

УДК 517.984

Մաթեմատիկա

Ս. Կ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ (Արմ.)

ԽՉՎՈՂ ԿՇՈԱՅԻՆ ԳՈՐԾԱԿՑՈՎ ՄԻ ԵԶՐԱՅԻՆ
 ԽՆԴՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

$L_2(0, \infty)$ տարածությունում դիտարկենք L_1 եզրային խնդիրը, որն առաջանում է

$$y'' + \lambda p(x)y = 0; \quad 0 \leq x < \infty \quad (1)$$

դիֆերենցյալ հավասարումով և $y(0) = 0$ եզրային պայմանով, որտեղ

$$p(x) = \begin{cases} d^2, & d \neq 1; \quad 0 \leq x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

Որպես L_1 օպերատորի $D(L_1)$ որոշման տիրույթ վերցնենք $y(x) \in L_2(0, \infty)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

ա) $y'(x)$ ածանցյալը գոյություն ունի և բացարձակ անընդհատ է ամեն մի $[0, b]$, $b > 0$ վերջավոր միջակայքում, և $y''(x) \in L_2(0, \infty)$;

բ) $y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $y(0) = 0$ պայմանին:

(1) հավասարումը մասնավոր դեպքն է ավելի ընդհանուր տեսքի

$$y'' + q(x)y + \lambda p(x)y = 0; \quad 0 \leq x < \infty \quad (2)$$

հավասարման, որտեղ $q(x)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$\int_0^\infty (1+x)|q(x)|dx < \infty$$

պայմանին: Այս պայմանից հետևում է, որ $x \rightarrow \infty$ դեպքում (2) հավասարումը վեր է ածվում (1) հավասարմանը (տես [2]-ը), ինչը թույլ է տալիս (2) հավասարման լուծումներն ասիմտոտաբար արտահայտել (1) հավասարման համապատասխան լուծումների միջոցով:

Հոդվածը նվիրված է L_1 եզրային խնդրի սպեկտրի հետազոտմանը:

Այստեղ ստացված արդյունքները հնարավորություն կտան բավականաչափ մանրամասն հետազոտելու ավելի ընդհանուր տեսքի եզրային խնդրի սպեկտրը, որն առաջանում է (2) դիֆերենցյալ հավասարումով և $y(0) = 0$ եզրային պայմանով:

1. (1) ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՈՐՈՇ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Անհայտ է, որ $0 \leq x \leq a$ միջակայքում (1) հավասարումն ունի

$$\varphi(x, k) = \frac{\text{Sind} kx}{dx} \quad \text{և} \quad \theta(x, k) = \text{Cos} d k x, \quad \lambda = k^2 \quad (3)$$

լուծումներ, որոնք բավարարում են $\varphi(x, k) = 0$, $\varphi'(x, k) = 1$; $\theta(0, k) = 1$, $\theta'(0, k) = 0$ պայմաններին: Նշենք, որ $\varphi(x, k)$ և $\theta(x, k)$ ֆունկցիաները կազմում են (1) հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ $[0, \alpha]$ միջակայքում: Իսկ $[\alpha, \infty]$ միջակայքում (1) հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ են կազմում

$$\psi(x, k) = e^{ikx} \quad \text{և} \quad \hat{\psi}(x, k) = e^{-ikx} \quad (4)$$

ֆունկցիաները:

Հարունակենք $\psi(x, k)$ լուծումը $[0, \alpha]$ միջակայքում այնպես, որ նա իր $\psi'(x, k)$ ածանցյալի հետ միասին լինեն անընդհատ $x = \alpha$ կետում:

Քանի որ (3) լուծումները կազմում են ֆունդամենտալ համակարգ $[0, \alpha]$ -ում, ապա այդ միջակայքում $\psi(x, k)$ -ն կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$\psi(x, k) = a(k) \frac{\text{Sind} kx}{dk} + b(k) \text{Cos} d k x :$$

α կետում $\psi(x, k)$ և $\psi'(x, k)$ ֆունկցիաների անընդհատության պայմաններից որոշվում են $a(k)$ և $b(k)$ գործակիցները:

$$a(k) = k e^{ika} (i \text{Cos} d a k + a \text{Sind} a k),$$

$$b(k) = e^{-ika} \left(\text{Cos} d a k - \frac{i}{a} \text{Sind} a k \right) :$$

Այսպիսով, $\psi(x, k)$ լուծման համար ամբողջ $(0, \infty)$ կիսառանցքի վրա ստանում ենք

$$\psi(x, k) = \begin{cases} a(k) \frac{\text{Sind} kx}{dk} + b(k) \text{Cos} d k x, & 0 \leq x \leq a, \\ e^{-ikx}, & x > a \end{cases} \quad (5)$$

Նման ձևով շարունակվում է նաև $\hat{\psi}(x, k)$ լուծումը:

Այժմ շարունակենք $\varphi(x, k)$ լուծումը $[0, \alpha]$ միջակայքից (a, ∞) միջակայքը այնպես, որ նա իր ածանցյալի հետ միասին լինեն անընդհատ նաև $x = \alpha$ կետում: Դրա համար օգտվենք (4) լուծումներից, որոնք (1) հավասարման գծորեն անկախ լուծումների համակարգ են կազմում (a, ∞) միջակայքում: Կստանանք.

$$\varphi(x, k) = \begin{cases} \frac{\text{Sind} kx}{dk}, & 0 \leq x \leq a, \\ c(k) e^{ikx} + d(k) e^{-ikx}, & x > a \end{cases} \quad (6)$$

որտեղ $d(-k) = c(k) = \frac{1}{2ik} e^{-iak} \left(\text{Cos} d a k + \frac{i}{a} \text{Sind} a k \right) :$

Սեր կառուցած (5) և (6) ֆունկցիաները կազմում են (1) հավասարման լուծումների գծորեն անկախ համակարգ ամբողջ $(0, \infty)$ միջակայքում:

2. L_λ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ

Թ ե ո Ր ե մ 1: Որպեսզի $\lambda = k^2$, $\text{Im} k > 0$ թիվը հանդիսանա L_λ օպերատորի սեփական արժեք, անհրաժեշտ է և բավարար, որ k -ն բավարարի $\psi(0, k) = 0$ հավասարմանը:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Անհրաժեշտությունը: Ղիցուք λ -ն L_λ օպերատորի սեփական արժեքն է, այսինքն գոյություն ունի $L_\lambda y = 0$ հավասարման ոչ զրոյական $y(x, k)$ լուծում: Այդ դեպքում $y(x, k)$ -ն հանդիսանում է

$$y'' + \lambda p(x)y = 0, \quad y(0, k) = 0, \quad y(x, k) \in L_2(0, \infty) \quad (7)$$

եզրային խնդրի լուծումը: Իսկ (7) խնդրի ցանկացած լուծում $\psi(x, k)$ և $\varphi(x, k)$ գծորեն-անկախ լուծումների գծային կոմբինացիան է՝

$$y(x, k) = C_1 \psi(x, k) + C_2 \varphi(x, k):$$

Քանի որ $\text{Im} k > 0$ դեպքում $\psi(x, k) \in L_2(0, \infty)$, $\varphi(x, k) \notin L_2(0, \infty)$, ապա $C_2 = 0$: Հետևաբար, $y(x, k) = C_1 \psi(x, k)$, և որպես (7) եզրային խնդրի լուծում, $y(x, k)$ -ն պետք է բավարարի $y(0, k) = 0$ պայմանին: Այստեղից հետևում է, որ $\psi(0, k) = 0$:

Բավարարությունը: Ղիցուք $\psi(0, k) = 0$: Այդ դեպքում $\psi(x, k)$ -ն բավարարում է (7) եզրային խնդրին և քանի որ $\text{Im} k > 0$ դեպքում $\psi(x, k) \in L_2(0, \infty)$, ապա նա հանդիսանում է L_λ օպերատորի սեփական ֆունկցիա, իսկ $\lambda = k^2$ թիվը L_λ օպերատորի սեփական արժեք: Թերորենն ապացուցվեց:

Ապացուցված թերորենից հետևում է, որ L_λ օպերատորի սեփական արժեքները գտնելու համար պետք է լուծել $\psi(0, k) = 0$ հավասարումը: (5) բանաձևից գտնում ենք, որ

$$\psi(0, k) = b(k) = e^{iku} \left(\text{Cosdak} - \frac{i}{a} \text{Sindak} \right):$$

Այսպիսով, L_λ օպերատորի սեփական արժեքները

$$\text{Cosdak} - \frac{i}{a} \text{Sindak} = 0 \quad (8)$$

հավասարման արմատներն են:

(8) հավասարման հետազոտությունը բերում է հետևյալ արդյունքին:

Թ ե ո Ր ե մ 2: Ղիցուք $\text{Im} k > 0$: Եթե $a^2 > 0$, ապա L_λ օպերատորը սեփական արժեքներ չունի: Եթե $a^2 < 0$, ապա L_λ օպերատորն ունի հաշ-

վելի բազմությամբ բացասական սեփական արժեքներ $\{\lambda_n\}$, որտեղ $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$, և եթե $a = it$, ապա

$$\lambda_n = K_n^2 = \left(\frac{1}{da}\right)^2 (\pi n + \arctan t)^2; \quad n = -1, -2, \dots$$

$\psi(0, k)$ -ով նշանակենք $\psi(0, k)$ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ k -ի:

Պարզ է, որ $\psi(0, k) = \frac{a}{d} (1 - a^2) e^{ika} \text{Sindak}$

Դժվար չէ համոզվել, որ $\psi(0, k) = 0$ և $\psi'(0, k) = 0$ հավասարումները չունեն ընդհանուր արմատներ: Այստեղից հետևում է, որ L_λ օպերատորի բոլոր սեփական արժեքները միապատիկ են:

3. L_λ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՍՊԵԿՏՐԸ

$\varphi(x, k)$ ֆունկցիան բավարարում է $\varphi(0, k) = 0$ եզրային պայմանին, իսկ $[\varphi(x, k)]$ -ն քառակուսով ինտեգրելի է $\text{Im} k > 0$ դեպքում: Նրանց միջոցով կառուցենք L_λ օպերատորի $R(x, t, k)$ Գրինի ֆունկցիան:

Ենթադրենք λ -ն L_λ օպերատորի սեփական արժեք չէ, այնպես որ R_λ ռեզոլվենտը գոյություն ունի: Թող $R_\lambda f = y$: Ռեզոլվենտի սահմանումից հետևում է, որ $L_\lambda y = f$: Այս հավասարությունը նշանակում է, որ y -ը հանդիսանում է

$$y'' + \lambda p(x)y = f \quad (9)$$

հավասարման լուծումը, որը պատկանում է $L_2(0, \infty)$ տարածությանը և բավարարում է $y(0) = 0$ պայմանին:

Լուծելով (9) հավասարումը կամայական հաստատունների վարիացիայի մեթոդով, ստանում ենք հետևյալ արդյունքը:

L_λ օպերատորի ռեզոլվենտը

$$R_\lambda f = \int R(x, t, k) f(t) dt$$

տեսքի ինտեգրալային օպերատոր է, որի $R(x, t, k)$ կորիզն ունի հետևյալ տեսքը.

$$R(x, t, k) = \frac{1}{\psi(0, k)} \begin{cases} \varphi(x, k)\psi(t, k), & x < t \\ \psi(x, k)\varphi(t, k), & x > t \end{cases} \quad (10)$$

(10) բանաձևից երևում է, որ L_λ օպերատորի սեփական արժեքները հանդիսանում են ռեզոլվենտի բևեռներ, և այդ բևեռներից բացի ռեզոլվենտը չունի այլ եզակի կետեր $\text{Im} k > 0$ վերին կիսահարթությունում:

Բերենք մի թեորեմ ռեզոլվենտի նորմի վերաբերյալ:

Թ ե ո Ր ե մ 3: Ամեն մի $r > 0$ թվի համար գոյություն ունի $C_r > 0$ թիվն այնպես, որ $L_2(0, \infty)$ -ում ռեզոլվենտի նորմը բավարարում է

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{C_r}{|\psi(0, k)|\sqrt{\operatorname{Im} k}} \quad (11)$$

անհավասարությանը՝ բոլոր այն k -երի համար, որոնք պատկանում են $\operatorname{Im} k > 0$, $|k| \leq r$ տիրույթին:

Թ ե ո Ր ե մ 4: $\lambda > 0$ դրական կիսառանցքի բոլոր կետերը պատկանում են L_λ օպերատորի անընդհատ սպեկտրին:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: (11) գնահատականից երևում է, որ $\lambda > 0$ կիսառանցքին մոտենալիս ռեզոլվենտի նորմը անսահմանափակ աճում է՝ $\|R_\lambda\| \rightarrow \infty$, երբ $\lambda \rightarrow \lambda_0 > 0$: Հետևաբար, $\lambda > 0$ կիսառանցքը պատկանում է R_λ օպերատորի սպեկտրին: Մնում է ապացուցել, որ $\lambda > 0$ դեպքում R_λ օպերատորի որոշման տիրույթը, կամ որ նույնն է, L_λ օպերատորի արժեքների բազմությունը, խիտ է $L_2(0, \infty)$ տարածության մեջ: Այսինքն, L_λ օպերատորի արժեքների բազմության օրթոգոնալ լրացումը կազմված է միայն զրոյական էլեմենտից: Բայց օրթոգոնալ լրացումը համընկնում է $L_\lambda^* f = 0$ հավասարման լուծումների տարածության հետ: Դժվար չէ ցույց տալ, որ L_λ^* համալուծ օպերատորը որոշվում է $y'' + \lambda \overline{p(x)}y = 0$ հավասարումով և $y(0) = 0$ եզրային պայմանով: Հետևաբար, թերեմ 2-ի համաձայն, L_λ^* օպերատորը չի կարող ունենալ դրական սեփական արժեքներ: Թերեմն ապացուցվեց:

Թ ե ո Ր ե մ 5: Եթե α^2 -ն իրական թիվ է, ապա L_λ օպերատորը չունի սպեկտրալ առանձնահատկություններ (спектральные особенности):

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Ենթադրենք հակառակը: Թող $\lambda_0 = k_0^2$ կետը L_λ օպերատորի համար սպեկտրալ առանձնահատկություն է: Այդ դեպքում, քանի որ $p(x)$ և $\lambda_0 = k_0^2$ իրական են, ապա

$$\psi''(x, k_0) + k_0^2 p(x) \psi(x, k_0) = 0$$

հավասարության հետ միասին տեղի ունի նաև

$$\overline{\psi}''(x, k_0) + k_0^2 p(x) \overline{\psi}(x, k_0) = 0$$

հավասարությունը: Իսկ դա նշանակում է, որ $\overline{\psi}(x, k_0) = \psi(x, -k_0)$ ֆունկցիան նույնպես (1) հավասարման լուծում է, ընդ որում $\psi(0, -k_0) = 0$:

Քանի որ

$$w[\psi(x, k_0), \psi(x, -k_0)] = -2ik_0,$$

ապա դա տեղի ունենալ չի կարող: Թերեմն ապացուցվեց:

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Изд. 2. М. Наука, 1969.
2. Агранович З. С., Марченко Б. А. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, 1960.

С. К. ПЕТРОСЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМ ВЕСОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ.

Резюме

Исследован спектр граничной задачи

$$y'' + \lambda p(x)y = 0; \quad 0 \leq x < \infty, \\ y(0) = 0, \quad p(x) = \begin{cases} d^2, & d \neq 1; \quad 0 \leq x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases}.$$

S. K. PETROSIAN

INVESTIGATION OF THE SPECTRUM OF ONE BOUNDARY PROBLEM WITH BROKEN WEIGHT COEFFICIENT.

Summary

The spector of boundary problem

$$y'' + \lambda p(x)y = 0; \quad 0 \leq x < \infty, \\ y(0) = 0, \quad \text{where } p(x) = \begin{cases} d^2, & d \neq 1; \quad 0 \leq x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

is investigated.