

Երկրորդ կարգի հիպերմակերևույթների դասերի թիվը A_n և P_n տարածություններում
 $\Omega \cdot L \cdot U \cdot n \cdot p \cdot n \cdot j \cdot a \cdot n$

Հոդվածի նպատակն է ստանալ բանաձև, որը ցույց կտա հիպերմակերևույթների դասերի թիվը՝ կախված տարածության չափականությունից, լրացնելով դասագրքերում շարադրանքի այդ բացը:

Երկրորդ կարգի հիպերմակերևույթների դասակարգումը A_n և P_n տարածություններում ավանդական ձևով շարադրված են [1] և [2] գրքերում:

A_n աֆֆինային տարածությունում 2-րդ կարգի հիպերմակերևույթի հավասարումն է.

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0: \quad \text{Կոորդինատային համակարգի ձևափոխության բանաձևերի}$$

օգնությամբ այն բերվում է հետևյալ նրբ տիպերից որևէ մեկին, որին անվանելու ենք հիպերմակերևույթի նորմալ հավասարում.

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \dots + \varepsilon_r x_r^2 = 1 \quad (1 \leq r \leq n) \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \dots + \varepsilon_r x_r^2 = 0 \quad (1 \leq r \leq n) \quad (2)$$

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \dots + \varepsilon_r x_r^2 + x_n = 0 \quad (1 \leq r \leq n-1) \quad (3)$$

որտեղ $\varepsilon_i = \pm 1$:

(1), (2) և (3) հավասարումներից յուրաքանչյուրը բնորոշում է հիպերմակերևույթների որևէ դաս, կախված հիպերմակերևույթի ռանգից և ε_i -ի նշանից:

Բոլոր հնարավոր դասերը ստանալու համար դիտարկենք հիպերմակերևույթների նորմալ հավասարումները $A_i \subset A_n$ ($1 \leq i \leq n$) նախատարածություններում:

$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \dots + \varepsilon_r x_r^2 = 1$ հիպերմակերևույթը A_r տարածությունում ներկայացնում է էլիպսոիդ կամ հիպերբոլոիդ:

Աղյուսակ 1

ԷԼԻՊՏՈՒԴՆԵՐ ԵՎ ՀԻՊԵՐԲՈԼՈՒԴՆԵՐ					
A_i	հավասարումը	թիվը	A_i	հավասարումը	թիվը
A_1	$x_1^2 = 1$ $-x_1^2 = 1$	2	A_2	$x_1^2 + x_2^2 = 1$ $x_1^2 - x_2^2 = 1$ $-x_1^2 - x_2^2 = 1$	3
A_3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$	4	A_4	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$ $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$ $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$	5
A_5	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 1$ $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 1$ $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 1$	6	A_{2n-2}	$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n-2}^2 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{2n-2}^2 = 1$ $-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{2n-2}^2 = 1$	$2n-1$
A_{2n-1}	$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n-1}^2 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{2n-1}^2 = 1$ $-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{2n-1}^2 = 1$	$2n$	A_{2n}	$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n}^2 = 1$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{2n}^2 = 1$ $-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{2n}^2 = 1$	$2n+1$

A_i մինչև A_{2n-1} միայն կենտ նախատարածություններում հիպերմակերևույթների դասեր կկազմեն

$$S(A_1 - A_{2n-1}) = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \quad (1')$$

$$S(A_2 - A_{2n-2}) = 3 + 5 + 7 + \dots + 2n-1 = (n-1)(n+1) \quad (2')$$

$$S(A_3 - A_{2n}) = (n-1)(n+1) + 2n+1 = n(n+2) \quad (3')$$

(2) տիպի $\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \dots + \varepsilon_r x_r^2 = 0$ հիպերմակերևույթներն անվանելու ենք կոնական մակերևույթներ, կազմենք աղյուսակ ենթատարածություններում կոնական մակերևույթների դասերի համար:

Աղյուսակ 2

ԿՈՆԱԿԱՆ, ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ					
A_i	հավասարումը	թիվը	A_i	հավասարումը	թիվը
A_1	$x_1^2 = 0$	1	A_2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$ $x_1^2 - x_2^2 = 0$	2
A_3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	2	A_4	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$	3
A_5	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0$	3	A_6	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0$	4
.....					
A_{2n-1}	$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n-1}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{2n-1}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{n-1}^2 - x_{2n-1}^2 = 0$	n	A_{2n-2}	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{2n-2}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots - x_{2n-2}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_{n-1}^2 - \dots - x_{2n-2}^2 = 0$	n
A_{2n+1}	$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n+1}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{2n+1}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{n-1}^2 - \dots - x_{2n+1}^2 = 0$	$n+1$	A_{2n}	$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{2n}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - \dots - x_{2n}^2 = 0$	$n+1$

Այսպիսով կոնական մակերևույթների դասերը կլինեն.

$$S(A_1 - A_{2n-1}) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (1'')$$

$$S(A_2 - A_{2n-2}) = 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2}(n-1)(n+2) \quad (2'')$$

$$S(A_3 - A_{2n}) = 2 + 3 + 4 + \dots + n+1 = \frac{1}{2}n(n+3) \quad (3'')$$

Մնում է դասավարդել (3) տիպի $\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \dots + \varepsilon_r x_r^2 + x_n = 0$ հիպերմակերևույթները, որոնց կանվանենք պարաբոլոիդներ: $\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \dots + \varepsilon_{r-1} x_{r-1}^2 + x_n = 0$ հանդիսանում է պարաբոլ A_r ենթատարածությունում, իսկ A_n -ում՝ պարաբոլային գլան ($r < n$):

Աղյուսակ 3

ՊԱՐԱՐՈՒՄՆԵՐ					
A_i	հավասարումը	թիվը	A_i	հավասարումը	թիվը
A_1		0	A_2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	1
A_3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$	2	A_4	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0$	2
A_5	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 = 0$	3	A_6	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 + x_6^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 + x_6^2 = 0$	3
A_7	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 + x_7^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 + x_7^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 + x_7^2 = 0$	4	A_{2n-2}	$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n-3}^2 + x_{2n-2}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{2n-3}^2 + x_{2n-2}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - \dots$ $- x_{2n-3}^2 + x_{2n-2}^2 = 0$	$n-1$
A_{2n-1}	$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n-1}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{2n-3}^2 - x_{2n-2}^2 + x_{2n-1}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \dots - x_{2n-2}^2 + x_{2n-1}^2 = 0$	n	A_{2n}	$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots - x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \dots$ $- x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 0$	n

Ընդհանրացնելով աղյուսակի արդյունքները կստանանք պարաբոլիդների դասերի թիվը.

$$S(A_1 - A_{2n-1}) = 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2}(n-1)(n+2) \quad (1'')$$

$$S(A_7 - A_{2n-2}) = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n \quad (2'')$$

$$S(A_2 - A_{2n}) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (3'')$$

Գտնարելով ստացված համապատասխան արդյունքները կստանանք A_n -ում հիպերմակերևույթների բոլոր հնարավոր դասերը:

	Էլիպսոիդներ, հիպերբոլոիդներ	Պարաբոլոիդներ և պարաբոլային զլան	Կոնական մակերևույթ, հիպերի արթոթոուններ	ընդամենը	ընդամենը
$S(A_{2n-1})$	$(n+1)(2n-1)$	$n^2 - 1$	$n^2 + n - 1$	$4n^2 + 2n - 3$	$S(A_m) =$
$S(A_{2n})$	$n(2n+3)$	$n^2 + n - 1$	$n^2 + 2n$	$4n^2 + 6n - 1$	$= m^2 + 3m - 1$

Եթե $2n-1 = m$ ապա $4n^2 + 2n - 3 = m^2 + 3m - 1$

Եթե $2n = m$ ապա $4n^2 + 6n - 1 = m^2 + 3m - 1$

Մասնավոր դեպքերի համար՝

$$\Rightarrow S(A_m) = m^2 + 3m - 1 \quad (4)$$

	Էշիպտիդներ և հիպերբոլիդներ	Պարաբոլիդներ և պարաբոլային գլան	կոնական մակերևույթ	ընդամենը	
A_1	2	0	1	3	ուղղի վրա
A_2	5	1	3	9	հարթության վրա
A_3	9	3	5	17	նռագիծի տարածությունում
A_4	14	5	8	27	քառաչափ տարածությունում

Այժմ դիմենք թիվ 2 աղյուսակի հետևյալ հավասարումներին

$$A_1 : x_1^2 = 0$$

$$A_2 : x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$A_3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

Այս հինգ հավասարումները հանդիսանում են P_2 պրոյեկտիվ հարթության II կարգի գծերի 5 տարբեր դասերը:

Ուրեմն P_{2n-1} տարածության II կարգի պրոյեկտիվ հիպերմակերևույթների դասերը հաշվելու համար պետք է գումարել $(1'')$ և $(3'')$ -ը:

$$S(A_1 - A_{2n}) = \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{2} n(n+3) = n(n+2)$$

Իսկ P_{2n} տարածության դասերը հաշվելու համար պետք է գումարել $(1'')$, $(3'')$ և A_{2n+1} ննթատարածության կոնական մակերևույթների թիվը՝ $n+1$ (աղյուսակ 2):

Այսինքն նախորդ արդյունքին գումարել $n+1$:

$$S(P_{2n}) = n(n+2) + n+1 = n^2 + 3n + 1$$

$$\text{Այսպիսով } S(P_{2n-1}) = n^2 + 2n \quad (5)$$

$$S(P_{2n}) = n^2 + 3n + 1 \quad (6)$$

Ստուգենք փորը չափի մի քանի տարածությունների համար հիպերմակերևույթների դասերը պրոյեկտիվ P_n տարածությունում:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
$S(P_i)$	3	5	8	11	15	19	24

$$[1]\text{-ում բերված է } S(n) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\frac{k}{2} \right] + n + 1$$

բանաձևը, որը միացնում է (5) և (6) բանաձևերը: Գործնականորեն n -ի մեծ արժեքների դեպքում ավելի նպատակահարմար է օգտվել (5) կամ (6) բանաձևերից:

Գրականություն

1. Александров П.С. – Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва, "Наука", 1979.

2. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. – Линейная алгебра и многомерная геометрия. Москва, "Наука", 1970.

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՀԵՊԵՐՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐԻ ԹԻՎԸ n ՉԱՓԱՆԻ ԱՅԿԵՆԱՅԻՆ ԵՎ ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ ՏԱՐԱԾՈՒՅԹՈՒՆՆԵՐՈՒՄ:

Ռ.Լ. Առաքելյան

Ամփոփագիր

A_n և P_n տարածություններում Π կարգի հիպերմակերևույթների դասերի թիվը կախված տարածության չափականությունից $\mathbb{R}^n$ -ական դասագրքերում բացակայում է: Սույն հոդվածի նպատակն է ստանալ բանաձև, որը արտահայտում է նշված կապը՝

$$S(A_n) = n^2 + 3n - 1 \quad (1) \quad S(P_{2n-1}) = n^2 + 2n \quad (2) \quad S(P_{2n}) = n^2 + 3n + 1 \quad (3)$$

(1) ցույց է տալիս հիպերմակերևույթների դասերի թիվը աֆֆինային A_n n չափանի տարածությունում, իսկ (2) և (3) համապատասխանաբար պրոյեկտիվ P_{2n-1} և P_{2n} տարածություններում:

Նոդվածում ցույց է տրվում, որ եթե հիպերմակերևույթները դասակարգվեն $A_i \subset A_n \quad i = 1, 2, \dots, n$ ենթատարածություններում, ապա դասերի թվի համար ստացվում են օրինաչափություններ, որոնք թույլ են տալիս ստանալու (1), (2) և (3) բանաձևերը:

Число классов гиперповерхностей второго порядка в n -мерном аффинном и проективном пространствах

Р. Л. Аракелян

Резюме

Число классов гиперповерхностей отсутствует в вузовских учебниках. Получены формулы, указывающие на связь между числом классов и размерностью пространства.

(4) указывает число классов гиперповерхностей в A_n , а (5) и (6) – соответственно в проективных пространствах P_{2n-1} и P_{2n} .

Показано, так же что если гиперповерхности рассмотреть в подпространствах $A_i \subset A_n \quad i = 1, 2, \dots, n$, получаются закономерности, позволяющие вывести формулы (4), (5) и (6).