

ԽԱՐՈՎՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРМЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. Х. АБОВЯНА

Հումանիտար գիտություններ №1-2 (37-38) 2020 Гуманитарные науки

ԳԻՏԱՄԵԹՈՂԱԿԱՆ

ՄԱԿԵՐԵՄՆԵՐԻ ԵՎ ԾԱՎԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ
ՄԻՄՊՍՈՆԻ ԲԱՆԱԶԵՎԻ ԿԻՐԱՌՄԱՍԲ
ՂՈՒԼՂԱԶԱՐՅԱՆ Գ.Ռ., ՂՈՒԼՂԱԶԱՐՅԱՆ Լ.Գ., ԽԱՉԱՆՅԱՆ Ա.Ա.

E-mail: ghulgr@yahoo.com; lusina@mail.ru ; alvard.khachanyan@mail.ru

Խ. Աբովյանի անվան ՀՊՄՀ, 0010, Երևան, Տիգրան Մեծի 17

Երևանի Կ. Դեմիրճյանի անվան թիվ 139 դպրոց

Հոդվածում ներկայացված են որոշ հարթ պատկերների մակերեսների և մարմինների ծավալները՝ որոշյալ ինտեգրալի և Միմպսոնի բանաձևի կիրառմամբ: Ցույց է տրված Միմպսոնի բանաձևի գործնական կիրառությունը:

Հիմնաբառեր. մակերես, ծավալ, Միմպսոնի բանաձև, ինտեգրալ:

Ներկայացված է խմբագրություն 13.07.2019 թ.

Ներածություն: Պատկերների մակերեսների և մարմինների ծավալների գաղափարների սահմանումը, ինչպես նաև նրանց հաշվելը սերտորեն կապված են ինտեգրալային գումարների սահմանի գաղափարի և այդ սահմանը հաշվելու եղանակների հետ: Դեռևս հույն մաթեմատիկոս և մեխանիկոս Արքիմեդը (287-212 մ.թ.ա.) որպեսզի սահմանի և որոշի պատկերի մակերեսը (մարմնի ծավալը) օգտագործել է այնպիսի գումարներ, որոնց ժամանակակից լեզվով անվանում են ինտեգրալային գումարներ [1, էջ 117]:

Հաշվի առնելով այն փաստը, որ ավագ դպրոցի երկրաչափության և անալիզի դասընթացներում, պատկերների մակերեսների և ծավալների հաշվման համար չկա ընդհանուր մոտեցում, ուստի աշակերտներին թյուրիմացության մեջ չցցելու համար, նպատակահարմար ենք համարում այդ նպատակով օգտագործել որոշյալ ինտեգրալի գաղափարը, որպես ինտեգրալային գումարների սահման:

Քանի որ ոչ բացասական անընդհատ ֆունկցիային համապատասխանող որոշյալ ինտեգրալը երկրաչափորեն մեկնաբանվում է որոշակի պատկերի (կորագիծ սեղանի) մակերես կամ մարմնի ծավալ, ուստի կարելի է պատկերի մակերեսը կամ մարմնի ծավալը հաշվել համապատասխան որոշյալ ինտեգրալի միջոցով: Հաճախ հանդիպող պատկերների մակերեսները և մարմինների ծավալները կարելի է հաշվել ավելի պարզ բանաձևով՝ Միմպսոնի բանաձևով, որը նույնպես ստացվում է որոշյալ ինտեգրալի կիրառմամբ [2, էջ 180; 3, էջ 382]:

Որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունը հարթ պատկերների մակերեսները հաշվելիս:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում: $[a, b]$ հատվածը բաժանենք

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (1)$$

կետերով n հատ հավասար կամ անհավասար մասերի: $T = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ թվերի բազմությանը, որի տարրերը բավարարում են (1) անհավասարությանը, անվանում են $[a, b]$ հատվածի տրոհում: Յուրաքանչյուր $[x_{k-1}, x_k]$ մասնակի հատվածում վերցնենք կամայական ξ_k ($k=1, 2, \dots, n$) կետ: Նշանակենք՝ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots, n$):

Դիցուք $\lambda = \max_{k=1, 2, \dots, n} \{\Delta x_k\}$: λ -ին անվանում են T տրոհման տրամագիծ: Հետևյալ տեսքի գումարին՝

$$S = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \quad (2)$$

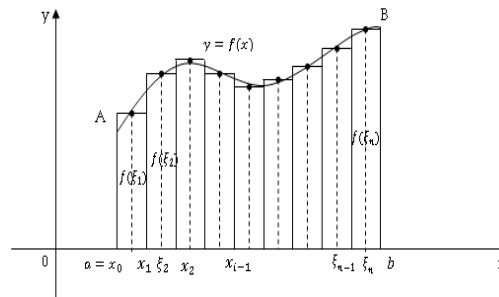
անվանում են $[a, b]$ հատվածում $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումար: Այսպիսով (2) ինտեգրալային գումարը ցանկացած $n \in N$ թվի դեպքում կախված է $[a, b]$ հատվածի T տրոհման $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ կետերից և $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ հատվածներում կամայապես ընտրված ξ_i , $i = \overline{1, n}$ կետերից: Հաշվի առնելով «հաջորդականության լեզվով» որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը, կարելի է պնդել հետևյալ թեորեմի իրավացիությունը [3, էջ 334; 5, էջ 561]:

Թեորեմ 1: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, ապա $[a, b]$ հատվածի ցանկացած

$T_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{k=k_{T_n}}, n=1, 2, \dots$ տրոհումների հաջորդականության համար, որի $\lambda_n = \max_{k=1, 2, \dots, k_{T_n}} \{\Delta x_k^{(n)}\} = \max_{k=1, 2, \dots, k_{T_n}} \{x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}\} \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$,

$$S_n = f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1^{(n)} + f(\xi_2^{(n)})\Delta x_2^{(n)} + \dots + f(\xi_{k_{T_n}}^{(n)})\Delta x_{k_{T_n}}^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_{T_n}} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}, \quad n=1, 2, \dots$$

ինտեգրալային գումարների հաջորդականությունն ունի սահման, որը կախված չէ T_n տրոհումների $x_k^{(n)}, k=1, 2, \dots, k_{T_n}$ կետերից և $\xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}], k=1, 2, \dots, k_{T_n}$ կետերից:



Այն թիվը, որը հավասար է այդ սահմանին, կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ a -ից մինչև b սահմաններում և նշանակում են՝ $\int_a^b f(x)dx$: a -ն և b -ն համապատասխանաբար կոչվում են ինտեգրման ստորին և վերին սահմաններ, իսկ $f(x)$ -ը ընդհանուր ֆունկցիա: Այսպիսով, ըստ սահմանման՝

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k_{T_n}} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)} : \quad (3)$$

Մասնավորապես, (3) հավասարության փոխարեն կարող ենք գրել՝

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k_{T_n}} f(x_{k-1}^{(n)})\Delta x_k^{(n)} : \quad (4)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k_{T_n}} f(x_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)} : \quad (5)$$

Երբ $[a, b]$ հատվածը բաժանված է n հավասար մասերի, ապա $\lambda_n = (b-a)/n$, հետևաբար կարող ենք գրել՝

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right): \quad (6)$$

Այն դեպքում, երբ $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, ապա (2)-ի S ինտեգրալային գումարը կարելի է մեկնաբանել որպես $aABba$ կորագիծ սեղանին համապատասխանող աստիճանաձև պատկերի մակերեսը (նկ.1): Քանի որ կորագիծ սեղանը չափելի է ըստ Ժորդանի (քառակուսելի է), հետևաբար, երբ $\lambda_n \rightarrow 0$, ապա այդ աստիճանաձև պատկերների մակերեսների $\{S_n\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է $aABba$ կորագիծ սեղանի մակերեսին [4, էջ 16; 5, էջ 638]: Մյուս կողմից $\{S_n\}$ հաջորդականության սահմանը, երբ $\lambda_n \rightarrow 0$

իրենից ներկայացնում է $\int_a^b f(x)dx$ ինտեգրալը: Հետևաբար, $aABba$ կորագիծ սեղանի մակերեսը հավասար է

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad (7)$$

որոշյալ ինտեգրալին: Այսպիսով, եթե $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, ապա $aABba$ կորագիծ սեղանի մակերեսը կարելի է հաշվել (3)- (7) բանաձևերով:

Միմպսոնի բանաձևը: Իրավացի է հետևյալ պնդումը. դիցուք՝ $F(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, որտեղ A -ն, B -ն, C -ն և D -ն կամայական հաստատուններ են: Այդ դեպքում իրավացի է հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[F(a) + 4F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(b) \right]: \quad (8)$$

(8) բանաձևին անվանում են Միմպսոնի բանաձև:

Ապացուցելու համար, նախ դիտարկենք $a=0$ և $b=h$ դեպքը: $[0, h]$ հատվածը տրոհենք n հավասար մասերի: Այդ դեպքում համաձայն (6) բանաձևի, կունենանք՝

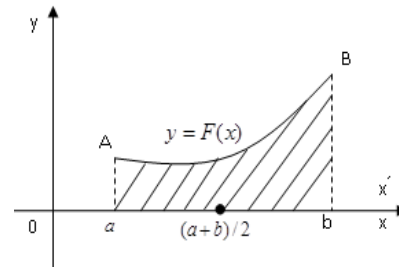
$$\begin{aligned} S &= \int_0^h F(x)dx = h \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[A \left(\frac{kh}{n} \right)^3 + B \left(\frac{kh}{n} \right)^2 + C \left(\frac{kh}{n} \right) + D \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Ah^4}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{Bh^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{Ch^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k + hD \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(Ah^4 \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + Bh^3 \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + Ch^2 \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + hD \right) = \\ &= \frac{Ah^4}{4} + B \frac{h^3}{3} + \frac{Ch^2}{2} + Dh = \frac{h}{6} \left(\frac{3}{2} Ah^3 + 2Bh^2 + 3Ch + 6D \right): \end{aligned}$$

Մյուս կողմից՝

$$F(0) = D, \quad F\left(\frac{h}{2}\right) = A \frac{h^3}{8} + B \frac{h^2}{4} + C \frac{h}{2} + D,$$

$$F(h) = Ah^3 + Bh^2 + Ch + D,$$

$$\text{և } F(0) + 4F\left(\frac{h}{2}\right) + F(h) = \frac{3}{2} Ah^3 + 2Bh^2 + 3Ch + 6D:$$



Հետևաբար, նշված դեպքի համար, իրավացի է (8) բանաձևը: Ինչ վերաբերվում է ինտեգրման սահմանների ընդհանուր դեպքին, ապա այն բերվում է դիտարկված դեպքին, եթե կոորդինատների

սկզբնակետը տեղափոխվի ox առանցքի $x=a$ կետը (նկ.2), որը համարժեք է նրան, որ $\int_a^b F(x)dx$ ինտեգրալում կատարվի $x=x'+a$ փոփոխականի փոխարինում, հաշվի առնելով, որ $h=b-a$ և $F(x'+a)$ ֆունկցիան ևս երրորդ աստիճանի բազմանդամ է: Ունենք՝

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)dx &= \int_0^h F(x'+a)dx' = \frac{h}{6} \left[F(0+a) + 4F\left(\frac{h}{2}+a\right) + F(h+a) \right] = \\ &= \frac{b-a}{6} \left[F(a) + 4F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(b) \right]:\end{aligned}$$

Այսպիսով, եթե $F(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, ապա $aABba$ կորագիծ սեղանի S մակերեսը կարելի է հաշվել (8) բանաձևերով՝

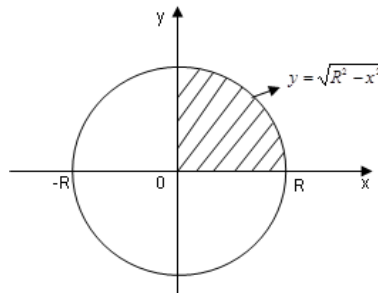
$$S = \frac{b-a}{6} \left[F(a) + 4F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(b) \right]: \quad (9)$$

Դիտողություն: Միմաստի բանաձևի արտաձևն ընթացքում ցուցադրվեց հետևյալ բանաձևերի արտաձևում՝ $\int_0^h 1 \cdot dx = h, \int_0^h x \cdot dx = \frac{h^2}{2}, \int_0^h x^2 \cdot dx = \frac{h^3}{3}, \int_0^h x^3 \cdot dx = \frac{h^4}{4}$:

Ինչպես տեսնում ենք, որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու ուղղակի եղանակը, այսինքն՝ որպես ինտեգրալային գումարների սահման հաշվումը, նույնիսկ հասարակ դեպքերում պահանջում է գործադրել զգալի ճիգեր, ուստի այդ եղանակը սակավ է օգտագործվում: Ամենից ավելի գործնական է հանդիսանում որոշյալ ինտեգրալների հաշման համար Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի (ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևի) կիրառումը [3, էջ 348; 5, էջ 615; 7, էջ 391; 8, էջ 123]:

Թեորեմ 2 (Նյուտոն-Լայբնիցի): Դիցուք $G(x)$ և $f(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են $[a, b]$ հատվածում և $G(x)$ -ը $f(x)$ -ի նախնական ֆունկցիա է (a, b) ինտերվալում: Այդ դեպքում իրավացի է հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a): \quad (10)$$



Այսպիսով, որոշյալ ինտեգրալի արժեքն արտահայտվում է ցանկացած նախնական ֆունկցիայի $x=b$ կետում և $x=a$ կետում ստացված երկու արժեքների տարբերությամբ: Ընդունված է կատարել հետևյալ նշանակումը՝ $G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$ և Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը կարելի է գրել այս տեսքով՝

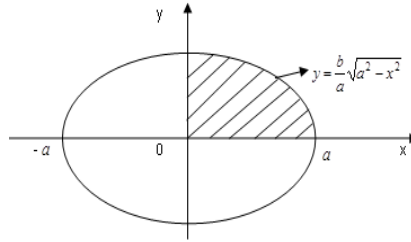
$$\int_a^b f(x)dx = G(x) \Big|_a^b:$$

Օրինակ 1: Հաշվել R շառավղով շրջանի մակերեսը:

Լուծում: Վերցնենք կորորդինատների սկզբնակետը շրջանի կենտրոնում: Այդ դեպքում շրջանագծի հավասարումը կլինի՝ $x^2 + y^2 = R^2$:

Նշանակենք շրջանի մակերեսը S -ով: Ստվարագծված մասի մակերեսի համար, ունենք՝

$$\frac{S}{4} = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left(\frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi R^2}{4}: \text{ Հետևաբար՝ } S = \pi R^2:$$



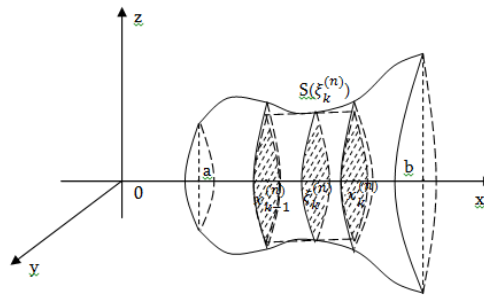
Օրինակ 2: Հաշվել a և b ($a > b$) կիսաառանցքներ ունեցող էլիպսով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում: Վերցնենք կոորդինատների սկզբնակետը էլիպսի կենտրոնում: Այդ դեպքում էլիպսի հավասարումը կլինի՝ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

Նշանակենք էլիպսով սահմանափակված պատկերի մակերեսը S -ով: Սովաբար գծված մասի մակերեսը կլինի՝ $\frac{S}{4} = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi ab}{4}$:

Հետևաբար՝ $S = \pi ab$:

Ծավալի հաշվումը որոշյալ ինտեգրալի և Միսյատնի բանաձևի կիրառմամբ:



Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում ապացուցված է հետևյալ պնդումը. դիցուք H բարձրություն ունեցող ուղիղ գլանը, որի հիմքը հարթ քառակուսու էլիպս է և ունի S մակերես, ապա այն ունի ծավալ, որը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին՝ $V = SH$ [7, էջ 459; 8, էջ 205]:

Դիցուք այն երկրաչափական մարմինը, որի ծավալը պահանջվում է գտնել, սահմանափակված է մի անընդհատ կտոր-առ-կտոր ողորկ կոր մակերևույթով և երկու հարթություններով, որոնք ուղղահայաց են մի ուղղի, որը կարելի է ընդունել իբրև կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգի առանցքներից մեկը, օրինակ, իբրև x -րի առանցք, իսկ նրա վրա կամայապես վերցված 0 կետը՝ իբրև կոորդինատների սկզբնակետ: Ենթադրենք, որ եզրային զուգահեռ հարթությունները x -րի առանցքը հատում են $x = a$ և $x = b$ կետերում: Հայտնի է որ այդպիսի մարմինները չափելի են ըստ Ժորդանի (խորանարդելի են), հետևապես ունեն ծավալ [4, էջ 20; 6, էջ 301]:

Ընդունենք, որ մարմինն այնպիսին է, որ ցանկացած $x \in [a, b]$ արցքիսն ունեցող կետով անցնող և ox առանցքին ուղղահայաց հարթությունով հատելուց ստացված հատույթը քառակուսու է և նրա $S(x)$ մակերեսը $[a, b]$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիա է x -ից:

Դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի այնպիսի $T_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{k=k_{T_n}}$, $n=1, 2, \dots$ տրոհումների հաջորդականություն, որ $\lambda_n = \max_{k=1, 2, \dots, k_{T_n}} \{\Delta x_k^{(n)}\} \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$: Յուրաքանչյուր T_n տրոհման մեջ $x_k^{(n)}$, $k=1, 2, \dots, k_{T_n}$ բաժանման

կետերով տարած $x = x_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots, k_{T_n}$ հարթություններով ամբողջ մարմինը վերլուծենք շերտերի: Դիտարկենք k -րդ շերտը, որը գտնվում է $x = x_{k-1}^{(n)}$ և $x = x_k^{(n)}$ հարթությունների միջև: Վերցնենք կամայական $\xi_k^{(n)}$ կետ $[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$ հատվածում և կազմենք հետևյալ ինտեգրալային գումարների հաջորդականությունը՝

$$V_n = S(\xi_1^{(n)})\Delta x_1^{(n)} + S(\xi_2^{(n)})\Delta x_2^{(n)} + \dots + S(\xi_{k_{T_n}}^{(n)})\Delta x_{k_{T_n}}^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_{T_n}} S(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, (11)$$

որտեղ $\Delta x_k^{(n)} = x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}$ -ը k -րդ շերտի հաստությունն է: (12) գումարներից յուրաքանչյուրը, սկսած n -ի դեպքում, հանդիսանում է T_n տրոհման համար ստացված զևաններից կազմված աստիճանաձև մարմնի ծավալը:

Քանի որ դիտարկվող մարմինը խորանարդի է, հետևաբար մի կողմից (11) հաջորդականությունն ունի սահման և այդ սահմանը հավասար է այդ մարմնի ծավալին, մյուս կողմից այդ սահմանը հանդիսանում է $S(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը a -ից մինչև b սահմաններով՝

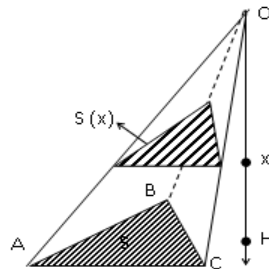
$$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k_{T_n}} S(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)} = \int_a^b S(x)dx: \quad (12)$$

Հետևապես, դիտարկվող մարմնի V ծավալը հավասար է (12) ինտեգրալի արժեքին՝

$$V = \int_a^b S(x)dx: \quad (13)$$

Նկատենք, որ a և b կետերում տարած հատույթները կամ նրանցից մեկը կարող են վերածվել կետի: Եթե (13) բանաձևում $S(x)$ հատույթի մակերեսը, x -ի նկատմամբ, մինչև երրորդ աստիճանի բազմանդամ է, ապա այդպիսի մարմնի V ծավալը կարելի է հաշվել նաև Սիմպսոնի բանաձևով՝

$$V = \frac{b-a}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right]: \quad (14)$$



Նկատենք, որ դպրոցական դասընթացում սովորաբար դիտարկվող մարմինների ծավալները կարելի է հաշվել (13)-(14) բանաձևերով:

Բուրգի ծավալը: Դիցուք բուրգի հիմքի մակերեսը S է, բարձրությունը H , իսկ գագաթից հիմքին զուգահեռ և x հեռավորության հատույթի մակերեսը՝ $S(x)$:

Հայտնի է, որ $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$ կամ $S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S$: Հետևաբար, բուրգի V ծավալը կարելի է հաշվել որոշյալ ինտեգրալով՝

$$V = \int_0^H S(x)dx = \int_0^H \frac{x^2}{H^2} S dx = \frac{S}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} SH: \quad (15)$$

Քանի որ $S(x)$ -ը երկրորդ աստիճանի բազմանդամ է x նկատմամբ, հետևաբար, բուրգի ծավալը կարելի է հաշվել Սիմպսոնի բանաձևով: Ունենք՝ $S(0) = 0$, $S\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{1}{4} S$, $S(H) = S$: Հետևաբար՝

$$V = \frac{H}{6} \left[S(0) + 4S\left(\frac{H}{2}\right) + S(h) \right] = \frac{H}{6} \cdot 2 \cdot S = \frac{1}{3} SH :$$

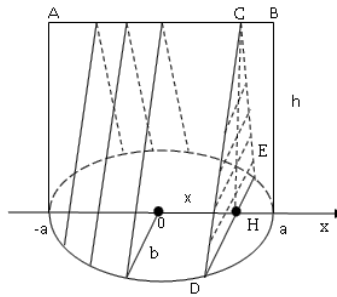
Հատած բուրգի ծավալը: Դիցուք հատած բուրգի ստորին հիմքի մակերեսը S է, վերին հիմքի մակերեսը՝ S^* , իսկ բարձրությունը h : Հայտնի է, որ հատած բուրգի V ծավալը որոշվում է

$$V = \frac{h}{3} (S + \sqrt{SS^*} + S^*) \quad (16)$$

բանաձևով: Նկատենք, որ (16) բանաձևը կարելի է ստանալ Սիմպսոնի բանաձևի կիրառմամբ: Այս դեպքում, բավական է հաշվի առնել, որ միջին հատույթի S^* մակերեսն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$S^* = \left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{S}}{2} \right)^2 : \text{Հետևաբար՝}$$

$$V = \frac{h}{6} (s + 4S^* + S) = \frac{h}{6} \left(s + 4 \left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{S}}{2} \right)^2 + S \right) = \frac{h}{3} (s + \sqrt{sS} + S):$$



Էլիպտական կոնակերպի ծավալը: Դիցուք տված է a և b կիսաառանցքներ ունեցող Էլիպտով սահմանափակված տիրույթ և $2a$ երկարության AB հատված, որը զուգահեռ է Էլիպսի հարթությանը, գտնվում է նրանից h հեռավորության վրա և այնպիսի դիրք ունի, որ պրոեկցիան Էլիպսի հարթության վրա Էլիպսի $2a$ երկարություն ունեցող առանցքն է: AB հատվածի կետերը AB ուղղին ուղղահայաց ուղիղներով միացնենք Էլիպսի կետերի հետ: Արդյունքում ստացվում է մի սեպաձև մարմին, որին անվանում են Էլիպտական կոնակերպ (Էլիպտական կոնոյիդ): Էլիպսի կենտրոնը ընդունենք, որպես կոորդինատների սկզբնակետ, իսկ x -երի առանցքը տանենք Էլիպսի այն առանցքով, որն AB հատվածի պրոեկցիան է (նկ.7):

Այդ դեպքում ox առանցքին ուղղահայաց հատույթը կլինի DCE հավասարասրուն եռանկյունը, որի բարձրությունը h է, իսկ հիմքը՝ $DE = 2DH = \frac{2a}{b} \sqrt{a^2 - x^2}$: Հետևաբար՝ $S(x) = h \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$: Ուրեմն՝

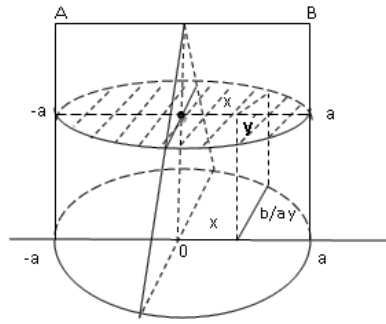
$$\begin{aligned} V &= 2h \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &= 2h \frac{b}{a} \left(\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_0^a = 2h \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{2} h : \end{aligned}$$

Հետևաբար, Էլիպտական կոնոյիդի ծավալի հաշվման բանաձևն է՝

$$V = \pi abh / 2 \quad (17)$$

բ) AB ուղղից z հեռավորությամբ տանենք Էլիպսի հարթությանը զուգահեռ հատույթ: Այդ դեպքում հատույթում կառաջանա որոշ Էլիպտով սահմանափակված տիրույթ: Իրոք, հատույթում առաջացած Էլիպսը ստացվում է a շառավղով շրջանագծից $x' = x$ և $y' = \frac{zb}{ha} y$ ձևափոխության միջոցով: Էլիպսի

կիսաառանցքներից մեկը կլինի a -ն, իսկ մյուսը նշանակենք b_0 -ով: Հեշտ է համոզվել, որ $b_0 = \frac{b}{h} z$:



Հետևաբար՝ z հեռավորության վրա գտնվող հատույթի մակերեսը հավասար է՝ $S(z) = \pi b_0 a = \pi \frac{b}{h} x a = \frac{\pi a b}{h} z$: Քանի որ $S(z)$ -ը z -ի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամ է, հետևաբար կարելի է կիրառել Սինպսոնի բանաձևը: Ունենք՝ $S(0) = 0$, $S(h/2) = \pi b a / 2$, $S(h) = \pi b a$: Հետևաբար՝

$$V = \frac{h}{6} \left[S(0) + 4S\left(\frac{h}{2}\right) + S(h) \right] = \frac{h}{6} \left[4 \cdot \frac{\pi a b}{2} + \pi a b \right] = \frac{h}{6} \cdot 3\pi a b = \frac{\pi a b}{2} h :$$

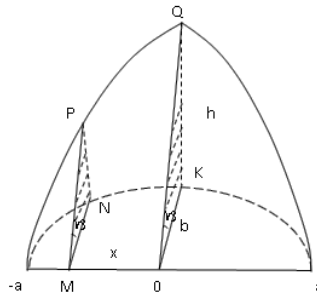
Մասնավորապես, երբ $a = b = r$, ապա կստանանք շրջանային կոնակերպի ծավալը՝ $V = \pi r^2 h / 2$:

Էլիպտական գլանային կճղակի ծավալը: Դիտարկենք երկրաչափական մարմին, որն առաջանում է հիմքում a և b կիսաառանցքներ ունեցող էլիպտական գլանից հիմքի $2a$ երկարություն ունեցող առանցքով անցնող և հիմքի հարթության հետ α անկյուն կազմող հարթությամբ հատելուց :

$$\text{ա) } MN = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad PN = MN \cdot \tan \alpha = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \tan \alpha,$$

$$P(x) = \frac{1}{2} MN \cdot PN = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \tan \alpha :$$

$$\begin{aligned} \text{Հետևաբար՝ } V &= 2 \int_0^a P(x) dx = \frac{b^2}{a^2} \tan \alpha \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2}{a^2} \tan \alpha \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{b^2}{a^2} \tan \alpha \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{2}{3} b^2 a \tan \alpha = \frac{2}{3} a b h : \end{aligned}$$



Այսպիսով, էլիպտական գլանային կճղակի ծավալի հաշվման բանաձևն է՝ $V = (2/3) a b h$:

բ) Քանի որ $P(x)$ -ը x -ի նկատմամբ երկրորդ աստիճանի բազմանդամ է, հետևաբար կարելի է կիրառել Սինպսոնի բանաձևը: Ունենք՝

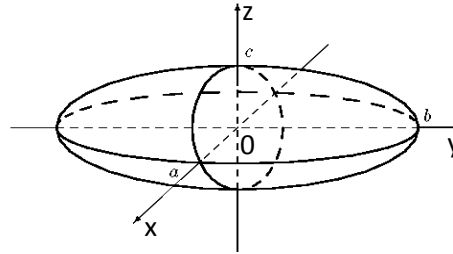
$P(-a) = 0$, $P(a) = 0$, $P(0) = 1/2 b^2 \tan \alpha$: Հետևաբար՝

$$V = \frac{2a}{6} [P(-a) + 4P(0) + P(a)] = \frac{2a}{6} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} ab^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} abh:$$

Մասնավորապես, երբ $a=b=r$, ապա կստանանք շրջանային գլանային կճղակի ծավալը՝ $V = 2r^2 h/3$:

Եռառանգք էլիպսոիդով սահմանափակված մարմնի ծավալը: Երեք անհավասար առանցքներ ունեցող էլիպսոիդի մակերևույթի հավասարումն առանցքների և կենտրոնի նկատմամբ հետևյալն է՝ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$: Եթե այդ էլիպսոիդը հատենք z -երի առանցքին ուղղահայաց և (xy) հարթությունից z հեռավորությունն ունեցող հարթությամբ, կստանանք էլիպս, որի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2}{a^2(1-(z/c)^2)} + \frac{y^2}{b^2(1-(z/c)^2)} = 1$$



Այդ էլիպսով սահմանափակված տիրույթի $S(z)$ մակերեսը հավասար է՝ $S(z) = \pi ab(1-(z/c)^2)$:

Այն մարմնի ծավալը, որը սահմանափակված է էլիպսոիդի մակերևույթով և (xy) հարթությանը զուգահեռ երկու $z = z_1$ և $z = z_2$ հարթություններով, կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$V = \int_{z_1}^{z_2} S(z) dz = \pi ab \int_{z_1}^{z_2} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab(z_2 - z_1) \left[1 - \frac{1}{3c^2}(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)\right]: \quad (18)$$

Մասնավորաբար, երբ $z_1 = -c$, $z_2 = c$, ապա ամբողջ էլիպսոիդի ծավալի համար, կստանանք՝ $V = (4/3) \pi abc$: Մասնավոր դեպքերում, երբ $a = b = c = R$, ստանում ենք R շառավղով գնդի ծավալը՝ $V = (4/3) \pi R^3$:

բ) Քանի որ z առանցքին ուղղահայաց հատույթի մակերեսը z -ի նկատմամբ երկրորդ աստիճանի բազմանդամ է, ապա կարելի է կիրառել Միմպսոնի բանաձևը: Ունենք՝

$$S(z_1) = \pi ab \left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right), \quad S(z_2) = \pi ab \left(1 - \frac{z_2^2}{c^2}\right), \quad S\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \pi ab \left(1 - \frac{(z_1 + z_2)^2}{4}\right):$$

$$\text{Հետևաբար՝ } V = \frac{z_2 - z_1}{6} \left[S(z_1) + 4S\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + S(z_2) \right] = \pi ab(z_2 - z_1) \left[1 - \frac{1}{3c^2}(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)\right]:$$

Նկատենք, որ Միմպսոնի բանաձևով կարելի է հաշվել oxy հարթությանը զուգահեռ երկու հատույթներով և

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \text{ միախոռոչ հիպերբոլիդով սահմանափակված մարմնի ծավալը:}$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \text{ կոնական մակերևույթով սահմանափակված մարմնի ծավալը:}$$

$$3) \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = z \quad (p > 0, q > 0). \text{ էլիպտական պարաբոլիդով սահմանափակված մարմնի ծավալը:}$$

Միմպսոնի բանաձևով կարելի է հաշվել կամայական պրիզմատոիդի, կոնի, հատած կոնի, գնդի և նրա մասերի ծավալները:

Գրականություն

1. История математики. Т.1. М.: Наука. 1970. 351с.

2. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Элементарная геометрия. М.: Просвещение, 1966, 366с.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1973, Т.1, 431с.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1973, Т.2, 391с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высшая школа 1988, Т.1 712с.
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высшая школа 1988, Т.2, 576с.
7. Ильин. В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Часть 1.– М.: Изд-во Проспект. 2004. 672с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. –М.: Наука. 1969, Т.2, 800с.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФОРМУЛЫ СИМПСОНА ГУЛГАЗАРЯН Г.Р., ГУЛГАЗАРЯМ Л.Г., ХАЧАНЫАН А.А.

В статье вычислены площади и объемы некоторых плоских фигур и тел с применением определенного интеграла и формулы Симпсона. Показана практическая применимость формулы Симпсона.

Ключевые слова: площадь, объем, формула Симпсона, интеграл.

CALCULATION OF AREAS AND VOLUMES WITH APPLICATION OF SIMPSON'S FORMULA GHULGHAZARYAN G.R., GHULGHAZARYAN L.G., KHACHANYAN A.A.

In this paper it is shown the calculation of areas and volumes of some plane figures and bodes using definite integral and Simpson's formula. The practical applicability of the Simpson's formula is shown.

Keywords: area, volume, Simpson's formula, integral.

Տպագրության է երաշխավորել ֆիզ.մաթ.գիտ.դ., պրոֆեսոր Լ.Արաբաջյանը