

О ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СИЛАМИ ПРИ НАЛИЧИИ СЖИМАЮЩИХ ИЛИ РАСТЯГИВАЮЩИХ ОСЕВЫХ СИЛ

Н. А. КУТУЗЯН

*Кандидат физико-математических наук, доцент,
проректор Гаварского государственного университета*

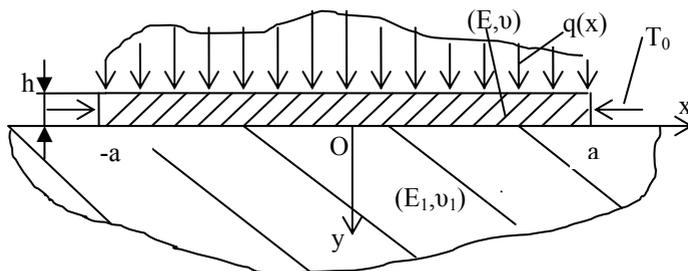
Л. А. ШЕКЯН

*Доктор физико-математических наук, доцент,
преподаватель Гаварского государственного университета*

В рамках обобщенной модели изгиба теории С.П.Тимошенко [1,2], где на прогибы тонкостенных тел влияют как поперечные силы, так и продольные сжимающие или растягивающие силы, рассматривается контактная задача об изгибе балки конечной длины на упругом основании в виде полуплоскости, находящейся в условиях плоской деформации.

Обширные классы задач об изгибе тонкостенных элементов в виде балок, плит, оболочек на деформируемых основаниях различных форм и в рамках различных физических допущений, ввиду их актуальности и практической значимости стали предметом исследования многих авторов [3-10].

1. Пусть балка, отнесенная к прямоугольной системе координат Oxy , длины $2a$, высоты h , модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν , под действием распределенных вертикальных сил интенсивности $q(x)$ изгибаясь вдавливается в нижнюю упругую полуплоскость с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 (фиг. 1).



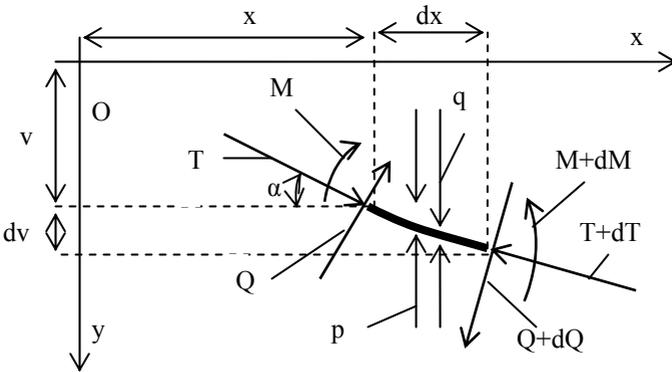
Фиг. 1. Схема контактного взаимодействия балки и полуплоскости.

Предполагается, что упругая полуплоскость $y > 0$ находится в условиях плоской деформации. Относительно балки предполагается, что

она изгибается по модели С.П.Тимошенко [1,2], где помимо влияния вертикальных сил $q(x)$ на прогибы балки осевые сжимающие силы $T(x)$, действующие вдоль срединной линии балки, также влияют на эти прогибы. При этих физических допущениях требуется определить распределение нормальных контактных напряжений $\sigma_y|_{y=0} = -p(x)$ на отрезке $(-a < x < a)$ контакта балки с упругой полуплоскостью, а также изгибающие моменты $M(x)$ и поперечные силы $Q(x)$ в сечениях балки по изложенной выше модели.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение изгиба балки вертикальными силами $q(x)$ и $p(x)$, учитывая при этом по теории С.П. Тимошенко влияние сжимающих сил $T(x)$, распределенных вдоль срединной линии балки (фиг. 2).

Уравнения равновесия показанных на фиг. 2 сил, действующих на малого элемента деформируемой балки, вырезанного из нее двумя близкими друг от друга поперечными сечениями, будут:



Фиг. 2. Равновесие деформируемого элемента балки.

$$T + Q \frac{dv}{dx} - (Q + dQ) \left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} dx \right) - (T + dT) = 0,$$

$$T \frac{dv}{dx} - Q + (q - p)dx + (Q + dQ) - (T + dT) \left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} dx \right) = 0, \quad (1)$$

$$-M - (q - p)dx \cdot \frac{dx}{2} - (Q + dQ)dx - (Q + dQ) \left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} dx \right) dv - (T + dT)dv + (T + dT) \left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} dx \right) dx + M + dM = 0,$$

где из-за малости угла α приняты $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha \approx tg \alpha = dv/dx$, v – перемещения точек балки в направлении оси Oy . При этих условия равновесия балки имеют вид

$$\int_{-a}^a [p(x) - q(x)] dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a p(x) dx = \int_{-a}^a q(x) dx = P, \quad (2a)$$

$$\int_{-a}^a x [p(x) - q(x)] dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a xp(x) dx = \int_{-a}^a xq(x) dx = M. \quad (2b)$$

Пренебрегая малые величины выше первого порядка малости, из (1) получим

$$\frac{d}{dx} \left(T + Q \frac{dv}{dx} \right) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(Q - T \frac{dv}{dx} \right) = p - q, \quad \frac{dM}{dx} - Q = 0. \quad (3)$$

Так, как

$$T(\pm a) = T_0, \quad Q(\pm a) = Q_0 = 0, \quad (4)$$

то из (3) и (4) получим

$$T = T_0 - Q \frac{dv}{dx}, \quad Q \cdot \left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] - T_0 \frac{dv}{dx} = \int_{-a}^x [p(x) - q(x)] dx. \quad (5)$$

Далее учитывая, что

$$M = -D d^2v/dx^2, \quad [D = Eh^3/12(1 - \nu^2)] \quad (6)$$

и принимая $1 + (dv/dx)^2 \approx 1$, из (3) и (5) получим дифференциальное уравнение изгиба балки

$$D \frac{d^4 v}{dx^4} + T_0 \frac{d^2 v}{dx^2} = q(x) - p(x), \quad (-a < x < a) \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение (7) рассматривается при следующих граничных условиях:

$$M(x) \Big|_{x=\pm a} = -D \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=\pm a} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (8)$$

получавших на основе (6) и указывающих на то, что в концевых точках балки $x = \pm a$ изгибающие моменты $M(x)$ отсутствуют.

С целью получения решения дифференциального уравнения (7) при условиях (8) и (2), введем обозначения

$$k = \sqrt{T_0/D}, \quad g(x) = [q(x) - p(x)]/D, \quad z = d^2 v / dx^2. \quad (9)$$

В результате, придем к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + k^2 z = g(x), \quad (-a < x < a). \quad (10)$$

Общее решение дифференциального уравнения (10) с учетом последнее обозначение из (9) представляется формулой

$$z \equiv \frac{d^2 v}{dx^2} = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) g(s) ds, \\ (-a < x < a) \quad (11)$$

где C_1 и C_2 постоянные интегрирования. Используя (11) и (8), определим C_1 и C_2 :

$$C_1 = -\frac{tg(ka)}{2k} \int_{-a}^a \cos(ks) g(s) ds, \quad C_2 = \frac{ctg(ka)}{2k} \int_{-a}^a \sin(ks) g(s) ds. \quad (12)$$

Теперь подставив выражения C_1 и C_2 из (12) в (11), получим

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a (\cos^2 ka \sin kx \sin ks - \sin^2 ka \cos kx \cos ks) g(s) ds + \\ + \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) g(s) ds. \quad (13)$$

Далее исходя из (13), (6) и последнее соотношение из (3) проверим условия отсутствия поперечных сил $Q(x)$ в концевых точках балки $x = \pm a$:

$$Q(x)\Big|_{x=\pm a} = \frac{dM}{dx}\Big|_{x=\pm a} = -D \frac{d^3 v}{dx^3}\Big|_{x=\pm a} = 0 \Rightarrow \frac{d^3 v}{dx^3}\Big|_{x=\pm a} = 0. \quad (14)$$

Будем иметь

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [tg(ka)\sin(kx)\cos(ks) + ctg(ka)\cos(kx)\sin(ks)]g(s)ds + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos[k(x-s)]sign(x-s)g(s)ds, \quad (15)$$

$$\frac{d^3 v_1}{dx^3}\Big|_{x=\pm a} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left(\frac{\sin ks}{\sin ka} \pm \frac{\cos ks}{\cos ka} \right) g(s)ds = \pm \frac{1}{\sin 2ka} \int_{-a}^a \sin[k(a \pm s)]g(s)ds \cdot (16)$$

Отсюда видно, что записанные условия отсутствия поперечных сил $Q(\pm a)$, вообще, не удовлетворяются.

Но если в (16) совершить предельный переход $k \rightarrow 0$ и принять во внимание условия равновесия балки (2a)-(2b) и обозначение $g(x)$ из (9), то

$$\frac{d^3 v_1}{dx^3}\Big|_{x=\pm a} = \pm \int_{-a}^a \frac{(a \pm s)}{2a} g(s)ds = \pm \frac{1}{2} \int_{-a}^a g(s)ds + \frac{1}{2a} \int_{-a}^a s g(s)ds = 0,$$

и, следовательно, в классической теории изгиба балки ($k = 0$) условия $Q(\pm a) = 0$, как следствия условий равновесия балки, выполняются.

Отметим, что в случае осевых растягивающих сил T во всех предыдущих формулах следует параметр k формально заменить на ik , где i – мнимая единица, постоянную C_1 оставить без изменения, постоянную C_2 заменить на постоянную $-iC_2$ и везде от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям.

Далее уравнение (11) еще раз проинтегрируя, получим

$$\frac{dv}{dx} = C_1 \frac{\sin kx}{k} + C_2 \frac{1 - \cos kx}{k} + \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \{1 - \cos[k(x-s)]\} \text{sign}(x-s) g(s) ds + C, \quad (-a \leq x \leq a). \quad (17)$$

Теперь выражения постоянных C_1 и C_2 из (12) подставляем в (17).

В результате

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a H(x,s) g(s) ds + C, \quad (-a \leq x \leq a) \quad (18)$$

где

$$H(x,s) = \{1 - \cos[k(x-s)]\} \text{sign}(x-s) + ctg(ka) [1 - \cos(kx)] \sin(ks) - tg(ka) \sin(kx) \cos(ks). \quad (19)$$

3. Для вывода определяющих уравнений описанной контактной задачи сначала запишем выражение вертикальных перемещений $v_1(x)$ граничных точек упругой полуплоскости $y > 0$ (фиг. 1) в направлении оси Oy [11]

$$v_1(x) = \frac{2(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds + C_*, \quad (-\infty < x < \infty). \quad (20)$$

Далее запишем условие контакта балки и упругого основания $v(x) = v_1(x)$, $(-a < x < a)$, которое после дифференцирования принимает вид

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_1}{dx}, \quad (-a < x < a). \quad (21)$$

Теперь в условие контакта (21) подставим выражения (18) и (20). Учитывая второе обозначение (9), будем иметь следующее сингулярное интегральное уравнение (СИУ) относительно нормального контактного напряжения $p(x)$:

$$\frac{2(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{s-x} = -\frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a H(x,s) [p(s) - q(s)] ds + C, \quad (-a < x < a). \quad (22)$$

Решение СИУ (22), удовлетворяющее условиям равновесия балки (2а)-(2б), можно получить, в частности, известным численно-аналитическим методом [12-14], сведя к системе линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: балка, изгиб, осевые силы, упругое основание, плоская деформация

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Соппротивление материалов. Т. 2. М.: Наука, 1965. 480 с.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
3. Власов В. З., Леонтьев Н. Н., Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
4. Коренев Б. Г., Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1954. 232 с.
5. Григолюк Э. И., Толкачев В. М., Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
6. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука. 1976. 493 с.
7. Попов Г. Я., Толкачев В. М., Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами. // Изв. АН СССР. МТТ, 1980, №4. С.192-206.
8. Агаян К. Л., Григорян Э. Х., Гулян К. Г., Изгиб балки на границе упругой полуплоскости. // Труды международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды", посвященный 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна. Цахкадзор, Армения. 25-28 сентября 2007. С. 32-36.
9. Агаян К. Л., Григорян Э. Х., О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости. // Изв. НАН РА. Механика. 2008. Т.61, №4. С. 5-19.
10. Амирбекиян А. Н., Шекян А. Л., Шекян Л. А., О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полосе с учетом сдвигающих сил. Механика, 2013. // Труды междуна. школы-конфер. молодых ученых, посвященной 70-летию Национальной Академии Наук Армении. 1-4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. Ер.: ЕГУАС, 2013. С. 64-68.
11. Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Госмехтеориздат, 1949, 270 с.
12. Erdogan F., Gupta G. D., Gook T. S., The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. // Intern.Publ., Leyden, 1973. P. 368-425.
13. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I., Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl.Math., vol. 35, №1,1997. P. 173-185.
14. Панасюк В. В, Саврук М. П., Дацьшин А. П., Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ՀԵԾԱՆԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՈՒԺԵՐՈՎ ԾՈՄԱՆ ԽՆԴՐԻ
ՄԱՍԻՆ՝ ՍԵՂՍՈՂ ԿԱՄ ԶԳՈՂ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՈՒԺԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ն. Ա. ԿՈՒՏՈՒԶՅԱՆ

*Ֆիզմաթենմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ,
Գավառի պետական համալսարանի պրոռեկտոր*

Լ. Ա. ՇԵԿՅԱՆ

*Ֆիզմաթենմատիկական գիտությունների դոկտոր, դոցենտ,
Գավառի պետական համալսարանի դասախոս*

Ծոման Ա.Պ. Տիմոշենկոյի մոդելի շրջանակներում դիտարկվում է կիսահարթության տեսքով առաձգական հիմքի վրա դրված վերջավոր երկարության հեծանի ծոման կոնտակտային խնդիրը, որտեղ ուղղաձիգ ուժերից բացի առանցքային սեղմող կամ ձգող ուժերը նույնպես ազդում են հեծանի ճկվածքի վրա:

Բանալի բառեր - հեծան, ծռում, առանցքային ուժեր, առաձգական հիմք, հարթ դեֆորմացիա

ON THE BENDING OF BEAM ON ELASTIC FOUNDATION BY TRANSVERSE
FORCES IN THE PRESENCE OF A COMPRESSIVE OR TENSILE AXIAL FORCES

N. A. KUTUZYAN

*Candidate of phys-math. sciences, Associate Professor,
Vice-Rector of Gavar State University*

L. A. SHEKYAN

*Doctor of phys-math. sciences, Associate Professor,
Lecturer of Gavar State University*

The contact problem of the bending of the beam of finite length on elastic foundation in the form of a half-plane being in the plane strain conditions, the generalized model of the bend in the framework of S.P.Timoshenko, where in addition to vertical forces axial compressive or tensile forces also affect the deflection of the beam is considered.

Key words: beam, bending, axial forces, elastic foundation, the plane strain