

Մակերևույթի գաուսյան կորության կախվածությունը

նրա գեոդեզիկ գծերից

Գ. Ա. Նալբանդյան

Նախ տանք նախնական հասկացություններ , որոնք անհրաժեշտ են

հետագայում:

Ինչպես հայտնի է, մակերևույթի վրա կորագծային կորոդինատների u^1, u^2 , II քառակուսային ձևերի գործակիցների համար տրվում է այլ նշանակումներ, որոնք նպատակահարմար են հետագա դատողությունների համար ([1])
Այդ նշանակումները հարմար է ցույց տալ աղյուսակային ձևով , այսինքն՝

U	V	E	F	F	G	L	M	M	N	$\vec{r}_U$	$\vec{r}_V$	$\vec{r}_{UV}$	$\vec{r}_{UV}$	$\vec{r}_{VU}$	$\vec{r}_{VV}$
U^1	U^2	g_{11}	g_{12}	g_{21}	g_{22}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	$\vec{r}_1$	$\vec{r}_2$	$\vec{r}_{11}$	$\vec{r}_{12}$	$\vec{r}_{21}$	$\vec{r}_{22}$

Նախ գրենք I և II քառակուսային ձևերը նոր նշանակություններով

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

$$(-d\vec{r}d\vec{m}) = Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2 = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

Հետագա դատողությունների համար պայմանավորվենք, որ եթե միևնույն տառային նշանը գրված է մեկ վերևի և մեկ ներքևի մասում , ապա Σ – նշանը բաց է թողնվում, բայց հասկացվում է գումար, այսինքն՝

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (1)$$

$$(-d\vec{r}d\vec{m}) = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (2)$$

$$\text{որտեղ } g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \text{ և } b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Այժմ $\vec{r}_{\alpha\beta}$ վեկտորներ ($\alpha, \beta = 1, 2$) վերլուծենք ըստ $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ և մակրոսյթի նորմալ

միավոր $\vec{m}$ վեկտորների միջոցով, այսինքն ([1], [2])

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} \vec{r}_1 + G_{\alpha\beta}^2 \vec{r}_2 + d_{\alpha\beta} \vec{m} \quad (3)$$

որտեղ $G_{\alpha\beta}^{\kappa} = G^{\kappa}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta, \kappa = 1, 2$)

Դժվար չէ նկատել, որ եթե սկալյար ձևով բազմապատկենք $\vec{m}$ վեկտորով և հաշվի առնելով, որ $(\vec{m} \vec{r}_1) = 0$ և $(\vec{m} \vec{r}_2) = 0$ ապա $(\vec{r}_{\alpha\beta} \vec{m}) = d_{\alpha\beta}$ հետևաբար

$d_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$ ուրեմն, կատացվի

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}^1 \vec{r}_1 + G_{\alpha\beta}^2 \vec{r}_2 + b_{\alpha\beta} \vec{m} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Այս բանաձևերը կոչվում են I-խմբի դերիվացիոն բանաձևեր, կամ I-խմբի Գաուսի

դերիվացիոն բանաձևեր: Այս բանաձևերում $G_{\alpha\beta}^{\kappa}$ գործակիցները կոչվում են

կապակցության կամ խրիստոֆելի գործակիցներ, որոնք հաշվում են հետևյալ կերպ ([1])

$$G_{\alpha\beta}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} \left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\sigma}} \right) \quad (4)$$

Ինչպես գիտենք, եթե A-մատրիցան ունի հետևյալ տեսքը

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ապա նրա հակադարձ մատրիցան կլինի՝}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \quad \text{տեսքի, որտեղ } g^{\kappa\sigma} = (-1)^{\kappa+\sigma} \frac{g_{\sigma\delta}}{\det A} \quad (5)$$

$$\text{իսկ } \det A = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \quad ([3])$$

Ինչպես հայտնի է, գեոդեզիկ կորություն է կոչվում կորության վեկտորի պրոյեկցիան շոշափող հարթության վրա: Իսկ S մակրոսյթի գեոդեզիկ գիծ է կոչվում այն կորը, որի յուրաքանչյուր կետում գեոդեզիկ կորությունը հավասար է զրոյի: Նշենք գեոդեզիկ գծերի մի քանի կարևոր հատկություններ

1. Որպիսզի L կորը մակերևույթի վրա լինի գեոդեզիկ, անհրաժեշտ և բավարար է, որ այդ L կորի յուրաքանչյուր կետում, որտեղ $K \neq 0$ գլխավոր նորմալը լինի կոլինյար մակերևույթի նորմալին:

2. Ռեգուլյար մակերևույթի յուրաքանչյուր կետով և ցանկացած ուղղությամբ կարելի է տեսնել միայն մեկ գեոդեզիկ գիծ ([2]):

Ինչպես հայտնի է : գեոդեզիկ գծերի դիֆֆերենցիալ հավասարումներն են
(11)

$$\begin{cases} \frac{d^2 U^1}{d\sigma^2} + G_{\alpha\beta}^1 \frac{dU^\alpha}{d\sigma} \frac{dU^\beta}{d\sigma} = 0, & (\alpha) \\ \frac{d^2 U^2}{d\sigma^2} + G_{\alpha\beta}^2 \frac{dU^\alpha}{d\sigma} \frac{dU^\beta}{d\sigma} = 0, & (\beta) \end{cases} \quad (6)$$

որտեղ $|\sigma| = S$ և $\alpha, \beta = 1, 2$

Ինչպես հայտնի է , մակերևույթը , որն հանդիսանում է ուղիղ գծերի երկրաչափական տեղ, կոչվում է գծավոր մակերևույթ ծնիչ գծերով:

Եթե գծավոր մակերևույթի միևնույն ծնիչ գծի բոլոր կետերում մակերևույթի շոշափող հարթությունները համընկնում են , ապա մակերևույթը անվանվում է փոփող մակերևույթ :

Այժմ կարող ենք ձևակերպել մեր թեորեմը և ապացուցել այն

Թեորեմ: Եթե մակերևույթի վրա գոյություն ունի գեոդեզիկ օրթոգոնալ ցանց, ապա այդ մակերևույթի գաուսյան կորությունը հավասար է զրոյի

ապացույց : Ենթադրենք, որ $\vec{r} = \vec{r}(U^1; U^2)$ մակերևույթի վրա գոյություն

ունի գեոդեզիկ —օրթոգոնալ ցանց, այսինքն ցանցի երկու գծերն էլ գեոդեզիկ են և իրար օրթոգոնալ: Նպատակահարմարության համար այդ ցանցը ընդունենք որպես կոորդինատային ցանց: Զանի որ այդ դեպքում կոորդինատային ցանցի U^1 գծերը գեոդեզիկ են, հետևաբար պետք է բավարարեն (6) դիֆֆերենցիալ հավասարումներին: Ինչպես գիտենք ցանցի U^1 - հավասարումն է

$$\begin{cases} U^1 = t \\ U^2 = U^{02} = const \end{cases}$$

(7)-ից $U^2 = const$ արժեքը տեղադրենք 6 (բ)-ի մեջ կստանանք

$$\frac{d^2 U^2}{d\sigma^2} + G_{11}^2 \frac{dU^1}{d\sigma} \frac{dU^1}{d\sigma} + 2G_{12}^2 \frac{dU^1}{d\sigma} \frac{dU^2}{d\sigma} + G_{22}^2 \frac{dU^2}{d\sigma} \frac{dU^2}{d\sigma} = 0$$

բայց անհայտ է ,որ $\frac{d^2U^2}{d\sigma^2} = \frac{dU^2}{d\sigma} = 0$, ուրեմն կլինի $G_{11}^2 \left(\frac{dU^1}{d\sigma} \right) = 0$ հետևաբար հաշվի

առնելով , որ $\frac{dU^1}{d\sigma} \neq 0$, ապա կստանանք՝

$$G_{11}^2 = 0 \quad (8)$$

(8)-ը տեղադրենք (4)-ի մեջ կստանանք , որ

$$G_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{2\delta} \left(\frac{\partial g_{1\delta}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{2\delta}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = 0 \quad \text{կամ, որ գրենք բացված տեսքով, կլինի}$$

$$\frac{1}{2} g^{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = 0, \quad (9)$$

հաշվի առնելով որ ցանցը օրթոգոնալ է, այսինքն

$$g_{12} = 0 \quad (10)$$

Մյուս կողմից, ի նկատի առնելով (5) բանաձևը , կստանանք

$$g^{21} = (-1)^{2+1} \frac{g_{12}}{\det A} = -\frac{0}{\det A} = 0 \quad \text{այսինքն} \quad g^{21} = 0 \quad (11)$$

(10) և (11) արժեքները տեղադրենք (9)-ի մեջ, կստանանք

$$\frac{1}{2} g^{22} \left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = 0 \quad \text{բայց } g^{22} \neq 0 \quad \text{հետևաբար՝} \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0 \quad (12)$$

Այժմ կատարելով ճիշտ նույն դատողությունները U^2 -գծի նկատմամբ , կստանանք

$$G_{22}^1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0 \quad (14)$$

Այժմ գրենք մակերևույթի գաուսյան կորության բանաձևը:

Գաուսյան կորության բանաձևն է՝ ([1])

$$-K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (15)$$

Այժմ օգտվենք գաուսի պայմանից ([1])

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} + G_{12}^* G_{12}^* g_{\kappa\delta} - G_{11}^* G_{22}^* g_{\alpha\beta} \quad (16)$$

Այս բանաձևը գրելով բացված տեսքով և հաշվի առնելով (8), (10), (11), (12), (13) և (14) արտահայտությունները կստանանք՝

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} + G_{12}^1 G_{12}^1 g_{11} + 2G_{12}^1 G_{12}^2 g_{12} + G_{12}^2 G_{12}^2 g_{22} - G_{11}^1 G_{22}^1 g_{11} - G_{11}^2 G_{22}^1 g_{21} - G_{11}^1 G_{22}^2 g_{12} - G_{11}^2 G_{22}^2 g_{22}$$

այսինքն՝

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = G_{12}^1 G_{12}^1 g_{11} + G_{12}^2 G_{12}^2 g_{22}$$

Այժմ օգտվենք (4) բանաձևից, կստանանք

$$G_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{1\delta} \left(\frac{\partial g_{1\delta}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{2\delta}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) \quad (18)$$

$$G_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{2\delta} \left(\frac{\partial g_{1\delta}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{2\delta}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} g^{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) \quad (19)$$

Հաշվի առնելով (10), (11), (12), և (14) արտահայտությունները (18) և (19)

արտահայտությունները վերջնականապես կգառնա հետևյալ տեսքի

$$G_{12}^1 = 0 \quad (20)$$

$$G_{12}^2 = 0 \quad (21)$$

(20) և (21) արտահայտությունների արժեքները տեղադրելով (17)-ի մեջ կստանանք՝

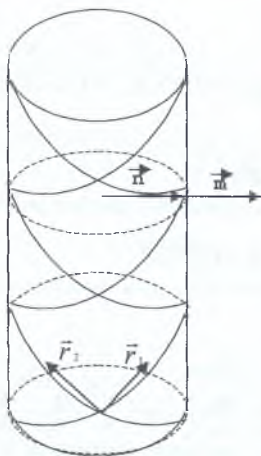
$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0 \quad (22)$$

(22)-ը տեղադրելով (15)-ի մեջ կստանանք

Թեորեման ապացուցված է լրիվությամբ:

Դիտարկենք օրինակ.

Վերցնենք փռվող $X^2 + Y^2 = R^2$ գլանային մակերևույթի վրա պտուտակային գծերը, որոնք իրարից տարբերվում են միայն պտտման ուղղությամբ: Ինչպես հայտնի է, դրանց պարամետրական հավասարումներն են



$$\vec{r}_1(t) = (R \cos \omega t) \vec{i} + (R \sin \omega t) \vec{j} + (at) \vec{k}$$

$$\vec{r}_2(t) = (-R \cos(-\omega t)) \vec{i} + (R \sin(-\omega t)) \vec{j} + (at) \vec{k}$$

Գծագրից պարզ երևում է, որ զլխավոր

նորմալը $\vec{n}$ կոլինյար է մակերևույթի

նորմալին $\vec{m}$, բայց համաձայն էջ 3-ում (1)

հատկության այդ գծերը կլինեն գեոդեզիկ

գծեր: Ինչպես գիտենք մակերևույթի վրա

եթե կորը տրված է վեկտորական

հավասարումով, ապա նրա շոշափող ուղղի

ուղղորդ վեկտորը կլինի՝ նրա ածանցյալը

ըստ t պարամետրի, այսինքն՝

$$\vec{r}'_1(t) = (-\omega R \sin \omega t) \vec{i} + (R \omega \cos \omega t) \vec{j} + a \vec{k}$$

$$\vec{r}'_2(t) = (R \omega \sin \omega t) \vec{i} + (-R \omega \cos \omega t) \vec{j} + a \vec{k}$$

Կազմենք դրանց սկալյար արտադրյալը և պահանջել որ հավասարվի զրոյի,

այսինքն՝

$$(\vec{r}'_1(t) \vec{r}'_2(t)) = -R^2 \omega^2 \sin^2 \omega t - R^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + a^2 = 0$$

$$-R^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) + a^2 = 0$$

$$\text{կամ } \omega^2 = \frac{a^2}{R^2} \quad \text{կամ } \omega = \pm \frac{a}{R}$$

Ուրեմն բավական է վերցնել $\omega_1 = \frac{a}{R}$ և $\omega_2 = -\frac{a}{R}$ այդ դեպքում համաձայն

ապացուցված թեորեմի կլինի $\nabla K = 0$:

- [1] П. К. Рошевский
- [2] И. Я. Бакельман
- [3] Д. В. Беклемишев

Курс дифференциальной геометрии
Высшая геометрия
Курс аналитической геометрии и
линейной алгебры

«Մակերևույթի գաուսյան կորության կախվածությունը նրա գեոդեզիկ գծերից»

Գ. Ա. Նալբանդյան

Ամփոփագիր

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է մակերևույթի գաուսյան կորության և նրա վրա օրթոգոնալ-գեոդեզիկ ցանցի գոյության կապը: Ցույց է տրված, որ եթե մակերևույթը թույլ է տալիս գեոդեզիկ-օրթոգոնալ ցանց, այսինքն՝ մակերևույթի վրա գոյություն ունեն իրար օրթոգոնալ գեոդեզիկ գծերի երկու ընտանիք, ապա այդ մակերևույթի գաուսյան կորությունը հավասար է զրոյի:

"Зависимость поверхности кривизны Гаусса от ее геодезических линий"

Г. А. Налбандян

Резюме

В работе исследуется поверхность кривизны Гаусса и связь между нею и ортогонально – геодезической сетью. Показано, что если поверхность позволяет ортогонально-геодезическую сеть, то есть на поверхности сосуществуют две семьи взаимно- ортогонально геодезических линий, то на поверхности кривизна Гаусса равно нулю.

"Dependence of the Gauss Curve surface on its geodesy lines"

G. A. Nalbandian

Conclusion

The work studies the Gausse Curve surface and its correlation with ortogonal geodesy net. We have proved that if a surface allows for orthogonall geodesy net, i. e. there are two families of reciprocally ortogonal geodesy lines on it, then the Gauss Curve of the surface is equal to zero.