

УДК 519.8

ПРОЦЕСС ЧАСТИЧНОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Д. С. ДАДАЯН, А. Д. ТУНИЕВ

В данной работе, используя модифицированный процесс частичной ортогонализации, в аналитическом виде определяется допустимая строго внутренней точка в задаче оптимального назначения. Она обладает тем свойством, что является нормальным решением этой задачи. Определяется таблица симплексного типа, относительно этого решения, которая может рассматриваться как начальная таблица для дальнейших вычислений.

Введение

После известной работы Хачияна Л. [1] появился новый подход к решению общей задачи линейного программирования - методы внутренних точек [2] - [4], [6]. Суть этих методов заключается в том, что движение к оптимуму происходит не по вершинам выпуклого многогранника (см. напр. [5]), а по его внутренним точкам.

Одной из задач, которая возникает при использовании метода внутренних точек, является задача определения начальной внутренней точки. В данной работе, используя модифицированный процесс частичной ортогонализации, определяется строго внутренней точка в задаче оптимального назначения, обладающая тем свойством, что она является допустимым (не целочисленным) нормальным решением этой задачи. В аналитическом виде определяется таблица симплексного типа, относительно этого решения, которая может рассматриваться как начальная таблица для дальнейших вычислений с целью получения оптимального решения. Рассматриваются вопросы приложения данного подхода к задачам транспортного типа.

В связи с тем, что нам придется оперировать с "кусками" строк и столбцов здесь удобно использовать обозначения, принятые в [7].

$x\{N\}$ - вектор $x=\{x_i\}$, где индекс i пробегает конечное множество N .

$x\{K\}$ - соответствующий K -й "кусоч" вектора $x\{N\}$, где $K \subset N$.

$x\{i\}$ - компонента вектора $x\{N\}$, имеющая индекс i .

$z\{M, N\} = \{z_{ij}\}$ - матрица, в которой индексы строк и столбцов пробегают соответственно конечные множества M и N .

$z\{i, N\}$ - i -я строка матрицы $z\{M, N\}$, а $z\{M, j\}$ - ее j -й столбец.

$z\{K, L\}$ - подматрица матрицы $z\{M, N\}$, где $K \subset M$, $L \subset N$.

Матрицу $a\{M, N\}$ можно умножить на матрицу $b\{K, L\}$, если $K=N$.

$o\{M, N\}$ - матрица, в которой все элементы равны нулю.

1. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПРОЦЕСС ЧАСТИЧНОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

В работе [6] был предложен процесс частичной ортогонализации.

Здесь мы рассмотрим его модифицированный вариант.

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$, $M = \{1, \dots, m\}$, где $m \leq n$.

Рассмотрим систему векторов: $a[1, n]$, $a[2, n]$, ..., $a[m, n]$.

Пусть $K \subseteq N$, где $K = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, $k \geq m$, т. е. число элементов множества K не меньше, чем m . Кроме того, предположим, что K -е "куски" этой системы, т. е. $a[1, K]$, $a[2, K]$, ..., $a[m, K]$ - линейно независимы.

Рассмотрим следующий алгебраический процесс.

Пусть $a^0[i, N] = a[i, N]$, $i = 1, \dots, m$.

Полагаем последовательно для $s = 1, \dots, m$.

$$a^s[i, N] = \begin{cases} \frac{a^{s-1}[i, N]}{\|a^{s-1}[i, K]\|} & i = s, \\ a^{s-1}[i, N] + \alpha_i a^s[s, N], & i > s, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i^s(K) = -a^{s-1}[i, K] a[s, K], \quad i > s$$

Тогда мы через m шагов получим систему векторов

$$a^1[1, N], a^2[2, N], \dots, a^m[m, N]$$

обозначим $b[s, N] = a^s[s, N]$, $s = 1, \dots, m$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для произвольного $s \in M$

$$b[s, K] b[i, K] = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Другими словами, подвекторы $b[1, K]$, $b[2, K]$, ..., $b[m, K]$ - ортогональны.

Доказательство утверждения можно получить, если воспользоваться, например, методом математической индукции.

Заметим, что если $K = N$, то мы получим процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Процесс (1) естественно назвать модифицированным процессом частичной ортогонализации, а систему векторов $b[1, N]$, ..., $b[m, N]$ - частично ортонормальной.

Заметим, что если на каждом s -м шаге преобразуется только s -я строка с использованием первых $(s-1)$ -ых строк, то мы получаем процесс частичной ортогонализации (по аналогии процесса ортогонализации Грама-Шмидта).

2. ОБ ОДНОЙ СВОЙСТВЕ ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Задача оптимального назначения формулируется следующим образом:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c[i, j] x[i, j] \quad (2)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^n x[i, j] = 1; \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x[i, j] = 1; \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

$$x[i, j] \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

В этой задаче число переменных равно n^2 , а число линейных уравнений $2n$, при этом любые из $(2n-1)$ уравнений линейно-независимы [5].

Обозначим матрицу системы (3),(4) через $a[M, N]$, где $M = \{1, \dots, 2n\}$, $N = \{1, \dots, n^2\}$; целевой вектор через $c[N]$ и вектор неизвестных через $x[N]$.

В этом случае задачу (2)-(5) можно переписать в следующем виде:

$$\text{при условиях:} \quad \min c[N] x[N] \quad (6)$$

$$a[M, N]x = 1 \quad (7)$$

$$x[N] \geq 0[N] \quad (8)$$

ТЕОРЕМА. Если при $K=N$ применить модифицированный процесс частичной ортогонализации к (6), (7), то вектор

$$U[N, 0] = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\}^T$$

длины n^2 ортогонален ядру матрицы $a[M, N]$, т. е. является допустимым нормальным решением задачи (6) - (8).

Доказательство: Представим исходные данные задачи об оптимальном назначении в таблице 0 (см. стр.22). В последней $(2n+1)$ -ой строке помещены значения целевой функции $c[N]$. Применим процесс частичной ортогонализации к Таблице 0, когда $K=N$. После первого шага мы получим таблицу 1, в которой, в силу блочной структуры задачи, изменены только элементы первого блока. Аналогично, продолжая этот процесс, мы после n -го шага получим таблицу 2, где все блоки имеют одинаковый вид. Снова продолжая этот процесс, в силу опять же блочной структуры таблицы 2, после $(n+1)$ -го шага мы получаем таблицу 3. В итоге через $(2n-1)$ шагов получаем конечную таблицу 4, в которой в $(2n+1)$ - строке записаны значения измененной целевой функции задачи (6) - (8).

Обозначим матрицу таблицы 4 через $b[M, N]$, а ее правую часть через $b[M, 0]$.

Покажем, что вектор

$$U[N, 0] = b^T[M, N] b[M, N] = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\}^T$$

длины n^2 есть решение системы (7).

Для этого рассмотрим систему

$$b^T[M, N] x[N] = b[M, 0] \quad (9)$$

Помножив слева $b^T[M, N]$ на (9) получим систему

$$U[N, N] x[N] = U[N, 0], \quad (10)$$

где $U[N, N] = b^T[M, N] b[M, N]$, $b[M, N]$,

$$U[N, 0] = b^T[M, N] b[M, 0].$$

Так как строки матрицы $b[M, N]$ - ортогональны, то матрица $U[N, N]$ симметрическая и идемпотентная.

Таблица 0

n	1	1	...	1	...	1	1	...	0	0	...	0	...	0	0	1
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	0	0	...	0	...	0	0	...	1	1	...	1	...	1	1	1
	1	0	...	0	...	0	0	...	1	0	...	0	...	0	0	1
	0	1	...	0	...	0	0	...	0	1	...	0	...	0	0	1
	0	0	...	1	...	0	0	...	0	0	...	1	...	0	0	1
	0	0	...	0	...	1	0	...	0	0	...	0	...	1	0	1
	0	0	...	0	...	0	1	...	0	0	...	0	...	0	1	1
	$C_{j,1}$	$C_{j,2}$	...	$C_{j,5}$	...	$C_{j,m,j}$	$C_{j,n}$	...	$C_{n,1}$	$C_{n,2}$	...	$C_{n,5}$	...	$C_{n,m}$	$C_{n,n}$	
	I-й блок						II-й блок									

Таблица 1

$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	...	0	0	...	0	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	
0	0	0	0	0	...	1	1	...	1	1	1	
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	...	1	0	...	0	0	$\frac{n-1}{n}$	
$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	...	0	1	...	0	0	$\frac{n-1}{n}$	
$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	...	0	0	...	1	0	$\frac{n-1}{n}$	
$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	...	0	0	...	0	1	$\frac{n-1}{n}$	
$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	...	0	0	...	0	0	$\frac{n-1}{n}$	
$C_{j,1}^1$	$C_{j,2}^1$	$C_{j,5}^1$	$C_{j,m,j}^1$	$C_{j,n}^1$	...	$C_{n,1}^1$	$C_{n,2}^1$	$C_{n,5}^1$	$C_{n,m}^1$	$C_{n,n}^1$		
I-й блок						II-й блок						

Таблица 2

$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	...	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
0	0	0	0	0	...	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	...	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	0
$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	...	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	0
$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	...	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	0
$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	...	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	0
$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	...	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	0
$C_{1,1}^n$	$C_{1,2}^n$	$C_{1,3}^n$	$C_{1,4}^n$	$C_{1,n}^n$	...	$C_{n,1}^n$	$C_{n,2}^n$	$C_{n,3}^n$	$C_{n,n-1}^n$	$C_{n,n}^n$	
I-ый блок						II-ый блок					

Таблица 3

$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	...	0	0	...	0	...	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
0	0	...	0	...	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
$\frac{n-1}{n\sqrt{n-1}}$	$\frac{-1}{n\sqrt{n-1}}$	$\frac{-1}{n\sqrt{n-1}}$	$\frac{-1}{n\sqrt{n-1}}$	$\frac{-1}{n\sqrt{n-1}}$	...	$\frac{n-1}{n\sqrt{n-1}}$	$\frac{-1}{n\sqrt{n-1}}$	$\frac{-1}{n\sqrt{n-1}}$	$\frac{-1}{n\sqrt{n-1}}$	$\frac{-1}{n\sqrt{n-1}}$	$\frac{-1}{n\sqrt{n-1}}$	0
0	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	...	0	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	0
0	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	...	0	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	0
0	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	...	0	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	0
0	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{n-2}{n-1}$	...	0	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{-1}{n-1}$	0
$C_{1,1}^{n+1}$	$C_{1,2}^{n+1}$	$C_{1,3}^{n+1}$	$C_{1,4}^{n+1}$	$C_{1,n}^{n+1}$	...	$C_{n,1}^{n+1}$	$C_{n,2}^{n+1}$	$C_{n,3}^{n+1}$	$C_{n,n-1}^{n+1}$	$C_{n,n}^{n+1}$		
I-ый блок						II-ый блок						

Таблица

Поэтому $U[N,N]$ - матрица ортогонального проектирования. С другой стороны $U[N,o]$ является собственным вектором матрицы $U[N,N]$ с собственным значением равным 1.

Действительно,

$$U[N,N] U[N,o] = b^T[M,N] b[M,N] b^T[M,N] b[M,o] = \\ = b^T[M,N] e[M,M] b[M,o] = b^T[M,N] b[M,o] = U[N,o]$$

где $e[M,M]$ - единичная матрица.

Поэтому, если Y - ядро матрицы $U[N,N]$, т. е.

$$Y = \{y[N]/U[N,N] \mid y[N] = o[N]\},$$

то вектор $U[N,o]$ ортогонален Y и является допустимым решением системы (10). Так как системы (7), (9) и (10) эквивалентны в смысле множества решений, то $U[N,o]$ - решение (7), а Y - ядро матрицы $a[M,N]$.

Другими словами вектор $U[N,o]$ - нормальное решение системы (7), что и требовалось доказать.

Кафедра математики

Поступила 25.05.1997

Литература

1. Хачиян Л. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. ДАН СССР, 224 (1979), #5, 1093-1096.
2. Кармаркар Н. Новый алгоритм полиномиальной трудоемкости для задач линейного программирования. - Кибернетический сборник, 26, (1989), 84-112.
3. Дикин И. И., Зоркальцев В. И. Итеративное решение задач математического программирования. Алгоритмы внутренних точек. - Новосибирск: Наука, 1980.
4. Шор Н. З., Стеценко С. И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. - Киев: Наукова Думка, 1989.
5. Данциг Дж. Линейное программирование, и обобщения и применения. М: Прогресс, 1966.
6. Туниев А. Д. Метод направляющего вектора и его приложения. - Киев: Кибернетика и системный анализ. 1, 1992.
7. Романовский И. В. Алгоритмы решения экстремальных задач. - Москва: Наука, 1977.
8. Todd M. J., and Ye. A "Bulld-Down" scheme for linear programming.

Գ. Ս. Գուրպյան, Ա. Գ. Թումրիկ

**Մասնակի օրրոգոնադիզոսման գործընթացը և նրա կիրառումը օպտիմալ
նշանակման խնդրի համար**

Ամփոփում

1. Խոչախյանի աշխատանքից հետո զարգացել է գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման նոր ապարարություն՝ ներքին կետերի մեթոդը:

Այս մեթոդով շարժումը դեպի օպտիմալ կետ կատարվում է ներքին կետերով:

Այստեղ ներկայացվում է մի մեթոդ, որի միջոցով, վերլուծական եղանակով որոշվում է սկզբնական ներքին կետը օպտիմալ նշանակման խնդրի համար: Այս կետը նաև խնդրի նորմալ բաղադրելի լուծումն է:

Վերլուծական եղանակով որոշում ենք սկզբնական սիմպլեքս աղյուսակը այդ կետի համար:

Քննարկվում են տվյալ մեթոդի կիրառման հնարավորությունները տրանսպորտային խնդիրների լուծման գործում: