

С. М. МАРЯНЯН

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В настоящей работе методом, развитым в работах (1) - (2) строится, полная асимптотика по малому параметру решения смешанной задачи для одного гиперболического уравнения шестого порядка, вырождающегося в гиперболическое.

Пусть $Q = \{(t, x), 0 \leq t < +\infty, 0 \leq x < +\infty\}$ В Q рассматривается следующая смешанная задача:

$$L_\epsilon u = \epsilon^4 \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x) \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{1, 5} \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

где $\epsilon > 0$ - малый параметр, f - заданная гладкая функция.

Для упрощения записи вводим следующие обозначения:

$$A_1 u \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

$$A_0 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$A_\epsilon u \equiv \epsilon^4 A_1 + A_0 \quad (4)$$

Расщепления (4) будем называть первым расщеплением оператора A_ϵ . В дальнейшем нам понадобится другое расщепление оператора вблизи границы $x=0$. Для этого введем локальные координаты $t = t, x = \xi y$. В новых координатах оператор A_ϵ имеет вид

$$A_{\epsilon,0} = \epsilon^2 (M_0 + \epsilon^2 M_1 + \epsilon^4 M_2 + \epsilon^6 M_3) \quad (5)$$

где

$$M_0 \equiv - \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad M_1 \equiv 3 \frac{\partial^6}{\partial t^2 \partial y^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$M_2 \equiv - \frac{3 \partial^6}{\partial t^4 \partial y^2}, \quad M_3 \equiv \frac{\partial^6}{\partial t^6}$$

Представление (5) будем называть вторым расщеплением оператора. Асимптотическое представление решения задачи (1) - (2) - (3) ищется в виде

$$u = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \sum_{j=0}^n \varepsilon^{2+j} v_j + \varepsilon^{n+1} z$$

где функции W_i будут определяться первым итерационным процессом, v_j - функции типа пограничного слоя вблизи границы $x = 0$, определяемые вторым итерационным процессом, $\varepsilon^{n+1} z$ - остаточный член.

Первому расщеплению оператора A_ε соответствует итерационный процесс, если приближенное решение уравнения

$$A_\varepsilon u = f(t, x) \quad (6)$$

будем искать в виде

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots + \varepsilon^n W_n \quad (7)$$

Подставив выражение для функции W из (7) в (6) получим:

$$\varepsilon^4 A_1 (W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n) + A_0 (W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n) = f(t, x)$$

Второму расщеплению оператора A_ε также соответствует итерационный процесс, если приближенное решение уравнения

$$A_{\varepsilon, x0} v = 0 \quad (8)$$

будем искать в виде

$$v = \varepsilon^2 (v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^n v_n) \quad (9)$$

Отметим, что вышеописанные процессы связаны между собой начальными и граничными условиями (2) и (3) соответственно. Для выявления этих связей потребуем, чтобы

$$(W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n)|_{t=0} + \varepsilon^2 (v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^n v_n)|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} (W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n)|_{t=0} + \varepsilon^2 (v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^n v_n)|_{t=0} = 0$$

$$k = 1, 5.$$

$$(W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n)|_{x=0} + \varepsilon^2 (v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^n v_n)|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n)|_{x=0} + \varepsilon^2 (v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^n v_n)|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} (W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n)|_{x=0} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4}{\partial y^2} \varepsilon^2 (v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^n v_n)|_{y=0} = 0$$

В последних равенствах сравнивая члены при одинаковых степенях получим:

$$W_0|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^k W_0}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{1,5} \quad (10)$$

$$W_1|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^k W_1}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{1,5} \quad (11)$$

$$W_i|_{t=0} = v_{i-2}|_{t=0}, \quad \frac{\partial^k W_i}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^k v_{i-2}}{\partial t^k}, \quad k = \overline{1,5} \\ i = \overline{2,n} \quad (12)$$

$$W_0|_{x=0} = 0 \quad (13)$$

$$W_1|_{x=0} = 0 \quad (14)$$

$$W_i|_{x=0} = v_{i-2}|_{x=0}, \quad i = \overline{2,n} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = - \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, \quad i = \overline{0,n} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^4 v_0}{\partial y^4} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^4 v_i}{\partial y^4} \Big|_{y=0} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial^4 v_i}{\partial y^4} \Big|_{y=0} = - \frac{\partial^4 W_{i+2}}{\partial x^4} \Big|_{x=0} = 0, \quad i = \overline{2,n} \quad (18)$$

Таким образом, нашли условия, при которых будем решать уравнения, полученные итерационными процессами.

Определим функцию W_0 . Она будет решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = f(t, x) \quad (19)$$

$$W_0|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (20)$$

$$W_0|_{x=0} = 0 \quad (21)$$

Известно, что если $f(t, x)$ - гладкая функция, то задача (19)-(20)-(21) имеет единственное гладкое решение.

Прежде чем приступить к определению других функций W_i , $i = \overline{1,n}$, изучим некоторые характеристическую функцию W_0 . Из (19) имеем:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} = f(t, x) + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \quad (22)$$

Так, как

$$W_0|_{t=0} = 0, \quad \text{то} \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \Big|_{t=0} = 0$$

Поэтому, если потребовать, что бы $f(t, x)|_{t=0} = 0$, то из (22) получим:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0 \quad (23)$$

Продифференцируем (22) по t , получим:

$$\frac{\partial^3 W_0}{\partial t^3} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^3 W_0}{\partial t \partial x^2}$$

Так, как $\frac{\partial W_0}{\partial t} \big|_{t=0} = 0$ следует, что $\frac{\partial^3 W_0}{\partial t \partial x^2} \big|_{t=0} = 0$

Следовательно, если $\frac{\partial f}{\partial t} \big|_{t=0} = 0$, то $\frac{\partial^3 W_0}{\partial t^3} \big|_{t=0} = 0$

Таким образом, продолжая процесс, получим, что если

$$\frac{\partial^K f}{\partial t^K} \big|_{t=0} = 0, \text{ то } \frac{\partial^{K+2} W_0}{\partial t^{K+2}} \big|_{t=0} = 0 \quad (24)$$

где K - произвольное натуральное число. Если

$$\frac{\partial^K f}{\partial t^K} \big|_{t=0} = 0, \quad K = 0, 3$$

то функция W_0 удовлетворяет всем условиям (19).

Зная функцию W_0 , можно определить функцию V_0 . Функция есть решение типа пограничного слоя следующей задачи:

$$\frac{\partial^6 V_0}{\partial y^6} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} \big|_{y=0} = - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \big|_{x=0} = \varphi_0(t), \quad \frac{\partial^4 V_0}{\partial y^4} \big|_{y=0} = 0 \quad (26) - (27)$$

Очевидно, что уравнение (24) есть обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Напишем его характеристическое уравнение:

$$\lambda^6 + \lambda^2 = 0$$

или

$$\lambda^4 + 1 = 0 \quad (28)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что уравнение (28) имеет два решения λ_1 и λ_2 с строго отрицательными действительными частями, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$.

Если учесть этот факт, то решение типа пограничного слоя задачи (24) - (26) - (27) будет следующее:

$$V_0 = C_{0,0} I^{\lambda_1 y} + C_{0,1} I^{\lambda_2 y} \quad (29)$$

где $C_{0,0}$ и $C_{0,1}$ определяются из условия (26) - (27). Определив их, находим, что

$$V_0 = \varphi_0(t) \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \left[\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} I^{\lambda_1 y} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} I^{\lambda_2 y} \right], \quad (\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0)$$

Теперь определим функцию W_1 . Она является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} - \frac{\partial W_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^k W_1}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, \quad W_1 \Big|_{x=0} = 0$$

Очевидно $W_1 \equiv 0$.

Функция W_2 есть решение следующей смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} = 0, \quad W_2 \Big|_{x=0} = -V_0 \Big|_{y=0} \quad (30) - (31)$$

$$\frac{\partial^k W_2}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = - \frac{\partial^k V_0}{\partial t^k} \Big|_{t=0}, \quad k = 0, 1 \quad (32)$$

Учитывая, что функция $V_0(t, y)$ - есть типа пограничного слоя, т. е. при $y \rightarrow +\infty$ экспоненциально убывает, можно утверждать, что задача (30) - (31) - (32) имеет единственное гладкое решение. В самом деле вводя новую функцию W_2 следующим образом

$$\overline{W}_2 = W_2 + V_0$$

для функции $\overline{W}_2$ получаем точно такую же задачу, как для W_0 , существование решения которого было доказано выше.

Что касается о выполнении для функций W_2 начальных условий

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 W_2}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^4 W_2}{\partial t^4} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^5 W_2}{\partial t^5} \Big|_{t=0} = 0,$$

то это следует из условий (22), т. е., если потребовать, чтобы

$$\frac{\partial^k f}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 5$$

то функция W_2 так же будет удовлетворять условиям:

$$\frac{\partial^k W_2}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 5$$

Функция V_1 - есть решение типа пограничного слоя следующей задачи:

$$M_0 V_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = - \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial^4 V_1}{\partial y^4} \Big|_{y=0} = 0,$$

Так как функция $W_1 \equiv 0$, то решение последней задачи V_1 так же будет равняться нулю.

Зная функцию $W_2 \equiv 0$, определим функцию V_1 . Мы знаем, что функция V_2 является решением типа пограничного слоя вблизи границы $x=0$ следующей задачи

$$\frac{\partial^6 V_2}{\partial y^6} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^4} = - \frac{\partial^6 V_0}{\partial t^2 \partial y^4} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = - \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \quad (34)$$

$$\frac{\partial^4 V_2}{\partial y^4} \Big|_{y=0} = - \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} \Big|_{x=0} \quad (35)$$

Выше было доказано, что функция V_0 - есть типа пограничного слоя вблизи границы $x=0$. Поэтому правая часть уравнения так же будет функцией типа пограничного слоя вблизи границы $x=0$. (Это следует из явного выражения правой части (33)).

Решение типа пограничного слоя задачи (33) - (34) - (35) можно найти в виде $V_2 = \bar{V}_2 + \bar{\bar{V}}_2$, где $\bar{V}_2$ - некоторое частичное решение неоднородного уравнения (33); $\bar{\bar{V}}_2$ - решение соответствующего однородного уравнения (33). Мы отметили, что правая часть уравнения (33) является функцией типа пограничного слоя вблизи границы $x=0$. Учитывая этот факт, методом подбора коэффициентов находим решение типа пограничного слоя $\bar{V}_2$ уравнения (33). Далее $\bar{\bar{V}}_2$ определяется как решение функции типа пограничного слоя следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 \bar{\bar{V}}_2}{\partial y^6} + \frac{\partial^4 \bar{\bar{V}}_2}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 \bar{\bar{V}}_2}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^4 \bar{\bar{V}}_2}{\partial y^4} \Big|_{y=0} &= - \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0} - \frac{\partial^2 \bar{V}_2}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \\ \frac{\partial^2 \bar{\bar{V}}_2}{\partial y^2} \Big|_{y=0} &= - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \Big|_{x=0} - \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \end{aligned}$$

Выше было доказано, что последняя задача имеет решение типа пограничного слоя вблизи границы $x=0$, следовательно функция $V_2 = \bar{V}_2 + \bar{\bar{V}}_2$, также будет функцией типа пограничного слоя вблизи границы $x=0$.

Продолжая этот процесс, определяем все члены разложения (9).

Таким образом для решения задачи (1) - (2) - (3) получим следующее асимптотическое представление:

$$u = \sum_{i=0}^n \epsilon^i W_i + \sum_{j=0}^n \epsilon^{2+j} V_j + \epsilon^{n+1} z \quad (36)$$

Теперь оценим остаточный член.

Из (49) имеем

$$\epsilon^{n+1} z = u - \sum_{i=0}^n \epsilon^i W_i - \sum_{j=0}^n \epsilon^{2+j} V_j$$

Учитывая уравнения, полученные при итерационных процессах, из последнего равенства, имеем

$$A \epsilon z = h(t, x, \epsilon) \quad (37)$$

где

$$h(t, x, \epsilon) = -A_1 W_{n-3} + \epsilon A_1 W_{n-2} + \epsilon^2 A_1 W_{n-1} + \epsilon^3 A_1 W_n - \epsilon (M_1 V_n + M_2 V_{n-2} + M_3 V_{n-4}) + \epsilon^{n+3} (M_2 V_n + M_3 V_{n-2}) + \epsilon^{n+5} M_3 V_n.$$

Из граничных условий (10) - (18), имеем:

$$\frac{\partial^k z}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = \overline{0,5} \quad (38)$$

$$\left. \frac{\partial^k z}{\partial x^k} \right|_{x=0} = \psi_k(t), \quad k = 0, 5 \quad (39)$$

где $\varphi_k(x)$, $\psi_k(t)$ суть известные функции, среди которых некоторые могут быть нулями.

Известным преобразованием, задачу (37) - (38) - (39) можно привести к следующей задаче

$$A_\epsilon z_1 = h_1(t, x, \epsilon) \quad (40)$$

$$\left. \frac{\partial^k z_1}{\partial t^k} \right|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0,5} \quad (41)$$

$$\left. \frac{\partial^r z_1}{\partial x^r} \right|_{x=0} = 0, \quad r = 1, 2, 4, \quad (42)$$

где $h_1(t, x, \epsilon)$ - известная функция.

ЛЕММА. Для решения задачи (40)-(41)-(42) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \epsilon^4 \gamma \int_0^\infty \int_0^\infty I^{-2\gamma t} \left[\left| \frac{\partial^4 z_1}{\partial t^4} \right|^2 + \left| \frac{\partial^4 z_1}{\partial t^2 \partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^4 z_1}{\partial x^4} \right|^2 \right] dx dt + \int_0^\infty \int_0^\infty I^{-2\gamma t} \times \\ \times \left[\left| \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \right|^2 \right] dx dt \leq c \int_0^\infty \int_0^\infty I^{-2\gamma t} |h_1| dx dt, \end{aligned} \quad (43)$$

где c - постоянное, не зависящее от ξ .

Доказательство. Обе части уравнения умножим на

$$I^{-2\gamma t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \right)$$

и полученное выражение проинтегрируем по рассматриваемой области:

$$\begin{aligned} \epsilon^4 \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\partial^6 z_1}{\partial t^6} - 3 \frac{\partial^6 z_1}{\partial t^4 \partial x^2} + 3 \frac{\partial^6 z_1}{\partial t^2 \partial x^4} - \frac{\partial^6 z_1}{\partial x^6} \right) \left(\frac{\partial^4 z_1}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 z_1}{\partial x^4} \right) I^{-2\gamma t} dx dt + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \right) I^{-2\gamma t} dx dt = \int_0^\infty \int_0^\infty h_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \right) I^{-2\gamma t} dx dt. \end{aligned} \quad (44)$$

В равенстве (44) преобразуем каждое слагаемое. Сначала преобразуем первое слагаемое в левой части:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^6 z_1}{\partial t^6} \cdot \frac{\partial^4 z_1}{\partial t^4} I^{-2\gamma t} dt dx = \gamma \int_0^\infty \left(\frac{\partial z_1}{\partial t^4} \right) dx.$$

При получении последнего равенства применили метод интегрирования по частям с учетом начальных условий.

Точно также интегрируя остальные слагаемые по частям и учитывая начальные и граничные условия, известным методом преобразуя правую часть (44) получаем оценку (43).

Подытоживая вышесказанное, можно сформулировать следующую

теорему:

ТЕОРЕМА: Если $f(t, x)$ - непрерывно дифференцируема до $n+4$ -го порядка, причем сама функция $f(t, x)$ и все производные до $n+4$ порядка включительно при $t=0$ равняются нулю, то для решения задачи (1)-(2)-(3) имеет место асимптотическое представление (36), где функции W_i определяются первым итерационным процессом, V_j - суть функции W_i типа пограничного слоя и определяются вторым итерационным процессом. Для остаточного члена $\epsilon^{n+1}z$ справедлива оценка (43).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. УМН 12:5 (77) 1957, 3-12.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. УМН 15:3 (93) 1960, 3-80.
3. Марянян С. М., Асимптотика решения смешанной задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка с малым параметром, Делон, ВИНТИ, 1985, N 6694-85 Дел.

Ս. Մ. ՄԱՐԻԱՆՅԱՆ

ՓՈՔՐ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱՅՈՎԱԾ ՎԵՑԵՐՈՐՈՂ ԿԱՐԳԻ ՀԻՊԵՐԲՈԼԻԿԱՆ ՏԻՊԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ
ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒՇՄԱՆ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում կառուցված է փոքր պարամետրից կախված վեցերորդ կարգի հիպերբոլական տիպի հավասարման խառը խնդրի լուծման լրիվ ասիմպտոտիկան:

S. M. MARYANYAN

ON ASYMPTOTICS OF SOLVING MIXED PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION
OF SIXTH ORDER WITH LITTLE PARAMETER.

Summary

The full asymptotics for the solution of mixed problem for hyperbolic equation of sixth order with little parameter being built in this work.