ԱՐՑԱԽԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРЦАХСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1999 *Естественные науки*

УДК 513.83 ***Математика***

П. С. ГЕВОРКЯН

ПРЕДПОДВИЖНОСТЬ В PRO-КАТЕГОРИИ

Понятие подвижности является одним из основных понятий теории шейпов. Это понятие первоначально, для метризуемых компактов, было введено К. Борсуком [1]. На более общие случаи было перенесено Мардешичем и Сегалом [2], Сегалом [3]. Далее, в работе [4] Олендским были определены понятия М-доминирования и М-эквивалентности, которые автор использовал для изучения различных типов подвижности (n-подвижности и $\mathfrak{R}$-подвижности, где $\mathfrak{R}$ некоторое семейство метризуемых компактов). Эти идеи в более широком смысле были изучены и развиты автором данной статьи в работе [5].

В настоящей статье в pro-категории определяется и изучается понятие предподвижности обратного спектра. Устанавливается связь между понятиями предподвижности обратного спектра и А-подвижности пространства. В качестве следствий получаются хорошо известные в теории шейпов результаты.

О п р е д е л е н и е 1. *Обратный спектр* $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ *называется предподвижным относительно обратного спектра* $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$*, если выполняется следующее условие: для любого* α *существует такое* $\alpha' \geq \alpha$*, что для любых* $\alpha'' \geq \alpha$, $\beta \in B$ *и любого* $f_\beta : Y_\beta \to X_{\alpha'}$ *существуют такие* $\beta' \geq \beta$ *и* $f_{\beta'} : Y_{\beta'} \mapsto X_{\alpha''}$*, что выполняется*

$$p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_{\beta\beta'} = p_{\alpha\alpha''} \circ f_{\beta'},$$

то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& X_{\alpha'} \arrow[dl, "p_{\alpha\alpha'}"'] & Y_\beta \arrow[l, "f_\beta"'] \\
X_\alpha & & \\
& X_{\alpha''} \arrow[ul, "p_{\alpha\alpha''}"] & Y_{\beta'} \arrow[l, dashed, "f_{\beta'}"] \arrow[uu, "q_{\beta\beta'}"']
\end{tikzcd}$$

Т е о р е м а 1. *Если обратный спектр $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ ассоциирован с пространством Y: $assY = \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$, то обратный спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ предподвижен относительно обратного спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ тогда и только тогда, когда он Y- подвижен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть обратный спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ Y- подвижен. Докажем, что тогда обратный спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ будет предподвижным относительно обратного спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ (см. диаграмму 1). Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Для этого α подберем то $\alpha' \in A$, которое удовлетворяет определению Y-подвижности обратного спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$. Теперь, пусть $\beta \in B$ произвольный элемент, а $f_\beta : Y_\beta \to X_{\alpha'}$ произвольное отображение.

Рассмотрим отображение $f' = f_\beta \circ q_\beta : Y \to X_{\alpha'}$. В силу Y-подвижности обратного спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ существует такое отображение $f'' : Y \to X_{\alpha''}$, что

$$p_{\alpha\alpha''} \circ f'' = p_{\alpha\alpha'} \circ f'. \qquad (1)$$

Так как обратный спектр $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ ассоциирован с пространством Y, следовательно для $f'' : Y \mapsto X_{\alpha''}$ существует такое отображение $f_{\beta''} : Y_{\beta''} \mapsto X_{\alpha''}$, что

$$f'' = f_{\beta''} \circ q_{\beta''}. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь произвольный $\beta''' \in B$, $\beta''' \geq \beta''$ и $\beta''' \geq \beta$.

Имеем $q_{\beta''} = q_{\beta''\beta'''} \circ q_{\beta'''}$ и $q_\beta = q_{\beta\beta'''} \circ q_{\beta'''}$. (3)

Нетрудно проверить, что

$p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_{\beta\beta'''} \circ q_{\beta'''} = p_{\alpha\alpha''} \circ f_{\beta''} \circ q_{\beta''\beta'''} \circ q_{\beta'''}$. (4)

В самом деле, используя (1), (2) и (3) получим

$$p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_{\beta\beta'''} \circ q_{\beta'''} = p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_\beta = p_{\alpha\alpha''} \circ f'' = p_{\alpha\alpha''} \circ f_{\beta''} \circ q_{\beta''} =$$
$$= p_{\alpha\alpha''} \circ f_{\beta''} \circ q_{\beta''\beta'''} \circ q_{\beta'''}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\alpha'} \arrow[dl, "p_{\alpha\alpha'}"'] & & Y_\beta \arrow[ll, "f_\beta"'] & & \\
X_\alpha & & Y \arrow[ul, "f'"'] \arrow[ur, "q_\beta"] \arrow[rr, "q_{\beta'''}"] \arrow[dr, "q_{\beta''}"] \arrow[dl, dashed, "f''"] & & Y_{\beta'''} \arrow[ul, "q_{\beta\beta'''}"'] \arrow[dl, "q_{\beta''\beta'''}"] & Y_{\beta'} \arrow[l, "q_{\beta'''\beta'}"'] \\
 & X_{\alpha''} \arrow[ul, "p_{\alpha\alpha''}"] & & Y_{\beta''} \arrow[ll, dashed, "f_{\beta''}"] & &
\end{tikzcd}$$

Диагр. 1

Из равенства (4) и из того, что $ass Y = \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ следует существование такого $\beta' \in B$, $\beta'' \geq \beta'''$ что выполняется аналогичное (4) равенство

$$p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_{\beta\beta'''} \circ q_{\beta''\beta'} = p_{\alpha\alpha''} \circ f_{\beta''} \circ q_{\beta''\beta'''} \circ q_{\beta''\beta'} \qquad (5)$$

Обозначим $f_{\beta'} = f_{\beta''} \circ q_{\beta''\beta'''} \circ q_{\beta'''\beta'}$. Оказывается, что $\beta' \in B$ и $f_{\beta'} : Y_{\beta'} \to X_{\alpha''}$ искомые для предподвижности обратного спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ относительно спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$. Для чего осталось проверить равенство

$$p_{\alpha\alpha''} \circ f_{\beta'} = p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_{\beta\beta'} \qquad (6)$$

В самом деле

$$p_{\alpha\alpha''} \circ f_{\beta'} = p_{\alpha\alpha''} \circ q_{\beta''\beta'''} \circ q_{\beta'''\beta'} = p_{\alpha\alpha''} \circ f_\beta \circ q_{\beta\beta'''} \circ q_{\beta'''\beta'} = p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_{\beta\beta'}$$

(диагр.1).

Теперь докажем обратное. Пусть обратный спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ предподвижен относительно обратного спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ (см. диагр. 2). Докажем, что тогда спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ будет и Y-подвижным. Рассмотрим произвольный элемент $\alpha \in A$. Для этого $\alpha \in A$ существует такой $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$, который удовлетворяет условию определения предподвижности обратного спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ относительно обратного спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$. Пусть $f' : Y \to X_{\alpha'}$ произвольное отображение. Поскольку $ass Y = \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$, следовательно согласно определению ассоциированности, для отображения $f' : Y \to X_{\alpha'}$ существуют такие $\beta \in B$ и

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\alpha'} \arrow[dl, "p_{\alpha\alpha'}"'] & & Y_\beta \arrow[ll, dashed, "f_\beta"'] \\
X_\alpha & & Y \arrow[ul, "f'"'] \arrow[ur, "q_\beta"] \arrow[dl, "f''"] \arrow[dr, "q_{\beta'}"'] & \\
 & X_{\alpha''} \arrow[ul, "p_{\alpha\alpha''}"] & & Y_{\beta'} \arrow[ll, dashed, "f_{\beta'}"] \arrow[uu, "q_{\beta\beta'}"']
\end{tikzcd}$$

Диагр. 2

$f_\beta : Y_\beta \mapsto X_{\alpha'}$, что

$$f' = f_\beta \circ q_\beta . \qquad (7)$$

Так как обратный спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ предподвижен относительно спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$, то следовательно для выше найденного $\beta \in B$ существуют такие $\beta' \in B, \beta' \geq \beta$ и $f_{\beta'} : Y_{\beta'} \to X_{\alpha''}$ что

$$p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_{\beta\beta'} = p_{\alpha\alpha''} \circ f_{\beta'} . \qquad (8)$$

Теперь обозначим $f'' = f_{\beta'} \circ q_{\beta'}$. Легко заметить, что $f'' : Y \to X_{\alpha''}$ -искомое отображение. В самом деле, используя равенства (7) и (8) получим

$$p_{\alpha\alpha'} \circ f' = p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_\beta = p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ q_{\beta\beta'} \circ q_\beta =$$
$$= p_{\alpha\alpha''} \circ f_{\beta'} \circ q_{\beta'} = p_{\alpha\alpha''} \circ f'' \text{ (диагр. 2).}$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть обратный спектр $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ доминируется обратным спектром $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$. Если некоторый обратный спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ предподвижен относительно спектра $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$, то он предподвижен и относительно спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha \in A$ произвольный элемент. Рассмотрим тот $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$, который удовлетворяет условию определения предподвижности спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ относительно спектра $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$. Теперь пусть $f_\beta : Y_\beta \to X_{\alpha'}$ произвольное отображение, где $\beta \in B$ -произвольный элемент. Спектр $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ доминируется спектром $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$ значит, что в pro-категории существуют такие морфизмы

$$\bar{\varphi} = (\varphi_\gamma, \varphi) : \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\} \to \{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$$

и
$$\bar{\psi} = (\psi_\beta, \psi) : \{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\} \to \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\},$$

где $\varphi : \Gamma \to B, \varphi_\gamma : Y_{\varphi(\gamma)} \to Z_\gamma$, $\psi : B \to \Gamma$, $\psi_\beta : Z_{\psi(\beta)} \to Y_\beta$, что

$$\bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = \bar{1}, \qquad (9)$$

где $\bar{1}$ -тождественный морфизм спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$. Согласно определению морфизмов в pro-категории и из (9) следует, что существует такой $\beta''' \in B$, $\beta''' \geq \beta$, что выполняется

$$q_{\beta\beta'''} = \psi_\beta \circ \varphi_{\psi(\beta)} \circ q_{\varphi(\psi(\beta))\beta'''} \qquad (10)$$

(см. диаграм. 3). Учитывая предподвижность спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ относительно спектра $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$ для индекса $\psi(\beta) \in \Gamma$ мы можем найти такой $\gamma' \in \Gamma$, $\gamma' \geq \psi(\beta)$ и такое отображение $g_{\gamma'} : Z_{\gamma'} \mapsto X_{\alpha''}$, что

$$p_{\alpha\alpha''} \circ g_{\gamma'} = p_{\alpha\alpha'} \circ f_\beta \circ \psi_\beta \circ r_{\psi(\beta)\gamma'} . \qquad (11)$$

Рассмотрим гомотопический класс $\varphi_{\gamma'} : Y_{\varphi(\gamma')} \mapsto Z_{\gamma'}$. Так как

$\overline{\varphi}=(\varphi_\gamma,\varphi):\{Y_\beta,q_{\beta\beta'},B\}\mapsto\{Z_\gamma,r_{\gamma\gamma'},\Gamma\}$ морфизм в pro-категории, то следовательно существует такой $\beta''\in B,\ \beta''\geq\varphi(\gamma')$, $\beta''\geq\varphi(\psi(\beta))$, что

$$r_{\psi(\beta)\gamma'}\circ\varphi_{\gamma'}\circ q_{\varphi(\gamma')\beta''}=\varphi_{\psi(\beta)}\circ q_{\varphi(\psi(\beta))\beta''}. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим произвольный $\beta'\in B,\ \beta'\geq\beta''$, $\beta'\geq\beta'''$. Докажем, что $\beta'\in B$, и гомотопический класс

$f_{\beta'}=g_{\gamma'}\circ\varphi_{\gamma'}\circ q_{\varphi(\gamma')\beta''}\circ q_{\beta''\beta'}:Y_{\beta'}\mapsto X_{\alpha''}$ -искомые, то есть, что имеет место равенство

$$p_{\alpha\alpha'}\circ f_\beta\circ q_{\beta\beta'}=p_{\alpha\alpha''}\circ f_{\beta'}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\alpha'} \arrow[dl, "p_{\alpha\alpha'}"'] & Y_\beta \arrow[l, "f_\beta"'] & Y_{\beta'''} \arrow[l, "q_{\beta\beta'''}"'] \arrow[d, "q_{\varphi(\psi(\beta))\beta'''}"] & Y_{\beta'} \arrow[l, "q_{\beta'''\beta'}"'] \arrow[d, "q_{\beta''\beta'}"] \\
X_\alpha & & Z_{\psi(\beta)} \arrow[u, "\psi_\beta"] & Y_{\varphi(\psi(\beta))} \arrow[l, "\varphi_{\psi(\beta)}"] & Y_{\beta''} \arrow[l, "q_{\varphi(\psi(\beta))\beta''}"] \arrow[dl, "q_{\varphi(\gamma')\beta''}"] \\
 & X_{\alpha''} \arrow[ul, "p_{\alpha\alpha''}"] & Z_{\gamma'} \arrow[l, "g_{\gamma'}"] \arrow[u, "r_{\psi(\beta)\gamma'}"] & Y_{\varphi(\gamma')} \arrow[l, "\varphi_{\gamma'}"] &
\end{tikzcd}$$

Диагр. 3

В самом деле, из (10), (11) и (12) получим

$$\begin{aligned}
p_{\alpha\alpha''}\circ f_{\beta'} &= p_{\alpha\alpha''}\circ g_{\gamma'}\circ\varphi_{\gamma'}\circ q_{\varphi(\gamma')\beta''}\circ q_{\beta''\beta'}=\\
&= p_{\alpha\alpha'}\circ f_\beta\circ\varphi_{\beta'}\circ r_{\psi(\beta)\gamma'}\circ\varphi_{\gamma'}\circ q_{\varphi(\gamma')\beta''}\circ q_{\beta''\beta'}=\\
&= p_{\alpha\alpha'}\circ f_\beta\circ\varphi_{\beta'}\circ\varphi_{\psi(\beta)}\circ q_{\varphi(\psi(\beta))\beta''}\circ q_{\beta'''\beta'}=\\
&= p_{\alpha\alpha'}\circ f_\beta\circ q_{\beta\beta'''}\circ q_{\beta'''\beta'}=p_{\alpha\alpha'}\circ f_\beta\circ q_{\beta\beta'}.
\end{aligned}$$

С л е д с т в и е 1. *Если обратные спектры $\{Y_\beta,q_{\beta\beta'},B\}$ и $\{Z_\gamma,r_{\gamma\gamma'},\Gamma\}$ изоморфны в pro-категории, то предподвижность некоторого обратного спектра $\{X_\alpha,p_{\alpha\alpha'},A\}$ относительно спектра $\{Y_\beta,q_{\beta\beta'},B\}$ эквивалентна его предподвижности относительно спектра $\{Z_\gamma,r_{\gamma\gamma'},\Gamma\}$.*

Т е о р е м а 3. *Топологическое пространство X подвижно тогда и только тогда, когда оно подвижно относительно класса всех ANR-пространств.*

Т е о р е м а 4. *Топологическое пространство X n-подвижно тогда и только тогда, когда оно n-подвижно относительно класса всех ANR- пространств, имеющие размерность $\leq n$.*

Т е о р е м а 5. *Пусть обратный спектр* $\{X_a, p_{aa'}, A\}$ *доминируется обратным спектром* $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ *в pro-категории. Тогда из предподвижности спектра* $\{X_a, p_{aa'}, A\}$ *относительно некоторого обратного спектра* $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$ *следует предподвижность спектра* $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$, *относительно того же спектра* $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть обратный спектр $\{X_a, p_{aa'}, A\}$ доминируется обратным спектром $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ в pro-категории и спектр $\{X_a, p_{aa'}, A\}$ предподвижен относительно некоторого обратного спектра $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$. Докажем, что спектр $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ также предподвижен относительно того же спектра $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$. Пусть $a \in A$-произвольный элемент. Так как спектр $\{X_a, p_{aa'}, A\}$ доминируется спектром $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$, то следовательно существуют такие морфизмы.

$$\overline{\varphi} = (\varphi_\beta, \varphi): \{X_a, p_{aa'}, A\} \to \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$$

и $$\overline{\psi} = (\psi_a, \psi): \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\} \to \{X_a, p_{aa'}, A\}$$

в pro-категории, что

$$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = \overline{1}, \tag{13}$$

где $\overline{1}$ -тождественный морфизм спектра $\{X_a, p_{aa'}, A\}$. Для гомотопического класса $\psi_a \circ \varphi_{\psi(a)} : X_{\varphi(\psi(a))} \to X_a$ (см. диагр. 4) существует такой индекс $a'' \in A,\ a'' \geq a,\ a'' \geq \varphi(\psi(a))$, что выполняется

$$p_{aa''} = \psi_a \circ \varphi_{\psi(a)} \circ p_{\varphi(\psi(a))a''}. \tag{14}$$

Для $\psi(a) \in B$ существует такой индекс $\beta' \in B,\ \ \beta' \geq \psi(a)$, что выполняется условие предподвижности спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ относительно $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$. Рассмотрим гомотопические классы $\varphi_{\psi(a)} : X_{\varphi(\psi(a))} \mapsto Y_{\psi(a)}$ и $\varphi_{\beta'} : X_{\varphi(\beta')} \mapsto Y_{\beta'}$. Так как $\beta' \geq \psi(a)$ и $\overline{\varphi}$ -морфизм в pro-категории, то следовательно существует такой индекс $a''' \in A,\ a''' \geq \varphi(\psi(a))$, $a''' \geq \varphi(\beta')$, что

$$\varphi_{\psi(a)} \circ p_{\varphi(\psi(a))a'''} = q_{\psi(a)\beta'} \circ \varphi_{\beta'} \circ p_{\varphi(\beta')a'''}. \tag{15}$$

Пусть теперь $a' \in A,\ a' \geq a'',\ a' \geq a'''$ -произвольный элемент. Докажем, что $a' \in A$ является искомым, то есть удовлетворяет условию предподвижности спектра $\{X_a, p_{aa'}, A\}$ относительно спектра $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$. В самом деле, пусть $\tilde{a} \in A,\ \tilde{a} \geq a'$ произвольный индекс, а $f_\gamma : Z_\gamma \to X_{a'}$ - произвольный гомотопический класс, где $\gamma \in \Gamma$ произвольный индекс. Рассмотрим отображение $\psi_a : Y_{\psi(a)} \to X_a$ и $\psi_{\tilde{a}} : Y_{\psi(\tilde{a})} \to X_{\tilde{a}}$. Так как

$\overline{\psi}$ морфизм в pro-категории, то существует такой индекс $\beta'' \in B$, $\beta'' \geq \psi(a)$, $\beta'' \geq \psi(\tilde{a})$, что имеет место

$$\psi(a) \circ q_{\psi(a)\beta''} = p_{a\tilde{a}} \circ \psi_{\tilde{a}} \circ q_{\psi(\tilde{a})\beta''}. \tag{16}$$

Из предподвижности спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ относительно спектра $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$ следует, что для отображения $g_\gamma = \varphi_{\beta'} \circ p_{\varphi(\beta')a'''} \circ p_{a'''a'} \circ f_\gamma : Z_\gamma \to Y_{\beta'}$ существуют

$$\begin{tikzcd}
& X_{\alpha'} \arrow[dl, "p_{\alpha''\alpha'}"'] \arrow[dr, "p_{\alpha'''\alpha'}"] & & & Z_\gamma \arrow[lll, "f_\gamma"'] \\
X_{\alpha''} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p_{\alpha\alpha''}"'] & X_{\varphi(\psi(\alpha))} \arrow[d, "\varphi(\psi(\alpha))"'] & X_{\alpha'''} \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "p"] & X_{\varphi(\beta')} \arrow[d, "\varphi_{\beta'}"'] & \\
X_\alpha & Y_{\psi(\alpha)} \arrow[l, "\psi_\alpha"'] & & Y_{\beta'} \arrow[ll, "q_{\psi(\alpha)\beta'}"'] & \\
& X_{\tilde{\alpha}} \arrow[ul, "p_{\alpha\tilde{\alpha}}"] & Y_{\psi(\tilde{\alpha})} \arrow[l, "\psi_{\tilde{\alpha}}"] & Y_{\beta''} \arrow[l, "q_{\psi(\tilde{\alpha})\beta''}"] \arrow[ull, "q_{\psi(\alpha)\beta''}"'] & Z_{\gamma'} \arrow[l, "g_{\gamma'}"] \arrow[uuu, "r_{\gamma\gamma'}"']
\end{tikzcd}$$

Диагр. 4

такие $\gamma' \in \Gamma$ $\gamma' \geq \gamma$ и гомотопический класс $g_{\gamma'} : Z_{\gamma'} \to Y_{\beta''}$, что

$$q_{\psi(a)\beta'} \circ g_\gamma \circ r_{\gamma\gamma'} = q_{\psi(a)\beta''} \circ g_{\gamma'}. \tag{17}$$

Нетрудно заметить, что гомотопический класс $f_{\gamma'} = \psi_{\tilde{a}} \circ q_{\psi(\tilde{a})\beta''} \circ g_{\gamma'}$ удовлетворяет условию

$$p_{aa'} \circ f_\gamma \circ r_{\gamma\gamma'} = p_{a\tilde{a}} \circ f_{\gamma'}, \tag{18}$$

которое и завершает доказательство теоремы. В самом деле

$$p_{a\tilde{a}} \circ f_{\gamma'} = p_{a\tilde{a}} \circ \psi_{\tilde{a}} \circ q_{\psi(\tilde{a})\beta''} \circ g_{\gamma'} = \psi_a \circ q_{\psi(a)\beta''} \circ g_{\gamma'} =$$

$$= \psi_a \circ q_{\psi(a)\beta} \circ q_\gamma \circ r_{\gamma\gamma'} = \psi_a \circ q_{\psi(a)\beta} \circ \varphi_\beta \circ p_{\varphi(\beta)a''} \circ p_{a''a} \circ f_\gamma \circ r_{\gamma\gamma'} =$$

$$= \psi_a \circ \varphi_{\psi(a)} \circ p_{\varphi(\psi(a))a''} \circ p_{a''a} \circ f_\gamma \circ r_{\gamma\gamma'} = \psi_a \circ \varphi_{\psi(a)} \circ p_{\varphi(\psi(a))a''} \circ p_{a''a} \circ f_\gamma \circ r_{\gamma\gamma'} =$$

$$= p_{aa'} \circ p_{a'a} \circ f_\gamma \circ r_{\gamma\gamma'} = p_{aa} \circ f_\gamma \circ r_{\gamma\gamma'}$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть обратные спектры* $\{X_a, p_{aa'}, A\}$ *и* $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ *изоморфны в pro-категории. Тогда предподвижность обратного спектра* $\{X_a, p_{aa'}, A\}$ *относительно некоторого обратного спектра* $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$ экви-

валентна предподвижности спектра $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ *относительно того же спектра* $\{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$.

В качестве других следствий получаются хорошо известные результаты:

С л е д с т в и е 3. *Если* $shX \leq shY$, *то из подвижности пространства Y следует подвижность пространства X.*

С л е д с т в и е 4. *Если* $shX = shY$, *то подвижность пространства X эквивалентна подвижности пространства Y.*

Кафедра математики — Поступила 11.09.1999

ЛИТЕРАТУРА

[1]. **Borsuk K.** On movable compacta. Fund. Math., 1969, v. 66, N 1, p. 137-146.

[2]. **Mardesic S., Segal J**. Movable compacta and ANR-systems. Bull. Acad. Polon. Sci., 1970, v.18, N 11, p.649-654.

[3]. **Segal J**. Movable shapes. Lect. Notes Math., 1974, N 375, p. 236-241.

[4]. **Olendski J**. On movability and other similar shape properties., Fund. Math., 1975, 88, N 3, p. 179-191.

[5]. Геворкян П. С. Об A-подвижности топологических пространств. (В печати).

Պ. Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՆԱԽԱՇԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆԸ PRO-ԿԱՏԵԳՈՐԻԱՅՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Յոդվածում սահմանվում և ուսումնասիրվում է հակադարձ սպեկտրի նախաշարժունության գաղափարը pro-կատեգորիայում: Կապ է ստեղծվում հակադարձ սպեկտրի նախաշարժունության և տոպոլոգիական տարածության A-շարժունության միջև: Որպես հետևանք ստացվում են շեյպերի տեսությունում հայտնի մի շարք արդյունքներ:

P. S. GEVORGIAN

PREMOVABILITY IN THE PRO-CATEGORY.

S u m m a r y

The notion of the premovability of the inverse spectrum in the pro-category is defined and studied. The connection between movability of the inverse spectrum and A-movability of topological space is established. The some well-known results in the shape theory are established as a corollary.