

# КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ В ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЕ (СЛЕДСТВИЕ НОВЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА)

**В. В. МУСАХАНЯН**

*Кандидат физико-математических наук, доцент,  
Гаварский государственный университет,  
кафедра информационных технологий и вычислительной техники*

**К. С. ЕГИАЗАРЯН**

*Кафедра медицинской физики, ассистент,  
Ереванский государственный медицинский  
университет им. М. Гераци*

Решение уравнения Дирака для заряженной частицы в поле внешней электромагнитной волны известно около восьмидесяти лет как решение Волкова и оно было использовано для вычисления вероятностей различных элементарных процессов. Однако, это решение не является общим решением для волны линейной поляризации и неверным для циркулярной. Ввиду этого, необходимо заново пересчитывать все элементарные процессы связанные со взаимодействием заряженных частиц с электромагнитными полями. И ниже впервые приведено правильное выражение для вероятности излучения фотона электроном в поле электромагнитной волны циркулярной поляризации.

Наиболее известные работы по исследованию квантовых процессов взаимодействия заряженных элементарных частиц с полем плоской электромагнитной волны были выполнены Никишовым и Ритусом [1-3], а также Гольдманом [4,5]. В этих работах внешняя электромагнитная волна считается классической. Действие её электромагнитного поля на заряженную частицу учитывается точно, так как использовавшееся в этих работах решение уравнения Дирака<sup>1</sup> в поле плоской электромагнитной волны в вакууме было известно с 1935-1937 годов<sup>2</sup> [6,7], а радиационными поправками и реакцией

---

<sup>1</sup> В зарубежной литературе оно носит название решения Волкова-Дирака, или просто Volkov-Dirac.

<sup>2</sup> Советская традиция относит дату решения Волкова к 1937 года, см., например, [11].

излучения пренебрегалось. Все другие взаимодействия между частицами рассматривались по теории возмущений.

Однако, так как внешняя плоская электромагнитная волна является классической, а в экспоненте волновой функции решения Волкова содержится классическое действие, то квантовые и классические решения оказываются тесно взаимосвязанными.

Как было показано в наших предыдущих работах [8-11], решение классического уравнения Гамильтона-Якоби, о движении классической заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны, широко известное в классической электродинамике [12], является частным для *линейной* поляризации электромагнитной волны, соответствующим лишь одному частному значению начальной фазы, при которой начальное значение четырёхмерного вектора-потенциала равно нулю,  $A_\mu(\varphi_0) = 0$ . Это решение становится неверным для случая *циркулярной* поляризации плоской электромагнитной волны, для которой всегда  $A_\mu(\varphi_0) \neq 0$ .

Очевидно, что всё это должно приводить к изменению классического действия в экспонентах решений Волкова, и действительно, последовательное решение уравнения Дирака, приведенное, например, в [11], с учётом начального значения фазы электромагнитной волны, приводит к новому и, на этот раз, к точному решению, которое может быть названо «Модифицированным решением уравнения Дирака» (МРУД).

Так как все элементарные процессы для заряженных частиц в поле плоской электромагнитной волны, как в обзорах вышеприведённых работ, так и в самих работах, были вычислены с помощью *традиционных* решений Волкова, возникает проблема сравнения, например, вероятности излучения фотона электроном, вычисленных с помощью старых решений Волкова, и новых, с помощью МРУД.

Ранее [9], в рамках классической электродинамики, было вычислено излучение фотона электроном и получено, что в Комpton-эффекте, наряду с хорошо известным в литературе квадратичным по параметру интенсивности сдвигом частоты, возникает и линейный член, зависящий от азимутального угла излучения. Физически это верно: даже в циркулярно-поляризованной волне частица не остаётся в плоскости, а испытывает дрейф, выходит из плоскости в третьё

измерение, что и должно приводить к эффекту Доплера и к соответствующему сдвигу частоты в переизлучённой волне. Ввиду малости параметра интенсивности волны, линейный сдвиг частоты в Комптон-эффекте может существенно превышать вклад, обусловленный квадратичным членом.

### Вероятность излучения фотона электроном

Как было сказано выше, для вычисления излучения фотона электроном, мы будем использовать МРУД [11], приведённое ниже для случая плоской циркулярно-поляризованной электромагнитной волны с четырёхмерным вектором потенциалом  $A_\mu$ , зависящим от

релятивистски инвариантной фазы волны  $\varphi = k_\mu \cdot x^\mu = (kx) = \omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}$  в точке четырехмерного пространства-времени  $x_\mu$ , а  $k_\mu$  - четырёхмерный волновой вектор:

$$A_\mu = a_{1\mu} \cos \varphi + a_{2\mu} \sin \varphi .$$

Этот решение имеет несколько громоздкое, но точное представление,

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{u}{\sqrt{2 \cdot p_0}} \cdot \left[ 1 + \frac{e}{2 \cdot (pk)} \cdot \left[ \hat{k}a_1 (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + \hat{k}a_2 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right] \right] \times \\ & \exp \{ -ip_\mu \cdot (x^\mu - x_0^\mu) - ie (a_{1\mu} \cos \varphi_0 + a_{2\mu} \sin \varphi_0) \cdot (x^\mu - x_0^\mu) - \\ & i \frac{2e(pa_1)}{2(pk)} \left[ \sin \varphi - \sin \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi_0 \right] - \\ & i \frac{2e(pa_2)}{2(pk)} \left[ -\cos \varphi + \cos \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi_0 \right] + \\ & i \frac{e^2 a^2}{2(pk)} (\varphi - \varphi_0 - \sin(\varphi - \varphi_0)) \} . \end{aligned}$$

В отличие от решения Волкова, это соотношение есть точная волновая функция, являющаяся решением уравнения Дирака в поле плоской электромагнитной волны циркулярной поляризации в вакууме, переходящая в начальный момент времени в

$$\Psi(x_\mu \rightarrow x_{0\mu}) = \frac{u}{\sqrt{2 \cdot p_0}},$$

что соответствует начальной и классической частице: вероятность появления заряженной частицы в волне в начальный момент равна единице, т.е. частица до того, как началось взаимодействие - классическая. Очевидно, что именно такие классические заряженные частицы испускает физический объект до того, как они начнут взаимодействовать с внешней волной. И именно для выписанного выше решения четырёхмерный начальный импульс заряженной частицы  $p_\mu$  в начальный момент времени является начальным физическим импульсом заряженной частицы [8,10], а не некоторой нефизической константой, как в решениях Волкова [6,7].

Амплитуда процесса излучения  $S$ -й гармоники совпадает с  $M_{fi}^{(s)}$ , а выражение

$$dW_s = \left| M_{fi}^{(s)} \right|^2 \frac{d^3 k' d^3 q'}{(2\pi)^6 2\omega' 2q_0 q'_0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(sk + q - q' - k')$$

даёт соответствующую дифференциальную вероятность, отнесённую к единице времени. Операции суммирования по поляризациям частиц производятся обычным образом [2, 14], хотя и представляет собой довольно рутинную процедуру, связанную с вычислением большого количества шпуров. После суммирования по поляризациям конечных электрона и фотона, и усреднения по поляризации начального электрона получается несколько громоздкое, но точное выражение

$$dW_s = \frac{e^2 m^2}{4\pi} \frac{d^3 k' d^3 q'}{q_0 \omega' q'_0} \cdot \delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \times$$

$$\left\{ \left[ \left( B_{1s} \cos \varphi_0 + B_{2s} \sin \varphi_0 - B_s \right) \frac{e^2 (ke')}{(kp)} a^2 + (p'e') B_s \right] \right.$$

$$\left. \left[ \left( B_{1s}^* \cos \varphi_0 + B_{2s}^* \sin \varphi_0 - B_s^* \right) \frac{e^2 (ke'')}{kp'} a^2 + (pe'') B_s^* \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& (pp') \left[ 2B_S (B_{1S} \cos \varphi_0 + B_{2S} \sin \varphi_0 - B_S) \frac{e^2 (ke')^2 a^2}{(kp)(kp')} + B_S^2 e'^2 \right] \Bigg\} + \\
& 4m^2 \left[ 2B_S (B_{1S} \cos \varphi_0 + B_{2S} \sin \varphi_0 - B_S) \frac{e^2 (ke')^2 a^2}{(kp)(kp')} + |B_S|^2 e'^2 \right] + \\
& 2 \frac{e^2 (ke') a^2}{(kp)(kp')} (B_{1S} \cos \varphi_0 + B_{2S} \sin \varphi_0 - B_S) \{ [(pa_1)(e'k) - (pk)(e'a_1) + (p'a_1)(ke') - (p'k)(e'a_1)] (B_{1S} - B_S \cos \varphi_0) + \\
& [(pa_2)(e'k) - (pk)(e'a_2) + (p'a_2)(e'k) - (p'k)(e'a_2)] (B_{2S} - B_S \sin \varphi_0) \} + \\
& + eB_S (B_{1S} - B_S \cos \varphi_0) \{ e'^2 (pa_1) - 2(pe')(e'a_1) + \frac{p'a_1}{p'k} [2(pe')(e'k) - e'^2(pk)] + \\
& (p'a_1)e'^2 - 2(pe')(e'a_1) + \frac{pa_1}{pk} [2(p'e')(e'k) - (p'k)e'^2] \} \\
& + eB_S (B_{2S} - B_S \sin \varphi_0) \{ e'^2(pa_2) - 2(pe')(e'a_2) + \frac{p'a_2}{p'k} [2(pe')(e'k) - e'^2(pk)] + \\
& (p'a_2)e'^2 - 2(pe')(e'a_2) + \frac{pa_2}{pk} [2(p'e')(e'k) - (p'k)e'^2] \} \quad (1) \\
& \left[ (B_{1S} - B_S \cos \varphi_0) \right]^2 \left\{ \frac{e^2 a^2}{(kp')} [e'^2(pk) - 2(pe')(ke')] + \right. \\
& \frac{e^2 a^2}{(pk)} [e'^2(p'k) - 2(p'e')(ke')] + 2[2(e'a_1)^2 - \frac{p'a_1}{p'k} (ke')(e'a_1) - \\
& - e'^2 a^2 + 2(e'k) \frac{2(p'a_1)(pa_1)}{(pk)(p'k)} + \\
& \left. \frac{(e'k)}{(pk)} (a^2(pe') - 2(pa_1)(e'a_1)) - \frac{(pp')(ke')^2}{(p'k)(pk)} a^2 + \frac{p'e'}{p'k} a^2 (e'k) \right\} + \\
& \left[ (B_{2S} - B_S \sin \varphi_0) \right]^2 \left\{ \frac{e^2 a^2}{(kp')} [e'^2(p'k) - 2(pe')(ke')] + \right. \\
& \frac{e^2 a^2}{(pk)} [e'^2(p'k) - 2(p'e')(ke')] + 2e^2 [2(e'a_2)^2 - \\
& - \frac{p'a_2}{p'k} (ke')(e'a_2) - e'^2 a^2 + 2(e'k) \frac{2(p'a_2)(pa_2)}{(pk)(p'k)} +
\end{aligned}$$

$$\frac{a^2}{(pk)}(ke')(pe') - 2 \frac{(pa_2)}{(pk)}(e'k)(e'a_2) - \frac{(pp')(ke')^2}{(pk)(p'k)}a^2 + \frac{(p'e')}{(p'k)}a^2(e'k) \left. + \frac{4m^2ea^2}{(kp)(kp')} (ke')^2 \left[ |B_{1s} - B_s \cos \varphi_0|^2 + |B_{2s} - B_s \sin \varphi_0|^2 \right] \right\},$$

Где функции  $B_s = J_s(z) e^{is\varphi_0}$  и  $J_s(z)$  функция Бесселя нулевого порядка, являющиеся разложениями нижеследующей экспоненциальной функции

$$\exp \left[ -i \sqrt{(\alpha_1 + \beta \cos \varphi_0)^2 + (\alpha_2 + \beta \sin \varphi_0)^2} \sin(\varphi - \Phi_0) \right] = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_s e^{-is\varphi},$$

(2)

$$z = \sqrt{(\alpha_1 + \beta \cos \varphi_0)^2 + (\alpha_2 + \beta \sin \varphi_0)^2},$$

(3)

и где параметры

$$\alpha_1 = e \left( \frac{pa_1}{pk} - \frac{p'a_1}{p'k} \right), \alpha_2 = e \left( \frac{pa_2}{pk} - \frac{p'a_2}{p'k} \right), \beta \equiv e^2 a^2 \frac{p'k - pk}{(p'k)(pk)}.$$

(4)

Можно сравнить предыдущие, содержащие свыше двадцати членов соотношения (1) - (4) с соответствующими, содержащими только три члена соотношениями (101.14) [12]. Если одновременно положить тригонометрические функции равными нулю,  $\cos \varphi_0 = \sin \varphi_0 = 0$ , (что, очевидно, невозможно ни при каком значении начальной фазы  $\varphi_0$ ), то предыдущие выражения (1) - (4), *чисто формально*, перейдут в выражения (101.14) [12], т.е. сами станут неверными.

Итак, нами было получено самое общее и правильное выражение для вероятности излучения фотона электроном во внешней электромагнитной волне циркулярной поляризации.

## Обсуждение и заключение

Физическое объяснение возникновения такого большого количества членов с начальными фазами и изменёнными значениями аргументов Функций Бесселя тривиально. Соотношения (101.14) [12] соответствуют движению классической заряженной частицы в плоскости [10], что неверно; наши же соотношения описывают все возможные случаи дрейфа этой заряженной частицы в трёхмерном пространстве, обусловленные значением неопределённой начальной фазы появления частицы в волне. Это приводит к сложному дрейфу заряженной частицы в трёхмерном пространстве. Эта начальная фаза и азимутальный угол входят, как разностный аргумент, в тригонометрической функции, в соотношении для зависящего от интенсивности сдвига частоты в Комптон эффекте.

Ввиду этого, движение заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны циркулярной поляризации по окружности и в плоскости, а также полученные из них вероятности излучения фотона электроном могут считаться ,фактоидами<sup>3</sup> [15]. Начало этому фактоиду было положено неверными решениями уравнения Дирака, полученными Волковым в 1935 году.

*Ключевые слова: Уравнение Дирака, новые решения, Комптон эффект*

## Список использованной литературы

1. **Никишов А. И., Ритус В. И.**, Квантовые процессы в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном поле // ЖЭТФ – 1964. - Т. 46. – С. 1769 - 1781.
2. **Ритус В. И.**, Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем // Труды Физического Института им. П. Н. Лебедева Академии Наук СССР. М.: Наука – 1979. – Т. 111. - С. 5 - 151.
3. **Ритус В. И.**, Радиационные эффекты и их усиление в интенсивном электромагнитном поле // Труды Физического Института им. П. Н. Лебедева Академии Наук СССР. М.: Наука – 1982. – Т. 168. - С. 140 - 174.

---

<sup>3</sup> ... фактоид похож на факт, но считается достоверным только потому, что встречается в печатных текстах [15].

4. **Гольдман И. И.**, Эффекты интенсивности в комптоновском рассеянии // ЖЭТФ – 1964. Т. 46. - С. 1412 - 1417.
5. **Гольдман И. И.**, Дираковский электрон в поле плоской электромагнитной волны // Изв АН АрмССР. - 1964. Т. XVII. – С.129 – 135
6. **D. M. Volkov**, Uber Klasse von LÖsungen der Diracschen Gleichung // Zeit. Phys. B. 94. – 1935. - S. 250 - 260
7. **Волков Д. М.**, Электрон в поле плоских электромагнитных волн с точки зрения уравнения Дирака // ЖЭТФ – 1937 - Т. 7. - С. 1286 - 1989
8. **Mussakhanyan V. V.**, Charged Particle Motion in a Medium along an Electromagnetic Wave // Phys. Lett. A. V.70. – 1979. - P. 313 - 314.
9. **Бабахянян Э. А., Мусаханян В. В.**, Линейный по параметру интенсивности внешней волны сдвиг частоты в Комптон-эффекте // Вопросы Атомной Науки и Техники. - Сер. Ядерно-Физические Исследования. - Вып. 6(14). – 1990. – С. 38 – 40.
10. **V. V. Musakhanyan**, The Dynamics of Charged Particle of Ultra High Energy in CMB // Proceedings of XXII Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, Dec. 13 - 18, 2004, Stanford University, Stanford, Palo-Alto, California. - P. 2513 - 2517
11. **V. Musakhanyan**, An exact solution of Dirac's equation in the field of plane EM wave: Physical implications. On the solutions of Lorentz, Dirac, and Lorentz-Dirac equation. Eur. Phys. J. Special Topics **160**, 311-318 (2008)
12. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.**, Теория поля. - М.: Наука, 1973. –504с., «47, задача 2.
13. **Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.**, Релятивистская квантовая теория: В 2 ч. - М.: Наука, 1968. – ч.1. - 480с. «40.
14. **Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.**, Квантовая электродинамика. - М.: Наука, 1980. – 724с. «101
15. **Окунь Л. Б.**, Теория относительности и теорема Пифагора. УФН Том 178, №6, С. 655-665

**ԿՈՄՊՏՈՆՆՅԱՆ ՑՐՈՒԲԸ ՀԱՐԹ ԷԼԵԿՏՐՎԱԿԱՆԱԿԱՆ ԱԼԻԲՈՒՄ  
(ԴԻՐԱԿԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՆՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԵՎԱՆՔԸ)**

**Վ. Վ. ՄՈՒՍԱԽԱՆՅԱՆ**

*Ֆիզմաթենատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ,  
ԳՊՀ ինֆորմատիկայի և հաշվողական տեխնիկայի ամբիոնի դասախոս*

**Ք. Ս. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ**

*Բժշկական ֆիզիկայի ամբիոն,  
Երևանի Մ. Հերացու պետական բժշկական համալսարանի ասիստենտ*

Դիրակի հավասարման լուծումը՝ արտաքին էլեկտրամագնիսական ալիքի դաշտում լիցքավորված մասնիկի համար մոտ ութսուն տարի է, ինչ հայտնի է, որպես Վոլկովի լուծում և օգտագործվել է տարբեր տարրական պրոցեսների հավանականությունների հաշվարկման համար: Սակայն այս լուծումն ընդհանուր լուծում չէ գծային և ճիշտ լուծում չէ շրջանաձև բևեռացման ալիքի համար: Հաշվի առնելով սա, անհրաժեշտ է նորից վերահաշվարկել էլեկտրամագնիսական դաշտերի հետ լիցքավորված մասնիկների փոխազդեցության հետ կապված բոլոր տարրական պրոցեսները: Ստորև, առաջին անգամ բերված է շրջանաձև բևեռացման էլեկտրամագնիսական ալիքի դաշտում էլեկտրոնի կողմից ֆոտոնի ճառագայթման հավանականության ճիշտ արտահայտությունը:

**KOMTON-EFFECT IN THE PLANE ELECTROMAGNETIC FIELD  
(CONSEQUENCE OF NEW SOLUTIONS OF DIRAC'S EQUATION)**

**V. V. MUSAKHANYAN**

*Gavar State University, Department of IT&Computer Engineering,  
Candidate of phys.-math. sciences, associate professor*

**K. S. YEGHIAZARYAN**

*Chair of Medical Physics, Assistant,  
Yerevan State Medical University after M. Heratsi*

The solution of Dirac's equation for charged particle in the field of an external electromagnetic wave is known approximately during 80 years as a Volkov-Dirac solution and one was used for calculation of probabilities of various elementary processes. However, this solution is not a general solution for linearly polarized electromagnetic wave and is wrong for circularly polarized one. Hence, it is necessary to calculate all these elementary processes related to interaction of charged particles with electromagnetic fields. Below, the correct expression for probability of radiation of photon by electron in the field of electromagnetic wave of circular polarization is represented for the first time.