

УДК 512-57

Математика

АБРАМЯН Л. Р., МОВСИСЯН Ю. М.

ТЕРНАРНЫЕ СВЕРХТОЖДЕСТВА АССОЦИАТИВНОСТИ В ОБРАТИМЫХ АЛГЕБРАХ

Введение

Классификация бинарных сверхтождеств ассоциативности в бинарных обратимых алгебрах (т. е. в алгебрах с бинарными квазигрупповыми операциями) дана в работе [1]. Такие сверхтождества оказались 3-х видов:

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), z); \quad (1)$$

$$X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y)z); \quad (2)$$

$$X(x, X(y, z)) = Y(Y(x, y), z); \quad (3)$$

Причем сверхтождества (1), (2), (3) неэквивалентны, точнее из сверхтождества (3) вытекает сверхтождество (2), а из сверхтождества (2) вытекает сверхтождество (1). Кроме того здесь легко получается и характеристизация тех бинарных обратимых алгебр, в которых выполняется одно из этих сверхтождеств. В монографии (2) (см. также [3]), эти результаты усиливаются в двух направлениях: для q -алгебр и для e -алгебр.

В настоящей работе получена классификация тернарных сверхтождеств ассоциативности в тернарных обратимых алгебрах, т. е. классификация сверхтождеств определенных по равенству тернарной ассоциативности

$$((x_1, x_2, x_3), x_4, x_5) = (x_1, (x_2, x_3, x_4), x_5) = (x_1, x_2, (x_3, x_4, x_5))$$

в таких алгебрах $Q(\Sigma)$, где $Q(A)$ является тернарной квазигруппой для любой операции $A \in \Sigma$. В отличие от бинарного случая, тернарные сверхтождества ассоциативности развиваются на два класса эквивалентности. Два тернарные сверхтождества называются эквивалентными, если они выполняются в одних и тех же обратимых тернарных алгебрах.

§1 Предварительные понятия и результаты

В настоящем параграфе приводятся (без доказательства) ряд понятий и результатов из работ [1]-[7].

Условимся, наперед, обозначать последовательность $x_n, x_{n+1}, \dots, x_m$ через x_n^m . Символ x_n^m имеет смысл, если $n \leq m$. Если $n > m$, то под x_n^m будем понимать пустую последовательность.

Напомним понятия n -квазигруппы, n -полугруппы и n -группы.

Множество Q с одной n -арной операцией A называется n -группоидом и обозначается $Q(A)$.

О п р е д е л е н и е. n -Группоид $Q(A)$ называется n -полугруппой, если в Q выполняется тождество

$$(x_1^{i-1} (x_i^{i+n-1}) x_{i+n}^{2n-1}) = (x_1^{j-1} (x_j^{j+n-1}) x_{j+n}^{2n-1}) \text{ для любых } i, j, i \neq j \text{ и } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n.$$

О п р е д е л е н и е. n -Группоид $Q(A)$ называется n -квазигруппой или n -арной квазигруппой, если в равенстве $A(x_1^n) = x_{n+1}$ всякие n элементы из x_1^{n+1} однозначно определяют $n+1$ -й. Иными словами, $Q(A)$ называется n -квазигруппой, если уравнение $A(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^n) = b$ однозначно разрешимо для любых a_i^n , b и для любого $i=1, 2, \dots, n$. При $n=3$ получаем 3-квазигруппу или тернарную квазигруппу.

О п р е д е л е н и е. Если n -квазигруппа Q одновременно является и n -полугруппой, то она называется n -группой.

При $n=2$ получаем обычные (бинарные) полугруппы и группы.

О п р е д е л е н и е. n -квазигруппа $Q(B)$ называется изотопом n -квазигруппы $Q(A)$, существует последовательность $T = (\alpha_i^{n+1})$ подстановок множества Q такая, что

$$B(x_1^n) = a^{-1}{}_{n+1} A(\{a_i x_i\}_1^n) \quad (*)$$

для всех $x_i^n \in Q^n$. Обозначение: $B=A^T$.

Последовательность T , а также переход от A к B , определяемый равенством (*), назовем изотопией. Подстановка α_i называется i -той компонентой изотопии $T = (\alpha_i^{n+1})$.

О п р е д е л е н и е. Алгебра $Q(\Sigma)$ с тернарными операциями называется тернарной обратимой алгеброй, если $Q(A)$ -тернарная квазигруппа для любой операции $A \in \Sigma$.

Прежде чем перейти к следующим результатам условимся обозначать $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$.

1. Если четыре 2-квазигруппы $Q(A_i), i \in N_4$ связаны ассоциативным законом

$$A_1[A_2(x, y), z] = A_3[x, A_4(y, z)] \quad (1)$$

то все $Q(A_i), i \in N_4$ изотопны одной и той же группе $Q(A)$.

2. Если 3-квазигруппы $Q(A_i), i \in N_6$ связаны тернарным тождеством ассоциативности

$$A_1[A_2(x, y, z), u, v] = A_3[x, A_4(y, z, u), v] = A_5[x, y, A_6(z, u, v)] \quad (2)$$

тогда:

а) все $Q(A_i), i \in N_6$ изотопны одной и той же 3-группе $Q(A)$, обладающей единицей;

б) существует бинарная группа $Q(B)$ такая, что $A(x, y, z) = B[B(x, y), z]$.

Пусть Ω множество всех бинарных квазигрупповых операций, определенных на множестве Q . Система $Q(\Sigma)$, где $\Sigma \subseteq \Omega$, называется слабо ассоциативной в целом.

1. слева (кратко $\overline{LA}$ -системой), если имеет место условие:

$$(\forall A_1, A_2 \in \Sigma)(\exists A_3, A_4 \in \Omega)(\forall x, y, z \in Q) \\ (A_1[A_2(x, y), z] = A_3[x, A_4(y, z)]); \quad (1_1)$$

2. справа (кратко $\overline{RA}$ -системой), если имеет место условие:

$$(\forall A_3, A_4 \in \Sigma)(\exists A_1, A_2 \in \Omega)(\forall x, y, z \in Q) \\ (A_1[A_2(x, y), z] = A_3[x, A_4(y, z)]); \quad (1_2)$$

Если в (1_1) и (1_2) заменим условия $(\exists A_3, A_4 \in \Omega)$ и $(\exists A_1, A_2 \in \Omega)$ условиями $(\exists A_3, A_4 \in \Sigma)$ и $(\exists A_1, A_2 \in \Sigma)$, то $Q(\Sigma)$ будет называться ассоциативной, соответственно, слева (LA -система) и справа (RA -система). Если $Q(\Sigma)$ ассоциативна и слева и справа, то $Q(\Sigma)$ называется ассоциативной в целом или A -системой.

3. Все операции $\overline{LA}$ -системы (а также $\overline{RA}$ -, LA -, RA -, A -системы) изотопны одной и той же группе и следовательно изотопны между собой.

4. Если $\overline{LA}$ -система (или $\overline{RA}$ -, LA -, RA -, A -система) содержит лупу $Q(L)$, то эта лупа должна быть группой.

5. Если операция A не изотопна группе, то она не может быть включена ни в какую $\overline{LA}$ -систему (или $\overline{RA}$ -, LA -, RA -, A -систему).

6. Пусть $n = |Q|$. Тогда $Q(\Omega)$ является LA -системой (или RA -, A -системой) только при $n \leq 3$.

7. Если n -лупа $Q(L)$ изотопна n -группе $Q(A)$ с единицей, то $Q(L)$ изоморфна $Q(A)$, т. е. сама является n -группой.

8. Пусть $Q(A)$ n -полугруппа, т. е. n -группоид, удовлетворяющий равенствам

$$A[A(Q_1, \dots, Q_i, Q_{i+1}, \dots, Q_n) Q_{n+1}, \dots, Q_{2n-1}] = \\ = A[Q_1, \dots, Q_i, A(Q_{i+1}, \dots, Q_{i+n}), \dots, Q_{2n-1}] \quad (3)$$

для всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Если $Q(A)$ обладает единицей e , то

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B[B(\dots(x_1 x_2), x_3) \dots], x_n] \quad (4_1)$$

$$\text{где } B(x, y) = A(x, y, e, \dots, e) \quad (4_2)$$

для любых $x, y \in Q$. ($Q(B)$ является бинарной полугруппой).

О п р е д е л е н и е. Пусть Ω - множество всех тернарных квазигрупповых операций, определенных на множестве Q . Систему $Q(\Sigma)$, где $\Sigma \subseteq \Omega$ назовем

1. слабо 1-ассоциативной в целом (кратко $\overline{1A}$ - системой), если имеет место следующее условие ($\forall \exists (\forall)$ тождество):

$$(\forall A_1, A_2 \in \Sigma)(\exists A_3, A_4, A_5, A_6 \in \Omega) \quad (5_1)$$

$$(\forall x, y, z, u, v \in Q) \quad ((2))$$

2. слабо 2-ассоциативной в целом (кратко $\overline{2A}$ - системой), если имеет место следующее условие:

$$(\forall A_3, A_4 \in \Sigma)(\exists A_1, A_2, A_5, A_6 \in \Omega) \quad (5_2)$$

$$(\forall x, y, z, u, v \in Q) \quad ((2))$$

3. слабо 3-ассоциативной в целом (кратко $\overline{3A}$ - системой) если имеет место следующее условие:

$$(\forall A_5, A_6 \in \Sigma)(\exists A_1, A_2, A_3, A_4 \in \Sigma) \quad (5_3)$$

$$(\forall x, y, z, u, v \in Q) \quad ((2))$$

О п р е д е л е н и е. Пусть Ω - множество всех тернарных квазигрупповых операций, определенных на Q . Систему $Q(\Sigma)$, где $\Sigma \subseteq \Omega$ назовем

1. 1-ассоциативной в целом (кратко 1A-системой), если имеет место следующее условие:

$$(\forall A_1, A_2 \in \Sigma)(\exists A_3, A_4, A_5, A_6 \in \Sigma) \quad (\bar{5}_1)$$

$$(\forall x, y, z, u, v \in Q) \quad ((2))$$

2. 2-ассоциативной в целом (кратко 2A-системой, если имеет место следующее условие:

$$(\forall A_3, A_4 \in \Sigma)(\exists A_1, A_2, A_5, A_6 \in \Sigma) \quad (\bar{5}_2)$$

$$(\forall x, y, z, u, v \in Q) \quad ((2))$$

- 3-ассоциативной в целом (кратко 3A-системой), если имеет место следующее условие:

$$(\forall A_5, A_6 \in \Sigma)(\exists A_1, A_2, A_3, A_4 \in \Sigma) \quad (\bar{5}_3)$$

$$(\forall x, y, z, u, v \in Q) \quad ((2))$$

1A-, 2A-, 3A- системы будем еще называть iA -системами, $i \in N_3$.

О п р е д е л е н и е. $Q(\Sigma)$ назовем ассоциативной в целом системой тернарных квазигрупп (А-системой), если $Q(\Sigma)$ является iA-системой для всех $i \in N_3$.

О п р е д е л е н и е. Подстановка α множества Q называется квазиавтоморфизмом (или голоморфизмом) группы $Q(\cdot)$, если для всех $a, b \in Q$ справедливо равенство $\alpha(a \cdot b) = \alpha a \cdot (\alpha e)^{-1} \alpha b$, где e — единица группы $Q(\cdot)$.

С в о й с т в о 1. Автоморфизмы являются квазиавтоморфизмом тогда и только тогда, когда $\alpha e = e$.

С в о й с т в о 2. Пусть α_0 -автоморфизм. В этом случае определенная по формуле $\alpha a = \alpha_0 a \cdot k$ определяется подстановка, где k фиксированный элемент из Q , будет квазиавтоморфизм.

С в о й с т в о 3. Пусть α — любой квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$. В этом случае существует автоморфизм α_0 и β_0 группы $Q(\cdot)$ и такие элементы $k, t \in Q$, что $\alpha x = \alpha_0 x \cdot k$, $\alpha x = t \cdot \beta_0 x$ для любого $x \in Q$.

С в о й с т в о 4. Если α квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$, то подстановка α' и α'' , определяемые формулой $\alpha' x = \alpha x \cdot k$, $\alpha'' x = t \cdot \alpha x$, где k, t фиксированные элементы Q , являются квазиавтоморфизмами группы $Q(\cdot)$.

С в о й с т в о 5. Если α квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$ с единицей, то подстановки $\alpha_1 x = \alpha x \cdot (\alpha e)^{-1}$ и $\alpha_2 x = (\alpha e)^{-1} \cdot \alpha x$ являются автоморфизмами группы $Q(\cdot)$.

С в о й с т в о 6. Множество всех квазиавтоморфизмов (голоморфизмов) группы $Q(\cdot)$ составляют группу $Hol Q$ относительно умножения подстановок.

С в о й с т в о 7. Любая автотопная подстановка α группы $Q(\cdot)$, есть квазиавтоморфизм.

С в о й с т в о 8. Пусть α — автотопная подстановка группы $Q(\cdot)$, т. е. для α существуют такие $\beta, \gamma \in S_Q$, что $\alpha(x \cdot y) = \beta x \cdot \gamma y$. В этом случае β, γ являются квазиавтоморфизмами группы $Q(\cdot)$.

С в о й с т в о 9. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi \in S_Q$, а $Q(\cdot)$ — группа. Если верно равенство $\beta[\alpha(x \cdot y) \cdot z] = \gamma x \cdot \delta(\varphi x \cdot \psi z)$ для любых $x, y, z \in Q$, то $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi$ являются квазиавтоморфизмами группы $Q(\cdot)$.

Т е о р е м а 1. Если в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$X[X(x, y, z), u, v] = X[x, X(y, z, u), v] = Y[x, y, Y(z, u, v)],$$

тогда на множестве Q можно так определить бинарную группу $Q(o)$, что для любого $A_i \in \Sigma$ и для любых $x, y, z \in Q$

$$A_i(x, y, z) = \alpha_i^{-1}(\beta_i x \circ \gamma_i y \circ \delta_i z), \text{ где } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in S_Q.$$

Т е о р е м а 2. Если в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$X[X(x, y, z), u, v] = Y[x, Y(y, z, u), v] = X[x, y, X(z, u, v)],$$

тогда на множестве Q можно так определить бинарную группу $Q(o)$, что для любого $A \in \Sigma$ и для любых $x, y, z \in Q$

$$A_i(x, y, z) = \alpha_i^{-1}(\beta_i x \circ \gamma_i y \circ \delta_i z), \text{ где } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in S_Q.$$

Т е о р е м а 3. Если в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$Y[Y(x, y, z), u, v] = X[x, X(y, z, u), v] = X[x, y, X(z, u, v)]$$

тогда на множестве Q можно так определить бинарную группу $Q(o)$, что для любого $A_i \in \Sigma$ и для любых $x, y, z \in Q$

$$A_i(x, y, z) = \alpha_i^{-1}(\beta_i x \circ \gamma_i y \circ \delta_i z), \text{ где } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in S_Q.$$

Т е о р е м а 4. Если в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$X[X(x, y, z), u, v] = Y[x, Y(y, z, u), v] = Z[x, y, Z(z, u, v)]$$

тогда на множестве Q можно так определить бинарную группу $Q(o)$, что для любого $A_i \in \Sigma$ и для любых $x, y, z \in Q$

$$A_i(x, y, z) = \alpha_i^{-1}(\beta_i x \circ \gamma_i y \circ \delta_i z), \text{ где } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in S_Q.$$

§ 2 Характеризация тернарных сверхтождеств ассоциативности в обратимых алгебрах и характеристизация обратимых алгебр с тернарными сверхтождествами ассоциативности

Обобщая лемму о сингулярных операциях [3] можно доказать, что аналогичный результат имеет место и в случае 3-х местных операций, ? (доказательство этого случая аналогично доказательству случая $n = 2$). Следовательно в нетривиальных сверхтождествах определенных по равенству

$$((x, y, z), u, v) = (x, (y, z, u), v) = (x, y, (z, u, v))$$

каждый символ операции должен повторяться не менее 2 раз (в обоих частях каждого равенства). Получим следующие сверхтождества:

$$1. X[Y(x, y, z), u, v] = X[x, Y(y, z, u), v] = X[x, y, Y(z, u, v)]$$

$$2. Y[X(x, y, z), u, v] = X[x, Y(y, z, u), v] = X[x, y, Y(z, u, v)]$$

$$3. X[Y(x, y, z), u, v] = Y[x, X(y, z, u), v] = X[x, y, Y(z, u, v)]$$

$$4. Y[X(x, y, z), u, v] = Y[x, X(y, z, u), v] = X[x, y, Y(z, u, v)]$$

$$5. X[Y(x, y, z), u, v] = X[x, Y(y, z, u), v] = Y[x, y, X(z, u, v)]$$

6. $Y[X(x,y,z),u,v] = X[x,Y(y,z,u)v] = Y[x,y,X(z,u,v)]$
7. $X[Y(x,y,z),u,v] = Y[x,X(y,z,u),v] = Y[x,y,X(z,u,v)]$
8. $Y[X(x,y,z),u,v] = Y[x,X(y,z,u),v] = Y[x,y,X(z,u,v)]$
9. $X[X(x,y,z),u,v] = X[x,X(y,z,u)v] = Y[x,y,Y(z,u,v)]$
10. $X[X(x,y,z),u,v] = Y[x,Y(y,z,u),v] = X[x,y,X(z,u,v)]$
11. $Y[Y(x,y,z),u,v] = X[x,X(y,z,u),v] = X[x,y,X(z,u,v)]$
12. $X[X(x,y,z),u,v] = Y[x,Y(y,z,u),v] = Z[x,y,Z(z,u,v)]$

Очевидно, что сверхтождества (1) и (8), (2) и (7), (3) и (6), (4) и (5) эквивалентны в классе всех тернарных алгебр, поскольку они различаются обозначениями функциональных переменных. Сверхтождества (1)-(12) в классе всех тернарных обратимых алгебр в смысле выполнимости делятся на классы эквивалентности. Основная цель работы является определение этих классов эквивалентностей, при этом 2 вышеуказанные сверхтождества называются эквивалентными, если в каждой тернарной обратимой алгебре из выполнимости одного из них следует также выполнимость другого сверхтождества. В основной теореме необходимо рассмотреть только те алгебры $Q(\Sigma)$ для которых мощность множества ее операций больше единицы, т.е. $|\Sigma| > 1$. Такие алгебры назовем нетривиальными.

Л е м м а 1. В тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$X[Y(x,y,z),u,v] = X[x,Y(y,z,u),v] = X[x,y,Y(z,u,v)] \quad (1)$$

тогда и только тогда, когда каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу:

$$A_i(x,y,z) = x\alpha_i o \alpha\beta y o \beta o t_i z; \quad t_i \in Z[Q(o)],$$

$$\beta(aob) = t^{-1} o (boa),$$

$$\beta(t_i) = t o t_i,$$

$$\beta^2 z = \beta \alpha^{-1} o b o z o b^{-1} o \beta \alpha,$$

где $Q(o)$ -бинарная группа, $\beta \in \text{Aut}\{Q(o)\}$, а $a, b, t \in Q$, $t_i \in Z[Q(o)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Согласно пункту (а) теоремы 4

$$A_i(x,y,z) = \alpha_i x o \alpha_i o \beta_i y o \gamma_i z o b_i,$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ автоморфизмы бинарной группы $Q(o)$. В этом случае сверхтождество (1) будет иметь следующий вид:

$$\alpha_i(\alpha_j x o \beta_j y o \gamma_j z o b_j) o \alpha_i o \beta_i u o \gamma_i v o b_i =$$

$$= \alpha_i x o \alpha_i o \beta_i(\alpha_j y o \alpha_j o \beta_j z o \gamma_j u o b_j) o \gamma_i v$$

$$o b_i = \alpha_i x o \alpha_i o \beta_i y o \gamma_i(\alpha_j z o \alpha_j o \beta_j u o \gamma_j v o b_j) o b_i$$

Левую часть тернарного сверхтождества ассоциативности обозначим через I, среднюю часть через II и правую часть через III. Рассмотрим

равенство $I=II$, получим $\alpha_i \alpha_j x = \alpha_i x$, следовательно $\alpha_i = \varepsilon$. Подставив в

$I=III$ $\alpha_i = \varepsilon$ получим

$$\begin{aligned} x o \alpha_j o \beta_i y o \gamma_i z o b_j o \alpha_i o \beta_i u o \gamma_i v o b_i &= \\ = x o \alpha_i o \beta_i y o \gamma_i z o \gamma_i \alpha_j o \gamma_i \beta_i u o \gamma_i \gamma_j v o \gamma_i b_j o b_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Принимая $i=j$, получим

$$\begin{aligned} x o \alpha o \beta y o \gamma z o b o \alpha o \beta u o \gamma v o b &= x o \alpha o \beta y o \gamma z o \gamma \alpha o \gamma \beta u o \gamma \gamma v o \gamma b o b, \\ b o \alpha o \beta u o \gamma v &= \gamma (a o \beta u o \gamma v o b). \end{aligned}$$

Принимая $u = \beta^{-1} u, v = \gamma^{-1} v$ получим

$$b o \alpha o \beta u o \gamma v = \gamma (a o \beta u o \gamma v o b)$$

Возьмем $u = \alpha^{-1}$, получим $b o v = \gamma (v o b)$. Принимая $v=1$, получим $\gamma b = b$.

Отсюда $\gamma_i v = b_i o v o b_i^{-1}$. Подставляя это значение в (2) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_j o \beta_j y o b_j o z o b_j^{-1} o b_j o \alpha o \beta_i u o b_i o v o b_i^{-1} o b_i &= \\ = \alpha_j o \beta_j y o b_j o z o b_i^{-1} o b_i o \alpha_j o b_i^{-1} o b_i o \beta_i u o b_i^{-1} o b_i o b_j o v o b_j^{-1} o b_i^{-1} o b_i o b_j o b_i^{-1} o b_i &= \\ (\alpha_j o \beta_j y o b_j) o z o (\alpha_j o \beta_i u o b_i) &= (\alpha_j o \beta_i y o b_i) o z o (\alpha_j o \beta_j u b_j). \end{aligned}$$

Фиксируя индекс j получим

$$(a o \beta y o b)^{-1} o (a o \beta_i y o b_i) o z = z o (a o \beta_i u b_i) o (a o \beta u o b)^{-1};$$

поэтому $(a o \beta y o b)^{-1} o (a o \beta_i y o b_i) = t_i \in Z[Q]$ и

$$\alpha_j o \beta_i y o b_i = a o \beta y o b o t_i, \text{ следовательно } \beta_i y = a^{-1} o a o \beta y o b o t_i o b_i^{-1}.$$

Подставляя в $A_i(x, y, z)$ значения $\beta_i, \alpha_i, \gamma_i$ получим

$$\begin{aligned} A_i(x, y, z) &= x o \alpha_i o \alpha_i^{-1} o a o \beta y o b o t_i o b_i^{-1} o b_i o z o b_i^{-1} o b_i = \\ &= x o a o \beta y o b o t_i o z, \quad t_i \in Z[Q(o)]. \end{aligned}$$

Подставляя выражение $A_i(x, y, z)$ в $I=II$ получим

$$x o a o \beta y o b o t_i o z o a o \beta u o b o t_i o v = o a o \beta y o \beta a o \beta^2 z o \beta b o \beta t_i o \beta u o b o t_i o v. \quad (3)$$

Отсюда $\beta^2 z = \beta a^{-1} o b o t_i o z o a o \beta t_i^{-1} o \beta b^{-1}$.

С другой стороны $\beta^2 z = \beta a^{-1} o b o t_j o z o a o \beta t_j o \beta b^{-1}$

Так как $\beta^2 z$ постоянная, т. е. не зависит от индекса i , то

$$\beta a^{-1} o b o t_j o z o a o \beta t_j^{-1} o \beta b^{-1} = \beta a^{-1} o b o t_i o z o a o \beta t_i^{-1} o \beta b^{-1};$$

отсюда $t_j o \beta t_j^{-1} = t_i o \beta t_i^{-1}$, следовательно $\beta t_i^{-1} = t_i^{-1} o t o \beta t_i^{-1}$.

Заменим $t o \beta t_i^{-1}$ на t^{-1} , получим $\beta t_i^{-1} = t_i^{-1} o t^{-1}$, следовательно $\beta t_i = t o t_i$, отсюда

$$\begin{aligned} \beta^2 z &= \beta a^{-1} o b o t_i o z o a o t_i^{-1} o t^{-1} o \beta b^{-1} = \beta a^{-1} o b o z o a o t^{-1} o \beta b^{-1}, \\ \beta^2 z &= \beta a^{-1} o b o z o b^{-1} o \beta a \end{aligned}$$

Подставим полученное значение в (3) выводим

$$b o t_i o z o a = \beta a o \beta a^{-1} o b o z o b^{-1} o \beta a o \beta b o t o t_i,$$

$$a = b^{-1} o \beta(aob) o t, \text{ следовательно } \beta(aob) = t^{-1} o (boa).$$

Достаточность доказывается путем непосредственной проверки.

Л е м м а 2. В тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$Y[X(x, y, z), u, v] = X[x, Y(y, z, u), v] = X[x, y, Y(z, u, v)] \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = x o c_i o \beta y o b o z, \quad \beta(cob) = boc$$

$$\beta c_i = t_i o \beta c, \quad t_i \in Z[Q(o)], \quad \beta t_i = t_i,$$

$$\beta^2 z = \beta c^{-1} o b o z o b^{-1} o \beta c,$$

где $Q(o)$ - бинарная группа, $\beta \in \text{Aut}[Q(o)]$, а $c, b, c_i \in Z[Q(o)]$.

Л е м м а 3. В тернарной обратимой алгебре выполняется сверхтождество

$$X[Y(x, y, z), u, v] = Y[x, X(y, z, u), v] = X[x, y, Y(z, u, v)] \quad (3)$$

тогда и только тогда, когда каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = x o a o \beta y o b o t_i o z, \quad t_i \in Z[Q(o)],$$

$$\beta(aob) = t^{-1} o (boa), \quad t \in Z[Q(o)],$$

$$\beta t_i = t o t_i,$$

$$\beta^2 z = \beta a^{-1} o b o z o b^{-1} o \beta a,$$

где $Q(o)$ - бинарная группа, $\beta \in \text{Aut}[Q(o)]$, а $a, b \in Q$.

Л е м м а 4. В тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество тогда и только тогда, когда каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$Y[X(x, y, z), u, v] = Y[xX(y, z, u), v] = X[x, y, Y(z, u, v)] \quad (4)$$

$$A_i(x, y, z) = x o a o \beta y o c_i o z, \quad c_i \in \text{cot}_i^{-1},$$

$$\beta(aoc) = coa,$$

$$\beta c_i = t_i^{-1} o \beta c, \quad t_i \in Z[Q(o)],$$

$$\beta^2 z = \beta c o a^{-1} o z o a o \beta c^{-1},$$

где $Q(o)$ - бинарная группа $\beta \in \text{Aut}[Q(o)]$ а $a, c, c_i \in Q$.

Л е м м а 5. В тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$X[X(x, y, z), u, v] = X[x, X(y, z, u), v] = Y[x, y, Y(z, u, v)] \quad (9)$$

тогда и только тогда, когда каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = x o a o t_i o \omega y o z,$$

$$\omega^2 y = a^{-1} o y o a, \quad t^2 = t,$$

$$\omega(aot_i) = aot_i, \quad t_i, \quad t \in Z[Q(o)],$$

где $Q(o)$ бинарная группа, $a \in Q$, $\omega \in \text{Aut}[Q(o)]$.

Л е м м а 6. В тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$X[X(x,y,z),u,v] = Y[x,Y(y,z,u),v] = X[x,y,X(z,u,v)] \quad (10)$$

тогда и только тогда, когда каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x,y,z) = x\phi y o a o t_i o z, \quad \phi^2 z = a o z o a^{-1},$$

$$t_i^2 = t, \quad \phi(aot_i) = aot_i, \quad t_i \in Z[Q(o)],$$

где $Q(o)$ - бинарная группа $a \in Q$, а $\phi \in \text{Aut}Z[Q(o)]$.

Л е м м а 7. В тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$Y[Y(x,y,z),u,v] = X[x,X(y,z,u),v] = X[x,y,X(z,u,v)] \quad (11)$$

тогда и только тогда, когда каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x,y,z) = x o a o t_i o \omega y o z, \quad \omega^2 z = a^{-1} o z o a,$$

$$t_i^2 = t, \quad \omega(aot_i) = aot_i, \quad t_i \in Z[Q(o)]$$

где $Q(o)$ бинарная группа $\omega \in \text{Aut}[Q(o)]$, $a \in Q$, $t_i \in Z[Q(o)]$.

Л е м м а 8. В тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество

$$X[X(x,y,z),u,v] = Y[x,Y(y,z,u),v] = Z[x,y,Z(z,u,v)] \quad (12)$$

тогда и только тогда, когда каждая операция $A_i \in \Sigma$ определяется по правилу

$$A_i(x,y,z) = x o \phi y o a o t_i o z, \quad \phi^2 z = a o t o a^{-1},$$

$$t_i^2 = t, \quad \phi(aot_i) = aot_i, \quad t_i \in Z[Q(o)],$$

где $Q(o)$ бинарная группа, $\phi \in \text{Aut}[Q(o)]$, $a \in Q$.

После сравнения лемм 1-8 получается, что относительно класса нетривиальных обратимых алгебр множество сверхтождеств 1-12 делится на 2 класса эквивалентности, так, что в первый класс входят сверхтождества 1-8, а во второй 9-12. Таким образом, получается следующий результат.

Т е о р е м а. В классе нетривиальных тернарных обратимых алгебр, каждое нетривиальное тернарное сверхтождество ассоциативности эквивалентно одному из следующих 2-х сверхтождеств:

$$X[Y(x,y,z),u,v] = X[x,Y(y,z,u),v] = X[x,y,Y(z,u,v)] \quad (1)$$

$$X[X(x,y,z),u,v] = X[x,X(y,z,u),v] = Y[x,y,Y(z,u,v)] \quad (9)$$

причем из сверхтождества (9) вытекает сверхтождество (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами. УМН, 1965, т. 20, с. 75-146.
2. Мовсисян Ю. М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Изд-во ЕГУ, Ереван, 1986.
3. Мовсисян Ю. М. Сверхтождества в алгебрах и многообразиях. УМН, 1998, т. 53, с. 61-114.
4. Белоусов В. Д. n-Арные квазигруппы, Изд-во "Штиинца", Кишинев, 1971.
5. Ушан Я. Ассоциативные в целом системы тернарных квази-
Mathematica Balkanica, 1, 1971.
6. Ушан Я. Ассоциативные в целом системы n-арных квазигрупп. Publications de l'institut mathematique, Nouvelle serie, tome 19(33), 1975, p. 165.
7. Жарков Д. Одна заметка об ассоциативных в целом системах квазигрупп на $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ Publications de l'institut mathematique, Nouvelle serie, tome 21 (35), 1977, pp. 207-211.

Լ. Ռ. ԱԲՐԱՄՅԱՆ

ՏԵՐՆԱՐ ԶՈՒԳՈՐԴԱԿԱՆ ԳԵՐՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՀԱԿԱՂԱՐՉԵԼԻ
ՀԱՆՐԱՅԱՇԻՎՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ n փ ու մ

Հոդվածը նվիրված է տերնար զուգորդական գերնույնությունների սակարգմանը հակադարձելի հանրահաշիվներում: Այս գերնույնություն համարժեք են հետևյալ գերնույնություններից որևէ մեկին՝

$$\begin{aligned} X[Y(x,y,z),u,v] &= X[x,Y(y,z,u),v] = X[x,y,Y(z,u,v)] \\ X[X(x,y,z),u,v] &= X[x,X(y,z,u),v] = Y[x,y,Y(z,u,v)]. \end{aligned}$$

L. R. ABRAMIAN

TERNAR ASSOCIATIVE HIPERIDENTITIES IN THE
CONVERSABLE ALGEBRAS.

S u m m a r y

The work is devoted to classification of ternary associative hiperidentities in the conversable algebras. That hiperidentities are equivalent to the following hiperidentities

$$\begin{aligned} X[Y(x,y,z),u,v] &= X[x,Y(y,z,u),v] = X[x,y,Y(z,u,v)] \\ X[X(x,y,z),u,v] &= X[x,X(y,z,u),v] = Y[x,y,Y(z,u,v)]. \end{aligned}$$