

ՍԱԹԵՄԱՏԻԿԱ-ԱՇԽԱՐՀԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ ՄԻՋԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ ԿԱՊԻ ԱՊԱՀՈՎՍԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՐՅԵՐ ՍԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԱՍԱՎԱՆԴՍԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՅՈՒՄ

Ռ.Լ. Առաքելյան
մաթեմատիկայի ամբիոն

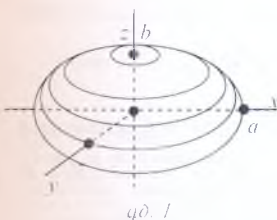
Ֆրանսիացի Ա. Պտանկարեն գրել է. «Մաթեմատիկան հետապնդում է 3 նպատակ. տալ բնությանը ուսումնասիրելու գործիք, խորացնել փիլիսոփայությունը և մարդու մոտ ստեղծել էսթետիկա»:

Սույն հոդվածը, իրոք, հետապնդում է նպատակ՝ ուսումնասիրել աշխարհագրությունը՝ օգտագործելով մաթեմատիկական տեսություններ:

Իրականության մաթեմատիկական ճանաչողության արդյունավետ մեթոդներից մեկը հանդիսանում է ուսումնասիրվող օբյեկտների մաթեմատիկական մոդելի կառուցումը: Մաթեմատիկական մոդելի կառուցման ժամանակ հաճախ անտեսում ենք իրականության երկրորդական հատկությունները, որի հետևանքով կառուցված մոդելը համարժեք չէ ուսումնասիրվող իրականությանը, բայց փոխարենը ստանում ենք հնարավորություն՝ առավելագույն օգտագործել մաթեմատիկական ապարատը իրականության օրինաչափությունները բացահայտելու համար:

Աշխարհագրության մասնագիտություններից մեկի անվանումը՝ մաթեմատիկական քարտեզագրություն, ինչպես նաև «география» և «геометрия» բառերը մատնանշում են մաթեմատիկա-աշխարհագրություն միջառարկայական կապի առկայությունը: Դասավանդման պրոցեսում նշված կապի արդյունավետ բացահայտումը և կիրառումը հանդիսանում են դասավանդման ժամանակակից, ինչպես մանկավարժական, այնպես էլ գիտամեթոդական սկզբունքներից մեկը:

ԵՐԿՐԱԳՆԴԻ ՍԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՏԱՐԵՐԵՐԸ



a և b կիսաառանցքներով էլիպսը, երբ պտտվում է փոքր՝ $2b$ առանցքի շուրջը, ստացվում է մի մակերևույթ, որին անվանում ենք պտտման էլիպսոիդ: Երկրի՝ գեոդի համար որպես փոքր առանցք ծառայում է իր պտտման առանցքը, որի հիման վրա կարելի է եզրակացնել, որ երկրագունդը սղմված է բևեռներում:

Առաջնորդվելով պրոֆ. Արստվսկու առաջարկած հաշվարկներից՝ երկրի մեծ կիսաառանցքի երկարությունը հավասար է՝ $a = 6378245$ մետրի, իսկ փոքր կիսաառանցքը՝ $b = 6356863$ մետրի:

Հետագա հաշվարկների ժամանակ մենք երկիրը ընդունելու ենք որպես գունդ՝ անտեսելով նրա սեղմվածությունը: Այս դեպքում երկրի համար ընտրելու ենք շառավիղի այնպիսի մեծություն, որ պահպանվի գեոդի ծավալը:

$$V_{\text{էլիպսոիդ}} = \frac{4}{3}\pi a^2 b: V_{\text{գունդ}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{հավասարեցնենք այս թվերը} \quad \frac{4}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi R^3: R^3 = a^2 b: R = \sqrt[3]{a^2 b}:$$

Տեղադրենք a -ի և b -ի արժեքները, կստանանք $R = 6371107,9$ մ կամ $R = 6371,1$ կմ:

Մեք գնգի մակերևույթը հատենք հարթությամբ, որը անցնում է նրա կենտրոնով, կստանանք մեծ շրջանի շրջանագիծ, որի երկարությունը՝

$$C = 2\pi R = 2 \cdot 3,1415926 \cdot 6371,1 \text{ կմ} = 40030,801 \text{ կմ}:$$

Մեք այս թիվը բաժանենք 360-ի, ապա կստանանք շրջանագծի 1° -ին համապատասխանող աղեղի երկարությունը կմ-ներով:

$$C/360 = 111,19666 \text{ կմ} \approx 111,1 \text{ կմ.}$$

Գլոբուսի վրա մեծ շրջանի շրջագծեր են հանդիսանում միջօրեականները և

$$d = \varphi \cdot 111,1 \text{ կմ}$$

(1)

բանաձևով, որտեղ φ -ն աղեղի երկարությունն է՝ արտահայտված աստիճաններով:

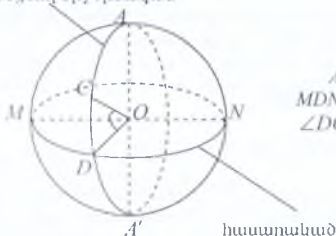
ՄՅՆՐԻԿ ԵՐԿՐԱՇԱՓՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԲԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՇԽԱՐՀԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Խնդիր 1. Ստեփանակերտ քաղաքի աշխարհագրական լայնությունը՝ $\varphi = 39,9^\circ$ հս.: Գտնել նրա հեռավորությունը հասարակածից:

Լուծում. Գնդային մակերևույթի վրա տրված կետից մինչև հասարակածը եղած հեռավորությունը որոշվում է միջօրեականի աղեղով, որը ընդգրկված է հասարակածի և տրված C կետի միջև: Ուստի (1) բանաձևից

$$d = 39,9 \cdot 111,1 \text{ կմ} = 4432,89 \text{ կմ.}$$

Կլուսիսային բևեռով և Ստեփանակերտ քաղաքով անցնող միջօրեական



A -ն Կլուսիսային, իսկ A' -ը հարավային բևեռն է:
 MDN շրջանագծի շառավիղն է:
 $\angle DOC = \varphi = 39,9^\circ$:

հասարակած

զգծ. 2

Եթե Գլոբուսի վրա երկու քաղաքներ ունեն $A(\varphi_1 \text{ հս}; \lambda)$ $B(\varphi_2 \text{ հս}; \lambda)$ աշխարհագրական կոորդինատները կամ $A(\varphi_1 \text{ հվ}; \lambda)$ $B(\varphi_2 \text{ հվ}; \lambda)$, ապա նրանց միջև հեռավորությունը հաշվում է $d = |\varphi_2 - \varphi_1| \cdot 111,1 \text{ կմ}$ բանաձևով, իսկ եթե քաղաքներից մեկի ուշիտոսիագրական լայնությունը կլուսիսային է, իսկ մյուսինը՝ հարավային, ապա բանաձևը ունի $d = (\varphi_1 + \varphi_2) \cdot 111,1 \text{ կմ}$ տեսքը:

Հասարակածի վրա գտնվող երկու քաղաքները, որոնք ունեն $M(0; \lambda_1 \text{ արևելյան})$ $N(0; \lambda_2 \text{ արևմտյան})$ կոորդինատներ, ապա $d = |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot 111,1 \text{ կմ}$:

Բնականաբար հարց է ծագում, ինչպե՞ս պետք է հաշվել 2 քաղաքների միջև հեռավորությունը, երբ նրանք չեն գտնվում միևնույն միջօրեականի կամ հասարակածի վրա:



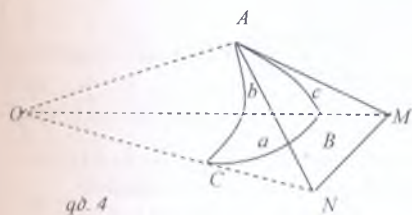
զգծ. 3

Այդ հարցին պատասխանելու համար ապացուցենք կոսինուսների բերորեն աֆերիկ եռանկյան համար:

Թող տրված են գնդային մակերևույթի վրա A , B և C կետերը, որոնք չեն պատկանում միևնույն միջօրեականին: Կառուցենք AB , AC և BC մեծ շրջանի շրջագծերը (զգծ.3):

Շրջագծերի հատումից ստացվում են ABC և ABC' եռանկյունները: Այդ եռանկյունները համաչափ են O կետի նկատմամբ: Կարելի է ապացուցել, որ ABC եռանկյան մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝ $S = R^2(A + B + C - \pi)$ (2) որտեղ A -ն, B -ն և C -ն եռանկյան անկյունների մեծություններն են:

Այժմ անցնենք կոսինուսների թեորեմի ապացուցմանը: Նշենք, որ սֆերիկ եռանկյան և կողմերը, և անկյունները չափվում են կամ աստիճաններով, կամ ռադիաններով:



Թող ABC -ն սֆերիկ եռանկյուն է, իսկ AO , BO , CO սֆերայի շառավիղներն են (զծ.4): Կառուցենք շոշափողներ եռանկյան A գագաթում AB և AC կողմերին, որոնք հատվում են համապատասխանաբար M և N կետերում:

ΔOAN -ի մեջ $\angle OAN = 90^\circ$

ΔOAM -ի մեջ $\angle OAM = 90^\circ$

AMN և MON հարթ եռանկյունների համար գրենք կոսինուսների թեորեմը.

$$\left. \begin{aligned} MN^2 &= AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos \angle MAN \\ MN^2 &= OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos \angle MON \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2OM \cdot ON \cos \angle MON = \\ = OM^2 - AM^2 + ON^2 - AN^2 + 2AN \cdot AM \cos \angle MAN$$

Պյութագորասի թեորեմից

$$\begin{aligned} OM^2 - AM^2 &= OA^2, & ON^2 - AN^2 &= OA^2, & \angle MAN &= A, & \angle MON &= a, & \text{ուստի} \\ 2OM \cdot ON \cos a &= 2ON^2 + 2AN \cdot AM \cos A \end{aligned}$$

Երկու մասերը բաժանվելով $2 \cdot OM \cdot ON$ -ի վրա՝ $\cos a = \frac{OA}{ON} \cdot \frac{OA}{OM} + \frac{AN}{ON} \cdot \frac{AM}{OM} \cdot \cos A$, բայց

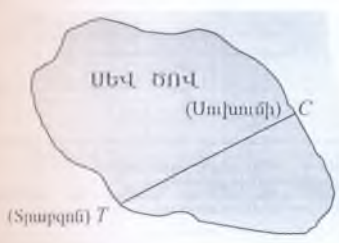
$$\frac{OA}{ON} = \cos b, \quad \frac{OA}{OM} = \cos c, \quad \frac{AN}{ON} = \sin b, \quad \frac{AM}{OM} = \sin c:$$

Տեղադրելով նախորդ նույնության մեջ, կստանանք

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \text{ որը կոչվում է կոսինուսների թեորեմ սֆերիկ եռանկյան համար} \quad (3)$$

Եթե $A = 90^\circ$, ապա ուղղանկյուն սֆերիկ եռանկյան համար կստանանք՝

$$\cos a = \cos b \cos c, \text{ որը կոչվում է Պյութագորասի թեորեմ սֆերիկ եռանկյան համար} \quad (3'):$$



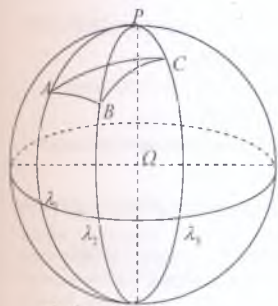
զծ. 5ա

Խնդիր 2. Գիտարկենք Սև ծովի ափին գտնվող 2 նավահանգստային քաղաքներ՝ Սուխումին՝ C (43° հս., 39.5° արևել.) և Տբիլիսին՝ T (41° հս., 39.5° արևել.) (զծ.5ա):

Պահանջվում է հաշվել 2 նավահանգիստների միջև եղած հեռավորությունը:

Լուծում. Գիտարկենք ATC ՝ սֆերիկ եռանկյունը, որտեղ A գագաթը Երկրի կոսմոսային բևեռն է (զծ. 5բ):

Օգտվելով (3) բանաձևից, որտեղ եռանկյան կողմը՝ TC -ն, բանաձևում նշանակված է a -ով: Գտնենք (3) բանաձևում օգտագործվող տարրի արժեքները՝ ըստ մեր խնդրի տվյալների.



զծ. 6

ΔAPB -ի մեջ $PA=90^\circ-\varphi_1$, $PB=90^\circ-\varphi_2$, $\angle APB=\lambda_2-\lambda_1$;

Օգտագործելով (3) բանաձևը, կհաշվենք ABC եռանկյան AB կողմի երկարությունը աստիճաններով: Այն նշանակենք փոքրատառ c -ով: Դիշտ նույն ձևով կհաշվենք $AC = b$ և $BC = a$ կողմերը:

(3) բանաձևը արտագրենք հետևյալ տեսքով.

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \quad (5)$$

որը թույլ է տալիս հաշվել եռանկյան անկյունը, եթե հայտնի են կողմերի երկարությունները:

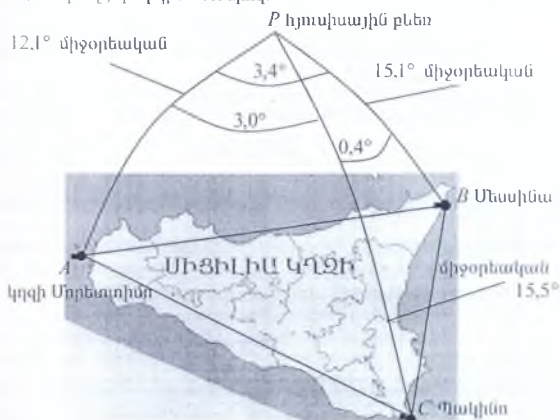
$$A = \arccos \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (6)$$

(6) բանաձևի օգնությամբ կհաշվենք եռանկյան A , B և C անկյունները:

Խնդիր 3. Հաշվել Սիցիլիա կղզու մակերեսը, որը ունի եռանկյունաձև տեսք (զծ. 7):

Լուծում. «Atrialac Mura» քարտեզի էջ 102-ից ընտրենք 3 կետեր, որոնք ծառայում են որպես եռանկյան գագաթներ:

Գծագրից երևում է, որ Սիցիլիան մոտավորապես ունի եռանկյան տեսք: Որպես A գագաթ ընտրենք թզուկ կղզի Մորետտիոնո՝ (38° հս, $12,1^\circ$ արևելյան) կոորդինատներով: Որպես B գագաթ՝ Մեսսինա քաղաքը՝ ($38,16^\circ$ հյուս, $15,5^\circ$ արևել.) կոորդինատներով և C գագաթը՝ Պակլինո քաղաքը՝ ($36,74^\circ$ հս, $15,1^\circ$ արևել.) կոորդինատներով:



զծ. 7

Գրենք խնդրի տվյալները ավելի մանրամասն.

$$AP = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$$

$$BP = 90^\circ - 38,16^\circ = 51,84^\circ$$

$$CP = 90^\circ - 36,74^\circ = 53,26^\circ$$

$$\angle APB = 15,5^\circ - 12,1^\circ = 3,4^\circ$$

$$\angle CPB = 15,5^\circ - 15,1^\circ = 0,4^\circ$$

$$\angle APC = 15,1^\circ - 12,1^\circ = 3^\circ$$

Կիրառելով կոսինուսների թեորեմը՝ հաշվենք ABC եռանկյան AC , CB և AB կողմերի երկարությունները:

$$\begin{aligned}
 1. \cos AB &= \cos AP \cos BP + \sin AP \sin BP \cos 3,4^\circ = \cos 52^\circ \cos 51,84^\circ + \sin 52^\circ \sin 51,84^\circ \cos 3,4^\circ = \\
 &= 0,99890561 \quad AB = \arccos 0,99890561 = 2,6808041^\circ \\
 2. \cos AC &= \cos AP \cos CP + \sin AP \sin CP \cos APC = \cos 52^\circ \cos 53,26^\circ + \sin 52^\circ \sin 53,26^\circ \cos 3^\circ = \\
 &= 0,99889281 \quad AC = \arccos 0,99889281 = 2,6964557^\circ \\
 3. \cos BC &= \cos CP \cos BP + \sin CP \sin BP \cos CPB = \cos 53,26^\circ \cos 51,84^\circ + \sin 53,26^\circ \sin 51,84^\circ \cos 0,4^\circ = \\
 &= 0,99967768 \quad BC = \arccos 0,99967768 = 1,4547246^\circ
 \end{aligned}$$

Երբ արդեն հայտնի են ABC եռանկյան կողմերի երկարությունները, օգտագործելով (5) բանաձևը հաշվենք նրա անկյունները:

$$\begin{aligned}
 1. \cos \angle ACB &= \frac{\cos AB - \cos CA \cos CB}{\sin CA \sin CB} = \frac{\cos 2,6808041^\circ - \cos 2,6964557^\circ \cdot \cos 1,4547246^\circ}{\sin 2,6964557^\circ \cdot \sin 1,4547246^\circ} = \\
 &= 0,28029269 \quad \angle ACB = 73,722326^\circ
 \end{aligned}$$

$$2. \cos \angle BAC = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\sin AB \sin AC} = 0,85352742 \quad \angle ACB = 73,722326^\circ$$

$$3. \cos \angle ABC = \frac{\cos AC - \cos BA \cos BC}{\sin BA \sin BC} = 0,26032605 \quad \angle ABC = 74,91059^\circ$$

Այժմ հաշվենք ABC եռանկյան (Սիցիլիա կղզու) մակերեսը՝ օգտվելով $S_{\Delta} = R^2 (A + B + C - \pi)$ բանաձևից.

$$A + B + C - \pi = 31,40257^\circ + 73,722325^\circ + 74,91059^\circ - 180^\circ = 0,03549^\circ \quad \text{դարձնենք ռադիան.}$$

$$A + B + C - \pi = \frac{0,03549^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 6,1941733 \cdot 10^{-4}$$

$$S_{\Delta} = (6371,1 \text{ կմ})^2 \cdot 6,1941733 \cdot 10^{-4} = 25145,558 \text{ կմ}^2$$

Սիցիլիա կղզու մակերեսը հանրազատաբանում նշված է 25460 կմ^2

$$S' - S_{\Delta} = 25460 - 25145,558 = 314,442$$

$$\Delta S = 314,442 / 25460 = 0,012$$

$$0,012 \cdot 100\% = 1,2\%$$

Հարաբերական սխալը կազմում է 1.2%:

Ամփոփում

Կիրառական բնույթի խնդիրների լուծումը մեծ հետաքրքրություն է առաջացնում սովորողների մոտ դեպի մաթեմատիկան:

Սույն հոդվածի նպատակն է, օգտագործելով աֆերիկ երկրաչափության հասկացությունները, բանաձևերը, հաշվարկել աշխարհագրական մի շարք մեծություններ, երբ հայտնի են կետերի աշխարհագրական կոորդինատները:

Резюме

Задачи прикладного характера вызывают большой интерес учащихся к математике. Цель данной статьи, - используя понятия и формулы сферической геометрии, - вычислить ряд географических величин, зная географические координаты точек.

Գրականություն

1. Андронов Н.К., Окулиничев А.К., Курс тригонометрии. "Просвещение". Москва, 1967г.
2. Մ.Մ. Խաչատրյան. Փարսեպլիստություն, Երևան, 1949թ.:
3. Atlas мира. Главная уравнение геодезии и картографии при Совете министров СССР. Москва, 1985г.