ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՍՏԵՂԾՄԱՆ ՊԱՏՄՈՒԹՅՈՒՆԸ

Վ. Թ. ՆԱԼՉԱՋՅԱՆ
Տնտեսագիտության թեկնածու, դոցենտ,
ՀՊՏՀ տնտեսամաթեմատիկական մեթոդների ամբիոն

«Բազմությունը» հանդիսանում է մաթեմատիկայի առանցքային հասկացություններից մեկը և սովորաբար ընդունվում է որպես սկզբնական (նախնական), այսինքն չի հանգեցվում այլ հասկացությունների, ուստի և չի ունենում սահմանում:

Մինչև 19-րդ դարի կեսը մաթեմատիկոսները հիմնականում դիտարկում էին վերջավոր բազմությունները: Վերջավոր և անվերջ բազմությունների տեսության հիմքը դրել է Բեռնարդ Բոլցանոն, ով ներկայացրել է բազմությունների տեսության առաջին ուրվագիծը «Անվերջի պարադոքսները» գրքում (1850 թ.): Այդ աշխատությունում դիտարկված են կամայական թվային բազմություններ և դրանց համեմատության նպատակով սահմանված է փոխմիարժեք համապատասխանության հասկացությունը:

1872 թվից մինչև 1897 թիվը (հիմնականում 1872-1884 թթ.) Գեորգ Կանտորը հրապարակեց մի շարք աշխատանքներ, որոնցում համակարգված ձևով շարադրված էին բազմությունների տեսության հիմնական բաժինները: Կանտորը մշակեց մաթեմատիկայի ստանդարտացման իր ծրագիրը, որի շրջանակներում ցանկացած մաթեմատիկական օբյեկտ պետք է հանդիսանար այս կամ այն տիպի բազմություն:

Այս մոտեցումը նա շարադրեց գերմանական հայտնի «Մաթեմատիկական տարեգիրք» պարբերականում: Այդ աշխատանքներում հեղինակը ոչ միայն ներմուծեց բազմությունների տեսության հիմնական հասկացությունները, այլ նաև մաթեմատիկան հարստացրեց նոր տիպի դատողություններով, որոնք կիրառեց բազմութունների տեսության թեորեմների ապացուցման համար: Այդ պատճառով էլ բոլորի կողմից ընդունված է, որ **բազմությունների տեսությունը** ստեղծել է Գեորգ Կանտորը:

Մասնավորապես, նա բազմությունը «սահմանեց» որպես «տրված հատկությամբ օժտված բոլոր օբյեկտների միավորման (համախմբի, ամբողջության) համար ընդհանրացնող անուն»: Այդ օբյեկտները Կանտորն անվանեց բազմության տարրեր (էլեմենտներ): Ըստ նրա՝ բնական թիվը պետք է դիտարկել որպես բազմություն, որը կազմված է մեկ այլ բազմության միակ տարրից, որը կոչվում է «բնական հաջորդականություն», իսկ վերջինս, իր հերթին, հանդիսանում է բազմություն, որն էլ մեկ այլ բազմության տարր է (տվյալ դեպքում՝ ամբողջ թվերի): Ընդ որում, «բազմություն» ընդհանուր հասկացությանը, որն իր կողմից մաթեմատիկայում դիտարկվում էր որպես կենտրոնական, Կանտորը տալիս էր քիչ բան պարզաբանող «սահանումներ», օրինակ՝ «բազմությունը շատն է՝ ընկալված որպես ամբողջություն», և նման կարգի այլ ձևակերպումներ (սահմանումներ): Սա լրիվ համապատասխանում էր իր՝ Կանտորի մտային տրամադրվածությանը, որն իր ծրագիրը ընդգծված կերպով անվանում էր ոչ թե «բազմությունների տեսություն (այդ տերմինը հայտնվեց շատ ավելի ուշ), այլ **ուսմունք բազմությունների մասին**:

Կանտորի ծրագիրն առաջ բերեց կտրուկ բողոքներ ժամանակակից շատ անվանի մաթեմատիկոսների կողմից: Դրա նկատմամբ իր անհաշտ դիրքորոշմամբ հատկապես առանձնանում էր Լեոպոլդ Կրոնեկերը, ով կարծում էր, որ մաթեմատիկական օբյեկտներ կարող են համարվել միայն բնական թվերը և այն, ինչն անմիջականորեն դրանց է բերվում (հայտնի է նրա արտահայտությունն այն մասին, որ «Աստված ստեղծել է բնական թվերը, իսկ մնացյալը մարդու ձեռքի գործն է»): Բազմությունների տեսությունն ամբողջովին մերժում էին նաև այնպիսի հեղինակավոր մաթեմատիկոսներ, ինչպես Հերման Շվարցը և Անրի Պուանկարեն:

Բայց և այնպես, այլ խոշոր մաթեմատիկոսներ, մասնավորապես Գոթլոբ Ֆրեգեն, Ռիխարդ Դեդեկինդը և Դավիդ Հիլբերտը սատարեցին Կանտորին ամբողջ մաթեմատիկան բազմությունների տեսության լեզվով վերաշարադրելու գործում: Մասնավորապես, բազմությունների տեսությունը հիմք հանդիսացավ չափի տեսության և ինտեգրալի, տոպոլոգիայի և ֆունկցիոնալ վերլուծության համար:

Բայց շուտով պարզվեց, որ անվերջ բազմությունների հետ գործողությունների ժամանակ Կանտորի անսահմանափակ կամայականությունների դրույթը (իր կողմից արտահայտված «մաթեմատիկայի էությունը դրա ազատության մեջ է» սկզբունքում) ի սկզբանե արատավոր է, քանի որ բացահայտվեցին մի շարք տեսական հակասություններ: Պարզվեց, որ տեսական պատկերացումների օգտագործման ժամանակ որոշ պնդումներ կարող են ապացուցվել իրենց ժխտումների հետ միասին (իսկ այդ դեպքում, համաձայն ասույթների դասական տրամաբանության, կարող է «ապացուցվել» բացարձակապես ցանկացած պնդում):

Բերտրան Ռասսելի հակասությունը հայտնաբերելուց հետո մաթեմատիկոսների մի մասը (օրինակ, Լյոյտզեն Էգբերտ Յան Բրաուերը և իր դպրոցը) որոշեց ամբողջովին հրաժարվել բազմությունների տեսության օգտագործումից: Դավիդ Հիլբերտի կողմից առաջնորդվող մաթեմատիկոսների մեկ այլ խումբ ձեռնարկեց մի շարք փորձեր բազմությունների տեսության այն մասը խիստ հիմնավորելու համար, որն իրենց թվում էր առավել «պատասխանատու» վերը նշված հակասությունների համար:

1904-1908 թթ. Էռնեստ Ցերմելոն առաջարկեց **բազմությունների աքսիոմատիկ տեսության** առաջին մեկնակերպը, իսկ Ռասսելը դրանից անկախ կատարելագործեց տրամաբանական ապարատը, որ ավելի ուշ զետեղեց «Մաթեմատիկայի հիմունքներ» մենագրությունում (1910-1913 թթ.): Այսպիսով՝ բազմությունների տեսությունը դրվեց աքսիոմատիկ հիմքերի վրա: Հետագայում շատ հետազոտողներ վերանայեցին և փոփոխեցին այդ երկու համակարգերն էլ, բայց հիմնականում պահպանվեց դրանց բնույթը: Մինչև այժմ էլ դրանք հայտնի են որպես Ռասսելի տիպերի տեսություն և Ցերմելոյի բազմությունների տեսություն: Այժմ Կանտորի բազմությունների տեսությունը ընդունված է կոչել «պարզունակ» բազմությունների տեսություն, իսկ նոր կառուցվածքը՝ բազմությունների աքսիոմատիկ տեսություն:

Աքսիոմատիկ մոտեցման առանձնահատկությունը կայանում է Կանտորի ծրագրի հիմքում ընկած այն պատկերացումից հրաժարման մեջ, որ, իբրև, ինչ-որ իդեալական աշխարհում իսկապես գոյություն ունեն բազմությունները: Աքսիոմատիկ տեսության շրջանակներում բազմությունները «գոյություն ունեն» բացառապես ձևականորեն և դրանց հատկությունները կարող են էականորեն կախված լինել աքսիոմների համակարգի ընտրությունից: Այս փաստը միշտ թիրախ է հանդիսանում այն մաթեմատիկոսների կողմից քննադատության համար, ովքեր չէին համաձայնվում (ինչպես պնդում էր Հիլբերտը) ընդունել մաթեմատիկան որպես որևէ բովանդակությունից զուրկ սիմվոլների խաղ: Մասնավորապես, Նիկոլայ Լուզինը գրում էր, որ «կոնտինուում հզորությամբ բազմությունը, եթե այն դիտարկել միայն որպես կետերի բազմություն, հանդիսանում է որոշակի միավորված իրականություն», որի տեղը կարդինալ թվերի շարքում չի կարող կախված լինել այն բանից, թե որպես աքսիոմ ընդունվում է արդյոք **կոնտինուում վարկածը**, թե՝ դրա ժխտումը:

Այժմ առավել տարածված բազմությունների աքսիոմատիկ տեսություն է հանդիսանում **ZFC** -ն (**Ցերմելո-Ֆրենկելի տեսությունը՝ ընտրության աքսիոմով**): Այս տեսության անհակասականության հարցը մնում է չլուծված: Ոչ բոլոր մաթեմատիկոսների կողմից է անվերապահորեն ընդունվում ընտրության աքսիոմը: Այսպես, օրինակ, Էմիլ Բորելը և Անրի Լեբեգը գտնում են, որ այս աքսիոմի միջոցով ստացված ապացույցներն ունեն այլ ճանաչողական արժեք, քան թե այն ապացույցները, որոնք այդ աքսիոմից կախված չեն: Իսկ այլ մաթեմատիկոսներ, ինչպես, օրինակ, Ֆելիքս Հաուսդորֆը և Ադոլֆ Ֆրենկելը, ընդունում են ընտրության աքսիոմն անվերապահորեն, ընդունելով դրա նույն աստիճանի ակնհայտությունը, ինչ որ Ցերմելո-Ֆրենկելի մյուս աքսիոմներինն է:

Բազմությունների տեսության ազդեցությունը ժամանակակից մաթեմատիկայի զարգացման վրա շատ մեծ է: Առաջին հերթին, բազմությունների տեսությունը հիմք հանդիսացավ մաթեմատիկայի մի շարք նոր ճյուղերի ստեղծման համար (իրական փոփոխականների ֆունկցիաների տեսություն, ընդհանուր տոպոլոգիա, ընդհանուր հանրահաշիվ, ֆունկցիոնալ վերլուծություն և այլն):

Բազմությունների տեսության մեթոդներն աստիճանաբար նորանոր կիրառություններ են գտնում նաև մաթեմատիկայի դասական բաժիններում: Օրինակ, մաթեմատիկական վերլուծության մեջ դրանք լայնորեն կիրառվում են դիֆերենցիալ հավասարումների որակական տեսությունում, վարիացիոն հաշվում, հավանականությունների տեսությունում և այլուր:

Վերջապես, բազմությունների տեսությունը զգալի ազդեցություն է գործել հենց իր՝ մաթեմատիկա առարկայի կամ դրա բաժինների (օրինակ՝ երկրաչափության) ըմբռնման վրա: Միայն բազմությունների տեսությունը թույլ տվեց հստակորեն ձևակերպել օբյեկտների համակարգերի **իզոմորֆիզմի** հասկացությունը, որոնք տրված են իրենց կապող հարաբերակցությունների հետ միասին և հանգեցրեց այն հանգամանքի գիտակցությանը, որ ցանկացած մաթեմատիկական տեսություն իր վերացական տեսքով հետազոտում է այս կամ այն օբյեկտների համակարգն ընդամենը իզոմորֆիզմի ճշգրտությամբ, այսինքն կարող է առանց որևէ փոփոխությունների կիրառվել օբյեկտների ցանկացած այլ համակարգում, որն իզոմորֆ է այն համակարգին, որի հետազոտության համար տեսությունը ի սկզբանե ստեղծվել էր:

Ինչ վերաբերում է պնդումների մաթեմատիկական հիմնավորման հարցերում բազմությունների տեսության նշանակությանը (այսինքն՝ խիստ, տրամաբանորեն անթերի մաթեմատիկական տեսությունների կառուցմանը), ապա պետք է նկատի ունենալ, որ բազմությունների տեսությունն ինքը կարիք ունի իր մեջ կիրառված դատողությունների և մեթոդների հիմնավորման: Ավելին, անվերջության մասին մաթեմատիկական ուսմունքի հիմնավորման հետ կապված բոլոր տրամաբանական դժվարությունները բազմությունների ընդհանուր տեսության տեսակետին անցնելիս միայն ավելի են սրվում:

Ներկայումս մեր հանրապետության դպրոցներում և բարձրագույն ուսումնական հաստատություններում մաթեմատիկան հիմնականում դասավանդվում է բազմությունների տեսության գաղափարների և հասկացություննե-րի կիրառումով, սակայն ուսումնական ծրագրերում գործնականում բացակա-յում են դրա ստեղծման և հետագա զարգացման պատմության մասին անհրա-ժեշտ տեղեկությունները, ինչը, կարծում ենք, խիստ անհրաժեշտ է մաթեմա-տիկայի այդ բաժնի ուսումնասիրումը նոր սկսողների համար:

Բանալի բառեր *- բազմություն, բազմության տարրեր, աքսիոմատիկ տե-սություն, իզոմորֆիզմ*

Գրականություն

1. **Кантор Г.**, Труды по теории множеств.-М.: Наука, 1985- 430 с.
2. **Медведев Ф. А.**, Развитие теории множеств в 19-ом веке.- М.: Наука,- 232с.
3. **Френкель А., Бар-Хиллел И.**, Основания теории множеств.-М.: Мир, 1966- 556с.
4. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.**, Элементы теории функций и функционального анализа, 4-ое изд.,М.: Наука, 1976- 544с.
5. **Ященко И. В.**, Парадоксы теории множеств. М.: МЦНМО, 2002 - 40с.

ИСТОРИЯ СОЗДАНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

В. Т. НАЛЧАДЖЯН
Кандидат экономических наук,
доцент кафедры экономико-математических методик ГЭУА

Рассматривается история создания и дальнейшего развития теории множеств, начиная от ''Парадоксы бесконечности'' Бернарда Больцано до наших дней. Показывается, что современная математика развивается на основе теории множеств и открывает новые горизонты решения современных прикладных задач в различных отраслях науки.

HISTORY OF CREATION OF THE THEORY OF SETS

V. T. NALCHAJYAN
PhD of Economics, Assistant Professor,
ASUE Chair of Methods of Mathematical Economy

The history of creation and further development of the theory of sets is considered, beginning from ''Paradoxes of infinity'' Bernard Boltsano up to now. It is shown that the modern mathematics is developing on the basis of the theory of sets and opens new perspectives for the solution of modern applied tasks in various branches of science.