

**ИЗГИБ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ
ЛИНЕЙНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКОЙ
ПРИ НАЛИЧИИ ОСЕВЫХ СЖИМАЮЩИХ СИЛ**

Н. А. КУТУЗЯН

*Кандидат физико-математических наук, доцент
Проректор Гаварского государственного университета*

Л. А. ШЕКЯН

*Член - корреспондент инженерной Академии Армении,
доктор физико-математических наук, профессор
преподаватель Гаварского государственного университета*

В рамках обобщенной модели изгиба тонкостенных упругих тел [1, стр. 422], где помимо поперечных сил, продольные сжимающие или растягивающие силы также влияют на их прогибы, рассматривается периодическая контактная задача об изгибе на верхней горизонтальной границе деформируемой полуплоскости бесконечной системы балок, находящихся под действиям линейно распределенной поперечной нагрузки и осевых сжимающих сил, приложенных на концах балок.

Задача сформулирована в виде сингулярного интегрального уравнения (СИУ) относительно нормальных контактных напряжений, действующих между балками и полуплоскостью. Эффективное решение этого СИУ получено известным численно-аналитическим методом [2,3], основанным на квадратурных формулах Гаусса для вычисления интегралов типа Коши и обычных интегралов с привлечением математического аппарата многочленов Чебышева.

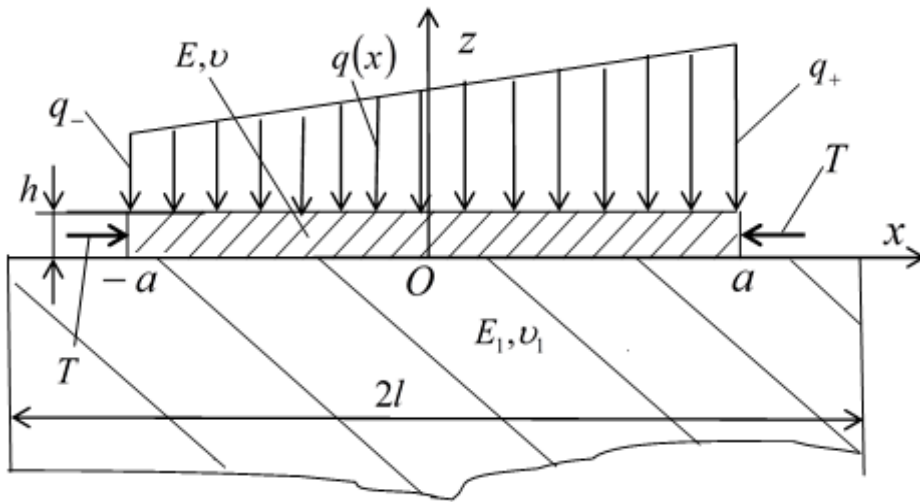
Аналогичные задачи рассмотрены в [4-6].

1. Постановка задачи. Пусть упругая нижняя полуплоскость $z \leq 0$ с модулем упругости E_1 и с коэффициентом Пуассона ν_1 отнесена к прямоугольной системе координат Oxz и находится в условиях плоской

деформации. Пусть далее одинаковые горизонтальные балки длиной $2a$, высотой h , модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , находящиеся под действием вертикальных периодических с периодом $2l$ ($a < l$) линейно распределенных поперечных сил интенсивности $q(x)$ и осевых сжимающих сил T , вдоль системы участков

$$L = \left\{ x \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [-a + 2kl, a + 2kl]; z = 0 \right\}$$

вдавливаются в упругую полуплоскость (фиг. 1). Требуется определить поперечные смещения (прогибы) точек изогнутой оси балок $v(x)$ в направлении оси Oz , законы распределения контактных давлений $p(x)$, действующих между балками и полуплоскостью, изгибающих моментов $M(x)$ и перерезающих сил $Q(x)$ во всех поперечных сечениях балок x ($-a + 2kl \leq x \leq a + 2kl$), $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.



Фиг. 1. Схема нагружения одинарной балки на упругой полуплоскости.

2. Вывод интегрального уравнения рассматриваемой контактной задачи. Рассмотрим упругое равновесие одинарной балки ($-a \leq x \leq a$). Дифференциальное уравнение изгиба балки получается из общего дифференциального уравнения изгиба прямоугольной пластинки при совместном воздействии поперечных сил $q(x)$, контактных давлений $p(x)$ а

также осевых сжимающих сил T в срединной плоскости пластинки, находящейся в условиях плоской деформации с базовой плоскостью Oxz ([1], стр.422, формула 217, $N_x = -T$, $w = v$, $N_y = N_{xy} = 0$). Оно имеет вид

$$D \frac{d^4 v}{dx^4} + T \frac{d^2 v}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a). \quad (1)$$

Здесь $q(x)$ линейная функция вида

$$q(x) = \frac{q_+ + q_-}{2} + \frac{q_+ - q_-}{2a} x \quad (-a \leq x \leq a), \quad (2)$$

где $q_- = q(-a)$ и $q_+ = q(a)$ - граничные значения распределенной поперечной нагрузки $q(x)$, а $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ - жесткость балки на изгиб.

Функции $v(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ связаны между собой соотношениями

$$M(x) = D \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad Q(x) = D \frac{d^3 v}{dx^3}. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (1) рассматривается при следующих граничных условиях:

$$M(x)|_{x=\pm a} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=\pm a} = 0, \quad (4)$$

указывающих на то, что в концевых точках балки $x = \pm a$ изгибающие моменты $M(x)$ отсутствуют. При этом условия равновесия балки имеют вид

$$\int_{-a}^a [p(x) - q(x)] dx = 0, \quad \int_{-a}^a x[p(x) - q(x)] dx = 0. \quad (5)$$

Решение дифференциального уравнения (1) относительно $dv(x)/dx$ при граничных условиях (4) и при $0 < T < \pi^2 D/4a^2$, имеет вид [5]

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \left\{ [1 - \cos[k(x-s)]] \text{sign}(x-s) + \text{ctg}(ka)[1 - \cos(kx)] \sin(ks) - \text{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks) \right\} g(s) ds + C \quad (6)$$

где $k = \sqrt{T/D}$, $g(x) = [p(x) - q(x)]/D$ а C - угловой коэффициент касательной, проведенной к изогнутой оси одинарной балки в точке с координатой $x = 0$.

Далее воспользуемся известной формулой [7] для вертикальных перемещений $v_1(x)$ граничных точек нижней упругой полуплоскости от приложенной на её точках L периодически с периодом $2l$ распределённых вертикальных сил интенсивности $p(x)$:

$$v_1(x) = -\frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|\sin[\pi(x-s)/2l]} p(s) ds + \text{const} \quad (-a < x < a). \quad (7)$$

Теперь воспользуемся условием контакта $dv_1/dx = dv/dx$ ($-a < x < a$). На основании (6) и (7) придём относительно $p(x)$ к СИУ:

$$\frac{1-\nu_1^2}{E_1 l} \int_{-a}^a \text{ctg} \left[\frac{\pi(s-x)}{2l} \right] p(s) ds + \frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a \{ [1 - \cos k(x-s)] \text{sign}(x-s) + \text{ctg}(ak) \times \quad (8)$$

$$\times [1 - \cos(kx)] \sin(kx) - \text{tg}(ak) \sin(kx) \cos(kx) \} [p(s) - q(s)] ds + C \quad (-a < x < a).$$

Условия равновесия одинарной балки (5) с учётом (2) будут:

$$\int_{-a}^a p(x) dx = P, \quad \int_{-a}^a x p(x) dx = M, \quad (9)$$

где

$$P = (q_+ + q_-)a; \quad M = \frac{(q_+ - q_-)a^2}{3}.$$

Далее введём безразмерные величины

$$\xi = \pi x/l; \quad \eta = \pi s/l; \quad \chi = ak; \quad \chi_1 = kl/\pi; \quad \lambda = 6E_1(l/h)^3/\pi^2 \chi^2 (1-\nu_1^2)E; \quad (10)$$

$$\alpha = \pi a/l; \quad \varphi(\xi) = p(l\xi/\pi)/E_1; \quad h(\xi) = q(l\xi/\pi)/E_1; \quad \gamma_0 = C/2\pi(1-\nu_1^2).$$

В этих обозначениях определяющие СИУ задачи (8) принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \text{ctg} \left(\frac{\eta - \xi}{2} \right) \varphi(\eta) d\eta + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} K(\xi, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{\lambda}{\pi} f(\xi) + \gamma_0 \quad (11)$$

$$(-\alpha < \xi < \alpha),$$

где

$$K(\xi, \eta) = \{ 1 - \cos[\chi_1(\xi - \eta)] \} \text{sign}(\xi - \eta) + \quad (12)$$

$$+ \text{ctg} \chi [1 - \cos(\chi_1 \xi)] \sin(\chi_1 \eta) - \text{tg} \chi \sin(\chi_1 \xi) \cos(\chi_1 \eta)$$

$$f(\xi) = \int_{-\alpha}^{\alpha} K(\xi, \eta) h(\eta) d\eta \quad (-\alpha < \xi, \eta < \alpha). \quad (13)$$

При этом условия равновесия (9) преобразуются в следующие:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\xi) d\xi = P_0; \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \xi \varphi(\xi) d\xi = M_0; \quad (P_0 = \pi P / l E_1; \quad M_0 = \pi^2 M / l^2 E_1). \quad (14)$$

Итак, решение СИУ (11) должно удовлетворять условиям (14). Отметим, что входящая в (11) функция $\varphi(\xi)$ характеризует неизвестное контактное давление, а параметр γ_0 - угол поворота центрального сечения ($x=0$) балки, которое также подлежит определению.

3. Решение сингулярного интегрального уравнения (11) при условиях (14).

Эффективное решение СМУ (11), удовлетворяющее условиям (14), получим известным численно-аналитическим методом решения СИУ [2,3], основанный на квадратурных формулах Гаусса для обычных и сингулярных интегралов с ядром Коши, в них от ядра Гильберта $\text{ctg}[(\eta - \xi)/2]$ перейдём к ядру Коши $1/(\eta - \xi)$ и от интервала $(-\alpha; \alpha)$ перейдём на интервал $(-1; 1)$. С этой целью в (11) и (14) от переменных ξ и η перейдём к переменным t и u , полагая

$$t = \text{tg}(\xi/2)/\text{tg}(\alpha/2); \quad u = \text{tg}(\eta/2)/\text{tg}(\alpha/2); \quad (-1 < t, u < 1). \quad (15)$$

Отсюда

$$\xi = 2 \arctg\left(t \cdot \text{tg} \frac{\alpha}{2}\right); \quad \eta = 2 \arctg\left(u \cdot \text{tg} \frac{\alpha}{2}\right); \quad d\eta = 2 \text{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) du / \left(1 + u^2 \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

Преобразуем ядро Гильберта:

$$\text{ctg}\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right) = \frac{1 + \text{tg}(\xi/2) \text{tg}(\eta/2)}{\text{tg}(\eta/2) - \text{tg}(\xi/2)} = \frac{1 + ut \cdot \text{tg}^2(\alpha/2)}{(u - t) \text{tg}(\alpha/2)} = \frac{1 + t^2 \text{tg}^2(\alpha/2)}{(u - t) \text{tg}(\alpha/2)} + t \cdot \text{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

С учётом последнего, СИУ (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{u - t} + \frac{1 + t \cdot \text{tg}^2(\alpha/2)}{1 + t^2 \text{tg}^2(\alpha/2)} + \frac{\lambda \text{tg}(\alpha/2)}{1 + t^2 \text{tg}^2(\alpha/2)} L(u, t) \right] \varphi_0(u) du = \\ & = \frac{\lambda}{\pi} g_0(t) + \frac{\gamma_0 \text{tg}(\alpha/2)}{1 + t^2 \text{tg}^2(\alpha/2)} \quad (-1 < t < 1), \end{aligned} \quad (16)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \frac{2 \text{tg}(\alpha/2)}{1 + t^2 \text{tg}^2(\alpha/2)} \varphi\left(2 \arctg\left(t \cdot \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right); \quad g_0(t) = f\left(2 \arctg\left(t \cdot \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right); \\ L(t, u) &= K(2 \arctg(t \cdot \text{tg}(\alpha/2)), 2 \arctg(u \cdot \text{tg}(\alpha/2))) \quad (-1 < t, u < 1). \end{aligned} \quad (17)$$

При переходе к переменной t условия (14) преобразуются в условия

$$\int_{-1}^1 \varphi_0(t) dt = P_0; \quad 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \arctg\left(t \cdot \arctg \frac{\alpha}{2}\right) \varphi_0(t) dt = M_0. \quad (18)$$

Таким образом, решение поставленной задачи окончательно свелось к решению СИУ (16) при условиях (18).

Теперь, следуя [2,3], функцию $\varphi_0(t)$ представим в виде

$$\varphi_0(t) = \Omega_0(t) / \sqrt{1-t^2} \quad (-1 < t < 1), \quad (19)$$

где $\Omega_0(t)$ – гильдеровская функция на отрезке $[-1;1]$. Тогда по известной процедуре [2-4] СИУ (16) сведётся к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \left[\frac{1}{u_n - t_r} + \frac{t_r \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} + \frac{\lambda \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} L(t_r, u_n) \right] \Omega_0(u_n) = \\ = \frac{\lambda}{\pi} g_0(t_r) + \frac{\gamma_0 \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \quad (r = \overline{1, 2, \dots, N-1}); \\ \sum_{n=1}^N \frac{\pi}{N} \Omega_0(u_n) = P_0; \quad \sum_{n=1}^N \frac{2\pi}{N} \arctg\left(u_n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \Omega_0(u_n) = M_0. \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{Здесь} \quad u_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2N} \pi\right) \quad (n = \overline{1, N}), \quad t_r = \cos\left(\frac{\pi r}{N}\right) \quad (r = \overline{1, N-1}) -$$

известные чебышевские узлы, т.е. корни, соответственно, многочленов Чебышева первого рода $T_N(u)$ и второго рода $U_{N-1}(t)$. Отметим, что система (19) состоит из $M+1$ уравнений со столько же неизвестными $(\Omega_0(u_1), \Omega_0(u_2), \dots, \Omega_0(u_N))$ и γ_0 .

Далее, положим

$$K_{rn} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[\frac{1}{u_n - t_r} + \frac{t_r \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} + \frac{\lambda \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} L(t_r, u_n) \right], & (n = \overline{1, N}, r = \overline{1, N-1}); \\ -\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, & (n = N+1, r = \overline{1, N-1}); \quad \frac{\pi}{N}, \quad (n = N+1, r = N); \\ 0, & (n = N+1, r = N, N+1); \quad \frac{\pi}{N} \arctg\left(u_n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \quad (n = \overline{1, N}, r = N+1); \end{cases}$$

$$a_r = \begin{cases} (\lambda/\pi)g_0(t_r), & (r = 1, 2, \dots, N-1); \\ P_0, & (r = N), \\ M_0, & (r = N+1), \end{cases}$$

$$X_n = \begin{cases} \Omega_0(u_n), & (n = 1, 2, \dots, N); \\ \gamma_0, & (n = N+1). \end{cases}$$

В результате, система (19) запишется в канонической форме:

$$\sum_{n=1}^{N+1} K_{rn} X_n = a_r \quad (r = \overline{1, N+1}). \quad (20)$$

После решения системы (20), расчётная функция (18) в узлах u_n вычисляется по формуле

$$\varphi_0(u_n) = X_n / \sqrt{1 - u_n^2} \quad (r = \overline{1, N+1}),$$

а безразмерные изгибающие моменты $M_0(t) = \pi^2 M(x)/l^2 E_1$ и поперечные силы $Q_0(t) = \pi Q(x)/l E_1$ в любой точке t , согласно (3) будут вычисляться, соответственно, по формулам:

$$M_0(t) = \sum_{n=1}^M \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{\chi_1 \sin 2\chi} \left[\cos^2 \chi \sin \left(2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \sin \left(2\chi_1 \arctg \left(u_n \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin^2 \chi \cos \left(2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \cos \left(2\chi_1 \arctg \left(u_n \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right] + \frac{1}{2\chi_1} \times \right. \\ \left. \times \sin \left(2\chi_1 \left| \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) - \arctg \left(u_n \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right| \right) \right\} \left[X_n - \sqrt{1 - u_n^2} h_0(u_n) \right]; \quad (-1 < t < 1)$$

$$Q_0(t) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2N} \left\{ \tg \chi \sin \left(2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \cos \left(2\chi_1 \arctg \left(u_n \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \right. \\ \left. + \ctg \chi \cos \left(2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \sin \left(2\chi_1 \arctg \left(u_n \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \text{sign}(t - u_n) \times \right. \\ \left. \times \cos \left[2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) - \arctg \left(u_n \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} \left[X_n - \sqrt{1 - u_n^2} h_0(u_n) \right]; \quad (-1 < t < 1).$$

Ключевые слова: периодическая система балок, изгиб, поперечные и продольные силы, полуплоскость.

Список использованной литературы

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Пластины и оболочки, М., Наука, 1966, 636 с.
2. Erdogan F., Gupta G. D., Gook T. S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. // Intern. Publ., Leyden, 1973. P. 368-425.
3. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl. Math., vol. 35, №1, 1997. P. 173-185.
4. Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шемян Л.А., О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учетом сдвигающих сил в ее срединной линии. Изв. НАН Армении, Механика, Т. 67, №1, 2014, Стр. 6-21.
5. Кутузян Н. А., Шемян Л. А., О задаче изгиба балки на упругом основании поперечными силами при наличии сжимающих или растягивающих осевых сил. Сборник научных статей Гаварского гос. Университета, №.1, 2014, С. 36-43.
6. Мкртчян М.М., Шемян Л.А.,
Об изгибе балки поперечными и продольными силами при контактном взаимодействии с упругим массивным телом. «Механика 2016». Труды международной школы-конференции молодых ученых. 3-7 октября 2016, Цахкадзор, Армения, С.114-118.
7. Штаерман И.Я., Контактная задача теории упругости, М.–Л., Гостехтеориздат, 1949, 270с.

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԾՈՌԻՄԸ ԳԾԱՅԻՆ ԲԱՇԽՎԱԾ ԿՈՂԱՅԻՆ ԲԵՌՈՎ, ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՍԵՂՍՈՂ ՈՒԺԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ն. Ա. ԿՈՒՏՈՒՋՅԱՆ

*Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ
Գավառի պետական համալսարանի պրոռեկտոր*

Լ. Ա. ՇԵԿՅԱՆ

*ՀՀ ՃԱ թղթ.անդամ, ֆիզմաթ գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր
Գավառի պետական համալսարանի դասախոս*

Առաձգական բարակապատ տարրերի ծոման ընդհանրացված մոդելի շրջանակներում, երբ լայնական ուժերից բացի երկայնական սեղմող կամ ձգող ուժերը նույնպես ազդում են տարրերի ճկման վրա, դիտարկվում է առաձգական կիսահարթության վերին հորիզոնական եզրի վրա հեծանների անվերջ համակարգի ծոման պարբերական կոնտակտային խնդիրը, երբ հեծանները գտնվում են գծային օրենքով բաշխված լայնական ուժերի և իրենց ծայրերում կիրառված երկայնական սեղմող ուժերի ազդեցության տակ:

Խնդիրը ձևակերպված է հեծանների և կիսահարթության միջև գործող նորմալ լարումների նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման տեսքով: Այդ հավասարման արդյունավետ լուծումը ստացվել է թվային-վերլուծական հայտնի մեթոդով, որը հիմնված է Կոշիի տիպի և սովորական ինտեգրալների հաշվման Գաուսի քառակուսացում բանաձևերի վրա՝ Չեբիշևի բազմանդամների մաթեմատիկական ապարատի ներգրավմամբ:

BENDING OF THE PERIODIC SYSTEM OF BEAMS ON AN ELASTIC BASIS BY A LINEARLY DISTRIBUTED TRANSVERSE LOAD IN THE PRESENCE OF AXIAL COMPRESSIVE FORCES

N. A. KUTUZYAN

PhD, Associate Professor

Vice-rector of Gavar State University

L. A. SHEKYAN

Corresponding member Ing. Acad. of Armenia, Doctor of Sciences, Professor

Lecturer of Gavar State University

In the framework of the generalized bending model of thin-walled elastic bodies, in addition to the transverse forces, longitudinal compressive or tensile forces also affect their deflections, the periodic contact problem of bending at the upper horizontal boundary of the deformable half-plane of an infinite system of beams under the action linearly distributed lateral load and axial compressive forces, applied at the ends of the beams.

The problem is formulated in the form of a singular integral equation with respect to the normal contact stresses, acting between the beams and the half-plane. The effective solution of this equation was obtained by a well-known numerical-analytical method based on Gaussian quadrature formulas for calculating Cauchy type integrals and ordinary integrals using the mathematical apparatus of Chebyshev polynomials.