УДК.517.948.25

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ МАТРИЦ

Г.Г.Саакян, Г. Х. Хачатрян
кафедра математики

В работе определяется одна характеристическая функция для матриц порядка 2×2 и исследуются ее свойства.

При исследовании многопараметрических спектральных задач (см., например [1]-[6]), возникающих при рассмотрении некоторых задач математической физики, как показывает практика, часто приходится иметь дело и с задачами, в которых параметров меньше, чем уравнений (например, известное в классической литературе уравнение Матье). В связи с этим стало актуальным рассматривать и многопараметрические уравнения.

Исследование спектральных свойств двупараметрического матричного уравнения

$$Ty = \lambda Ay + \mu By, \tag{1}$$

где T, A, B –вещественные матрицы порядка 2×2 ($T, A, B \in M^{2,2}$ -множество квадратных матриц 2-ого порядка), $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$-двухкомпонентная C^2-значная искомая вектор-функция, λ и μ - комплексные параметры, как известно, можно свести к исследованию соответствующего характеристического уравнения, а именно, уравнения

$$\det(T - \lambda A - \mu B) = 0, \tag{2}$$

при изучении которого особую роль играет характеристическая величина матриц (см. [7]), достаточно тесно связанная с основными характеристиками матриц. Данная работа посвящена исследованию свойств характеристических величин для матриц из $M^{2,2}$.

Пусть A и B произвольные матрицы порядка 2×2, а trA означает след матрицы A (см., например [8]).

Определение 1. *Величину*

$$G(A,B) = \frac{1}{2}\left(trA \cdot trB - tr(A\cdot B)\right) \tag{3}$$

назовем характеристической величиной матриц A и B.

Непосредственным вычислением нетрудно найти, что, если матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ \text{то}$$

$$G(A,B) = \frac{1}{2}\left(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}\right). \tag{4}$$

Учитывая, что $tr(A\cdot B) = tr(BA)$, $tr(kA) = k\cdot trA$ ($k = const$) и $tr(A\pm B) = tr(A)\pm tr(B)$ (см., например, [8]-[10]), из определения (3) для характеристического числа можно получить следующие свойства:

$$\begin{aligned} &1.\quad G(A,B) = G(B,A). \\ &2.\quad G(kA,B) = G(A,kB) = kG(A,B),\ k = const. \\ &3.\quad G(A,T)\pm G(B,T) = G(A\pm B,T). \\ &4.\quad G(A,0) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Из этих соотношений, в частности, следует, что $G(A,B)$ является билинейным функционалом на $M^{2,2}$.

Пусть A^{-1}-обратная по отношению к A матрица, а A^{*}-транспонированная. Тогда непосредственным вычислением, нетрудно найти, что

1. $G(A,E)=\frac{1}{2}trA$, (6a)

2. $G(A,A)=\frac{1}{2}\left(tr^{2}A-trA^{2}\right)=\det A$, (6b)

3. $G(A,A)=G(A^{*},A^{*})$, (6c)

   если $G(A,A)\neq 0$, то $G(A,A)\cdot G(A^{-1},A^{-1})=1$, (6d)

4. если $G(A,A)\neq 0$, то

   $$\frac{2G(A,B)}{G(A,A)}=trA^{-1}B, \quad (6e)$$

5. если $G(A,A)\cdot G(B,B)\neq 0$, то

   $$G(A^{-1},B^{-1})=\frac{G(A,B)}{G(A,A)\cdot G(B,B)}. \quad (6f)$$

Заметим, что основные характеристики матрицы (след, определитель) согласно (6a) и (6b), выражаются через характеристическую величину G.

Возьмем матрицу T порядка 2×2, удовлетворяющую условию

$$G(T,T)=\frac{1}{2}\left(tr^{2}T-trT^{2}\right)=0,$$

и рассмотрим множество G_T всех таких матриц $A\in M^{2,2}$, которые удовлетворяют соотношению

$$G(A,T)=0.$$

Имеет место

Лемма1. *G_T является линейным пространством.*

Доказательство. Определив в множестве G_T сумму двух элементов и умножение элемента на число соответственно как сумму матриц и умножение числа на матрицу, с учетом (5) мы получим:

1. если A *и* B принадлежат G_T, то G_T принадлежит и их сумма, так как

   $$G(A+B,T)=G(A,T)+G(B,T)=0.$$

2. если A принадлежат G_T, то G_T принадлежит и kA ($k=const$), так как

   $$G(kA,T)=kG(A,T)=0.$$

Нулевым элементом в этом пространстве будет служить нулевая матрица.

Нетрудно проверить, что имеют место все аксиомы линейного пространста.

Лемма доказана.

Лемма 2. Для произвольных матриц A и B порядка 2×2 имеют место соотношения

1. $G(A+B,A+B)=G(A,A)+2G(A,B)+G(B,B)$. (7a)
2. $G(A-B,A-B)=G(A,A)-2G(A,B)+G(B,B)$. (7b)
3. $G(A-B,A+B)=G(A,A)-G(B,B)$. (7c)

Доказательство. С учетом свойств (5) будем иметь

$G(A+B,A+B)=G(A,A)+G(A,B)+G(B,A)+G(B,B)=\ =G(A,A)+2G(A,B)+G(B,B)$.

Аналогично доказываются равенства (7b) и (7c).

Следствие. Имеет место соотношение

$$G(A,B)=\frac{G(A+B,A+B)-G(A-B,A-B)}{2}=\frac{\det(A+B)-\det(A-B)}{2} \qquad (7d)$$

(доказательство следует из (7a), (7b) и (6b)).

Лемма 3. *Для произвольных матриц A и B порядка 2×2 имеет место соотношение:*

$$G(AB,AB)=G(A,A)\cdot G(B,B). \qquad (8)$$

Доказательство. Имеем согласно (6b)

$$G(AB,AB)=\det(AB)=\det A\cdot\det B=G(A,A)\cdot G(B,B).$$

Следствие. Для произвольной матрицы A порядка 2×2 и $n\in N$ имеет место соотношение:

$$G(A^n,A^n)=G^n(A,A). \qquad (9)$$

Теорема 1. *Если A и B произвольные вещественные матрицы порядка 2×2 такие, что $G(A,A)\cdot G(B,B)\neq 0$ и $G(A,B)=0$, то*

$$G(A,A)\cdot G(B,B)<0. \qquad (10)$$

Доказательство. Докажем сначала, что если $G(A,E)=0$, то $G(A,A)<0$. Действительно, если $G(A,E)=0$, то из соотношения (6a) будет следовать, что $trA=0$. Тогда с учетом (6b) получим

$$G(A,A)=-\frac{1}{2}trA^2<0.$$

Пусть теперь $G(A,B)=0$, тогда с учетом (6e) будем иметь

$$G(A^{-1}B,E)=\frac{1}{2}trA^{-1}B=\frac{G(A,B)}{G(A,A)}=0.$$

и, следовательно, согласно вышепроведенным рассуждениям, найдем, что

$$G(A^{-1}B,A^{-1}B)<0$$

или, учитывая лемму 3, получим

$$G(A^{-1}B,A^{-1}B)=G(A^{-1},A^{-1})\cdot G(B,B)<0.$$

Отсюда, так как

$$G(A^{-1},A^{-1})\cdot G(B,B)<0,$$

то с учетом (6d) получим, что и

$$G(A,A)\cdot G(B,B)<0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если A и B произвольные вещественные матрицы порядка 2×2*, причем

1. $G(A,B)=0$,
2. $G(A,A)=0$ и $G(B,B)\neq 0$ или $G(B,B)=0$ и $G(A,A)\neq 0$,

то

$G(B,B)<0$ (соответственно $G(A,A)<0$).

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Лемма 4. Если для произвольных симметрических матриц A и B порядка 2×2 имеют место соотношения

1. $G(A,A)=0$
2. $G(A,B)=0$
3. $G(B,B)=0$

то $B=cA$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что условия 1. и 3. согласно (6b) равносильны соответственно условиям $\det A=0$ и $\det B=0$. Если матрицы A и B нулевые, то доказательство очевидно. Поэтому рассмотрим случай, когда $A\neq 0$. Далее, с учетом соотношения (5) имеем

$$G(A,B)=\frac{1}{2}\left(a_{11}b_{22}+b_{11}a_{22}-2a_{12}b_{12}\right)=0. \qquad (11)$$

Рассмотрим два случая:

1. $a_{12}=0$. Тогда из условия $\det A=0$ будет следовать, что $a_{11}a_{22}=0$. Не теряя общности, предположим, что $a_{11}=0$, тогда из (11) найдем, что и $b_{11}=0$, а из условия $\det B=0$ получим $b_{12}=0$. Тогда матрицы A *и* B будут иметь вид

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $B=cA$, где $c=\dfrac{b_{22}}{a_{22}}$ ($a_{22}\neq 0$, так как $A\neq 0$).

2. Предположим, что $a_{12}\neq 0$, тогда так как $\det A=0$, то $a_{11}a_{22}\neq 0$. Из равенства (11) будем иметь

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}b_{22}+\frac{a_{22}}{a_{12}}b_{11}-2b_{12}=0. \tag{12}$$

С другой стороны, так как $\det A=0$, то получим

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=k. \tag{13}$$

Учитывая последнее соотношение, равенство (12) запишется в виде

$$kb_{22}+\frac{1}{k}b_{11}-2b_{12}=0$$

или

$$k^2b_{22}-2kb_{12}+b_{11}=0.$$

Если $b_{11}=0$ (или $b_{22}=0$), то аналогично проведенным в первом случае рассуждениям, получим, что $B=cA$. Рассмотрим случай, когда $b_{11}\neq 0$.

Тогда умножив последнее равенство на $b_{11}\neq 0$, и учитывая то, что

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=\det B=0 \tag{14}$$

найдем

$$(kb_{12}-b_{11})^2=0,$$

откуда и с учетом (14) будем иметь

$$\frac{b_{11}}{b_{12}}=\frac{b_{12}}{b_{22}}=k.$$

Отсюда и из (13) будет следовать, что

$$B=cA,$$

где $c=\dfrac{b_{12}}{a_{12}}$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Для произвольных матриц A и B порядка 2×2 и чисел m и n имеют место соотношения:*

$$\det(mA+nB)=m^2\det A+n^2\det B+mnG(A,B). \tag{15a}$$

Доказательство. Имеем согласно (7a), (5) и (6b)

$$G(mA+nB,mA+nB)=G(mA,mA)+2G(mA,nB)+G(nB,nB)=$$
$$=m^2G(A,A)+2mnG(A,B)+n^2G(B,B)=2(m^2\det A+mnG(A,B)+n^2\det B).$$

С другой стороны, согласно (6b)

$$G(A+B,A+B)=2\det(A+B).$$

Так как левые части двух полученных равенств равны, то будут равны и правые части, а именно:

$$\det(mA+nB)=m^2\det A+n^2\det B+mnG(A,B).$$

Следствие 1.

$$\det(mA-nB)=m^2\det A+n^2\det B-mnG(A,B). \qquad (15b)$$

Равенство получается из (15a), если вместо B подставить $-B$ и учесть, что $\det(-B)=\det B$, а $G(A,-B)=-G(A,B)$.

Из соотношений (15a) и (15b) при $n=m=1$ нетрудно получить:

Следствие 2. $\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det A+\det B)$. (15c)

Следствие 3. Равенства

$$\det(A-B)=\det A+\det B \text{ или } \det(A+B)=\det A+\det B \qquad (15d)$$

имеют место тогда и только тогда, когда $G(A,B)=0$.

Следствие 4. Условие $G(A,B)<0$ (соответственно $G(A,B)>0$) равносильно условию

$$\det(A-B)<\det(A+B) \text{ (соответственно } \det(A-B)>\det(A+B)\text{)}.$$

Следствие 5. *Для того, чтобы одновременно имели место равенства*

$$\det(A-B)=\det B \text{ и } \det(A+B)=\det B$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место условие:

$$\det A=G(A,B)=0 \quad (B\in G_A).$$

Ամփոփում

Աշխատանքում սահմանվում է և հետազոտվում երկրորդ կարգի մատրիցների համար մեկ բնութագրիչ ֆունկցիայի հատկությունները:

Резюме

В работе определяется одна характеристическая функция для матриц порядка 2×2 и исследуются ее свойства.

Литература

1.Atkinson F. V. Multi-parameter eigenvalue problems. Academic Press ,1972,v.1

2.P.J.Browne. A Multi-Parameter Ejgenvalue Problem, J. Math.Anal. and Appl., 1972,v.38, p.553-568.

3.Sleeman B.D. Some aspects of Multi-parameter spectral theory.Dep., Math.Univ. Scotland, 1974. p.81-94.

4.Browne P. J. Multi-parameter problems the last decade. Lect. Notes Math., 1982. v. 964. p.95-109

5.P. A. Binding, P. J. Browne, Spectral properties of two parameter eigenvalue problems II. Proc. R. Soc. Edinburg. 106A. 1987. p.39-51

6.P.J.Browne. Two-parameter eigencurve theory. Ordinary and Partial Differential Equations.1989.v.II p.52-60.

7.Г. Г. Саакян. О собственных значениях одного двупараметрического матричного уравнения. Գրքույթներ և գիտություններ Արցախում, 3-4, 2005.

8.А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры. М., Наука, 1975.

9.Հ. Ս. Սիրանյան: Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց: Երևան, 2001:

10.C. H. Edwards, David E. Penney. Elementary Linear Algebra, New Jersey, 1988.