ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՎԻՃԱԿԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Կ. Ի. ՂԱՐԱԽԱՆՅԱՆ
Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու,
ԳՊՀ պրոֆեսոր

Մեխանիկայի (ինչպես նաև ֆիզիկայի) հիմնական նպատակը հետևյալ խնդրի լուծումն է՝ տրված է որոշակի ֆիզիկական համակարգ՝ որոշակի արտաքին պայմաններում: Պահանջվում է պարզել, թե ինչ տեղի կունենա այդ համակարգի հետ ինչ որ ժամանակամիջոցում:

Այս խնդրի լուծման համար հարկավոր է նախ ընտրել համակարգի վիճակը որոշող պարամետրերը, այնուհետև ստանալ շարժման հավասարումը, որը նկարագրում է վիճակի փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում:

Դասական մեխանիկայում մասնիկների համակարգի վիճակը ժամանակի տվյալ պահին լրիվ որոշվում է նրանց շառավիղ-վեկտորներով և ունեցած արագություններով: Մեխանիկական վիճակի սահմանումից հետևում է, որ համակարգի հատկությունները բնութագրող ցանկացած ֆիզիկական մեծություն հանդիսանում է ֆունկցիա այդ մասնիկների շառավիղ-վեկտորներից և նրանց արագություններից, այսինքն՝ հանդիսանում է վիճակի ֆունկցիա:

Նախ դիտարկենք մեկ մասնիկի շարժումը: Մեխանիկայի խնդիրն է իմանալ, ընտրված հաշվարկման համակարգի նկատմամբ, նրա դիրքը ժամանակի ցանկացած պահին: Մասնիկի դիրքը որոշվում է $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորով, որը նրա շարժման ընթացքում փոփոխվում է՝ կախված ժամանակից, այսինքն՝ ֆունկցիա է ժամանակից՝

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{1}$$

Այս ֆունկցիան հանդիսանում է մասնիկի շարժման օրենքը: Խնդրի մեխանիկական նպատակն է ստանալ այս ֆունկցիայի բացահայտ տեսքը՝ տվյալ շարժման դեպքում:

Մասնիկի դիրքի փոփոխությունը ժամանակի տվյալ t պահին $\bar{r}(t)$ շառավիղ-վեկտոր ունեցող կետում որոշվում է $v(r,t)$ ակնթարթային արագությամբ, որը հավասար է $\bar{r}(t)$ վեկտորի առաջին կարգի ածանցյալին ըստ ժամանակի՝

$$\bar{v}(\bar{r},t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} \tag{2}$$

Տվյալ կետում ժամանակի տվյալ պահին $\bar{v}(\bar{r},t)$ արագության փոփոխությունը որոշվում է $a(v,r,t)$ ակնթարթային արագացմամբ, որը հավասար է արագության առաջին կարգի կամ շառավիղ-վեկտորի երկրորդ կարգի ածանցյալի ըստ ժամանակի՝

$$\bar{a}(\overline{v,r},t) = \frac{d\bar{v}(\bar{r},t)}{dt} = \frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} \tag{3}$$

կամ

$$\frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2}=\bar{a}(\frac{d\bar{r}}{dt},\bar{r},t) \qquad (4)$$

Ինչպես տեսնում ենք (3) և (4) առնչություններից, արագացումը կախված է վիճակի $\bar{r}$ և $\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}$ պարամետրերից, ուրեմն՝ արագացումը հանդիսանում է վիճակի ֆունկցիա: (4)-ը իրենից ներկայացնում է մասնիկի շարժման հավասարումը, որի լուծումից պետք է որոշել $\bar{r}=\bar{r}(t)$ ֆունկցիան, այսինքն՝ լուծել մեխանիկայի խնդիրը: Այն երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում է, որի լուծման համար անհրաժեշտ է ունենալ սկզբնական պայմաններ՝ $\bar{r}$ և v ֆունկցիաների արժեքները ժամանակի սկզբնական պահին:

Մասնիկի արագացումը, որպես վիճակի ֆունկցիա, կարելի է փոփոխել միայն արտաքին ուժի ազդեցությամբ, որը տրվում է Նյուտոնի երկրորդ օրենքով՝

$$\bar{a}(\bar{v},r,t)=\frac{\bar{F}(\bar{v},\bar{r},t)}{m} \qquad (5)$$

որտեղ m-ը մասնիկի զանգվածն է, $\bar{F}(\bar{v},\bar{r},t)$-ն՝ նրա վրա ազդող ուժը: (5) օրենքից անմիջապես երևում է, որ ուժը հանդիսանում է վիճակի ֆունկցիա:

(4)-ը տեղադրելով (5)-ի մեջ, կստանանք մասնիկի շարժման հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{md^2\bar{r}(t)}{dt^2}=\bar{F}(\frac{d\bar{r}}{dt},\bar{r},t) \qquad (6)$$

Միաչափ շարժման համար, երբ այն ուղղված է OX առանցքով, (6)-ը կփոխարինվի հետևյալ հավասարումով՝

$$\frac{md^2x(t)}{dt^2}=F_x(\frac{dx}{dt},x,t) \qquad (7)$$

Որպես (7) հավասարման կիրառման օրինակ դիտարկենք հարմոնիկ տատանակի (օսցիլիատորի) ազատ տատանումները, որոնք տեղի են ունենում F=-kx առաձգական ուժի ազդեցության տակ: Այս դեպքում (7)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{d^2x}{dt^2}+w^2x(t)=0 \qquad (8)$$

որտեղ $w^2=\frac{k}{m}$ հաստատուն մեծություն է:

Հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար օգտվենք (1) աշխատանքում ստացված արդյունքներից: Կիրառելով (2) և (3) աշխատանքներում որոշ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման առաջարկված եղանակը, (1) աշխառանցքում բերված է.

$$y^{(n)}(x)+w^2x^\alpha y(x)=0 \qquad (9)$$

n-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը հետևյալ տեսքով՝

$$y(x)=\sum_{S=0}^{n-1}C_s\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K w^{2K}\nu^{kn}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma[(S+1-j)\nu+1]}{\Gamma[(S+1-j)\nu+k+1]}X^{\frac{K}{\nu}+S} \qquad (10)$$

որտեղ C_S-ը հաստատուններ են, $\nu=\dfrac{1}{\alpha+n}$, իսկ $\Gamma(\nu)$-ն՝ գամմա ֆունկցիան է:

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման դեպքում (n=2, S=0,1 և j=1,2) (9)-ը և (10)-ը, համապատասխանաբար կընդունեն հետևյալ տեսքերը՝

$$y''(x)+w^2x^\alpha y(x)=0 \qquad (11)$$

$$y(x)=\sum_{S=0}^{1}C_s\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^K w^{2K}\nu^{2K}\frac{\Gamma(S\nu+1)\Gamma[(S-1)\nu+1]}{\Gamma(S\nu+k+1)\Gamma[(S-1)\nu+k+1]}X^{\frac{K}{\nu}+S}=C_0Y_0+C_1Y_1 \qquad (12)$$

որտեղ Y_0-ն և Y_1-ը (11) հավասարման մասնակի լուծումներն են՝

$$y_0(x)=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K(w\nu)^{2K}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(K+1)\Gamma(K-\nu+1)}X^{\frac{K}{\nu}}=(\nu w)^\nu\sqrt{x}\,\Gamma(1-\nu)J_{-\nu}(2\nu wX^{\frac{1}{2\nu}}) \qquad (13)$$

$$y_1(x)=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K(w\nu)^{2K}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}X^{\frac{K}{\nu}+1}=(\nu w)^\nu\sqrt{x}\,\Gamma(1+\nu)J_{\nu}(2\nu wX^{\frac{1}{2\nu}}): \qquad 14)$$

$J_{\pm\nu}(x)$ -ը Բեսսելի առաջին սեռի ֆունկցիաներն են:

(8) հավասարման $x_0(t)$ և $x_1(t)$ մասնակի լուծումները կարող ենք գտնել (11) հավասարման (13) և (14) բերված լուծումներից՝ $\alpha=0$ և $\nu=\frac{1}{2}$ արժեքների դեպքում: Օգտվելով Բեսսելի և գամմա ֆունկցիաների հատկություններից [4]՝

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos z}{\sqrt{z}}\ ,\quad J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}\ ,\quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\ ,\quad \Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,$$

կստանանք այդ լուծումների հայտնի տեսքերը՝

$$x_0(t)=(\frac{wt}{2})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})J_{-\frac{1}{2}}(wt)=\cos wt\ ,$$

$$:x_1(t)=(\frac{wt}{2})^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)J_{\frac{1}{2}}(wt)=\frac{\sin wt}{2}$$

Դասական մեխանիկայում N մասնիկներից բաղկացած համակարգի վիճակը ժամանակի տվյալ պահին որոշվում է նրանց $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots, \overline{r_N}$ շառավիղ-վեկտորներով և նույն պահին ունեցած $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \dots, \overline{V_N}$ արագություններով: Այդ պատճառով էլ համակարգի շարժման ուսումնասիրումը բերվում է նրա առանձին մասնիկների շարժումների ուսումնասիրմանը: Այստեղից բխում է, որ համակարգի վիճակը համարվում է տրված, երբ տրված է նրա յուրաքանչյուր մասնիկի վիճակը: Այդ պատճառով էլ համակարգի շարժումն ուսումնասիրելիս (6) հավասարումը պետք է գրել յուրաքանչյուր մասնիկի համար, հաշվի առնելով նրանց փոխազդեցությունը և արտաքին ազդեցությունները: Որևէ i-րդ մասնիկի համար այն կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$m_i\frac{d^2\overline{r}(t)}{dt^2}=\overline{F_i}\left(\frac{d\overline{r_1}}{dt},\frac{d\overline{r_2}}{dt},\dots,\frac{d\overline{r_N}}{dt},\overline{r_1},\overline{r_2},\dots,\overline{r_N},t\right),\quad i=1,2,\dots,N \qquad (15)$$

որտեղ $\overrightarrow{F_i}$-ն i համարն ունեցող մասնիկի վրա ազդող ուժն է և հանդիսանում է վիճակի ֆունկցիա: (15)-ը իրենից ներկայացնում է N հատ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, որի լուծումից որոշվում են $\overline{r_1}(t), \overline{r_2}(t), \dots, \overline{r_N}(t)$ ֆունկցիաները:

Ուժը, որով մի մասնիկն ազդում է մյուսի վրա, որպես վիճակի ֆունկցիա, կախված է միայն նրանց շառավիղ-վեկտորներից և արագություններից: Դա նշանակում է, որ այլ մասնիկների գոյությունը այդ ուժի վրա չի ազդում: Ուժի այս հատկությունը անվանվում է ուժերի ազդեցության անկախության սկզբունք, որից էլ հետևում է ուժերի վերադրման (սուպերպոզիցիայի) կանոնը մեխանիկայում:

Քանի որ Նյուտոնի երկրորդ օրենքը կարելի է ներկայացնել $\overline{P}=m\overline{v}$ իմպուլսի միջոցով՝ $\frac{d\overline{P}}{dt}=\overline{F}$ տեսքով, այստեղից եզրակացնում ենք, որ իմպուլսը նույնպես վիճակի ֆունկցիա է:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. ***Караханян К. И.*** О едином способе интегрирования линейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Գավառի պետական համալսարանի գիտական հոդվածների ժողովածու, Գավառ, 2003, N 6, էջ 273-277

2. ***Караханян К. И.*** Об одном способе построения решения линейных однородных дифференциальных уравнений с помощью рекуретных формул // Информационные технологии и управления, 2, 114, 1999

3. ***Караханян К. И.*** Об одном способе интегрирования обыкновенных однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка и его приложениях // ДНАН РА, 1, 11, 2000

4. ***А. П. Прудников, Ю. А. Брычов, О. И. Маричев,*** Интегралы и ряды // М., Наука, 1981
5. ***А. В. Астахов,*** Курс физики -1 // Наука, М., 1977

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

К. И. Караханян

В классической механике состояние системы частиц описывается их радиус-векторами и скоростями в заданный момент времени. В работе отмечается, что все величины, характеризующие свойства любой системы частиц, являются функциями состояния, т.е. зависят от положений и скоростей этих частиц. Такими величинами являются ускорение, сила и импульс.

DEFINITION OF THE STATE OF THE MECHANICAL SYSTEM

K. I. Gharakhanyan

In the classical mechanics the state of the system of parts is defined by their radius-vector and speed at the given moment of time. In this work it is mentioned that all the quantities, characterizing the peculiarities of any system of parts, are considered to be functions of state, that is to say, they depend on the position and speed of these parts. Such quantities are said to be acceleration, force and impulse.

ՀԻՄՆԱՐԱՐ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՄԻՋՆՈՐԴՆԵՐԸ

Կ. Ի. ՂԱՐԱԽԱՆՅԱՆ
Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու,
ԳՊՀ պրոֆեսոր

Բոլոր տիպի փոխազդեցությունները, տարրական մասնիկների միջև, ժամանակակից ֆիզիկայում դասվում են հետևյալ չորս տիպի փոխազդեցությունների շարքում՝ գրավիտացիոն կամ ձգողական, էլեկտրամագնիսական, ուժեղ կամ միջուկային և թույլ, որոնք կոչվում են հիմնարար:

Գրավիտացիոն փոխազդեցությունը գործում է բնության մեջ գտնվող բոլոր մասնիկների միջև: Այն նկարագրվում է Նյուտոնի տիեզերական ձգողության օրենքով՝

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad (1)$$

Այստեղ F-ը ձգողական ուժն է m_1 և m_2 զանգվածներով նյութական կետերի միջև, որոնք իրարից գտնվում են r հեռավորության վրա: $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Նմ^2/կգ^2