

УДК 513.83

СКРУЧЕННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И G-ШЕЙПЫ

П. С. ГЕВОРКЯН

В настоящей статье изучаются эквивариантные шейпы при переходе к скрученным произведениям.

Основные определения и результаты эквивалентной топологии и теории шейпов, необходимые в дальнейшем, можно найти, например, в [1], [2] и [3].

Всюду в дальнейшем группа G предполагается лиевой, а пространства - компактными.

Лемма 1. Пусть H замкнутая подгруппа группы G , A и B - H -пространства, $A = \varprojlim \{A_\alpha, p_{\alpha\alpha'}\}$, $B = \varprojlim \{B_\beta, q_{\beta\beta'}\}$, $\alpha f = \{f_\beta, \Psi\}: A \rightarrow B$ - H -шейповый морфизм, где $\underline{A} = \{A_\alpha, p_{\alpha\alpha'}\}$ и $\underline{B} = \{B_\beta, q_{\beta\beta'}\}$ обратные H -ANR ($\check{C}_H$)-спектры, а $\check{C}_G$ - категория всех G компактов и эквивариантных отображений. Тогда $G \times_H A = \varprojlim \{G \times_H A_\alpha, 1 \times_H p_{\alpha\alpha'}\}$, $G \times_H B = \varprojlim \{G \times_H B_\beta, 1 \times_H q_{\beta\beta'}\}$, $1 \times_H f = \{1 \times_H f_\beta, \Psi\}$:

$G \times_H A \rightarrow G \times_H B$ - G -шейповый морфизм, а $G \times_H A = \{G \times_H A_\alpha, 1 \times_H p_{\alpha\alpha'}\}$ и $G \times_H B = \{G \times_H B_\beta, 1 \times_H q_{\beta\beta'}\}$ - обратные G -ANR($\check{C}_G$)-спектры.

Доказательство. Сначала докажем, что при заданных условиях $G \times_H A = \varprojlim \{G \times_H A_\alpha, 1 \times_H p_{\alpha\alpha'}\}$, где $1 \times_H p_{\alpha\alpha'}: G \times_H A_\alpha \rightarrow G \times_H A_\alpha$ - G -эквивариантное отображение, определенное формулой $(1 \times_H p_{\alpha\alpha'})[g, a] = [g, p_{\alpha\alpha'}(a)]$ для произвольной точки $[g, a]$ из $G \times_H A_\alpha$.

Определим отображение $\varphi: G \times_H A \rightarrow \varprojlim \{G \times_H A_\alpha, 1 \times_H p_{\alpha\alpha'}\}$ следующим образом:

$$\varphi[g, a] = (\dots, [g, p_\alpha(a)], [g, p_{\alpha'}(a)], \dots) \quad (1)$$

где $[g, a] \in G \times_H A$, а $p_\alpha: A \rightarrow A_\alpha$ предельные H -эквивариантные проекции.

φ - корректно определенное G -отображение, так как для любого α отображение $\varphi_\alpha = 1 \times_H p_\alpha: G \times_H A \rightarrow G \times_H A_\alpha$, заданное формулой $\varphi_\alpha[g, a] = [g, p_\alpha(a)]$, определено корректно и G -эквивариантно, а $\varphi = \varprojlim \{\varphi_\alpha\}$.

φ - непрерывно, как предел непрерывных отображений. Докажем, что оно и взаимно-однозначно. Пусть $[g, a]$ и $[g', a']$ принадлежат пространству $G \times_H A$ и

$$\varphi[g, a] = \varphi[g', a'] \quad (2)$$

Учитывая (1) последнее равенство можно переписать в следующем виде:

$$(\dots, [g, p_\alpha(a)], [g, p_\alpha'(a)], \dots) = (\dots, [g', p_\alpha(a')], [g', p_\alpha'(a')], \dots).$$

А это эквивалентно следующим равенствам

$$[g, p_\alpha(a)] = [g', p_\alpha(a')] \quad (3)$$

для любого индекса α . Отсюда следует, что при $h = g^{-1}g'$

$$hp_\alpha(a') = p_\alpha(a) \quad (4)$$

для любого α . Из последнего равенства и H -эквивариантности проекций $p_\alpha: A \rightarrow A_\alpha$ получим $hp_\alpha(a') = p_\alpha(ha') = p_\alpha(a)$ для любого индекса α , то есть, что все соответствующие координаты точек a и ha' совпадают. Таким образом, из равенств (4) следует равенство $ha' = a$. А это значит, что $[g, a] = [g', a']$. Итак, мономорфность отображения ϕ доказана. Теперь докажем ее эпиморфность. Пусть $(\dots, [g_\alpha, a_\alpha], [g_\alpha', a_\alpha'], \dots) \in \varprojlim \{G \times_H A_\alpha, 1_{X_H} p_{\alpha\alpha'}\}$ - произвольный элемент. Для любого индекса α $(1_{X_H} p_{1\alpha}) [g_\alpha, a_\alpha] = [g_\alpha, p_{1\alpha}(a_\alpha)] = [g', a']$.

Следовательно, существует такой элемент $h \in H$, что

$$g_\alpha h^{-1} = g' \text{ и } hp_{1\alpha}(a_\alpha) = a' \quad (5)$$

Из первого равенства (5) находим $h = g_1^{-1}g_\alpha$. Таким образом, имеем:

$$[g_\alpha, a_\alpha] = [g_1, g_1^{-1}g_\alpha a_\alpha] \text{ и } p_{1\alpha}(g_1^{-1}g_\alpha a_\alpha) = a_1 \quad (6)$$

для любого индекса α . Следовательно,

$$([g^1, a^1], \dots, [g_\alpha, a_\alpha], \dots) = ([g^1, a^1], \dots, [g^1, g_1^{-1}g_\alpha a_\alpha], \dots) \quad (7)$$

Обозначим $a = (a^1, \dots, g_1^{-1}g_\alpha a_\alpha, \dots)$. Из второго равенства (6) следует, что $a \in A$.

Осталось заметить, что $\phi [g', a] = (\dots, [g_\alpha, a_\alpha], [g_\alpha', a_\alpha'], \dots)$.

Итак, ϕ - непрерывное, взаимно-однозначное G -эквивариантное отображение компакта на хаусдорфово пространство $\varprojlim \{G \times_H A_\alpha, 1_{X_H} p_{\alpha\alpha'}\}$, значит ϕ - G эквивариантный гомеоморфизм [5].

Точно так же доказывается равенство $G \times_H B = \varprojlim \{G \times_H B_\beta, 1_{X_H} q_{\beta\beta'}\}$.

Так как $A_\alpha \in H\text{-ANR}(\check{C}_H)$ для любого индекса α , то по одной теореме Пале ([6]) $G \times_H A_\alpha \in G\text{-ANR}(\check{C}_G)$. Следовательно, $\{G \times_H A_\alpha, 1_{X_H} p_{\alpha\alpha'}\}$ (как и $\{G \times_H B_\beta, 1_{X_H} q_{\beta\beta'}\}$) - $G\text{-ANR}(\check{C}_G)$ - спектр.

Осталось доказать, что $1_{X_H} f = \{1_{X_H} f_\beta, \Psi\} : G \times_H A \rightarrow G \times_H B$ является G -шейповым морфизмом. Пусть β, β' - произвольные индексы и $\beta \leq \beta'$. Так как $f = \{f_\beta, \Psi\} : A \rightarrow B$ - H -шейповый морфизм, то существует такой индекс α , $\alpha \geq \Psi(\beta)$ и $\alpha \geq \Psi(\beta')$, что H -гомотопически коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & A_\alpha & \\ A_{\Psi(\beta)} \swarrow & & \searrow A_{\Psi(\beta')} \\ B_\beta & \xleftarrow{q_{\beta\beta'}} & B_{\beta'} \end{array}$$

(Note: The diagram in the image is a commutative diagram with nodes A_α at the top, $A_{\Psi(\beta)}$ and $A_{\Psi(\beta')}$ in the middle, and B_β and $B_{\beta'}$ at the bottom. Arrows are labeled with $P\Psi(\beta)_\alpha$, $P\Psi(\beta')_\alpha$, f_β , $f_{\beta'}$, and $q_{\beta\beta'}$.)

Но тогда G -гомотопически коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Gx_H A_\alpha & & \\
 & \swarrow 1x_H P_{\Psi(\beta)\alpha} & & \searrow 1x_H P_{\Psi(\beta')\alpha} & \\
 Gx_H A_{\Psi(\beta)} & & & & Gx_H A_{\Psi(\beta')} \\
 \downarrow 1x_H f_\beta & & 1x_H q_{\beta\beta'} & & \downarrow 1x_H f_{\beta'} \\
 Gx_H B_\beta & & & & Gx_H B_{\beta'}
 \end{array}$$

Лемма доказана.

Замечание. Теорема 1, фактически утверждает, что если G -компактная группа Li , а H - замкнутая подгруппа группы G , то в классе всех компактных H -пространств операция скрученного произведения Gx_H - является функтором из категории H -SHAPE в категорию G -SHAPE. Причем, как показывает следующая теорема, этот функтор H -шейпово-эквивалентные объекты переводит в G -шейпово-эквивалентные объекты:

Теорема 1. Пусть $sh_H A = sh_H B$, где A и B произвольные H -пространства, а H замкнутая подгруппа группы G . Тогда $sh_G Gx_H A = sh_G Gx_H B$.

Доказательство. Пусть $A = \varprojlim \{A_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$ и $B = \varprojlim \{B_\beta, q_{\beta\beta'}, M\}$, где $\{A_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$ и $\{B_\beta, q_{\beta\beta'}, M\}$ - обратные H -ANR($\bar{C}_G$)-спектры [4]. Так как $sh_H A = sh_H B$, то существуют такие H -шейповые морфизмы $\underline{f} = \{f_\alpha, \phi\}: B \rightarrow A$ и $\underline{g} = \{g_\beta, \psi\}: A \rightarrow B$, что

$$\underline{g} \circ \underline{f} = 1_B \text{ и } \underline{f} \circ \underline{g} = 1_A \quad (8)$$

В силу леммы 1 $Gx_H A = \varprojlim \{Gx_H A_\alpha, 1x_H p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$, $Gx_H B = \varprojlim \{Gx_H B_\beta, 1x_H q_{\beta\beta'}, M\}$, где $\{Gx_H A_\alpha, 1x_H p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$ и $\{Gx_H B_\beta, 1x_H q_{\beta\beta'}, M\}$ - обратные G -ANR($\bar{C}_G$)-спектры.

По той же лемме $1x_H \underline{f} = \{1x_H f_\alpha, \phi\}: Gx_H B \rightarrow Gx_H A$ и $1x_H \underline{g} = \{1x_H g_\beta, \psi\}: Gx_H A \rightarrow Gx_H B$ - G шейповые морфизмы. Из равенств (8) следуют равенства

$$(1x_H g) \circ (1x_H f) = 1x_H 1_B \text{ и } (1x_H f) \circ (1x_H g) = 1x_H 1_A \quad (9)$$

Это и значит, что $sh_G Gx_H A = sh_G Gx_H B$.

Следствие 1. Пусть H - замкнутая подгруппа группы G . Если существуют H -шейпово эквивалентные H -срезы в G -пространствах X и Y , то $sh_G X = sh_G Y$.

Доказательство. Пусть A и B - H -срезы G -пространств X и Y , соответственно, и $sh_H A = sh_H B$. Тогда $X = Gx_H A$, а $Y = Gx_H B$ ([1]).

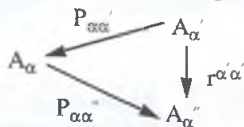
Осталось применить теорему 1.

Следствие 2. Пусть X произвольное G -пространство, а $\bar{f}: X \rightarrow G/H$ - эквивариантное отображение, где H замкнутая подгруппа группы G . Если $sh_H(\bar{f}^{-1}(e_H)) = 0$, то $sh_G X = sh_G G/H$.

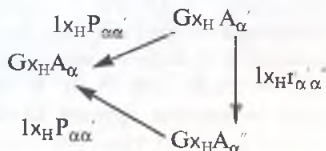
Доказательство. Заметим, что точка e_H является H -срезом G -пространства G/H . Тогда $\bar{f}^{-1}(e_H)$ - H -срез G -пространства X ([1]). Так как $sh_H(e_H) = 0 = sh_H(\bar{f}^{-1}(e_H))$, то $sh_G X = sh_G G/H$ согласно следствию 1.

Теорема 2. Пусть H замкнутая подгруппа группы G . Если A - H -подвижное пространство, то G -пространство $Gx_H A - G$ - подвижно.

Доказательство. Пусть $A = \varinjlim \{A_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$, где $\{A_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$ - H - $ANR(\mathbb{C}_H)$ -спектр. В силу леммы 1 $G \times_H A = \varinjlim \{G \times_H A_\alpha, 1 \times_H p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$, где $\{G \times_H A_\alpha, 1 \times_H p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$ - G - $ANR(\mathbb{C}_G)$ -спектр. Так как A - H - подвижно, то для любого $\alpha \in \Lambda$ существует такое $\alpha' \in \Lambda$, $\alpha' > \alpha$, что для любого другого $\alpha'' \in \Lambda$, $\alpha'' > \alpha$ существует такое H -эквивариантное отображение $\gamma^{\alpha'\alpha''}: A_{\alpha'} \rightarrow A_{\alpha''}$, что H -гомотопически коммутативна диаграмма



Но тогда G -гомотопически коммутативна следующая диаграмма:



А это значит, что G -пространство $G \times_H A$ - G - подвижно.

Следствие 3. Если в G -пространстве X существует H -подвижный H -срез, где H -замкнутая подгруппа группы G , то X - G - подвижно.

Доказательство. Пусть A - H -подвижный H -срез G -пространства X . Тогда $X = G \times_H A$. Применяя теорему 2 получим, что X - G - подвижно.

Кафедра математики

*Поступила в редакцию
03.02.97 г.*

Литература

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М., Наука, 1980.
2. Смирнов Ю. М. Теория шейпов и непрерывные группы преобразований. УМН. 1979, т. 36, с. 119-123.
3. Dydak J., Segal J. Shape theory. Lect. Notes Math., 1978, N 688, 149 p.
4. Смирнов Ю. М. Теория шейпов для G -пар. УМН, 1985, т. 40, с. 151-165.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. М., Мир, 1986.
6. Palais R. The classification of G -spaces. Mem., AMS, 1960, N 36, 72 p.

Փարսրված արտադրյալներ և G -շեյվեր Պ. Ս. Գևորգյան

Հաղվածում ուսումնասիրվում են երվիվարիանտ շեյվերի տեսության դրաշ հարցեր փարսրված արտադրյալներին անցնելու դեպքում: Մասնավորապես ապացուցվում է, որ փարսրված արտադրյալի $G \times_H$ գործողությունը հանդիսանում է ֆունկտոր H -SHAPE կատեգորիայից G -SHAPE կատեգորիա, որտեղ H -ը G կամպակտ L -ի խմբի փակ ենթախումբ է: Որպես հետևանք ստացվում են X և Y G -տարածությունների երվիվարիանտ շեյվերի հավասարության և G -շարժունության բավարար պայմաններ: