

Ս. Կ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԵՐԿՐՈՂԻ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ
ԴԱՄԻ ՀԱՄԱՐ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

1. Սպեկտրալ տեսության մեջ ձևափոխության օպերատոր կոչվում է այն առնչությունը, որն իրար է կապում երկու տարրեր դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները: Այդպիսի օպերատորները կարևոր միջոց են հանդիսանում սպեկտրալ տեսության ուղիղ և հակադարձ խնդիրների լուծման համար:

Թող L_0 -ն և L -ը X ֆունկցիոնալ տարածության մեջ որոշված դիֆերենցիալ օպերատորներ են: K գծային անընդհատ օպերատորը կոչվում է L_0 և L զույգի ձևափոխության օպերատոր, եթե

$$1. \quad LK = KL_0$$

2. գոյություն ունի K^{-1} հակադարձ օպերատորը:

Ձևափոխության օպերատորների կարևորությունը կայանում է նրանում, որ $L_0\varphi = \lambda\varphi$ տեսքի հավասարման լուծումը փոխակերպում են $LY = \lambda Y$ տեսքի հավասարման լուծմանը:

Դիտարկենք դիֆերենցիալ օպերատորների

$$L_0 y = -y'' + q_0(x)y,$$

$$Ly = -y'' + [q_0(x) + q(x)]y,$$

զույգը, որտեղ $q_0(x)$ և $q(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[0, +\infty)$ միջակայքում:

Հոդվածը նվիրված է օպերատորների L_0 , L զույգի համար ձևափոխության օպերատորի գոյության ապացուցմանը $q_0(x)$ ֆունկցիաների կոնկրետ դասի համար: Այդ զույգի համար K ձևափոխության օպերատորը փնտրեք հետևյալ տեսքով

$$K\varphi = \varphi(x) + \int_x^{+\infty} K(x, t) \varphi(t) dt \quad (1)$$

Թող X -ը այն $\varphi(x)$ ֆունկցիաների տարածությունն է, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$a) \quad \varphi(x) \in C^2(0, \infty)$$

$$b) \quad \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$$

ֆունկցիաները սահմանափակ են $[0, \infty]$ կիսաուղղի վրա:

Եթե $q_0(x), q(x) \in C^1(0, \infty)$, ապա ձևափոխության օպերատորի սահմանման $LK = KL_0$ պայմանը համարժեք է հետևյալ պայմաններին (տես [1]-ը).

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = q(x)K(x, t) + [q_0(x) - q_0(t)]K(x, t) \quad (2)$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K'(x, t) = 0 \quad (4)$$

Համարելով, որ $q(x) K(x, t) = f(x, t)$ ֆունկցիան հայտնի է, փորձենք (2)-(3)-(4) խնդիրը բերել ինտեգրալ հավասարման:

Մուծենք (2) հավասարման Ռիմանի $R(u, v, x, t)$ ֆունկցիան, այսինքն, ֆունկցիան, որը բավարարում է

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = (q_0(x) - q_0(t)) R \quad (5)$$

հավասարմանը և հավասար է միավորի $x-t=u-v$ և $x+t=u+v$ բնութագրիչների վրա (տես [3]):

Կատարենք փոփոխականների փոխարինում $x = \eta - \xi$, $t = \eta + \xi$, բանաձևերով Այդ դեպքում (2)-(3)-(4) խնդիրը կբերվի հետևյալ խնդրին.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = (q_0(\eta + \xi) - q_0(\eta - \xi)) z + g(\xi, \eta) \quad (6)$$

$$z(0, \eta) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(s) ds \quad (7)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} z(\xi, \eta) = 0, \quad (8)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} Z(\xi, \eta) &= K(\eta - \xi, \eta + \xi) = K(x, t) \\ g(\xi, \eta) &= f(\eta - \xi, \eta + \xi) = f(x, t) \end{aligned}$$

(6) հավասարման Ռիմանի ֆունկցիան կլինի.

$$r(s, \tau, \xi, \eta) = R(\tau - s, \tau + s, \eta - \xi, \eta + \xi):$$

(s, τ) հարթության վրա վերցնենք $M(\xi, \eta)$, $N(\xi, \alpha)$, $P(0, \eta)$, $Q(0, \alpha)$ գագաթներով (D) ուղղանկյունին, որտեղ α -ն η -ից մեծ ցանկացած թիվ է: (5)-(6)-(7) խնդրի նկատմամբ (D) տիրույթում կիրառելով Ռիմանի մեթոդը, կստանանք

$$z(\xi, \eta) = (r, z)|_Q + \int_{PQ} r \frac{\partial z}{\partial \tau} d\tau - \int_{NQ} r \frac{\partial z}{\partial s} ds + \iint_{(D)} r g(s, \tau) ds d\tau \quad (9)$$

(8) պայմանից հետևում է, որ (9) հավասարության աջ մասի առաջին և երրորդ գումարելիները ձգտում են զրոյի, երբ $\alpha \rightarrow +\infty$: Հաշվի առնելով այդ փաստը, (9)-ից ստանում ենք.

$$z(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(\theta, \tau, \xi, \eta) q(\tau) d\tau + \iint_{\substack{0 \leq s \leq \tau \\ \eta \leq \tau \leq \alpha}} r(s, \tau, \xi, \eta) g(s, \tau) ds d\tau \quad (10)$$

Երկրորդ ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում $u = \tau - s$, $v = \tau + s$, որի հետևանքով ինտեգրման $0 \leq s \leq \varepsilon$, $\eta \leq \tau < \infty$ տիրույթը կձևափոխվի $2\varepsilon - u \leq v \leq u + 2\varepsilon$, $v \geq u$ տիրույթին: Վերջինս տրոհենք նրկու մասի՝ $\eta - \varepsilon \leq u \leq \eta$, $2\eta - u \leq v \leq u + 2\varepsilon$ տիրույթի և $\eta \leq u < \infty$, $u + v \leq u + 2\varepsilon$ տիրույթի: Եթե այժմ վերադառնանք x, t փոփոխականներին, ապա K ձևափոխության օպերատորի $K(x, t)$ միջուկի համար կստանանք հետևյալ ինտեգրալ հավասարումը.

$$K(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x-1}{2}}^{\infty} R(u, v, x, t) q(u) du + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+1}{2}} q(u) du \int_{t-x-u}^{t-x+u} K(u, v) R(u, v, x, t) dv + \\ + \frac{1}{2} \int_{\frac{x-1}{2}}^{\infty} q(u) du \int_u^{t-x+u} K(u, v) R(u, v, x, t) dv: \quad (11)$$

Այսպիսով, եթե հայտնի է (5) հավասարման $R(u, v, x, t)$ Ռիմանի ֆունկցիան, ապա լուծելով (11) ինտեգրալ հավասարումը, կարող ենք գտնել (1) ձևափոխության օպերատորի $K(x, t)$ միջուկը: Ընդ որում $q(x)$ ֆունկցիայի վրա պետք է դնել այնպիսի պայման, որ ինտեգրալ հավասարումն ունենա լուծում:

2. Բերենք $q_0(x)$ ֆունկցիաների մի դաս, որոնց համար (5) հավասարման Ռիմանի ֆունկցիան արտահայտվում է բացահայտ տեսքով: Եթե անցնենք ε , η , s , τ փոփոխականներին, ապա (5) հավասարումը կընդունի այսպիսի տեսք.

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \varepsilon \partial \eta} = [q_0(\varepsilon + \eta) - q_0(\eta - \varepsilon)]r \quad (12)$$

բնութագրիչների վրա դրված հետևյալ պայմաններով.

$$r(s, \tau, \varepsilon, \eta) |_{\varepsilon=0} = r(s, \tau, \varepsilon, \eta) |_{\eta=0} = 1: \quad (13)$$

Ենթադրենք (12) հավասարման աջ մասում մասնակցող տարբերությունն այնպիսին է, որ կարելի է կատարել փոփոխականների անջատում

$$q_0(\varepsilon + \eta) - q_0(\eta - \varepsilon) = \varphi(\varepsilon) \cdot \varphi(\eta) \quad (14)$$

որտեղ $\varphi(\varepsilon)$ -ն և $\varphi(\eta)$ -ն անընդհատ ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում դժվար չէ ստուգել, որ

$$r(s, \tau, \varepsilon, \eta) = I_0(\alpha \sqrt{(a(\varepsilon) - a(s)) \cdot (b(\tau) - b(\eta))}) \quad (15)$$

ֆունկցիան բավարարում է (12) հավասարմանը և (13) պայմաններին: Այստեղ $a(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$, $b(\eta) = \int \varphi(\eta)$ իսկ I_0 -ն գոյական կարգի Բեսելի ֆունկցիա է: (15)-ից ստանում ենք, որ

$$R(u, v, x, t) = I_0(\alpha \sqrt{(a(\frac{t-x}{2}) - a(\frac{v-u}{2})) \cdot (b(\frac{u+v}{2}) - b(\frac{x+t}{2}))}): \quad (16)$$

Հետևաբար, (14) պայմանին բավարարող $q_0(x)$ ֆունկցիաների համար (5) հավասարման Ռիմանի ֆունկցիան արտահայտվում է (16) բանաձևով: (14) պայմանին բավարարող ֆունկցիաներից կարելի է նշել, օրինակ e^{ax} , $\sin x$, $\cos x$, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ֆունկցիաները: Այսպես, օրինակ, եթե $q_0(x) = e^{ax}$, ապա

$$q_0(\eta + \varepsilon) - q_0(\eta - \varepsilon) = 2e^{a\eta} \cdot \operatorname{sh} a\varepsilon:$$

3. Դիցուք $xq(x) \in L_2(0, +\infty)$: Եթե Ռիմանի $R(u, v, x, t)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա լուծելով (11) հավասարումը հաջորդական մոտավորությունների մե-

քողով, $K_m(x, t)$ մոտավորությունների համար ստանում ենք [1] և [2] մենագրություններում ստացված գնահատականներին անալոգ գնահատականներ: Հետևաբար, կրկնելով [1]-ում և [2]-ում կատարվող դատողությունները, ստանում ենք, որ (11) հավասարումն ունի լուծում և նրա $K(x, t)$ լուծման, ինչպես նաև K^*x , K^*t ածանցյալների համար իրավացի են [1]-ում և [2]-ում ստացված գնահատականներին անալոգ գնահատականներ:

Դժվար չէ ստուգել, որ (11) հավասարման աջ մասում գրված ինտեգրման տիրույթներում տեղի ունեն $t - x > v - u$, $u + v > t + x$ անհավասարությունները: Քանի որ

$$|I_0(z)| \leq C e^{\frac{1}{\lambda} \lim z}, C = \text{Const} \quad (17)$$

ապա հիշյալ տիրույթներում $|R(u, v, x, t)| \leq C$, եթե միայն $a(\xi)$ և $b(\eta)$ ֆունկցիաները միաժամանակ կամ աճող են կամ միաժամանակ նվազող: Դա տեղի ունի, օրինակ $q_0(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, ($\beta \geq 0$), $q_0(x) = e^{ax}$ դեպքում:

Եթե $a(\xi)$ և $b(\eta)$ ֆունկցիաները սահմանափակ են $[0, +\infty]$ կիսառանցքի վրա, ապա (16) և (17) բանաձևերից հետևում է $R(u, v, x, t)$ ֆունկցիայի սահմանափակությունը: Դա տեղի ունի $q_0(x) = \sin ax$, $q_0(x) = \cos ax$ դեպքում:

Այսպիսով, տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ: Դիցուք $q(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0, +\infty]$ կիսառանցքի վրա, $xq(x) \in L_1(0, +\infty)$, իսկ $q_0(x)$ -ը βe^{ax} , $\sin ax$, $\cos ax$, $x^2 + \beta x + \gamma$ ($\beta \geq 0$) ֆունկցիաներից մեկն է:

Այդ դեպքում գոյություն ունի (1) տեսքի ձևափոխության օպերատոր, որը $L_0y = \lambda y$ հավասարման անեն մի $f(x, \lambda)$, իմ $\lambda > 0$ սահմանափակ լուծումը ձևափոխում է $L_y = \lambda y$ հավասարման $F(x, \lambda)$ լուծման, որը $x \rightarrow +\infty$ դեպքում ունի նույն վարքը, ինչպիսին ունի $f(x, \lambda)$ -ն:

$K(x, t)$, K^*x , K^*t ֆունկցիաների համար իրավացի են [2]-ում ստացված գնահատականներին անալոգ գնահատականներ:

Մաթեմատիկայի ամբիոն

Ստացված է 12. 11. 99 թ.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Б. М. Левитан** - Теория операторов обобщенного сдвига. М., 1973.
2. **В. А. Марченко** - Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Изд. Наукова Думка. 1972.
3. **М. Н. Одавски** - О функции Римана для дифференциального уравнения. Докл. АН СССР, 87, N 3, 1952, 297-340.

С. К. ПЕТРОСЯН

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПЕРАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Резюме

Работа посвящена построению оператора преобразования для пары операторов $L_0y = -y'' + q_0(x)y$, $L_y = -y'' + [q_0(x) + q(x)]y$, для конкретного класса функции $q_0(x)$.

S. K. PETROSIAN

ABOUT EXISTING OF OPERATOR OF TRANSFORMATION FOR ONE CLASS
OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

Summary

The work is devoted of the creating of the transformation operator for a pair of operators
 $L_0 y = -y'' + q_0(x) y$, $Ly = -y'' + [q_0(x) + q(x)] y$,
for the concrete class of functions $q_0(x)$.