

УДК 532.5 532,135

Аванесян В.Г.

**Рекомендация дифференциальных уравнений движения вязкопластичных
неньютоновских эмульсионных смесей.**

Эти уравнения нами выведены на основании дифференциальных уравнений движения сплошной среды в форме КОШИ: для этого обозначим через $\bar{P}$ поверхностную силу, отнесенную к единице объема, через $\bar{K}$ - массовую силу, отнесенную к единице объема. В этом случае по принципу Д'аламбера уравнение движения в векторной форме будут иметь следующий вид:

$$\rho \frac{D\bar{v}}{dt} = \bar{K} + \bar{P}, \quad (1)$$

Для нахождения общего выражения для $\bar{P}$ из изучаемой сплошной среды мысленно вырежем прямоугольный параллелепипед, со сторонами dx , dy , dz . К граням параллелипипеда, перпендикулярным осям x , y и z , имеющим соответственно площади $dydz$, $dx dz$ и $dx dy$, прилагаются следующие напряжения соответственно:

$$\bar{\tau}_x \cup \bar{\tau}_x + \frac{d\bar{\tau}_x}{dx} \cdot dx, \quad (2)$$

$$\bar{\tau}_y \cup \bar{\tau}_y + \frac{d\bar{\tau}_y}{dy} dy, \quad (3)$$

$$\bar{\tau}_z \cup \bar{\tau}_z + \frac{d\bar{\tau}_z}{dz} dz, \quad (4)$$

следовательно, составляющими результирующей поверхностной силы будут:
для оси X :

$$\left(\bar{\tau}_x + \frac{d\bar{\tau}_x}{dx} dx \right) dydz - \bar{\tau}_x dydz = \bar{\tau}_x dydz + \frac{d\bar{\tau}_x}{dx} dx dydz - \bar{\tau}_x dydz = \frac{d\bar{\tau}_x}{dx} dx dydz, \quad (5)$$

для оси Y :

$$\left(\bar{\tau}_y + \frac{d\bar{\tau}_y}{dy} dy \right) dx dz - \bar{\tau}_y dx dz = \frac{d\bar{\tau}_y}{dy} dx dy dz, \quad (6)$$

для оси Z :

$$\left(\bar{\tau}_z + \frac{d\bar{\tau}_z}{dz} dz\right) dx dy - \bar{\tau}_z dx dy = \frac{d\bar{\tau}_z}{dz} dx dy dz, \quad (7)$$

Так как поверхностная сила P , отнесена к единице объема, то сложив выражения (5-7) и разделив полученный результат на объем $dx dy dz$ мысленно выделенного параллелепипеда, получим:

$$\bar{P} = \frac{d\bar{\tau}_x}{dx} + \frac{d\bar{\tau}_y}{dy} + \frac{d\bar{\tau}_z}{dz}, \quad (8)$$

Проекции векторов напряжений $\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y, \bar{\tau}_z$, действующих на площадках, перпендикулярных осям X, Y, Z , соответственно обозначим:

$$\text{для } \bar{\tau}_x : \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz} \quad (9)$$

$$\text{для } \bar{\tau}_y : \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz} \quad (10)$$

$$\text{для } \bar{\tau}_z : \tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz} \quad (11)$$

Напряжения $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$ представляют собою нормальные напряжения, остальные же являются касательными. Проекции массовой силы $\bar{K}$ отнесенные к единице объема, на оси X, Y, Z , обозначим через K_x, K_y, K_z .

Тогда уравнение движения сплошной среды в векторной форме в проекциях на оси X, Y, Z , примет следующий вид :

$$\rho \frac{Dv_x}{dt} = K_x + \frac{d\tau_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} \quad (12)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{dt} = K_y + \frac{d\tau_{yx}}{dx} + \frac{d\tau_{yy}}{dy} + \frac{d\tau_{yz}}{dz} \quad (13)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{dt} = K_z + \frac{d\tau_{zx}}{dx} + \frac{d\tau_{zy}}{dy} + \frac{d\tau_{zz}}{dz} \quad (14)$$

Для того, чтобы подчеркнуть непосредственную связь производной $\frac{dv}{dt}$ движущей средой (субстанцией), ее обозначают специальными символом $\frac{Dv}{dt}$ и именуют субстанционной производной:

$$\frac{Dv}{dt} = \frac{dv}{dt} + v_x \frac{dv}{dx} + v_y \frac{dv}{dy} + v_z \frac{dv}{dz} \quad (15)$$

подставляя в (15) вместо $\bar{v}$ выражение $\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z$, (16)

получим
$$\frac{Dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + v_x \frac{dv_x}{dx} + v_y \frac{dv_x}{dy} + v_z \frac{dv_x}{dz}, \quad (17)$$

$$\frac{Dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dt} + v_x \frac{dv_y}{dx} + v_y \frac{dv_y}{dy} + v_z \frac{dv_y}{dz}, \quad (18)$$

$$\frac{Dv_z}{dt} = \frac{dv_z}{dt} + v_x \frac{dv_z}{dx} + v_y \frac{dv_z}{dy} + v_z \frac{dv_z}{dz}, \quad (19)$$

Таким образом для напряжений, входящих в дифференциальные уравнения движения сплошной среды (12-14) рекомендуются следующие выражения (если жидкость — вязкопластичная эмульсионная смесь):

1. Нормальные напряжения —

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= -P + 2\left(\eta_{nl} + \frac{\tau_o}{h_1}\right) \frac{dv_x}{dx} - \frac{2}{3}\left(\eta_{nl} + \frac{\tau_o}{h_1}\right) \text{div} \bar{V}, \\ \tau_{yy} &= -P + 2\left(\eta_{nl} + \frac{\tau_o}{h_1}\right) \frac{dv_y}{dy} - \frac{2}{3}\left(\eta_{nl} + \frac{\tau_o}{h_1}\right) \text{div} \bar{V}, \\ \tau_{zz} &= -P + 2\left(\eta_{nl} + \frac{\tau_o}{h_1}\right) \frac{dv_z}{dz} - \frac{2}{3}\left(\eta_{nl} + \frac{\tau_o}{h_1}\right) \text{div} \bar{V}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

2. Касательные напряжения :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \left(\eta_{nl} + \frac{\tau_o}{h_1}\right) \left(\frac{dv_x}{dy} + \frac{dv_y}{dx}\right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \left(\eta_{nl} + \frac{\tau_o}{h_1}\right) \left(\frac{dv_x}{dz} + \frac{dv_z}{dx}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \left(\eta_{nl} + \frac{\tau_o}{h_1}\right) \left(\frac{dv_y}{dz} + \frac{dv_z}{dy}\right) \end{aligned} \right\}$$

интенсивность скоростей деформации сдвига при $\text{div} \bar{V} = 0$

Для несжимаемой вязкопластичной эмульсионной смеси $\text{div} \bar{V} = 0$;

P - среднее (нормальное) давление.

Подставляя выражения (20) в дифференциальное уравнение движения КОШИ (12-14), получим основные дифференциальные уравнения движения вязкопластичной эмульсионной смеси в форме Генки — Ильюшина в декартовых координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dv_x}{dt} &= K_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \left(\eta_{\text{вн}} + \frac{\tau_0}{h_1} \right) \left(\nabla^2 v_x + \frac{1}{3} \cdot \frac{d\theta_1}{dx} \right) - \\ &- \frac{\tau_0}{\rho h_1^2} \left[2 \cdot \frac{dh_1}{dx} \cdot \frac{dv_x}{dx} + \frac{dh_1}{dy} \left(\frac{dv_y}{dx} + \frac{dv_x}{dy} \right) + \frac{dh_1}{dz} \left(\frac{dv_z}{dx} + \frac{dv_x}{dz} \right) - \frac{2}{3} \cdot \theta_1 \cdot \frac{dh_1}{dx} \right] \\ \frac{Dv_y}{dt} &= K_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dy} + \frac{1}{\rho} \left(\eta_{\text{вн}} + \frac{\tau_0}{h_1} \right) \left(\nabla^2 v_y + \frac{1}{3} \cdot \frac{d\theta_1}{dy} \right) - \\ &- \frac{\tau_0}{\rho h_1^2} \left[\frac{dh_1}{dx} \left(\frac{dv_x}{dy} + \frac{dv_y}{dx} \right) + 2 \cdot \frac{dh_1}{dy} \cdot \frac{dv_y}{dy} + \frac{dh_1}{dz} \left(\frac{dv_z}{dy} + \frac{dv_y}{dz} \right) - \frac{2}{3} \theta_1 \cdot \frac{dh_1}{dy} \right] \\ \frac{Dv_z}{dt} &= K_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dz} + \frac{1}{\rho} \left(\eta_{\text{вн}} + \frac{\tau_0}{h_1} \right) \left(\nabla^2 v_z + \frac{1}{3} \cdot \frac{d\theta_1}{dz} \right) - \\ &- \frac{\tau_0}{\rho h_1^2} \left[\frac{dh_1}{dx} \left(\frac{dv_x}{dz} + \frac{dv_z}{dx} \right) + \frac{dh_1}{dy} \left(\frac{dv_y}{dz} + \frac{dv_z}{dy} \right) + 2 \cdot \frac{dh_1}{dz} \cdot \frac{dv_z}{dz} - \frac{2}{3} \theta_1 \cdot \frac{dh_1}{dz} \right] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $\theta_1 = \text{div} \bar{V}$.

В векторно-тензорной форме уравнения (21) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{v}}{dt} &= \bar{K} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} P + \frac{1}{\rho} \left(\eta_{\text{вн}} + \frac{\tau_0}{h_1} \right) \left(\nabla^2 \bar{v} + \frac{1}{3} \text{grad div} \bar{V} \right) - \\ &- \frac{2\tau_0 T}{\rho h_1^2} \cdot \text{grad} h_1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_0}{\rho h_1^2} \cdot \text{grad div} \bar{V} \end{aligned} \quad (22)$$

В форме Ламба уравнения движения несжимаемой вязкопластичной эмульсионной среды будет иметь вид:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \bar{v}_x \text{rot} \bar{v} = \bar{k} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P - \frac{1}{\rho} \left(\eta_{\text{вн}} + \frac{\tau_0}{h_1} \right) \text{rot} \bar{v} - \frac{2\tau_0 T}{\rho h_1^2} \text{grad} h_1 \quad (23)$$

В случае наличия потенциала F массовой силы $\bar{K}$ выражение (23) будет иметь вид:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} - \bar{v} \times \bar{\Omega} = -grad H - \frac{1}{\rho} \left(\eta_{ie} + \frac{\tau_0}{h_1} \right) rot \bar{\Omega} - \frac{2\tau_0 T}{\rho} \left(\tau + \frac{\tau_0}{h_1} \right) rot \bar{\Omega} - \frac{2\tau_0 T}{\rho h_1^2 grad h_1}, \quad (24)$$

С целью изучения вихревых движений в вязко-пластичной среде необходимо обобщить уравнения Гельмгольца, позволяющие количественно учесть происходящие с вихрями изменения

Из уравнения (24) не трудно получить обобщенные уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} + (\bar{v} \nabla) \bar{\Omega} - (\bar{\Omega} \nabla) \bar{v} = \frac{1}{\rho} \left(\eta_{ie} + \frac{\tau_0}{h_1} \right) \nabla^2 \cdot \bar{\Omega} + \frac{\tau_0}{\rho} rot \bar{\Omega} \times grad \frac{1}{h_1} + \frac{2\tau_0}{\rho} grad h_1 \times grad \frac{T}{h_1^2}; \quad (25)$$

или

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = (\bar{\Omega} \nabla) \bar{v} + \frac{1}{\rho} \left(\eta_{ie} + \frac{\tau_0}{h_1} \right) \nabla^2 \bar{\Omega} + \frac{\tau_0}{\rho} rot \bar{\Omega} \times grad \frac{1}{h_1} + \frac{2\tau_0}{\rho} grad h_1 \times grad \frac{T}{h_1^2}, \quad (26)$$

Ավանեսյան Վ.Գ.

Մաթուցիկոպլաստիկ ոչ նյութոճական էմուլսիոն խառնուրդների շարժման դիֆերենցիալ հավասարումների արտածումը և առաջարկումը

Ա Ս Փ Ո Փ ՈՒ Մ

Արտածվում և առաջարկվում են ոչ նյութոճական էմուլսիոն խառնուրդների շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները Գենկի-Իլյուշին, Լամբի և վեկտորատենզորական ծանրով: Առաջարկվում են նույն խառնուրդների նորմալ և շոշափող լարումների հաշվարկային բանաձևերը:

S u m m a r y

To recommend differential equations of the motion of visco-plastic emulsive mixture in the form of Henky-Ilushin in cartesian coordinates, in vector- tensor form and in the form of Lamba, as well as to introduce the exepressions for definition of normal and tangent tension of the same mixture.