УДК 517.2

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Т. Н. Арутюнян

ЕрГУ, кафедра дифференциальных уравнений и математической физики.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\lambda} y \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ - & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \right\} y = y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

где p,q -некоторые заданные скалярные функции, а λ -комплексный параметр ($\lambda \in C$), известна (см. [1], стр. 236, [2], стр. 30) под названием канонической системы Дирака.

Задача Коши

$$\begin{cases} \lambda y = \lambda y & (1) \\ y(0) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} & (2) \end{cases}$$

была рассмотрена Титчмаршем в работе [3]. При условии, что p и q есть непрерывные функции, а α есть действительное число, им доказаны существование и единственность решения задачи Коши (1), (2), а также то, что это решение есть целая функция параметра λ. Если коэффициенты p и q системы (1) не непрерывны, а например, $p,q \in L^1(a,b)$, то классическое определение решения системы (1) (см., например, [4]) надо уточнить, а именно (см., например, [5]): вектор-функция $y = y(x)$ называется решением системы (1), определенными на (a,b), если она абсолютно непрерывна в каждом конечном замкнутом подинтервале $[a_1,b_1]$ интервала (a,b) и почти всюду в (a,b) удовлетворяет этому уравнению.

Целью данной работы является доказательство следующей теорены:

Теорема. *Пусть $p,q \in L^1_{loc}(0,\infty)$, т.е. p и q измеримые, комплекснозначные функции, абсолютно суммируемые в каждом конечном интервале $(0,a)$, $a > 0$, т.е.*

$$\int_0^a |p(s)|ds, \quad \int_0^a |q(s)|ds < \infty \qquad (3).$$

Тогда задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $y = \varphi(x,\lambda,\alpha)$. Комоненты $\varphi_1(x,\lambda,\alpha)$ и $\varphi_2(x,\lambda,\alpha)$ этого решения (при каждом фиксированном $x \in [0,a]$) есть целые функции параметров λ и α.

Прежде, чем приступить к доказательству этой теоремы, заметим, что существование и единственность решения (при $p,q \in L^1_{loc}$) можно получить из ранее известных результатов (см., например, [5], стр. 184) . В этой части следует только отметить, что наше доказательство (в частности, полученние оценок для последовательных приближений у нас ведется покомпонентно и учитывает комплексность параметров λ и α) отличется от приведенного в [5] и позволяет доказать существование решения, определенного сразу на $[0,a]$.

Аналитическая зависимость решения $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ от спектрального параметра λ есть классический результат об аналитической зависимости решений нормальной системы от аналитически входящих в уравнение параметров (здесь вопрос только в том, из какого класса коэффициенты p и q).

Аналитическую (целую) зависимость решения $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ от параметра α также можно вывести из ранее известных результатов о зависимости решения задачи Коши от начальных данных (см., например, [6]), но это есть та часть, которая обычно не подчеркивалась ранее, и это то свойство решения, которое используется при изучении некоторых вопросов спектральной теории (см., например, [7]).

Вот те "оправдания", которые позволили нам представить к публикации результат, который кажется известным, но нигде не сформулирован в удобном для нас виде и на который мы могли бы ссылаться.

Перейдем к доказательству теоремы.

Лемма 1. *Задача Коши* (1), (2) *эквивалентна интегральному уравнению*

$$\varphi(x,\lambda,\alpha)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix}+\int_0^x A(s,\lambda)\varphi(s,\lambda,\alpha)ds\,, \tag{4}$$

где $\quad A(x,\lambda)=\begin{pmatrix}q(x) & -p(x)-\lambda\\ \lambda-p(x) & -q(x)\end{pmatrix}.$

Доказательство леммы очевидно (см., например, [4], стр. 153).

Таким образом, вместо задачи Коши (1), (2), мы будем решать интегральное уравнение (4), которое можно запистаь в виде системы двух интегральных уравнений

$$\varphi_1(x,\lambda,\alpha)=\sin\alpha+\int_0^x[q(s)\varphi_1(s,\lambda,\alpha)-(p(s)+\lambda)\varphi_2(s,\lambda,\alpha)]ds, \tag{4_1}$$

$$\varphi_2(x,\lambda,\alpha)=-\cos\alpha+\int_0^x[(\lambda-p(s))\varphi_1(s,\lambda,\alpha)-q(s)\varphi_2(s,\lambda,\alpha)]ds. \tag{4_2}$$

Интегральное уравнение (4) будем решать методом последовательных прижлижений. Для этого построим последовательность вектор-функций:

$$\varphi^{(0)}(x,\lambda,\alpha)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix}, \tag{5_0}$$

$$\varphi^{(n)}(x,\lambda,\alpha)=\varphi^{(0)}(x,\lambda,\alpha)+\int_0^x A(s,\lambda)\varphi^{(n-1)}(s,\lambda,\alpha)ds,\quad n=1,2,\dots\,. \tag{5}$$

Положим также

$$u^{(n)}(x,\lambda,\alpha)=\varphi^{(n)}(x,\lambda,\alpha)-\varphi^{(n-1)}(x,\lambda,\alpha),\ n=1,2,\dots\,. \tag{6}$$

Тогда

$$u^{(n)}(x,\lambda,\alpha)=\int_0^x A(s,\lambda)u^{(n-1)}(s,\lambda,\alpha)ds,\quad n=1,2,\dots\,. \tag{7}$$

Уравнения (7) покомпонентно запишутся следующем образом

$$u_1^{(n)}(x,\lambda,\alpha)=\int_0^x\left\{q(s)u_1^{(n-1)}(s,\lambda,\alpha)-p(s)u_2^{(n-1)}(s,\lambda,\alpha)-\lambda u_2^{(n-1)}(s,\lambda,\alpha)\right\}ds, \tag{7_1}$$

$$u_2^{(n)}(x,\lambda,\alpha)=\int_0^x\left\{\lambda u_1^{(n-1)}(s,\lambda,\alpha)-p(s)u_1^{(n-1)}(s,\lambda,\alpha)-q(s)u_2^{(n-1)}(s,\lambda,\alpha)\right\}ds\,. \tag{7_2}$$

Введем в рассмотрение также функции

$$\left.\begin{aligned} q_0(x)&=\max_{0\le\xi\le x}\left|\int_0^{\xi} q(s)ds\right|,\;\; q_1(x)=\int_0^x |q(s)|ds,\\ p_0(x)&=\max_{0\le\xi\le x}\left|\int_0^{\xi} p(s)ds\right|,\;\; p_1(x)=\int_0^x |p(s)|ds. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Легко заметить, что все функции q_0, q_1, p_0, p_1 монотонно возрастающие (неубывающие) и неотрицательные.

Лемма 2. *Для обеих компонент $u_1^{(n)}$ и $u_2^{(n)}$ вектор-функций $u^{(n)}$ имеют место оценки:*

$$\left|u_{1,2}^{(n)}(x,\lambda,\alpha)\right| \le \left[q_0(x)+p_0(x)+|\lambda|x\right]\cdot\frac{\left[q_1(x)+p_1(x)+|\lambda|x\right]^{n-1}}{(n-1)!}\cdot e^{|\mathrm{Im}\,\alpha|}. \tag{9}$$

Доказательство. Из определений (5_0), (5) и (6) для $u_1^{(n)}(x,\lambda,\alpha)$ имеем:

$$u_1^{(1)}(x,\lambda,\alpha)=\int_0^x q(s)ds\cdot\sin\alpha+\int_0^x p(s)ds\cdot\cos\alpha+\lambda x\cos\alpha,$$

$$u_2^{(1)}(x,\lambda,\alpha)=\int_0^x q(s)ds\cdot\cos\alpha-\int_0^x p(s)ds\cdot\sin\alpha+\lambda x\sin\alpha.$$

Учитывая, что $|\sin\alpha|\le e^{|\mathrm{Im}\,\alpha|}$ и $|\cos\alpha|\le e^{|\mathrm{Im}\,\alpha|}$, из последних равенств и (8) получаем оценки:

$$\left|u_1^{(1)}(x,\lambda,\alpha)\right|\le\left[q_0(x)+p_0(x)+|\lambda|x\right]e^{|\mathrm{Im}\,\alpha|},$$
$$\left|u_2^{(1)}(x,\lambda,\alpha)\right|\le\left[q_0(x)+p_0(x)+|\lambda|x\right]e^{|\mathrm{Im}\,\alpha|},$$

которые согласуются с (9) при $n=1$. Теперь по индукции, допустив, что для $u_{1,2}^{(n)}$ имеют место оценки (9), докажем, что они имеют место для $u_{1,2}^{(n+1)}$. Согласно (7_1) имеем:

$$\left|u_1^{(n+1)}(x,\lambda,\alpha)\right|\le\int_0^x\left\{|q(s)|\cdot\left|u_1^{(n)}(x,\lambda,\alpha)\right|+|p(s)|\cdot\left|u_2^{(n)}(x,\lambda,\alpha)\right|+|\lambda|\cdot\left|u_2^{(n)}(x,\lambda,\alpha)\right|\right\}\le$$

$$\le e^{|\mathrm{Im}\,\alpha|}\cdot\int_0^x\{|q(s)|+|p(s)|+|\lambda|\}\cdot\{|q_0(s)|+|p_0(s)|+|\lambda|\cdot s\}\cdot\frac{\left[q_1(s)+p_1(s)+|\lambda|s\right]^{n-1}}{n!}ds\le$$

$$\le e^{|\mathrm{Im}\,\alpha|}\cdot\{|q_0(s)|+|p_0(s)|+|\lambda|\cdot x\}\cdot\int_0^x\left\{\frac{d}{ds}\left[q_1(s)+p_1(s)+|\lambda|s\right]\right\}\cdot\frac{\left[q_1(s)+p_1(s)+|\lambda|s\right]^{n-1}}{n!}ds=$$

$$=e^{|\mathrm{Im}\,\alpha|}\cdot\{|q_0(s)|+|p_0(s)|+|\lambda|\cdot x\}\cdot\frac{1}{(n-1)!\,n}\int_0^x\left\{\frac{d}{ds}\left[q_1(s)+p_1(s)+|\lambda|s\right]\right\}^n ds=$$

$$=e^{|\mathrm{Im}\,\alpha|}\cdot\{|q_0(s)|+|p_0(s)|+|\lambda|\cdot x\}\cdot\frac{\left[q_1(x)+p_1(x)+|\lambda|x\right]^n}{n!}.$$

Здесь мы учли монотонную возрастаемость неотрицательных функций p_0 и q_0, то, что $\frac{d}{ds}q_1(s) = |q(s)|$, $\frac{d}{ds}p_1(s) = |p(s)|$, а также равенства $p_1(0) = q(0) = 0$. Легко видеть, что оценка для второй компоненты $u_2^{(n+1)}$ получается из (7_2) совершенно аналогично.
Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Компонеты $\varphi_j^{(n)}, (j = 1,2),$, последовательнсоти (5) сходятся равномерно на множестве $M = \{(x,\lambda,\alpha) : x \in [0,a], |\lambda| \le w, |\alpha| \le v\}$, где α, w, v –произвольные конечные положительные числа.*

Доказательство. Для того, чтобы последовательности $\varphi_1^{(n)}(x,\lambda,\alpha)$ и $\varphi_2^{(n)}(x,\lambda,\alpha)$ равномерно сходилась на указанном ножестве M, дотаточно (см. [4], стр. 155), чтобы имели место неравенства

$$\left\|\varphi_j^{(n)} - \varphi_j^{(n-1)}\right\| = \left\|u_j^{(n)}\right\| \overset{def}{=} \max_{(x,\lambda,\alpha)} \left|u_j^{(n)}(x,\lambda,\alpha)\right| \le a_n ,$$

где числа a_n образуют сходящийся ряд. Используя оценки (9) и свойства функций p_0, q_0, p_1, q_1, получаем:

$$\left|u_j^{(n)}(x,\lambda,\alpha)\right| \le e^{|\operatorname{Im}\alpha|} \cdot \left[q_0(x) + p_0(x) + |\lambda|x\right] \cdot \frac{\left[q_1(x) + p_1(x) + |\lambda|x\right]^{n-1}}{(n-1)!} \le$$

$$\le e^{v} \cdot \left[q_0(x) + p_0(x) + wa\right] \cdot \frac{\left[q_1(a) + p_1(a) + wa\right]^{n-1}}{(n-1)!} = c_0 \cdot \frac{c_1^{n-1}}{(n-1)!} = a_n ,$$

где $c_0 = e^{v} \cdot \left[q_0(a) + p_0(a) + wa\right]$, $c_1 = q_1(a) + p_1(a) + wa$ есть конечные числа в силу условия (3) теоремы. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c_0 e^{c_1}$ сходится, то лемма 3 доказана.

Из определения (5) последовательных приближений $\varphi^{(n)}$ следует, что компоненты $\varphi_1^{(n)}$ и $\varphi_2^{(n)}$ суть непрерывные и даже дифференцируемые функции по x. Из их равномерной сходимости следует, что предел этой последовательности существует, представляет собой дифференцируемую фунцкию и что в (5) можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Отсюда следует, что предельная вектор-функция $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ представляет собой решение интегрального уравнения (4) и, следовательно, задачи Коши (1), (2). Таким образом доказано существование решения.

Опять таки из построения (5) последовательных прижлижений $\varphi^{(n)}$ следует, что компоненты $\varphi_{1,2}^{(n)}$ есть целые функции параметров λ и α (при фиксированном x). Чтобы доказать, чти предельная функция также будет целой (от λ и α) обратимся к известной теореме Вейерштрасса (см., например, [6], стр. 166).

Теорема Вейерштрасса. *Если последовательсть функций $f_n \, (n \in N)$, аналитических в области $U \subseteq C^n$, равномерно сходится на каждом компактном подмножестве области U, то предельная функция аналитична в U.*

Взяв $\varphi^{(n)}(x_0,\lambda,\alpha) = f^{(n)}(\lambda,\alpha)$, $U = C^2$, из теоремы Вейерштрасса и из леммы 3 (поскольку множеством вида M, при фиксированном x_0, можно покрыть любой компакт в C^2) получаем, что решение нашей задачи Коши $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ есть целая функция параметров λ и α при любом фиксированном конечном x.

Для завершения доказательства теоремы нам остается доказать единственность решения $\varphi(x,\lambda,\alpha)$. Для этого, допустив, что существует еще другое решение $\Phi(x,\lambda,\alpha)$ и обозначив их разность $\varphi(x,\lambda,\alpha)-\Phi(x,\lambda,\alpha)=u(x,\lambda,\alpha)=u(x)$, мы видим, что достаточно доказать, что интегральное уравнение

$$u(x)=\int_0^x A(s,\lambda)u(s)ds \tag{10}$$

имеет только нулевое решение. Поскольку $u(x)$ непрерывная функция, то величина $K(x)=\max\limits_{0\le s\le x}\{|u_1(s)|,|u_2(s)|\}$ конечна при любом конечном x. Тогда из (10) для первой компоненты получаем оценку:

$$|u_1(x)|=\left|\int_0^x\{q(s)u_1(s)-p(s)u_2(s)-\lambda u_2(s)\}ds\right|\le K(x)\int_0^x\{|q(s)|+|p(s)|+|\lambda|\}=$$
$$=K(x)\cdot\{q_1(x)+p_1(x)+|\lambda|x\}.$$

Точно такую же оценку получаем для $|u_2(x)|$. Применяя эти оценки, опять из (10), получим:

$$|u_{1,2}(x)|\le\int_0^x\{|q(s)|+|p(s)|+|\lambda|\}\cdot K(s)\{q_1(s)+p_1(s)+|\lambda|s\}ds\le$$

$$\le K(x)\cdot\int_0^x\{q_1(s)+p_1(s)+|\lambda|s\}\cdot\frac{d}{ds}\{q_1(s)+p_1(s)+|\lambda|s\}ds=$$

$$=K(x)\cdot\int_0^x\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[q_1(s)+p_1(s)+|\lambda|s\right]^2ds=K\frac{\left[q_1(x)+p_1(x)+|\lambda|x\right]^2}{2!}.$$

Продолжая подставлять эти оценки в (10), получим:

$$|u_{1,2}(x)|\le K(x)\frac{[q_1(x)+p_1(x)+|\lambda|x]^n}{n!}$$

для любого $n=1,2,\ldots$. Следовательно, $|u_{1,2}(x)|\equiv 0$.

Теормеа доказана полностью.

Резюме

В работе доказыватся единственность и существование решения задачи Коши для канонической задачи Дирака в случае $p,q\in L^1_{loc}(0,\infty)$.

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը Դիրակի կանոնիկ խնդրի համար $p,q\in L^1_{loc}(0,\infty)$ *դեպքում։*

Литература

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в спектральную теорию, Москва, Наука, 1970.
2. В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова думка, 1977.
3. E. C. Titchmarsh, An extention of the Sturm-Liouville expantion, Quart. J. of Math. (Oxford), 15 (1944), 40-48.
4. Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, Наука, 1965.
5. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Наука, 1969.
6. Ю. Н. Бибиков, Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Ленинград, КГУ, 1981.
7. Т. Н. Арутюнян, Функция собственных значений семейства операторов Дирака, Известия НАН Армении, Математика, т.31, N6, 1996 г., 1-10.