

**ԴՐԱՎԱՆ ԿԻՍԱՆԱՌԱՆՅՔՈՒՄ ԽՋՎՈՂ ԿՈՄՊԼԵՔՍԱԺԵՔ ԿՇՈԱՅԻՆ
ԳՈՐԾԱԿՅՈՎ ՄԻ ԾԱՅՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ
ՄԻՋԻՆՈՎ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ**

Ս.Կ. Պետրոսյան
Մաթեմատիկայի ամբիոն

Հնդինալի [6] հոդվածում հետազոտված է L_λ ծայրային խնդրի սպեկտրալ վերլուծության միջինով զուգամիտությունն այն դեպքում, երբ $\rho(x)$ գործակիցը խզման կետում փոխում է նշանը: Ներկայացվող հոդվածում հետազոտվում է սպեկտրալ վերլուծության միջինով զուգամիտությունն այն դեպքում, երբ $\rho(x)$ -ը մեկ կետում խզվող կոմպլեքսարժեք ֆունկցիա է:

Դիտարկենք L_λ ծայրային խնդիրը, որն առաջանում է

$$\lambda(\lambda, y) = -y'' + q(x)y - \lambda\rho(x)y = 0, \quad 0 \leq x < \infty \quad (1)$$

դիֆերենցիալ հավասարումով և $y(0) = 0$ ծայրային պայմանով: Այստեղ

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, & \operatorname{Im} \alpha \neq 0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ 1, & x > a, \end{cases} \quad (2)$$

իսկ $q(x)$ կոմպլեքսարժեք ֆունկցիան անընդհատ է $[0, \infty)$ միջակայքում և բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$\int_0^\infty (1+x)|q(x)|dx < \infty, \quad (3_1)$$

հետագայում նաև՝

$$|q(x)| < c \cdot e^{-\varepsilon x}, \quad \varepsilon > 0 \quad (3_2)$$

պայմանին:

Որպես L_λ օպերատորի $D(L_\lambda)$ որոշման տիրույթ վերցնենք $y(x) \in L_2(0, \infty)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

- 1) $y'(x)$ ածանցյալը գոյություն ունի և բացարձակ անընդհատ է ցանկացած $[0, b]$ վերջավոր միջակայքում;
- 2) ամեն մի λ -ի համար $\lambda(\lambda, y) \in L_2(0, \infty)$;
- 3) $y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $y(0) = 0$ պայմանին:

Նշենք, որ $\alpha = 1$ դեպքում և $y'(0) - hy(0) = 0$ տեսքի ծայրային պայմանով L_λ օպերատորը հետազոտված է [1], [2], [3] և այլ աշխատանքներում, իսկ $\alpha^2 > 0$, $\alpha \neq 1$ և $q(x) = q(x)$ դեպքը հետազոտված է [4]-ում:

[5] հոդվածում ուսումնասիրված է L_λ ծայրային խնդրի սպեկտրը և ստացված է սպեկտրալ վերլուծության բացահայտ տեսքը (1) հավասարման հատուկ լուծումների միջոցով: Մասնավորապես ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Թ ե ո թ ն մ 1: Դիցուք՝ $f(x) \in D(L_\lambda)$ և L_λ ծայրային խնդիրը չունի սպեկտրալ առանձնահատկություններ: Այդ դեպքում տեղի ունի

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^2 F(s) \varphi(x, s)}{\Psi(0, s) \Psi(0, -s)} ds - \sum_{n=1}^\infty \frac{2K_n a(k_n) C_n \varphi(x, k_n)}{\Psi(0, k_n)} \quad (4)$$

վերլուծությունը, որը զուգամիտում է $f(x)$ -ին ամեն մի հաստատագրված $x \geq 0$ համար:

Այստեղ $\varphi(x, k)$ -ն և $\Psi(x, k)$ -ն (1) հավասարման հատուկ լուծումներն են, որոնք $k^2 = \lambda$, $\operatorname{Im} k \geq 0$, $k \rightarrow \infty$ դեպքում ունեն այսպիսի ափսոսաբանական

$$\Psi(x, k) = \begin{cases} \left[a_0(k) \frac{\sin \alpha k x}{\alpha k} + b_0(k) \cos \alpha k x \right] \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], & 0 \leq x \leq a \\ e^{i\alpha x} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], & x > a, \end{cases} \quad (5)$$

$$\varphi(x, k) = \begin{cases} \frac{\sin \alpha k x}{\alpha k} + O\left\{ \frac{1}{k^2} \exp(\operatorname{Im} \alpha k |x|) \right\}, & 0 \leq x \leq a \\ \left[c_0(k) e^{i\alpha x} + d_0(k) e^{-i\alpha x} \right] \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], & x > a, \end{cases} \quad (6)$$

$a_0(k)$, $b_0(k)$, $c_0(k)$, $d_0(k)$ գործակիցները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$a_0(k) = k e^{i\alpha a} (\cos \alpha a k + \alpha \sin \alpha a k),$$

$$b_0(k) = e^{i\alpha a} (\cos \alpha a k - \frac{i}{\alpha} \sin \alpha a k),$$

$$c_0(k) = -d_0(k) = \frac{e^{-i\alpha a}}{2ki} (\cos \alpha a k + \frac{i}{\alpha} \sin \alpha a k):$$

$\lambda_n = k_n^2$, $n \in N$ թվերը կազմում են L_λ ծայրային խնդրի սեփական արժեքների հաջորդականությունը, ընդ որում՝

$$k_n = \frac{\pi n}{\alpha a} + \frac{1}{\alpha} \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \gamma = \frac{1}{a} \arg\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right): \quad (7)$$

Իսկ $F(s)$ և C_n գործակիցները որոշվում են

$$F(s) = \int_0^{\infty} \varphi(t, s) \rho(t) f(t) dt, \quad C_n = \int_0^{\infty} \varphi(t, k_n) \rho(t) f(t) dt \quad (8)$$

բանաձևերով:

Այսպիսով, (4) բանաձևը ներկայացնում է $f(x)$ ֆունկցիայի վերլուծությունն ըստ L_λ

ծայրային խնդրի սեփական ֆունկցիաների:

Հոդվածը նվիրված է հետևյալ թեմորենի ապացուցմանը:

Թ ե ո թ մ 2: $L_2(0, \infty)$ հիլբերտյան տարածությանը պատկանող զանկացած $f(x)$ ֆունկցիայի համար (4) վերլուծությունը գույզամիտում է միջինով գույզամիտության իմաստով:

Ա պ ա ց ու մ 4: (4) բանաձևի աջ մասը բաղկացած է երկու գումարելիներից, որոնցից առաջինը համապատասխանում է L_λ օպերատորի անընդհատ սպեկտրին, իսկ երկրորդը՝ դիսկրետ սպեկտրին:

Նախ դիտարկենք վերլուծության ինտեգրալային մասը՝

$$\int_0^{\infty} \frac{s^2 F(s) \varphi(x, s)}{\Psi(0, s) \Psi(0, -s)} ds: \quad (9)$$

Ապացուցենք, որ այն քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիա է: Դրա համար նկատենք, որ

$$F_1(x) = \frac{s F(s)}{\Psi(0, s)} \in L_2(0, \infty): \quad (10)$$

Այնուհետև դիտարկենք x պարամետրից կախված

$$\int_0^{\infty} \frac{F_1(s) \cdot s}{\Psi(0, -s)} \varphi(x, s) ds$$

ինտեգրալը և ցույց տանք, որ այն պատկանում է $L_2(0, \infty)$ -ին:

Դիցուք՝ $0 \leq x \leq a$: Այդ դեպքում

$$\int_0^{\infty} F_1(s) \frac{s\varphi(x, s)}{\Psi(0, -s)} ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} F_1(s) \frac{\sin \alpha xs}{\Psi(0, -s)} \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] ds :$$

Այստեղ հետազոտման ենթակա է միայն գլխավոր անդամը՝

$$\int_0^{\infty} F_1(s) \frac{\sin \alpha xs}{\Psi(0, -s)} ds :$$

Հաշվի առնելով, որ $s \rightarrow \infty$ դեպքում տեղի ունեն

$$\sin \alpha xs = \frac{1}{2} O\left\{ e^{|\operatorname{Im} \alpha| xs} \right\}, \quad \Psi(0, -s) = \frac{1}{2} O\left\{ e^{|\operatorname{Im} \alpha| s} \right\}$$

ասիմպտոտիկ հավասարությունները, բավական է ցույց տալ, որ

$$\int_0^{\infty} F_1(s) e^{|\operatorname{Im} \alpha| s(x-a)} ds \in L_2(0, a) : \quad (11)$$

Ունենք՝

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left\{ \int_0^{\infty} F_1(s) e^{|\operatorname{Im} \alpha| s(x-a)} ds \right\}^2 dx = \int_0^a \left\{ \int_0^{\infty} F_1(s) e^{|\operatorname{Im} \alpha| s(x-a)} ds \int_0^{\infty} \overline{F_1(t)} e^{|\operatorname{Im} \alpha| t(x-a)} dt \right\} dx = \\ & = \int_0^a \int_0^{\infty} F_1(s) \overline{F_1(t)} ds dt \int_0^a e^{|\operatorname{Im} \alpha| (s-t)(x-a)} dx = \int_0^a \int_0^{\infty} F_1(s) \overline{F_1(t)} \frac{e^{|\operatorname{Im} \alpha| (s-t)(x-a)}}{|\operatorname{Im} \alpha| (s+t)} \Big|_0^a ds dt = \\ & = \int_0^a \int_0^{\infty} F_1(s) \overline{F_1(t)} \frac{1 - e^{-|\operatorname{Im} \alpha| (s+t)a}}{|\operatorname{Im} \alpha| (s+t)} ds dt \leq \frac{2}{|\operatorname{Im} \alpha|} \int_0^a \int_0^{\infty} F_1(s) \overline{F_1(t)} \frac{ds dt}{s+t} \leq \frac{2\pi}{|\operatorname{Im} \alpha|} \int_0^a |F_1(s)|^2 ds < \infty : \end{aligned}$$

Այսպիսով, (11) առնչությունն ապացուցված է:

Դիցուք, այժմ, $a < x < \infty$: Այդ դեպքում հաշվի առնելով (5) և (6) ասիմպտոտիկ բանաձևերը, կունենանք՝

$$\int_0^{\infty} F_1(s) \frac{s\varphi(x, s)}{\Psi(0, -s)} ds = \int_0^{\infty} F_1(s) \frac{sc(s)}{\Psi(0, -s)} e^{i\omega} \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] ds + \int_0^{\infty} F_1(s) \frac{sd(s)}{\Psi(0, -s)} e^{-i\omega} \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] ds :$$

Դժվար չէ համոզվել, որ $s \rightarrow \infty$ դեպքում՝

$$\frac{sc(s)}{\Psi(0, -s)} = O(1), \quad \frac{sd(s)}{\Psi(0, -s)} = O(1) :$$

Բացի դրանից, քանի որ $F_1(s) \in L_2(0, \infty)$, ուստի

$$\int_0^{\infty} F_1(s) e^{i\omega s} ds \in L_2(a, \infty) \quad \text{և} \quad \int_0^{\infty} F_1(s) e^{-i\omega s} ds \in L_2(a, \infty) :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\int_0^{\infty} F_1(s) \frac{s\varphi(x, s)}{\Psi(0, -s)} ds \in L_2(a, \infty) :$$

Այժմ դիտարկենք (4) վերլուծության նրկրորդ գումարելին՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n a(k_n) c_n}{\Psi(0, k_n)} \varphi(x, k_n) : \quad (12)$$

c_n գործակցի (8) արտահայտությունից, հաշվի առնելով (5) և (6) բանաձևերը, ինչպես

նաև

$$\frac{2k_n a(k_n)}{\Psi(0, k_n)} = \frac{2}{a} k_n^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right], \quad |k_n| \rightarrow \infty$$

ասիմպտոտիկ հավասարությունը, ստանում ենք՝

$$c_n = \frac{\tilde{c}}{k_n} \int_0^a \sin \alpha k_n t \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] f(x) dx + \frac{\tilde{c}}{k_n} \int_a^\infty e^{ik_n(t-a)} \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] f(t) dt :$$

Հետևաբար, (12) շարքը կ'ներկայացվի հետևյալ գումարի տեսքով.

$$c_1 \sum_{n=1}^{\infty} k_n \varphi(x, k_n) \int_0^a \sin \alpha k_n t \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] f(t) dt + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} k_n \varphi(x, k_n) \int_a^\infty e^{ik_n(t-a)} \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] f(t) dt = \\ = \omega_1(x) + \omega_2(x) : \quad (13)$$

Այստեղ կատարել ենք ակնհայտ նշանակումներ:

Հետագոտնք $\omega_1(x)$ -ի զուգամիտությունը $[0, a]$ միջակայքում: Յույց տանք, որ այդ շարքը զուգամետ է $L_2(0, a)$ -ում: Հաշվի առնելով (6) բանաձևը, կարող ենք գրել.

$$\omega_1(x) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha k_n x \int_0^a \sin \alpha k_n t \cdot f(t) dt + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha k_n x \int_0^a O\left(\frac{1}{k_n}\right) f(t) dt + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k_n}\right) \int_0^a \sin \alpha k_n t \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] f(t) dt :$$

Վերջին երկու շարքերը, ինչպես դժվար չէ նկատել, զուգամետ են $L_2(0, a)$ -ում: Մնում է պարզել

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha k_n x \int_0^a \sin \alpha k_n t \cdot f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \alpha k_n x \quad (14)$$

շարքի վարքը, որտեղ

$$b_n = \int_0^a \sin \alpha k_n t \cdot f(t) dt :$$

Տեղադրելով k_n -ի արտահայտությունը (7) բանաձևից և հաշվի առնելով Ֆուրյեյի նշանկունաչափական շարքի գործակիցների հայտնի հատկությունը, ցույց է տրվում, որ $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$: Այստեղից պարզ է դառնում, որ (14) հավասարության աջ մասը, ուրեմն նաև

$\omega_1(x)$ -ը պատկանում են $L_2(0, a)$ տարածությանը:

Ենթադրենք, այժմ, որ $a < x < \infty$: Այդ դեպքում $\omega_1(x)$ -ի համար կունենանք՝

$$\omega_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} O\left(e^{ik_n(x-a)}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] \cdot \int_0^a \sin \alpha k_n t \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] f(t) dt :$$

Այստեղ բավական է հետագոտնել հետևյալ շարքը.

$$\tilde{\omega}_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{ik_n(x-a)} \int_0^a \sin \alpha k_n t f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{ik_n(x-a)} \quad (15)$$

Նշանակենք

$$\tilde{\omega}_{1,m}(x) = \sum_{n=1}^m b_n e^{ik_n(x-a)}$$

և ցույց տանք, որ այս հաջորդականությունը զուգամետ է $L_2(a, \infty)$ -ում:

Իրոք, նրան $m > r$, ապա

$$R_{r,m} = \int_a^\infty |\tilde{\omega}_{1,m}(x) - \tilde{\omega}_{1,r}(x)|^2 dx = \int_a^\infty \left| \sum_{n=r+1}^m b_n e^{ik_n(x-a)} \right|^2 dx =$$

$$= \int_a^{\infty} \sum_{n=r+1}^m b_n e^{ik_n(x-a)} \sum_{s=r+1}^m \overline{b_s} e^{-ik_s(x-a)} dx \leq c \sum_{n=r+1}^m \cdot \sum_{s=r+1}^m \frac{b_n \cdot \overline{b_s}}{n+s} ;$$

Կիրառելով Խարդիի հայտնի անհավասարությունը, կստանանք՝

$$R_{r,m} \leq \frac{\pi c}{2} \sum_{n=r+1}^m |b_n|^2 :$$

Այս գնահատականից և $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ շարքի գուգամիտությունից հետևում է $\overline{\omega}_l(x)$ հաջորդականության ֆունդամենտալ լինելը: Իսկ քանի, որ L_2 -ը լրիվ մետրիկական տարածություն է, ապա $\overline{\omega}_l(x) \in L_2(a, \infty)$:

Այսպիսով, մենք ցույց տվեցինք, որ (13) բանաձևի առաջին շարքը գուգամիտում է $L_2(0, \infty)$ տարածության մեջ:

Անցնենք (13) բանաձևի երկրորդ շարքի հետազոտմանը:

Դիցուք՝ $a < x < \infty$: Այդ դեպքում.

$$\begin{aligned} \omega_2(x) &= c_2' \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha k_n x \int_a^{\infty} e^{ik_n(t-a)} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k_n}\right) \sin \alpha k_n x \int_0^{\infty} e^{ik_n(t-a)} f(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha k_n x \int_a^{\infty} e^{ik_n(t-a)} \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right)\right] f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k_n}\right) \sin \alpha k_n x \int_a^{\infty} e^{ik_n(t-a)} \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right)\right] f(t) dt \end{aligned}$$

Տվյալ դեպքում բավական է հետազոտել հետևյալ շարքի L_2 գուգամիտությունը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha k_n x \int_a^{\infty} e^{ik_n(t-a)} f(t) dt \quad (16)$$

Եթե այստեղ տեղադրենք k_n -ի արժեքը (7) բանաձևից, կստանանք՝

$$\cos \left[\gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \frac{x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{a} \int_a^{\infty} e^{ik_n(t-a)} f(t) dt + \sin \left[\gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \frac{x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{a} \int_a^{\infty} e^{ik_n(t-a)} f(t) dt :$$

Նշանակենք

$$d_n = \int_a^{\infty} e^{ik_n(t-a)} f(t) dt :$$

Այդ դեպքում (16) շարքը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\cos \left[\gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \frac{x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{\pi n x}{a} + \sin \left[\gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \frac{x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos \frac{\pi n x}{a} :$$

Այս ներկայացումից պարզ է դառնում, որ բավական է ապացուցել $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 < \infty$ առնչությունը:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m |d_n|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^m \int_a^{\infty} e^{ik_n(t-a)} f(t) dt \int_a^{\infty} e^{ik_n(u-a)} \bar{f}(u) du \right\} \leq \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^m \int_a^{\infty} e^{-i \operatorname{Im} k_n(t-a)} |f(t)| dt \int_a^{\infty} e^{-i \operatorname{Im} k_n(u-a)} |\bar{f}(u)| du \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{a=1}^n \left\{ \int_a^{\infty} e^{-\frac{\pi n}{|\alpha|a}(t-a)} \cdot e^{-\frac{\pi(t-a)}{|\alpha|n}} f(t) dt \cdot \int_a^{\infty} e^{-\frac{\pi n}{|\alpha|a}(u-a)} \bar{f}(u) du \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_a^{\infty} e^{-\frac{\pi}{|\alpha|a}(t+u-2a)} |f(t)| \cdot |\bar{f}(u)| \cdot \sum_{n=1}^n e^{-\frac{\pi n}{|\alpha|a}(t-a)} e^{-\frac{\pi n}{|\alpha|a}(u-a)} dt du \end{aligned}$$

Օգտվենք

$$\sum_{n=1}^n e^{-\frac{\pi n}{|\alpha|a}(t-a)} e^{-\frac{\pi n}{|\alpha|a}(u-a)} \leq \frac{e^{-\frac{\pi(t-a)}{|\alpha|a}} \cdot e^{-\frac{\pi(u-a)}{|\alpha|a}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{|\alpha|a}} \cdot e^{-\frac{\pi(u-a)}{|\alpha|a}}}$$

ականաչառ անհավասարությունից և կատարենք

$$f_1(t) = f(t) e^{-\frac{\pi t}{|\alpha|a}(t-a)}$$

նշանակումը: Կստանանք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 \leq \iint_a^{\infty} \frac{|f_1(t)| |\bar{f}_1(u)|}{1 - e^{-\frac{\pi(t-a)}{|\alpha|a}} \cdot e^{-\frac{\pi(u-a)}{|\alpha|a}}} dt du :$$

Ինտեգրալատակ ֆունկցիան $t = u = a$ կետում ունի ինտեգրելի նզանկություն, այսինքն՝

ինտեգրալը գոյգամնտ է: Հետևաբար, $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 < \infty$:

Մրանով ապացուցեցինք, որ

$$\int_0^a |\omega_2(x)|^2 dx < \infty :$$

Թեոդեմ 2-ը ապացուցելու համար մնում է դիտարկել $x > a$ դեպքը:

$$\omega_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k_n}\right) e^{ik_n(x-a)} \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] \cdot \int_a^{\infty} e^{ik_n t} \left[1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] f(t) dt : \quad (17)$$

Կսահմանափակվենք միայն

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} e^{ik_n(x-a)} \int_a^{\infty} e^{ik_n t} f(t) dt \quad (18)$$

շարքի հետագոտմամբ: Հիշելով d_n -ի արտահայտությունը, (18) շարքը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} d_n e^{ik_n(x-a)} :$$

Քանի որ

$$|e^{ik_n(x-a)}| \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 < \infty, \quad \frac{1}{k_n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

ուրեմն (18) շարքի գոյգամիտությունը $L_2(a, \infty)$ տարածության մեջ ականաչառ է:

(17) քանաձևի աջ մասում ստացվող մյուս շարքերի L_2 գոյգամիտությունն ավելի հեշտ է ապացուցում:

Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք, որ (12) շարքը գոյգամիտում է $L_2(a, \infty)$ տարածության մեջ:

Թեոդեմ 2-ը լրիվությամբ ապացուցված է:

Ա մ փ ո փ ո մ

$L_2(0, \infty)$ տարածությունում դիտարկվում է L_λ ծայրային խնդիրը, որն առաջանում է

$$-y'' + q(x)y - \lambda \rho(x)y = 0, \quad 0 \leq x < \infty$$

դիֆերենցիալ հավասարումով և $y(0) = 0$ ծայրային պայմանով: Այստեղ

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, & \operatorname{Im} \alpha \neq 0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ 1, & x > a, \end{cases} \quad [0, \infty)$$

իսկ $q(x)$ կոմպլեքսարժեք ֆունկցիան անընդհատ է $[0, \infty)$ միջակայքում և բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$(1+x)|q(x)| \in L_1(0, \infty) \quad \text{և} \quad |q(x)| < c \cdot e^{-\varepsilon x}, \quad \varepsilon > 0:$$

Ապացուցվում է, որ $f(x) \in D(L_\lambda)$, $f(x) \in L_2(0, \infty)$ պայմաններին բավարարող ցանկացած $f(x)$ ֆունկցիայի համար $f(x)$ ֆունկցիայի վերլուծությունն ըստ L_λ օպերատորի սեփական ֆունկցիաների զուգամիտում է միջին քառակուսային զուգամիտության իմաստով:

Р е з ю м е

В пространстве $L_2(0, \infty)$ рассматривается краевая задача L_λ порожденная дифференциальным уравнением

$$-y'' + q(x)y - \lambda \rho(x)y = 0, \quad 0 \leq x < \infty$$

и краевым условием $y(0) = 0$. Здесь

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, & \operatorname{Im} \alpha \neq 0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ 1, & x > a, \end{cases}$$

а комплекснозначная функция $q(x)$ непрерывна в промежутке $[0, \infty)$ и удовлетворяет условиям:

$$(1+x)|q(x)| \in L_1(0, \infty), \quad |q(x)| < c \cdot e^{-\varepsilon x}, \quad \varepsilon > 0:$$

Доказывается, что для всякой функции $f(x) \in D(L_\lambda)$ и $f(x) \in L_2(0, \infty)$ разложение по собственным функциям оператора L_λ сходится в смысле сходимости в среднем.

Գրականություն

1. Наймарк М.А. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси. Тр. Моск. матем. об-ва (3) (1954), 181-270.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Изд. 2 "Наука", 1969.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Изд. "Наукова Думка", Киев, 1977.
4. Гасымов М.Г. Прямые и обратные задачи спектрального анализа для одного класса уравнений с разрывными коэффициентами. "Неклассические методы в геофизике", Материалы международной конференции, 1977, май, г. Новосибирск.
5. Петросян С.К. Спектр и разложение по собственным функциям линейного дифференциального оператора второго порядка с разрывным коэффициентом на полуоси. Рук. Деп. в ВИНТИ N740-82, 23стр.
6. Петросян С.К. О сходимости в среднем разложения по собственным функциям одной краевой задачи с разрывным коэффициентом на полуоси. "Функц. анализ и его приложения", сб. науч. статей, Аз-б Гос. унт., Баку, 1986г.