c2}-t_{c1})\frac{\lambda_{12}\lambda_{22}}{\lambda_{12}+\lambda_{22}}\int_d^1\frac{\tau d\tau}{\sqrt{(\tau^2-d^2)(1-\tau^2)}}=\frac{Q}{2}\cdot K(d)$:

Վերջին արտահայտության մեջ ձախ մասի ինտեգրալը ձևափոխվում է երկրորդ սեռի լրիվ էլիպտական ինտեգրալի՝ $E\left(\sqrt{1-d^2}\right)=\frac{Q(\lambda_{12}+\lambda_{22})}{\lambda_{12}\lambda_{22}}\cdot K(d)$, որտեղ

$E\left(\sqrt{1-d^2}\right)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(1-d^2)\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 x+d^2\sin^2 x}dx$: Քանի որ $a=\frac{2\sqrt{k_1}}{\pi}harcchd^{-1}$

հետևաբար հաշվելով d-ն, կունենանք նաև a-ն: Եթե խնդիրը լուծենք, ենթադրելով, որ (1.11) հավասարման մեջ տեղի ունի՝ $h_1>>\frac{a}{\sqrt{k_1}},\quad h_2>>\frac{a}{\sqrt{k_2}}$ կունենանք՝

$cth\frac{\pi|\xi-z|}{4h_1}\approx\frac{4h_1}{\pi|\xi-z|},\quad cth\frac{\pi|\xi-z|}{\sqrt{k}4h_2}\approx\frac{4h_2\sqrt{k}}{\pi|\xi-z|}$: (1.14)

Հաշվի առնելով (1.14)-ը, (1.11) հավասարման փոխարեն կունենանք.

$$\int_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}}q(z)\ln\frac{1}{|\xi-z|}dz=\pi\frac{\sqrt{k}\lambda_{12}\lambda_{22}}{\lambda_{12}+\sqrt{k}\lambda_{22}}(t_{c2}-t_{c1})-Q\frac{\sqrt{k}\lambda_{22}\ln\frac{4h_1}{\pi}+\lambda_{12}\ln\frac{4h_2\sqrt{k}}{\pi}}{\lambda_{12}+\sqrt{k}\lambda_{22}}:$$

Խնդիրը հանգեց հետևյալ հավասարմանը՝ $\int_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}}q(z)\ln\frac{1}{|\xi-z|}dz=A$, (1.15)

որտեղ $A=\pi\frac{\lambda_{12}\sqrt{k}\lambda_{22}}{\lambda_{12}+\sqrt{k}\lambda_{22}}(t_{c2}-t_{c1})-Q\frac{\sqrt{k}\lambda_{22}\ln\frac{4h_1}{\pi}+\lambda_{12}\ln\frac{4h_2\sqrt{k}}{\pi}}{\lambda_{12}+\sqrt{k}\lambda_{22}}$:

(1.15)-ում ընդունելով $z=\frac{a}{\sqrt{k_1}}z,\quad \xi=\frac{a}{\sqrt{k_1}}\eta$ կստանանք՝

$$\int_{-1}^{1} q(z)\ln|\eta - z|dz = \ln\frac{\sqrt{k_1}}{a}\int_{-1}^{1} q(z)dz - \frac{A\sqrt{k_1}}{a} \quad : \qquad (1.16)$$

(1.16) հավասարման երկու մասերն ածանցենք ըստ η–ի՝ կստանանք՝

$$\int_{-1}^{1}\frac{q(z)}{\eta - z}dz = 0 \qquad (1.17)$$

(1.17) հավասարման լուծումը կլինի՝

$$q(\eta) = \frac{M}{\pi\sqrt{1-\eta^2}} \qquad (1.18)$$

Անհայտ M-ը որոշելու համար (1.18)-ը տեղադրենք (1.16)-ի մեջ, երբ η =0

$$\int_{-1}^{1}\frac{M}{\pi\sqrt{1-z^2}}\ln|z|dz = \ln\frac{\sqrt{k_1}}{a}\int_{-1}^{1}\frac{M}{\pi\sqrt{1-z^2}}dz - \frac{A\sqrt{k_1}}{a} \quad : \qquad (1.19)$$

Հաշվելով ինտեգրալների արժեքները՝ կստանանք՝

$$M = \frac{A\sqrt{k_1}}{a\left(\ln 2 + \ln\frac{\sqrt{k_1}}{a}\right)} \quad :$$

Ստացված հաստատունի արժեքը տեղադրենք (1.18)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$q(\eta) = \frac{A\sqrt{k_1}}{a\pi\left(\ln 2 + \ln\frac{\sqrt{k_1}}{a}\right)\sqrt{1-\eta^2}} \quad ,$$

կամ կատարելով փոփոխականի նույն փոխարինումը կստատանք՝

$$q(\xi) = \frac{A\sqrt{k_1}}{\pi\left(\ln 2 + \ln\frac{\sqrt{k_1}}{a}\right)\sqrt{a^2 - k_1\xi}} \quad :$$

Այժմ որոշենք չմեկուսացված տեղամասի երկարությունը՝ հաշվելով ջերմության հոսքը՝

$$Q = \int_{-a/\sqrt{k_1}}^{a/\sqrt{k_1}} q(\xi)d\xi = \frac{A\sqrt{k_1}}{\ln 2 + \ln\frac{\sqrt{k_1}}{a}}$$, որտեղից էլ $$a = 2\sqrt{k_1}\exp\left(-\frac{A}{Q}\sqrt{k_1}\right),$$

հաշվի առնելով A-ի արժեքը և կատարելով մի քանի ձևափոխություններ, կստանանք՝ $$a = \frac{8\sqrt{k_1}}{\pi}\left[h_1^{\sqrt{k_2}\lambda_{22}}\left(h_2\sqrt{k}\right)^{\sqrt{k_1}\lambda_{12}}\right]^{\frac{1}{\lambda_{12}+\sqrt{k}\lambda_{22}}}\cdot\exp\left[\frac{\lambda_{12}\lambda_{22}\sqrt{k_2}}{\lambda_{12}+\sqrt{k}\lambda_{22}}\frac{(t_{c1}-t_{c2})}{Q}\right],$$

մասնավորապես, երբ $\lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda$, ապա

$$a = \frac{8\sqrt{k_1}}{\pi}\left[h_1^{\sqrt{k_2}}\left(h_2\sqrt{k}\right)^{\sqrt{k_1}}\right]^{\frac{1}{1+\sqrt{k}}} \exp\left[\frac{\sqrt{k_2}\lambda}{1+\sqrt{k}}\frac{\left(t_{c1}-t_{c2}\right)}{Q}\right],$$

իսկ երբ $h_1 = h_2 = h$, $a = \frac{8\sqrt{k_1}}{\pi}\left(h\sqrt{k}\right)^{\sqrt{k_1}} \exp\left[\frac{\sqrt{k_2}\lambda}{1+\sqrt{k}}\frac{\left(t_{c1}-t_{c2}\right)}{Q}\right]$,

երբ $k_1 = k_2 = k_c$ $a = \frac{8\sqrt{k_c}}{\pi}[h]^{\sqrt{k_c}} \exp\left[\frac{\sqrt{k_c}\lambda}{2}\frac{\left(t_{c1}-t_{c2}\right)}{Q}\right]$,

երբ $k_1 = k_2 = k_c$, $h_1 \neq h_2$, $\lambda_{12} \neq \lambda_{22}$,

$$a = \frac{8\sqrt{k_c}}{\pi}\left[h_1^{\lambda_{22}} \cdot h_2^{\lambda_{12}}\right]^{\frac{\sqrt{k_c}}{\lambda_{12}+\lambda_{22}}} \exp\left[\frac{\lambda_{12}\cdot\lambda_{22}\sqrt{k_c}}{\lambda_{12}+\lambda_{22}}\frac{\left(t_{c1}-t_{c2}\right)}{Q}\right]:$$

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. ***Александров В. М., Коваленко Е. В.*** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями, М., Наука, 1986, 335с.
2. ***Бейтман Г., Эрдейн А. и др***. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования фурье, Лапласа, Меллина. Том 1, 1969, Наука, 344с.
3. ***Коваленко А. Д.*** Термоупругость, 215с.

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ СЛОЖНОЙ ПОЛОСЫ

Н. А. Кутузян

Рассмотрена задача теплопроводности для двухслойной ортотропной полосы. Составляющие полосы имеют разные тепловые свойства и теплоизолированы, кроме некоторого участка, где известен поток тепла. Получена функция распределения температуры в сложной полосе, определен размер теплоизолированного участка, зависимый от толщины слоев, коэффициентов теплопроводности и интенсивности потока тепла.

THE PROBLEM OF THE THERMAL CONDUCTIVITY FOR THE ORTHOTROPIC COMPLEX LAYER

N. A. Kutuzyan

The article deals with the problem of the thermal conductivity for the duplex orthotropic layer. The layers are mainly heat-insulated, except from certain parts where heat flux is known.

The function of the thermal field allocation in the duplex layer and the intensity of the heat flux have come out. The size of the heat-insulated part was determined which depended on the thickness of the layers and thermal conductivity co-efficients.