УДК 517.948.25

Об одной неоднородной двупараметрической краевой задаче Дирака

Г. Г. Саакян

В работе находится решение для одной неоднородной краевой двупараметрической задачи Дирака.

Многопараметрические спектральные задачи начали активно изучаться сначала в работах Ф.В.Аткинсона (см., например, [1]) для компактных операторов в конечномерных пространствах, затем для дифференциальных операторов в работах П.Д.Брауна, С.Д.Слимана (см. например, [2],[3]). Однако в основном исследования касались дифференциальных операторов типа Штурма-Лиувилля. На многопараметрические задачи были перенесены основные результаты однопараметрических спектральных задач: дискретность спектра, ортогональность собственных функций, полнота и сходимость разложения по собственным функциям.

Целью предлагаемой работы является определение формулы для решения одной двупараметрической краевой задачи Дирака.

Рассматривается следующая двухпараметрическая задача Дирака :

$$S\frac{dy^r(x_r)}{dx_r}+G_r(x_r)y^r(x_r)=\sum_{s=1}^{2}\lambda_s A_{rs}(x_r)y^r(x_r),\quad 0\le x_r\le\lambda_r,\quad r=1,2 \tag{1}$$

с граничным условием

$$y^r(\lambda_r)=\rho_r y^r(0),\qquad r=1,2\ , \tag{2}$$

где ρ_r-комплексное число и $|\rho_r|=1$, $r=1,2$, $G_r(x_r)$, $A_{rs}(x_r)$ -($r,s=1,2$)-непрерывные на $[0,\lambda_r]$ вещественные, симметричные матрицы порядка 2×2, λ_1, λ_2 -комплексные параметры, $y^r(x_r)=(y_1^r(x_r),y_2^r(x_r))$ - C^2 значная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,\lambda_r]$, $S=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Не теряя общности и для удобства дальнейших рассуждений примем $\rho_r=1$ $(r=1,2)$.

Рассмотрим неоднородную задачу

$$S\frac{dy^1}{dx_1}+G_1y^1=(\lambda_1A_{11}+\lambda_2A_{12})y^1-\chi_1,\qquad y^1(\lambda_1)=y^1(0). \tag{3}$$

Имеет место

Теорема 1. *Если* $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ *не является собственным значением задачи* (1)-(2), $\chi_1(x)\in L(0,\lambda_1)$, *то неоднородная задача* (3) *имеет единственное решение в виде*

$$y^1(x_1)=\int_0^{\lambda_1}K_1(x_1,t_1,\lambda)\chi_1(t_1)dt_1\ , \tag{4}$$

где $K_1(x_1,t_1,\lambda)$ *непрерывно по совокупности переменных* x_1 *и* t_1, *за исключением случаев, когда* t_1 *переходит фиксированное значение* x_1 ($x_1\in[0,\lambda_1]$).

Доказательство. Будем искать решение задачи (3) в виде

$$y^1(x_1)=Y_1(x_1,\lambda)\eta_1(x_1),$$

где $Y_1(x_1,\lambda)$-фундаментальное матричное решение задачи

$$S\frac{dY_1}{dx_1}+GY_1=(\lambda_1A_{11}+\lambda_2A_{12})Y_1,\qquad Y_1(0)=E. \tag{5}$$

Имеем

$$S\frac{dy^1}{dx_1}=S\left(\frac{dY_1}{dx_1}\right)\eta_1+SY\frac{d\eta_1}{dx_1}=(-G+\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)Y_1\eta_1+SY\frac{d\eta_1}{dx_1}.$$

Полученное соотношение согласуется с (3), если

$$SY\frac{d\eta_1}{dx_1} = -\chi_1, \tag{6}$$

откуда

$$\frac{d\eta_1}{dx_1} = -Y^{-1}S^{-1}\chi_1. \tag{7}$$

Так как $y^1(0) = Y_1(0)\eta_1(0) = \eta_1(0)$, то интегрируя (7), найдем

$$\eta_1(x_1) = -\int_0^{x_1} Y_1^{-1}(t_1)S^{-1}\chi_1(t_1)dt_1 + y^1(0). \tag{8}$$

Отсюда

$$y^1(x_1) = Y_1(x_1)y^1(0) - \int_0^{x_1} Y_1(x_1)Y_1^{-1}(t_1)S^{-1}\chi_1(t_1)dt_1. \tag{9}$$

Так как $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ не собственное значение, то матрица $E - Y_1(\lambda_1)$ обратима. Учитывая то, что $y^1(\lambda_1) = y^1(0)$, из (9) найдем

$$y^1(0) = (Y_1(\lambda) - E)^{-1}\int_0^{\lambda_1} Y_1(\lambda_1)Y_1^{-1}(t_1)S^{-1}\chi_1(t_1)dt_1.$$

Внося это выражение в (9), получим решение задачи (3)

$$y^1(x_1) = Y_1(x_1)(Y_1(\lambda_1) - E)^{-1}\int_0^{\lambda_1} Y_1(\lambda_1)Y_1^{-1}(t_1)S^{-1}\chi_1(t_1)dt_1 - \int_0^{x_1} Y_1(x_1)Y_1^{-1}(t_1)S^{-1}\chi_1(t_1)dt_1. \tag{11}$$

Отсюда вытекает, что полученное решение можно представить в виде

$$y^1(x_1) = \int_0^{\lambda_1} K_1(x_1, t_1, \lambda)\chi_1(t_1)dt_1. \tag{12}$$

Из (11) следует, что при $x_1 < t_1$ разрешающее ядро $K_1(x_1, t_1, \lambda)$ имеет вид

$$K_1(x_1, t_1, \lambda) = Y_1(x_1)(Y_1(\lambda_1) - E)^{-1} Y_1(\lambda_1)Y_1^{-1}(t_1)S^{-1}, \tag{13}$$

а при $x_1 > t_1$

$$K_1(x_1, t_1, \lambda) = Y_1(x_1)(Y_1(\lambda_1) - E)^{-1} Y_1(\lambda_1)Y_1^{-1}(t_1)S^{-1} - Y_1(x)Y_1^{-1}(t)S^{-1} \tag{14}$$

или что то же самое

$$K_1(x_1, t_1, \lambda) = Y_1(x_1)\{E - Y_1^{-1}(\lambda_1)(Y_1(\lambda_1) - E)\}(Y_1(\lambda_1) - E)^{-1} Y_1(\lambda_1)Y_1^{-1}(t_1)S^{-1} =$$
$$= Y_1(x_1)Y_1^{-1}(\lambda_1)(Y_1(\lambda_1) - E)^{-1} Y_1(\lambda_1)Y_1^{-1}(t_1)S^{-1}.$$

Подстановкой нетрудно убедиться, что $y^1(x_1)$, заданный равенством (9), удовлетворяет задаче (3).

Заметим, что при $0 < x_1 < \lambda_1$ существуют различные пределы

$$K_1(x_1, x_1 + 0, \lambda) = Y_1(x)(Y_1(\lambda_1) - E)^{-1} Y_1(\lambda_1)Y_1^{-1}(x_1)S^{-1},$$
$$K_1(x_1, x_1 - 0, \lambda) = Y_1(x)(Y_1(\lambda_1) - E)^{-1} Y_1(\lambda_1)Y_1^{-1}(x_1)S^{-1} - S^{-1}.$$

Таким образом $K_1(x_1, t_1, \lambda)$ непрерывно по совокупности переменных x_1 и t_1, за исключением скачка, равного S^{-1}, когда $t_1 = x_1$ ($x_1 \in [0, \lambda_1]$). Теорема доказана.

Аналогично проведенным выше рассуждениям можно доказать, что решение неоднородной задачи

$$S\frac{dy^2}{dx_2} + G_2 y^2 = (\lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{12})y^2 - \chi_2, \qquad y^2(\lambda_2) = y^2(0) \tag{15}$$

$y_2(x_2)$ также представимо в виде

$$y^2(x_2) = \int_0^{\lambda_2} K_2(x_2, t_2, \lambda)\chi_2(t_2)dt_2, \tag{16}$$

где $K_2(x_2,t_2,\lambda)$ непрерывно по совокупности переменных x_2 и t_2, за исключением скачка, равного S^{-1}, когда $t_2 = x_2$ $(x_2 \in [0,\lambda_2])$.

Рассмотрим теперь двупараметрическую неоднородную задачу Дирака

$$S\frac{dy^1}{dx_1} + Gy^1 = (\lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{12})y^1 - \chi_1, \quad y^1(\lambda_1) = y^1(0), \tag{17}$$

$$S\frac{dy^2}{dx_2} + G_2 y^2 = (\lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{12})y^2 - \chi_1, \quad y^2(\lambda_2) = y^2(0). \tag{18}$$

Тогда верна

Теорема 2. *Если* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ *не является собственным значением задачи* (1)-(2), $\chi_1(x) \in L(0,\lambda_1)$, $\chi_2(x) \in L(0,\lambda_2)$, $y^1(x_1), y^2(x_2)$*-решение задачи (17)-(18), то* $y(x) = y_1(x_1) \otimes y_2(x_2)$ *представимо в виде*

$$y(x) = \int_I K(x_1,x_2,t_1,t_2,\lambda)\chi(t)dt, \tag{19}$$

где $K(x,t,\lambda)$ *непрерывно по совокупности переменных* x_1,x_2,t_1,t_2, *за исключением случаев, когда* $t_1 = x_1$ $(x_1 \in [0,\lambda_1])$ *или когда* $t_2 = x_2$ $(x_2 \in [0,\lambda_2])$.

Доказательство. Пусть $y^1(x_1), y^2(x_2)$*-решение задачи (17)-(18).* Согласно доказанной теореме 1

$$y^1(x_1) = \int_0^{\lambda_1} K_1(x_1,t_1,\lambda)\chi_1(t_1)dt_1, \quad y^2(x_2) = \int_0^{\lambda_2} K_2(x_2,t_2,\lambda)\chi_2(t_2)dt_2.$$

Тогда имеем (см. [4], [5])

$$y(x) = y^1(x_1)\otimes y^2(x_2) = \int_0^{x_1} K_1(x_1,t_1,\lambda)\chi_1(t_1)dt_1 \otimes \int_0^{x_2} K_2(x_2,t_2,\lambda)\chi_2(t_2)dt_2 = \int_I K(x,t,\lambda)\chi(t)dt,$$

где

$$K(x,t,\lambda) = K_1(x_1,t_1,\lambda)\otimes K_2(x_2,t_2,\lambda), \quad \chi(x) = \chi_1(x_1)\otimes\chi_2(x_2).$$

Непрерывность функции-матрицы $K(x,t,\lambda)$ и характер разрывов следует из непрерывности и характера разрывов для функций $K_1(x_1,t_1,\lambda)$ и $K_2(x_2,t_2,\lambda)$. Теорема доказана.

Литература

1. Atkinson F. V. Multi-parameter eigenvalue problems . Academic Press ,-1972,-v.1
2. P.J.Browne. A Multi-Parameter Ejgenvalue Problem, J. Math.Anal. and Appl.,-1972,-v.38, p.553-568.
3. *Sleeman B.D.* Some aspects of Multi-parameter spectral theory.-Dep., Math.Univ. Scotland, -1974.- p.81-94.
4. Саакян Г.Г. О полноте собственных функций двухпараметри1еской задачи Дирака с периодическими коэффициентами. Ученые записики, ЕрГУ,- 2002, -т.1, с.9-13
5. Саакян Г.Г. Теорема Флоке-Ляпунова для двухпараметрической задачи Дирака с периодическими коэффициентами. Ученые записки ЕрГУ,-2001, -т2, с.14-21.

Մի երկրապարամետրանոց Դիրակի եզրային խնդրի մասին

Գ.Հ. Սահակյան

Ամփոփում

Մի երկպարամետրանոց Դիրակի եզրային խնդրի համար որոշվում է լուծումը: