

ԱՌՄԱՆՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՉԵՔԻՇԵՎՅԱՆ ՑԱՆՑԵՐ

Գ.Ա. Նալբանդյան

Մալենձատիկայի ամբիոն

Տանք մի քանի նախնական գաղափարներ, որոնք անհրաժեշտ են հետագայում:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 1: Դիֆերենցի W_n բազմաձևությունը կոչվում է V^n ռիմանյան տարածություն, եթե նրա վրա տրված է տենզորային դաշտ

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

ձևով անգամ կոարիանտ, սիմետրիկ և չվերասերվող:

Ինչպես հայտնի է V^n -ում g_{ij} տենզորով որոշվում է ռիմանյան մետրիկա՝

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (1)$$

որտեղ $(i, j = \overline{1, n})$ և $g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2, \dots, u^n)$ $M(u^1, u^2, \dots, u^n)$

V^n -ում տրվում է առանց ոլորման աֆինական կապակցվածություն, որի նկատմամբ վեկտորների գույքահեռ տեղափոխման ժամանակ պահպանվում է ինվարիանտ վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Այդպիսի կապակցվածությունն անվանում են ռիմանյան կապակցվածություն, որի գործակիցներն որոշվում են

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} \right) \quad (2)$$

Ս ա հ մ ա ն ու մ 2: Յանցը V^n -ում անվանում են չեքիշկյան, եթե նրա ցանկացած ընտանիքի գծերի շոշափող վեկտորները մնացած ընտանիքների գծերի ներկայությամբ տեղափոխվում են գույքահեռ:

Մեր նպատակն է պարզել ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն ռիմանյան տարածության կապակցվածության գործակիցները, որպեսզի կոորդինատական ցանցը լինի չեքիշկյան ցանց:

Դիցուք $V^n = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ վեկտորը գույքահեռ տեղափոխվում է $u^i = u^i(t)$ կորի ներկայությամբ, ապա դա կնշանակի, որ պետք է այդ վեկտորի կոորդինատները բավարարեն հետևյալ հավասարությանը՝

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} v^j = 0 \quad (3)$$

Դիցուք ռիմանյան տարածությունում տրված են ցանցի գծերի ընտանիքները, հետևյալ հավասարումների տեսքով՝

$$u^i : \begin{cases} u^i = \varphi^i(t) \\ u^k = c = \text{const} \quad k \neq i \quad i, k = \overline{1, n} \end{cases}$$

Այսինքն

$$u^1\text{-գիծ} : \begin{cases} u^1 = \varphi^1(t) \\ u^k = c = \text{const} \quad k \neq 1 \quad k = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$u^2\text{-գիծ} : \begin{cases} u^2 = \varphi^2(t) \\ u^k = c = \text{const} \quad k \neq 2 \quad k = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$u^3 - \text{գիծ} : \begin{cases} u^3 = \varphi^3(t) \\ u^k = c = \text{const} \quad k \neq 3 \quad k = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$u^n - \text{գիծ} : \begin{cases} u^n = \varphi^n(t) \\ u^k = c = \text{const} \quad k \neq n \quad k = \overline{1, n} \end{cases}$$

Ինչպես հայտնի է $u' = u'(t)$ կորի շոշափող վեկտորի կոորդինատները որոշվում են

$$\frac{du'}{dt} = \frac{d\varphi'(t)}{dt} \quad \text{բաժանելով:}$$

$$\text{Ուրեմն} \quad \frac{du'}{dt} = \left\{ \frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}, \dots, \frac{du^n}{dt} \right\} \quad \text{բացելով, կստացվի}$$

$$\left| \frac{du'}{dt} = \left\{ \frac{d\varphi^1(t)}{dt}; 0; 0; \dots; 0 \right\} \right. \quad u^1 - \text{գծի դեպքում}$$

$$\left| \frac{du'}{dt} = \left\{ 0; \frac{d\varphi^2(t)}{dt}; 0; \dots; 0 \right\} \right. \quad u^2 - \text{գծի դեպքում}$$

$$\left| \frac{du'}{dt} = \left\{ 0; 0; \frac{d\varphi^3(t)}{dt}; \dots; 0 \right\} \right. \quad u^3 - \text{գծի դեպքում}$$

$$\left| \frac{du'}{dt} = \left\{ 0; 0; 0; \dots; \frac{d\varphi^n(t)}{dt} \right\} \right. \quad u^n - \text{գծի դեպքում}$$

Այժմ ենթադրենք, որ u^1 -գծի շոշափող վեկտորը $v^k = \{1; 0; 0; \dots; 0\}$ գուգահեռ տեղափոխվում է u^2 -գծի նրկայնքով: Հաշվի առնելով u^2 -գծի հավասարումների տեսքը և տեղադրելով (3)-ի մեջ, կստանանք

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} v^j = 0, \quad \frac{dv^k}{dt} = 0 \quad \text{որովհետև} \quad v^1 = 1, \quad v^2 = \dots = v^n = 0 \quad \text{ուրեմն}$$

$$\Gamma_{n1}^k \frac{du^1}{dt} v^1 = 0 \quad \text{կամ} \quad \Gamma_{n1}^k \frac{du^1}{dt} = 0 \quad \text{կամ} \quad \Gamma_{n1}^k \frac{du^2}{dt} = 0 \quad \text{քանի որ} \quad \frac{du^2}{dt} \neq 0, \quad \text{հետևաբար}$$

$$\Gamma_{n1}^k = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (4)$$

Կատարելով անալոգ դատողությունները, երբ u^1 -գծի շոշափող վեկտորը գուգահեռ տեղափոխվում է u^3 -գծի, u^4 -գծի, ..., u^n -գծի նրկայնքով, կստացվի հավասարումների հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} \Gamma_{31}^k = 0 \\ \Gamma_{41}^k = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Gamma_{n1}^k = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Ընդհանրացնելով ասածները կարող ենք գրել, որ եթե u^1 -գծի շոշափող վեկտորը տեղափոխվում է գուգահեռ ցանցի մյուս գծերի նրկայնքով, ապա տեղի են ունենում հետևյալ հավասարությունները

$$\Gamma_{i1}^k = 0, \quad i, k = \overline{1, n} \quad i \neq 1 \quad (6)$$

կատարելով տրամաբանական նույն անալոգ դատողությունները մյուս ընտանիքի գծերի շոշափող վեկտորների նկատմամբ՝ կատացվի հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \Gamma_{i2}^k = 0 & u^2 - \text{գծի համար} & i \neq 2 \\ \Gamma_{i3}^k = 0 & u^3 - \text{գծի համար} & i \neq 3 \\ \dots\dots\dots \\ \Gamma_{in}^k = 0 & u^n - \text{գծի համար} & i \neq n \end{cases} \quad (7)$$

Այսպիսով, (6) և (7) պայմանները կարելի է գրել կոմպակտ ձևով

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad i \neq j \quad (8)$$

Այսպիսով, ապացուցվեց հետևյալ թեորեմն

Թե ռ ռ ն մ 1: Որպեսզի V^n ռիմանյան տարածության կոորդինատական ցանցը լինի չեքիչկան, անհրաժեշտ և բավարար է, որ կապակցվածության գործադիցները բավարարեն (8) պայմանին:

Այժմ բացենք (8) հավասարությունը, օգտագործելով (2) պայմանը կատացվի

$$\frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} \right) = 0$$

$$\text{Նշանակենք} \quad x_i = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} \quad \text{կատացվի} \quad \frac{1}{2} g^{ks} x_i = 0 \quad \text{կամ} \quad g^{ks} x_i = 0 \quad \text{կամ}$$

$$g^{k1} x_1 + g^{k2} x_2 + \dots + g^{kn} x_n = 0 \quad \text{բացելով, կատացվի}$$

$$\begin{cases} g^{11} x_1 + g^{12} x_2 + \dots + g^{1n} x_n = 0 \\ g^{21} x_1 + g^{22} x_2 + \dots + g^{2n} x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ g^{n1} x_1 + g^{n2} x_2 + \dots + g^{nn} x_n = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Փաստորեն ստացվեց n -անհայտով n -հատ գծային համասեռ հավասարումների համակարգ, որի որոշիչը՝ $\text{Det} \| g^{ks} \| \neq 0$, հետևաբար ունի միայն ու միայն $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ գրոյական լուծում:

$$\text{Այսպիսով,} \quad \frac{\partial g_{is}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} = 0 \quad i \neq j \quad (10)$$

վերցնենք $s = i$ այդ դեպքում կլինի

$$\frac{\partial g_{ii}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^i} = 0$$

բայց $g_{ij} = g_{ji}$ քանի որ մետրիկան սիմետրիկ է, հետևաբար

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^j} = 0 \quad (11)$$

(11) պայմանը փաստորեն նշանակում է, որ $g_{ii} = g_{ii}(u^i)$ ֆունկցիա է միայն u^i -ից, այսինքն

$$\begin{cases} g_{11} = g_{11}(u^1) \\ g_{22} = g_{22}(u^2) \\ \dots\dots\dots \\ g_{nn} = g_{nn}(u^n) \end{cases} \quad (12)$$

Այժմ գրենք (1) քանաձևը բացված տեսքով.

$$ds^2 = g_{11}(u^1)(du^1)^2 + g_{22}(u^2)(du^2)^2 + \dots + g_{nn}(u^n)(du^n)^2 + g_{ij} du^i du^j \quad i \neq j \quad (13)$$

Մոծենք նոր կոորդինատներ

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 = \int \sqrt{g_{11}(u^1)} du^1 \\ \tilde{u}^2 = \int \sqrt{g_{22}(u^2)} du^2 \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}^n = \int \sqrt{g_{nn}(u^n)} du^n \end{cases} \quad (14)$$

(14) պայմանը տեղադրելով (13) պայմանի մեջ և կատարելով համապատասխան գործողությունները կտա՝

$$dS^2 = d\tilde{u}^{1^2} + d\tilde{u}^{2^2} + \dots + d\tilde{u}^{n^2} + \tilde{g}_{ij} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j \quad i \neq j$$

Նպատակահարմարության համար ընդունում ենք $\tilde{u}^i = u^i$, ապա կունենանք

$$dS^2 = du^{1^2} + du^{2^2} + \dots + du^{n^2} + g_{ij} du^i du^j \quad (15)$$

Այսպիսով, ապացուցվեց հետևյալ թեորեման

Թ ե ո թ ե մ 2: Եթե V^n ռիմանյան տարածությունում կոորդինատական ցանցը չնքիչկյան ցանց է, ապա այդ տարածության մետրիկան կարելի է բերել (15) տեսքի:

Ամփոփում

Աշխատանքում ներկայացված է Գ.Ա.Նալբանդյանի «Մակերևութի վրա վեկտորի զուգահեռ տեղափոխության մասին» հոդվածի տրամաբանական շարունակությունը, որտեղ ուսումնասիրվում է չնքիչկյան ցանցը V^n -ում: Տարածության կոորդինատական ցանցը չնքիչկյան ցանց լինելու համար ապացուցված է անհրաժեշտ և բավարար պայման: Ելնելով այդ արդյունքից՝ տրված են տարածության մետրիկայի առանձնահատկությունները և մետրիկայի տեսքը:

Резюме

В данной работе изложено логическое продолжение статьи Г.А. Налбандяна “О параллельном переносе вектора на поверхности”, где изучаются сети Чебышева в пространстве V^n . Для того, чтобы сети пространства V^n были сетью Чебышева, доказаны необходимые и достаточные условия.

Исходя из этого, даны особенности метрики пространства V^n и его вид.

Գրականություն

1. В.Ф. Коган Основы теории поверхностей ОГНЗ 1948г.
2. Л.П.Эйзенхарт Риманова геометрия ГИИЛ 1948г.
3. П.К.Рашевский Риманова геометрия и тензорный анализ М 1964г.
4. Л.А.Матевосян Поверхности в некоторых римановых расслоеных пространствах том LIX NI 1974г.
5. Л.А. Матевосян О геометрических свойствах некоторых ортогональных расслоений римановых пространств Ученые записи Е-1979г.
6. А.П.Норден Пространства Аффинной связности “Наука” М. 1976г.