УДК: 517.948.25

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Г. Г. СААКЯН

Кафедра математики

В работе излагается метод исследования систем Дирака, отличающийся от традиционных, который может быть успешно применен в исследовании различных систем дифференциальных уравнений.

Рассматривается каноническая система Дирака

$$S\frac{dy}{dx}+G(x)y=0, \quad y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; G=\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$p(x), r(x)$-действительные функции, определенные и непрерывные на интервале [0, π].

Структура решений каноничекой системы Дирака, а также свойства собственных функций и значений для каноничекой задачи Дирака достаточно подробно исследовано во многих научных трудах (см, например, [1]). В данной работе предлагается несколько иной, отличающийся от традиционных, подход к исследованию систем и задач Дирака, который может быть с успехом применен для исследования многих систем дифференциальных уравнений.

Пусть $Y(x)$ – матрицант системы (1) (см., например, [2], стр. 70). Известно, что если матрица $G(x)$ постоянна ($p(x)=p$, $r(x)=r$), то матрицант системы (1) $Y(x)$ определяется формулой (см., например, [2], стр. 73)

$$Y(x)=e^{SGx}=e^{\int_0^x SG(x)dx}. \tag{3}$$

В данной работе рассматривается вопрос: для каких матриц $G(x)$ вида (2), решение системы (1) также представляется в виде (3), т.е.

$$Y(x)=e^{\int_0^x SG(x)dx}.$$

Для этого рассмотрим предварительно некоторые свойства матричных экспонент. Определим сначала компоненты матрицы $e^{\begin{pmatrix} 0 & r \\ -p & 0 \end{pmatrix}}$.

Воспользовавшись определением матричной экспоненты (см. например, [2], стр. 46)

$$e^A=E+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\dots, \tag{4}$$

а также известными из курса математического анализа представлениями

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots,$$

будем иметь

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & r \\ -p & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r \\ -p & 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & r \\ -p & 0 \end{pmatrix}^2}{2!} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & r \\ -p & 0 \end{pmatrix}^3}{3!} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r \\ -p & 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} -rp & 0 \\ 0 & -rp \end{pmatrix}}{2!} +$$

$$+ \frac{\begin{pmatrix} 0 & -r^2 p \\ rp^2 & 0 \end{pmatrix}}{3!} + \frac{\begin{pmatrix} r^2 p^2 & 0 \\ 0 & r^2 p^2 \end{pmatrix}}{4!} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & r^3 p^2 \\ -r^2 p^3 & 0 \end{pmatrix}}{4!} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{rp}{2!} + \frac{r^2 p^2}{4!} - \ldots & r - \frac{r^2 p}{3!} + \frac{r^3 p^2}{5!} - \\ -p + \frac{rp^2}{3!} - \frac{r^2 p^3}{5!} + \ldots & 1 - \frac{rp}{2!} + \frac{r^2 p^2}{4!} - \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{rp}) & \frac{r}{\sqrt{rp}} \sin(\sqrt{rp}) \\ -\frac{p}{\sqrt{rp}} \sin(\sqrt{rp}) & \cos(\sqrt{rp}) \end{pmatrix}$$

или

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & r \\ -p & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{rp} & \sqrt{\frac{r}{p}} \sin(\sqrt{rp}) \\ -\sqrt{\frac{p}{r}} \sin(\sqrt{rp}) & \cos(\sqrt{rp}) \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Аналогичными преобразованиями можно найти, что

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & r \\ p & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{rp}{2!} + \frac{r^2 p^2}{4!} + \ldots & r + \frac{r^2 p}{3!} + \frac{r^3 p^2}{5!} + \ldots \\ p + \frac{rp^2}{3!} + \frac{r^2 p^3}{5!} + \ldots & 1 + \frac{rp}{2!} + \frac{r^2 p^2}{4!} + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\sqrt{rp}} + e^{-\sqrt{rp}}}{2} & \sqrt{\frac{r}{p}} \left(\frac{e^{\sqrt{rp}} - e^{-\sqrt{rp}}}{2} \right) \\ \sqrt{\frac{p}{r}} \left(\frac{e^{\sqrt{rp}} - e^{-\sqrt{rp}}}{2} \right) & \frac{e^{\sqrt{rp}} + e^{-\sqrt{rp}}}{2} \end{pmatrix},$$

$$e^{\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 + p + \frac{p}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \ldots & 0 \\ 0 & 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^p & 0 \\ 0 & e^q \end{pmatrix} \qquad (6)$$

В частности, из полученной формулы будет следовать, что $e^E = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = eE$,

1. $e^{pE} = \begin{pmatrix} e^p & 0 \\ 0 & e^p \end{pmatrix} = e^p E$.

Соотношения (5) и (6) позволяют определить матричный вид следующей экспоненты $e^{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}}$.

Действительно, нетрудно проверить непосредственным вычислением, что матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ коммутируют. Тогда, воспользовавшись известным свойством $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, имеющим место для коммутируемых матриц A и B (см., например, [3], стр. 195), получим

$$e^{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^a \dfrac{e^{\sqrt{bc}} + e^{-\sqrt{bc}}}{2} & e^a \sqrt{\dfrac{b}{c}} \cdot \dfrac{e^{\sqrt{bc}} - e^{-\sqrt{bc}}}{2} \\ e^a \sqrt{\dfrac{c}{b}} \cdot \dfrac{e^{\sqrt{bc}} - e^{-\sqrt{bc}}}{2} & e^a \dfrac{e^{\sqrt{bc}} + e^{-\sqrt{bc}}}{2} \end{pmatrix}$$

или

$$e^{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^a \cos\sqrt{bc} & e^a \sqrt{\dfrac{b}{c}} \cdot \sin\sqrt{bc} \\ e^a \sqrt{\dfrac{c}{b}} \cdot \sin\sqrt{bc} & e^a \cos\sqrt{bc} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Определим теперь вид матриканта $Y(x)$ системы (1) в случае постоянных $p(x)$ и $r(x)$ ($p(x) = p$, $r(x) = r$). Для этого имеем

$$Y(x) = e^{SGx} = e^{\begin{pmatrix} 0 & rx \\ -px & 0 \end{pmatrix}}.$$

Используя соотношение (4), найдем, что

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{rpx} & \sqrt{\dfrac{r}{p}} \sin\sqrt{rpx} \\ -\sqrt{\dfrac{p}{r}} \sin\sqrt{rpx} & \cos\sqrt{rpx} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Нетрудно убедиться в том, что полученное значение $Y(x)$ удовлетворяет системе (1).

Аналогично вышепроведенным рассуждениям, в случае $G = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$, найдем следующее представление для матриканта системы (1)

$$Y(x) = e^{-qx} \begin{pmatrix} \cos px & \sin px \\ -\sin px & \cos px \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь, при каких $p(x)$ и $r(x)$, матрицант системы (1) будет определяться также, как и в случае постоянных $p(x)$ и $r(x)$, а именно, формулой

$$Y(x) = e^{S\int_0^x G(x)dx} = e^{\int_0^x SG(x)dx}.$$

Подставив $Y(x) = e^{\int_0^x SG(x)dx}$ в систему (1), получим

$$Se^{\int\limits_0^x SG(x)dx}\cdot SG+Ge^{\int\limits_0^x SG(x)dx}=S\left(e^{\int\limits_0^x SG(x)dx}\cdot SG-SG\cdot e^{\int\limits_0^x SG(x)dx}\right).$$

Очевидно, что полученное выражение будет равняться нулю, если будут перестановочны матрицы $e^{\int\limits_0^x SG(x)dx}$ и $SG(x)$. Если обозначить через $T(x)$ матрицу $SG(x)$ и заметить, что $SG(x)=\begin{pmatrix} 0 & r(x) \\ -p(x) & 0 \end{pmatrix}$, то полученную задачу можно будет сформулировать следующим образом: для каких матриц $T(x)$ вида $\begin{pmatrix} 0 & r(x) \\ -p(x) & 0 \end{pmatrix}$ будут перестановочны матрицы $e^{\int\limits_0^x T(x)dx}$ и $T(x)$.

С другой стороны, согласно (3)

$$e^{\int T(x)dx}=E+\int\limits_0^x T(x)dx+\frac{\left(\int\limits_0^x T(x)dx\right)^2}{2!}+\dots,$$

откуда будет следовать, что перестановочность матриц $e^{\int\limits_0^x T(x)dx}$ и $T(x)$ будет равносильна перестановочности матриц $\int\limits_0^x T(x)dx$ и $T(x)$. Таким образом, предстоит выяснить, для каких матриц $T(x)$ вида $\begin{pmatrix} 0 & r(x) \\ -p(x) & 0 \end{pmatrix}$, имеет место соотношение

$$T(x)\int\limits_0^x T(x)dx=\int\limits_0^x T(x)dx\cdot T(x)$$

или в раскрытом виде

$$\begin{pmatrix} 0 & r(x) \\ -p(x) & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \int\limits_0^x r(x)dx \\ -\int\limits_0^x p(x)dx & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \int\limits_0^x r(x)dx \\ -\int\limits_0^x p(x)dx & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & r(x) \\ -p(x) & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} -r(x)\int\limits_0^x p(x)dx & 0 \\ 0 & -p(x)\int\limits_0^x r(x)dx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -p(x)\int\limits_0^x r(x)dx0 & 0 \\ 0 & -r(x)\int\limits_0^x p(x)dx \end{pmatrix}.$$

Отсюда будет следовать, что для перестановочности матриц $\int\limits_0^x T(x)dx$ и $T(x)$ достаточно выполнения условия

$$r(x)\int_0^x p(x)dx = p(x)\int_0^x r(x)dx . \qquad (9)$$

Применив формулу интегрирования по частям к каждому из интегралов в соотношении (9), найдем

$$xr(x)p(x) - r(x)\int_0^x xp'(x)dx = xr(x)p(x) - p(x)\int_0^x xr'(x)dx$$

или

$$r(x)\int_0^x xp'(x)dx = p(x)\int_0^x xr'(x)dx .$$

Далее, продифференцировав (9), найдем

$$r'(x)\int_0^x p(x)dx = p'(x)\int_0^x r(x)dx . \qquad (10)$$

Вновь воспользовавшись формулой интегрирования по частям, из соотношения (10) получим

$$r'(x)p(x)x - r'\int_0^x xp'(x)dx - p'(x)r(x)x - p'(x)\int_0^x xr'(x)dx = 0 .$$

Умножив обе части полученного уравнения на $r(x)$, затем, подставив в полученное уравнение значение $r(x)\int_0^x xp'(x)dx$ из соотношения (10), найдем

$$r'(x)p(x)r(x)x - r'(x)p(x)\int_0^x xr'(x)dx - p'(x)r^2(x)x - p'(x)r(x)\int_0^x xr'(x)dx = 0 .$$

или

$$xr(x)(r'(x)p(x) - p'(x)r(x)) - (r'(x)p(x) - p'(x)r(x))\int_0^x xr'(x)dx = 0 .$$

Отсюда получим

$$(r'(x)p(x) - p'(x)r(x))(xr(x) - \int_0^x xr'(x)dx) = 0 ,$$

откуда будет следовать, что или $r'(x)p(x) - p'(x)r(x) = 0$ или $xr(x) - \int_0^x xr'(x)dx = 0$.

Проинтегрировав первое из этих соотношений, найдем, что

$$r(x) = Cp(x), \qquad (11)$$

где $C = const$.

Применив формулу интегрирования по частям к интегралу во втором соотношении, получим $\int_0^x r'(x)dx = 0$ или $r(x) = r(0) = const_1$. Тогда из соотношений (10) аналогично найдем, что $p(x) = p(0) = const_2$. Очевидно, что и в этом случае также будет иметь место соотношение (11).

Таким образом доказана

Теорема. *Матрицант система Дирака* (1) *будет определяться соотношенем*

$$Y(x)=e^{\int_0^x SG(x)dx}$$

тогда и только тогда, когда $r(x)=Cp(x)$ $(C=const)$.

Заметим, что в этом случае матрицант системы (1) согласно (5) будет иметь вид

$$Y(x)=\begin{pmatrix}\cos\int_0^x p(t)pt & \sin\int_0^x p(t)pt\\ -\sin\int_0^x p(t)pt & \cos\int_0^x p(t)pt\end{pmatrix}.$$

Ամփոփում

Աշխատանքում շարադրվում է ընդունված մեթոդներից տարբերվող մեթոդ Դիրակի համակարգի հետազոտման համար, որը հաջողությամբ կարող է կիրառվել դիֆերենցիալ հավասարումներով տարբեր համակարգերի հետազոտության մեջ:

Резюме

В работе представлен отличный от принятых методов метод Дирака для исследований систем, который можно успешно использовать для исследований различных систем дифференциальных уравнений.

Литература

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.М., Наука, 1988 г.
2. В. А. Якубович, В. М. Старжинский. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., Наука, 1972 г.
3. Р. Беллман. Введение в теорию матриц. М., Наука, 1976 г.