

ԽԱՐՈՎՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ
ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРМЯНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИМ. Х. АБОВЯНА

Հումանիտար գիտություններ №-1 (39) 2021 Гуманитарные науки

ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՈՐՈՇ ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՀՆԱՐՆԵՐ
ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ Ս.Պ., ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ Ռ.Ա.

Երևանի պետական համալսարան

Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1,

e-mail: seyrans.tepanyan@ysu.am

e-mail: khrafik@ysu.am

Հոդվածում քննարկվել է հանրակրթական դպրոցի «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» առարկայի և բուհական «Մաթեմատիկական անալիզ» գիտակարգի ուսուցման գործընթացում ուսումնասիրվող առանցքային հասկացություններից մեկի՝ ֆունկցիայի էքստրեմումների վերաբերյալ գիտելիքների ամուր յուրացման և դրանց կիրառական ուղղվածության ապահովման հիմնախնդիրը: «Գիտելիք, հասկացում, կիրառում, վերլուծում, համադրում, գնահատում» համախմբի մեկնաբանությունները զուգադրվել են մաթեմատիկայի տեսության մեջ և պրակտիկայում իրագործվող գործիքային (инструментальный-instrumental), գործընթացային (процедуральный-procedural), կոնտեքստային (контекстуальный-contextual), հայեցակարգային (концептуал-relational), փոխանցային (переносный-transformable), ընդհանրական (обобщенный-generalised), վերացական (абстрактный-abstract), ռեֆլեքսիվ (рефлексивный-reflexive) մակարդակների հետ:

Հիմնաբառեր. ուսուցում, ուսումնառություն, գիտելիք, հասկացում, կիրառում, վերլուծում, համադրում, գնահատում, ֆունկցիա, էքստրեմումի կետ, էքստրեմումներ:

Ներկայացված է խմբագրություն 07.05.2021թ

Պատմության ընթացքում, գիտության զարգացման ցանկացած ժամանակաշրջանում բազմաթիվ առարկաների հետ միասին իր ուրույն դերակատարությունն է ունեցել նաև «Մաթեմատիկան»: Հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի ուսումնասիրումը սովորողին զինում է այնպիսի գիտելիքներով, որոնք անհրաժեշտ են լինում առօրյա կյանքում, այսինքն՝ մաթեմատիկական գիտելիքներն ունեն կիրառական նշանակություն: Մաթեմատիկայի ուսումնասիրման առաջնահերթ նպատակներից է նաև սովորողին նախապատրաստել հետագայում ուսումը բուհում շարունակելու համար: Մաթեմատիկայի դպրոցական և բուհական ծրագրերի միջև ընթացային կապ ստեղծելու նպատակով 20-րդ դարի երկրորդ կեսերին շատ երկրներում դպրոցական ծրագրեր ներմուծվեց այսպես կոչված «նոր մաթեմատիկա»: Ըստ այդ՝ «նոր մաթեմատիկայի», ներմուծվեցին մաթեմատիկական տարրեր գաղափարներ և սկզբունքներ, մասնավորապես՝ բազմությունների տեսությունը, ֆունկցիաների հետազոտումը մշակված տեսական հիմնավորմամբ, ինտեգրալի գաղափարը և այլն:

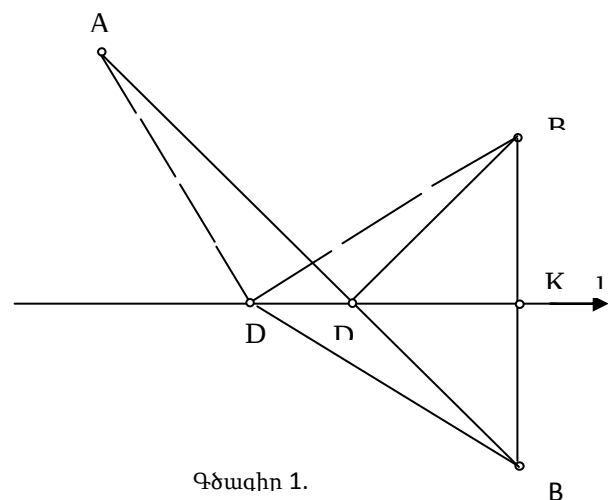
Մաթեմատիկական ցանկացած նոր նյութի ուսուցում ունի բազմաթիվ դժվարություններ՝ պայմանավորված թե՛ նյութի բովանդակության բարդությամբ և թե՛ նյութի ուսումնասիրման համար արդյունավետ մեթոդիկայի ընտրությամբ: Բովանդակային նյութի ամբողջական յուրացումը կախված է ինչպես սովորեցնողի հմտությունից (վարպետությունից), այնպես էլ սովորողի կարողություններից և ունակություններից:

Հաշվի առնելով նշված և այլ դժվարությունները, այս աշխատանքում դիտարկում ենք հարցեր, որոնք առաջանում են և՛ ավագ դպրոցում, և՛ բուհում, հանրահաշվի և մաթեմատիկական անալիզի տարրերի դասընթացում, ֆունկցիաների հետազոտման, էքստրեմումների սահմանման, նշված թեմաների ուսուցման մեթոդների ընտրության, ուսումնական նյութը սովորողներին առավել հետաքրքիր դարձնելու ձևերի ընտրության, նոր մեթոդների մշակման և դրանց կիրառության տարբեր ոլորտների հետ առնչվող խնդիրների ուսումնասիրություններում: Հայտնի է, որ կյանքի տարբեր ժամանակաշրջաններում միշտ անհրաժեշտություն է առաջացել ընտրել հնարավորներից ամենաարդյունավետը (օպտիմալը): Օրինակ՝ ամենաշատը, ամենաքիչը, ամենաերկարը, ամենակարճը, ամենագեղեցիկը, ամենամեծը, ամենափոքրը և այլն: Այս թվարկածները գուգորդվում են էքստրեմումի գաղափարի հետ: Էքստրեմումի գաղափարի համակողմանի դիտարկման համար հողվածում քննարկել ենք խնդիրների որոշ դասեր, որոնք հիմք են հանդիսանում հետագայում «էքստրեմումի» սահմանման և առավել հանգամանալից մաթեմատիկական ձևակերպման համար:

Էքստրեմումների նախապատմությանը վերաբերվող խնդիրներ [1]

Խնդիր 1. (Հերոնի խնդիրը): Դիցուք l ուղղի մի կողմում տրված են երկու կետեր՝ A և B : Պահանջվում է l ուղղի վրա գտնել այնպիսի D կետ, որ AD և BD հեռավորությունների գումարը լինի ամենափոքրը (զծ. 1):

Լուծում – Կառուցենք B կետի սիմետրիկ B' կետը l ուղղի նկատմամբ: A և B' կետերը միացնենք ուղղով, որը կհատվի l ուղղի հետ, հենց այդ հատման կետն էլ կլինի որոնելի D կետը: Խնդրի լուծման հիմքում ընկած է այն փաստը, որ եկու A և B կետերը միացնող ուղղի հատվածը կարճ է այդ կետերը միացնող ցանկացած այլ գծից: Այսինքն՝ $AD + D'B' > AB' = AD + DB' = AD + DB$



Գծազին 1.

Խնդիր 2. Տրված է որևէ անկյուն u և նրա ներսում՝ C կետ: Պահանջվում է այդ անկյան կողմերի վրա գտնել A և B կետեր այնպես, որ ABC եռանկյան պարագիծը լինի ամենափոքրը:

Խնդիր 3. Տրված է որևէ անկյուն u և նրա ներսում C և D կետեր: Պահանջվում է այդ անկյան կողմերի վրա գտնել A և B կետեր այնպես, որ $|CA| + |AB| + |BD|$ գումարը լինի ամենափոքրը:

Խնդիր 4. Տրված է A , B և C կետեր: պահանջվում է D կետը տեղադրել այնպես, որ նրա ունեցած հեռավորությունների գումարը A , B և C կետերից լինի փոքրագույն: Այսինքն՝ $|DA| + |DB| + |DC|$ լինի ամենափոքրը:

Խնդիր 5. Գտնել ընդհանուր պարագծով այն եռանկյունը, որը կունենա ամենամեծ մակերեսը:

Խնդիր 6. Տրված երկարությամբ հարթ, փակ կորերից ընտրել այն կորը, որը կշրջափակի ամենամեծ մակերեսը:

Բերված և նմանատիպ բազմաթիվ խնդիրներ բնության մեջ և առօրյա կյանքում հանդիպող կիրառական խնդիրների մաթեմատիկական մոդելներ են: Այդ առումով շատ կարևոր է այդպիսի խնդիրների ճշգրիտ մաթեմատիկական հետազոտումը և լուծումը:

Մեծագույնի և փոքրագույնի որոնման շրջանակներում հետաքրքիր են նաև երկրաչափությունից հայտնի հետևյալ պնդումները.

- մեծագույն n -անկյուն բազմանկյունը պետք է լինի հավասարակողմ,
- մեծագույն n -անկյուն բազմանկյունը պետք է ունենա հավասար անկյուններ,
- մեծագույն n -անկյուն բազմանկյուն գոյություն ունի [3],
- մեծագույն n -անկյուն բազմանկյունը կանոնավոր է [3],
- ոչ ուռուցիկ n -անկյուն բազմանկյունը չի կարող լինել մաքսիմալ:

Նշենք որ այս պնդումները հետագայում «տեղավորվել են» ուռուցիկ անալիզի զարգացման հիմքում:

Բերված խնդիրներում ակնհայտ է, որ պետք է ապացուցել այդպիսիների գոյությունը: Այս դրվագում ապացույցի գաղափարի ի հայտ գալը անհրաժեշտություն է առաջացնում նկարագրել, թե ինչ է նշանակում «ապացուցել»:

Ապացույցը մաթեմատիկական արժեք է, որը կապված է «ճշմարտության» խնդրի հետ և արժեքանական առումով անկախ է ճշմարտության պատմափիլիսոփայական համատեքստից: Իսկ մանկավարժական-դիդակտիկական տեսակետից ապացույցը նույնականացվում է «հասկանալ» կատեգորիայի հետ: Ըստ Վ.Պ.Սմիրնովի [2], հասկանալը «ճանաչում—> ըմբռնում—> հիշում—> կարողություն—> փոխանցում» տրամաբանական շղթան է:

Հասկանալը, լինելով (գիտելիք, հասկացում, կիրառում, վերլուծում, համադրում, գնահատում) համախումբ, ունի հոգեբանական և փիլիսոփայական մեկնաբանություն, իսկ մաթեմատիկայի տեսության և պրակտիկայի մեջ առանձնանում են տարբեր մակարդակները՝ գործիքային (инструментальный - instrumental), գործընթացային (процедуральный-procedural), կոնտեքստային (контекстуальный-contextual), հայեցակարգային (концептуал-relational), փոխանցային (переносный-transformable), ընդհանրական(обобщенный-generalised), վերացական (абстрактный-abstract), ռեֆլեքսիվ (рефлексивный-reflexive):

Դիտարկենք մեծագույնի և փոքրագույնի վերաբերյալ միջառարկայական բովանդակության խնդիր օպտիկայի բաժնից:

Խնդիր 7. Երկու տարբեր միջավայրեր բաժանող / գծի տարբեր կողմերում տրված են A և B կետերը: Պահանջվում է / ուղղի վրա գտնել D կետն այնպես, որ լույսը ADB ճանապարհը անցնի ամենակարճ ժամանակում, պայմանով, որ լույսի տարածման արագությունը տարբեր միջավայրերում տարբեր է:

Մեծագույնի և փոքրագույնի վերաբերյալ խնդիր հանրահաշվից և անալիզից:

Խնդիր 8. (Տարտալիի խնդիր 1500-1557թթ.) Ութը բաժանել երկու մասի այնպես, որ այդ մասերի արտադրյալը բազմապատկած նրանց տարբերությամբ լինի մեծագույնը:

Այսպիսով, կարելի է բերել բազմաթիվ խնդիրներ տարբեր բնագավառներից, որոնք վերաբերում են մեծագույնի կամ փոքրագույնի որոնմանը:

Այժմ հիմնավորենք թե ինչու ենք լուծում այդ խնդիրները: Դրա համար նորից դիտարկենք Հերոնի խնդիրը, որը համարվում է պրակտիկայում հանդիպող պրոբլեմի մաթեմատիկական մոդել: Ենթադրենք երկու բնակավայրերի միջև պետք է կառուցել կայարան այնպես, որ բնակավայրերից ունեցած հեռավորությունների գումարը լինի ամենափոքրը: Ակնհայտ է, որ այդ լուծումը իր հերթին լուծում է նաև տնտեսագիտական խնդիր՝ փոքր ծախսեր կատարելու վերաբերյալ: Այդպիսի խնդիրների լուծումը նպաստում է տնտեսագիտական և ֆինանսական գրագիտության բարձրացմանը:

Մեծագույնի և փոքրագույնի վերաբերյալ խնդիրների լուծման անհրաժեշտությունը առաջանում է գիտության և տեխնիկայի տարբեր բնագավառներում: Այդպիսի խնդիրների լուծումը կարևորվում են նրանով, որ դրանց արդյունքում կունենանք և՛ ժամանակի, և՛ տնտեսական և այլ չափանիշների առումով օպտիմալ տարբերակներ:

Էքստրեմումների հետազոտման առավել ընդհանուր մեթոդիկա գտնելու համար ներմուծվում է ֆունկցիայի գաղափարը և տվյալ ոլորտին վերաբերող էքստրեմումների խնդիրների լուծման համար կառուցվում է համապատասխան երևույթը բնութագրող ֆունկցիա, մշակվում են այնպիսի մեթոդներ, որոնց օգնությամբ հետազոտվում է այդ ֆունկցիայի վարքը և հասնում են վերջնական արդյունքի:

Սահմանում – կասենք, որ $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի լոկալ մաքսիմում (լոկալ մինիմում), եթե գոյություն ունի x_0 կետի մի որոշ շրջակայք այնպես, որ այդ շրջակայքի ցանկացած $x \neq x_0$ -ի համար տեղի ունի հետևյալը. $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$):

Էքստրեմումների վերաբերյալ խնդիրների լուծման մեթոդներ

Ուսուցման այս փուլում իրագործում ենք երկու տարբեր գործընթացներ.

- ✓ դասախոսություն,
- ✓ գործնական պարապմունք:

Դասախոսության ընթացքում դասավանդողը ունի ակտիվ դերակատարություն, իսկ սովորողի գործունեությունը համեմատաբար պասիվ է: Այս ընթացքում դասախոսը կամ ուսուցիչը, կիրառելով տարբեր մեթոդներ և հնարներ, աշխատում է նյութը, որը նախատեսված է չափորոշիչներով, իր ամբողջ բովանդակությամբ հասանելի դարձնի սովորողին: Այդ գործընթացը առավել արդյունավետ դարձնելը կախված է նրանից թե ինչ մեթոդներ է կիրառվում: Նշենք, որ ուսուցման մեթոդների ամբողջական և վերջնական սահմանում չկա: Հայտնի է, որ կա մի ընդհանրություն, որը հանդիպում է

բազմաթիվ հեղինակների մոտ, այն է **ուսուցման մեթոդները մանկավարժի և սովորողի համատեղ աշխատանքներ են ուսումնական գործունեություն կազմակերպելու նպատակով**: Դասախոսության ընթացքում, քանի որ խոսքը վերաբերում է դասավանդողի գործունեությանը, ապա այս դեպքում նկատի ունենք դասավանդման մեթոդները: Դասախոսության ընթացքում դասավանդողը մանրամասն, տվյալ դեպքում՝ հարմար դասավանդման մեթոդների կիրառմամբ հիմնավորելով, տրամաբանական կապով ապացուցում է տեսական նյութը: Այստեղ նշենք, որ շատ կարևոր է թե դասախոսությունը անցկացվում է հեռավար (**օնլայն**), թե առերես (**օֆլայն**):

Համացանցային տեխնոլոգիան հիմնված է համացանցի կիրառման վրա՝ սովորողներին ուսումնամեթոդական նյութերով ապահովելու և ուսուցանելու համար:

Ժամանակակից մեթոդներով մաթեմատիկայի դասագործընթացն արդյունավետ կազմակերպելու համար այսօր լայնորեն կիրառվում է ԽԻԿ համակարգը, որը ոչ միայն խթանում է աշակերտների մտածողությունը, այլև որոշակի հետաքրքրություն ու շահագրգռվածություն է առաջացնում:

Համակարգը ենթադրում է երեք փուլ՝ խթանման, իմաստի ընկալման և կշռադատման: Խթանման փուլը հետապնդում է երեք հիմնական նպատակ՝

1. բացահայտել նոր նյութի վերաբերյալ սովորողների ունեցած գիտելիքները,
2. ակտիվացնել սովորողներին՝ ներգրավելով նրանց քննարկվելիք նյութի մեջ,
3. սովորողների մեջ ձևավորել գիտելիքներ և հմտություններ ձեռք բերելու ձգտում, շահագրգռվածություն:

Իմաստի ընկալման փուլի նպատակներն են՝

1. սովորողի հետաքրքրության աստիճանի պահպանումը,
2. տեղեկատվության ընկալման ինքնավերահսկման ապահովումը,
3. նոր և հին տեղեկատվության շաղկապումը և իմացության նոր կառույցի ստեղծումը:

Կշռադատման փուլին նպաստող տարբեր մեթոդների օգտագործումը օգնում է, որ սովորողը՝

- հանարգումարի բերի իր գիտելիքները,
- յուրացնի նոր գիտելիքներ՝ դրանք դարձնելով իր սեփականությունը,
- վերակառուցի իր ունեցած նախկին գիտելիքները նոր ձեռք բերած տեղեկատվության հիման վրա:

Այժմ բերենք այն հայտնի թեորեմները, որոնց օգնությամբ ուսումնասիրվում են ֆունկցիաների էքստրեմումները:

Թեորեմ 1 (Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման): Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի էքստրեմում, ապա այդ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի ($f'(x_0) = 0$) կամ գոյություն չունի:

Թեորեմ 2 (Էքստրեմումի առաջին բավարար պայման): Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան էքստրեմումի x_0 հնարավոր կետի շրջակայքում ունի ածանցյալ, բացառությամբ գուցե այդ կետում, ապա այդ կետի ձախից աջ անցնելուց, եթե ածանցյալը նշանը փոխում է դրականից բացասական ուրեմն x_0 կետը մաքսիմումի կետ է: Եթե ածանցյալը նշանը փոխում է բացասականից դրական ուրեմն x_0 կետը մինիմումի կետ է: Իսկ եթե նշանը չի փոխվում ուրեմն այդ կետը էքստրեմումի կետ չէ:

Թեորեմ 3 (Էքստրեմումի երկրորդ բավարար պայման): Եթե էքստրեմումի x_0 հնարավոր կետում $y = f(x)$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի ածանցյալ $f''(x_0)$, ապա $f''(x_0) < 0$ դեպքում ֆունկցիան x_0 կետում ունի մաքսիմում, իսկ $f''(x_0) > 0$ դեպքում x_0 կետում ունի մինիմում:

Տեսական նյութի շարադրանքն իրականացվում է **խոսքային մեթոդով** (նյութի բանավոր շարադրումը սովորեցնողի կողմից, զրույց): Վերադառնանք ֆունկցիայի գաղափարին: Ենթադրենք, տրված է որևէ $f(x)$ ֆունկցիա՝ որոշված $[a, b]$ միջակայքում: Պահանջվում է պարզել, թե ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում մոնոտոն է, թե՞ ոչ: Արդյունքի հասնելու համար, կիրառելով **գործնական մեթոդները** (վարժություններ, լաբորատոր ու գործնական աշխատանքներ) և իրականացնել բանավեճ թեմայի շուրջ (**բանավեճի մեթոդ**), քննարկվում են տվյալ խնդրի լուծման անհրաժեշտությունը, լուծման մեթոդները և նպատակները, ոչ բացահայտ ձևով նպատակ ունենալով նաև պարզելու սովորողների **ինքնուրույնության աստիճանը**:

Գործնական պարապմունքների ժամանակ, օգտագործելով **գննական մեթոդներ** (ցուցադրում, ինքնուրույն դիտումներ), ցուցադրելով պատրաստի հարթ առարկայական մոդելներ, նշվում են էքստրեմումի կետերը և էքստրեմալ արժեքները: Անցնելով տեսության կիրառմամբ կոնկրետ խնդիրների հետազոտության, առաջարկվում է, օրինակ, գտնել $f(x) = \frac{3x-7}{(x^2-1)^2}$ ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը,

էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները: Այս և նման այլ խնդիրների լուծման հայտնի մեթոդների կիրառության մասին կխոսենք քիչ ավելի ուշ:

Ուսուցման ընթացքում շատ կարևոր է նաև դասավանդողի և ուսումնառողի հարաբերական ակտիվությունը: Դասավանդողն, իրեն վերագրելով որոշակի պասիվություն, հանձնարարում է սովորողներին ինքնուրույն աշխատել, նպատակ ունենալով բացահայտել սովորողների կամային, հուզական և մտավոր ունակությունները, որոնք հետագայում կկարողանա աստիճանաբար զարգացնել: Հանձնարարելով կազմել նոր խնդիրներ և առաջարկել դրանց լուծման մեթոդներ, դասավանդողն իր խորհուրդներով և դիտողություններով նրբանկատորեն նշում է թույլ տրված սխալները և ուղղորդում դրանց հաղթահարման ուղիներ:

Դիտարկենք մի քանի խնդիրներ և նկարագրենք դրանց լուծման ճանապարհը:

Խնդիր 9. Գտնել $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները $[-1; 5]$ միջակայքում:

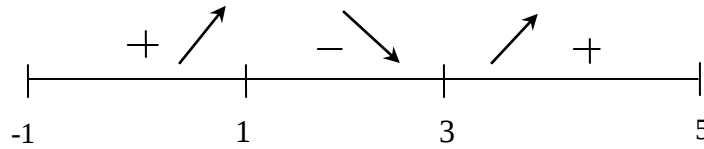
Լուծում – Էքստրեմումի կետերը գտնելու համար հաշվենք ֆունկցիայի ածանցյալը, հավասարեցնենք զրոյի և լուծենք, կստանանք՝

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

Այս ստացված կետերը կլինեն էքստրեմումի կետեր:

Նշենք, որ այստեղ ցուցադրվեց գիտելիքային և գործընթացային մակարդակը, որը հայտնի բանաձևերը կիրառել կարողանալն է, այն է՝ ածանցյալների հաշվման բանաձևերի կիրառում և քառակուսային հավասարում լուծել:

Թվային առանցքի վրա նշենք և պարզենք, թե որտեղ է ֆունկցիան աճում և որտեղ՝ նվազում:



Քանի որ ֆունկցիայի ածանցյալը $x \in [-1; 1] \cup [3; 5]$ -ում դրական է, ուրեմն այդ միջակայքերում ֆունկցիան աճում է, իսկ $x \in [1; 3]$ -ում ածանցյալը բացասական է, ֆունկցիան նվազում է: Ինչպես նկատեցինք, ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը որոշեցինք ածանցյալի դրական կամ բացասական լինելով:

Այսպիսով $x=1$ կետը մաքսիմումի կետ է, իսկ $x=3$ կետը մինիմումի կետ:

$$f(1)=5, \quad f(3)=53, \quad f(-1)=-19, \quad f(5)=278$$

Հետևաբար $[-1; 5]$ միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 278-է, իսկ փոքրագույնը -19:

Կոնտեքստային մակարդակը տրված համատեքստում առաջադրանք լուծելու կարողությունն է, որը և մինչև վերջ կատարվեց:

Ուսուցման պրոցեսը առավել արդյունավետ դարձնելու համար սովորեցնողը առաջադրում է հարց, թե որոնք են էքստրեմումի անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, այս հարցադրմամբ փորձելով կապ հաստատել տեսական նյութի հետ, մեկ անգամ ևս վերհիշելով այն և կիրառելով որոշակի խնդիր լուծելիս:

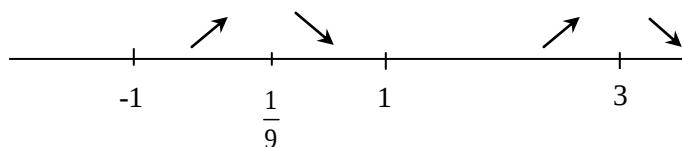
Խնդիր 10. Գտնել հետևյալ ֆունկցիայի էքստրեմումները, խզման կետերը և պարզել ֆունկցիայի վարքը խզման կետերի շրջակայքում:

$$f(x) = \frac{3x-7}{(x^2-1)^2}:$$

Լուծում- Նախ ակնհայտ է, որ $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$: Այժմ գտնենք էքստրեմումի կետերը, դրա համար հաշվենք ֆունկցիայի ածանցյալը, հավասարեցնենք զրոյի և լուծենք ստացված հավասարումը, կունենանք

$$f'(x) = \frac{3(x^2-1)^2 - (3x-7)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-9x^2 + 28x - 3}{(x^2-1)^3}$$

$$f'(x)=0; \Rightarrow 3(x^2-1)-4x(3x-7)=0; \Rightarrow x_1=\frac{1}{9}; \quad x_2=3;$$



Նկատենք, որ $x_1 \in (-1; 1)$; $x_2 \in (1; +\infty)$: Պարզելով ածանցյալի նշանները հետևյալ միջակայքերում՝ $x \in \left(-1; \frac{1}{9}\right)$, $x \in \left(\frac{1}{9}; 1\right)$, կտեսնենք, որ $f'(x) > 0$ երբ $x \in \left(-1; \frac{1}{9}\right)$, և երբ $x \in \left(\frac{1}{9}; 1\right)$, $f'(x) < 0$ այսինքն ֆունկցիան $x = \frac{1}{9}$ կետում ունի մաքսիմում: Այժմ ուսումնասիրենք $x = 3$ կետը: Նման ձևով կհամոզվենք, որ $f'(x) > 0$ երբ $x \in (1; 3)$ և $f'(x) < 0$ երբ $x \in (3; +\infty)$ այսինքն $x = 3$ կետը ևս մաքսիմումի կետ է:

Խզման կետերում ֆունկցիան ձգտում է մինուս անվերջի:

$$\lim_{x \rightarrow +1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1+0} f(x) = -\infty$$

Այժմ ուսումնասիրենք պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիայի էքստրեմումներ:

Ենթադրենք կորի հավասարումը տրված է $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [T_1; T_2]$ տեսքով: Այս դեպքում, եթե հնարավոր չլինի որոշել y -ը x -ից կախված ֆունկցիա, ապա ֆունկցիայի ածանցյալը հաշվենք հետևյալ բանաձևով՝ $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$: Հետևաբար y'_x -ի նշանը կպարզենք x'_t -ի և y'_t -ի նշանների միջոցով:

Խնդիր 11 Հետազոտել $x = \frac{t}{1-t^2}$; $y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$ բանաձևերով տված ֆունկցիան:

Լուծում- Ըստ հերթականության կատարենք հետևյալ քայլերը՝

1-ին քայլ. Գտնենք $x(t)$ և $y(t)$ ֆունկցիաների որոշման տիրույթների հատման T բազմությունը և գտնենք այն t_i կետերը որոնց դեպքում տեղի կունենա $\lim_{t \rightarrow t_i \pm 0} x(t) = \pm \infty$,

$\lim_{t \rightarrow t_i \pm 0} y(t) = \pm \infty$ այս սահմաններից գոնե մեկը կաստանանք, որ

$$t \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty):$$

2-րդ քայլ. Գտնենք ֆունկցիաների զրոները և նրանց նշանի հաստատունության տիրույթները կաստանանք՝ $x(t) = 0$ երբ $t = 0$, իսկ $y(t) = 0$ երբ $t = 0$, $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$:

3-րդ քայլ. Գտնենք այն t_k կետերը, որտեղ $x'(t)$ և $y'(t)$ ածանցյալներից գոնե մեկը հավասարվում է զրոյի կամ խզվում է:

4-րդ քայլ. 1-ին և 3-րդ քայլերում գտնված t_i և t_k կետերը T տիրույթը բաժանում են (t_p, t_{p+1}) միջակայքերի: Այդպիսի յուրաքանչյուր միջակայքում $x(t)$ ֆունկցիան խիստ աճող է, հետևաբար $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$ համակարգից կորոշվի $y = f(x)$ ֆունկցիա, որի ածանցյալը կհաշվենք հետևյալ բանաձևով $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$:

5-րդ քայլ. Գտնենք այն t_j կետերը որտեղ $f''(x) = 0$:

6-րդ քայլ. Կազմենք աղյուսակ և կառուցենք յուրաքանչյուր (t_p, t_{p+1}) միջակայքում ֆունկցիայի ճյուղը:

Դիտարկված օրինակում կունենանք՝

$$x \in (0; +\infty) \cup (-\infty; +\infty) \cup (-\infty; 0)$$

$$y \in (-\infty; -\infty) \cup (+\infty; -\infty) \cup (+\infty; +\infty)$$

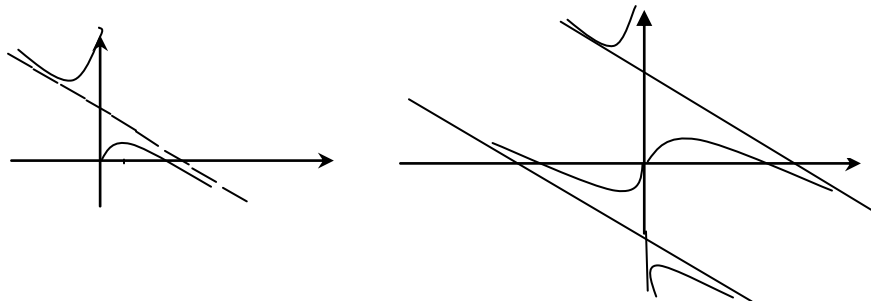
$$x'(t) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}; \quad y'(t) = \frac{2t^4-5t^2+1}{(1-t^2)^2}$$

Քանի որ $x(t) = -x(-t)$, $y(t) = -y(-t)$ հետևաբար կորը $O(0,0)$ կետի նկատմամբ սիմետրիկ է: Դրա համար դիտարկենք $M = [0,1) \cup (1, +\infty)$ բազմությունը: M բազմության վրա $x'(t) > 0$ իսկ $y'(t) = 0$ երբ $t_1 = 0.5\sqrt{5-\sqrt{17}} \approx 0.47$ և $t_2 = 0$, $\sqrt{5+\sqrt{17}} \approx 1.51$:

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t^4-5t^2+1}{1+t^2}, \quad f''(x) = \frac{\frac{d}{dt}(f')}{x'(t)} = \frac{-4t(1-t^2)^3(3+t^2)}{(1+t^2)^3},$$

Հետևաբար $f''(x) \leq 0$ երբ $t \in [0,1)$, իսկ $f''(x) > 0$ երբ $t \in (1, +\infty)$: Կազմենք հետևյալ աղյուսակը և դրա համապատասխան գրաֆիկը:

(t_p, t_{p+1})	$(0; 0.47)$	$(0.47; 1)$	$(1; 1.51)$	$(1.51; +\infty)$
(x_p, x_{p+1})	$(0; 0.6)$	$(0.6; +\infty)$	$(-\infty; -0.7)$	$(-0.7; 0)$
(y_p, y_{p+1})	$(0; 0.3)$	$(0.3; -\infty)$	$(+\infty; 2.3)$	$(2.3; +\infty)$
$f''(x)$ Նշանը	+	+	-	-



Այսպիսով, ածանցյալի վերաբերյալ տեսական կայուն գիտելիքները և դրանց կիրառման գործնական եղանակները կիրառելու կարողությունները ձևավորվում և զարգանում են դասավանդող-ուսումնառող հետադարձ կապերի արդյունավետ իրագործմամբ:

1. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах: Москва, изд. МЦНМО. 2006. 199с.
2. Смирнов В.П. Оценка качества образования, М., 2006. — 200 с.
3. Бляшке В. Круг и шар. —М.: Наука, 1967. -232с.
4. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. М. Высшая школа, 1984, 200с.
5. Ս. Պ. Ստեփանյան, Վ. Ա. Ավետիսյան, Ռ.Ա. Խաչատրյան: Ապացուցումների ուսուցումը ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքում (մաթեմատիկական ինդուկցիայի օրինակով) Մանկավարժական միտք, Երևան, 2015, 3, էջ 176-186:

РЕЗЮМЕ

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ОБУЧЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ

СТЕПАНЯН С.П., ХАЧАТРЯН Р.А.

В статье обсуждалась проблема прочного усвоения знаний одной из ключевых понятий, изучаемых в процессе обучения по предмету «Элементы Алгебры и математического анализа» общеобразовательной школы и вузовского дисциплина «Математический анализ», понятия экстремумов функции и методы обеспечения их прикладной направленности. Определения "Знания, понимания, применения, анализа, сопоставления, оценки" сопоставлены с инструментальными, процессуальными, контекстными, концептуальными, переносными, обобщенными, абстрактными, рефлексивными уровнями, реализуемыми в теории математики и практике.

Ключевые слова: обучение, образование, знание, понимание, применение, анализ, сопоставление, оценка, функция, точки экстремума, экстремумы.

SUMMARY

SOME METHODOLOGICAL TECHNIQUES FOR TEACHING EXTREMUMS

STEPANYAN S. P., KHACHATRYAN R. A.

The article deals with the problem of solid assimilation of knowledge of one of the key concepts studied in the course of training on the subject "Elements of Algebra and mathematical analysis" of general education schools and university discipline "Mathematical Analysis", the concepts of extremes of function and methods of ensuring their applied orientation. The definitions of "Knowledge, understanding, application, analysis, comparison, evaluation" are compared with the instrumental, procedural, contextual, conceptual, figurative, generalized, abstract, reflexive levels implemented in the theory of mathematics and practice.

Keywords: learning, education, knowledge, understanding, application, analysis, comparison, evaluation, function, extremum point, extracts.

Տպագրության է երաշխավորել ֆիզիկամաթեմատիկական գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Լ.Գ.Ղուլլազարյանը՝ 27.05.2021թ.