

ԴՐԱԿԱՆ ԿԻՍԱՍԱՌԱՆՑՔՈՒՄ ԽԶՎՈՂ ԿՇՈՒՅՅԻՆ ԳՈՐԾԱԿՑՈՎ 2-ԴՂ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՍԱՄԻՆ

Ս.Կ. Պետրոսյան
մաթեմատիկայի ամբիոն

Դիտարկվում է դրական կիսաառանցքում խզվող կշռային գործակցով 2-րդ կարգի գծային դիֆերենցիալ օպերատոր: Հեղինակի [7] աշխատանքում հետազոտված է այդ օպերատորի սպեկտրը: Սույն աշխատանքում է. 2. Տիրույթաչի կոնտուրային ինտեգրման մեթոդով ([5]) արտածվում է սպեկտրալ վերլուծության բանաձև՝ ըստ օպերատորի սեփական ֆունկցիաների:

Դիտարկենք L_λ օպերատորը, որն առաջանում է

$$\ell(\lambda, y) \equiv -y'' + q(x)y - \lambda p(x)y = 0, \quad 0 \leq x < \infty \quad (1)$$

դիֆերենցիալ հավասարումով և $y(0) = 0$ եզրային պայմանով:

Այստեղ

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, & \text{Im } \alpha \neq 0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ 1, & x > a, \end{cases} \quad (2)$$

իսկ $q(x)$ կոմպլեքսարժեք ֆունկցիան անընդհատ է $[0, \infty)$ միջակայքում և բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$|q(x)| < ce^{-\varepsilon x}, \quad \varepsilon > 0: \quad (3)$$

Որպես L_λ օպերատորի $D(L_\lambda)$ որոշման տիրույթ վերցնենք $y(x) \in L_2(0, \infty)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝ 1) $y'(x)$ ածանցյալը գոյություն ունի և բացարձակ անընդհատ է ցանկացած $[0, b]$, $b > 0$ վերջավոր միջակայքում: 2) ամեն մի A յի համար $(A, y) \in L_2(0, \infty)$: 3) $y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $y(0) = 0$ պայմանին:

Նշենք, որ $\alpha = 1$ դեպքում և $y'(0) - hy(0) = 0$ տեսքի եզրային պայմանով L_λ օպերատորը հետազոտված է [1], [2], [3] և այլ աշխատանքներում, իսկ $\alpha^2 > 0$, $\alpha \neq 1$ և $q(x) = \bar{q}(x)$ դեպքը հետազոտված է [4]-ում: Հեղինակի [6] հոդվածում լուծված է սպեկտրալ անալիզի ուղիղ խնդիրն այն մասնավոր դեպքում, երբ $q(x) \equiv 0$, իսկ [7]-ում հետազոտված է խնդրո առարկա L_λ օպերատորի սպեկտրը:

Սույն աշխատանքում մենք կստանանք L_λ օպերատորի սպեկտրալ վերլուծությունը բացահայտ տեսքը (1) հավասարման հասուկ լուծումների միջոցով: Այդ նպատակով մեզ անհրաժեշտ են որոշ պնդումներ, որոնք ապացուցված են [6] և [7] աշխատանքներում:

$\varphi(x, k)$ -ով և $\psi(x, k)$ -ով նշանակենք (1) հավասարման այն լուծումները, որոնք բավարարում են, համապատասխանաբար,

$$\varphi(0, k) = 0, \quad \psi(0, k) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} e^{ikx} \psi(x, k) = 1$$

պայմանների, որտեղ $k^2 = \lambda$, $\text{Im } k \geq 0$: Այդ դեպքում

$$(x, k) = \begin{cases} \frac{\sin \alpha k x}{\alpha k} + 0 \left[\frac{1}{k^2} \exp(\operatorname{Im} \alpha k |x|), & 0 \leq x \leq a, \right. \\ \left. [c(k) e^{i k x} + d(k) e^{-i k x}] \cdot \left[1 + 0 \left(\frac{1}{k} \right) \right], & x > a \right] \end{cases} \quad (4)$$

$$\psi(x, k) = \begin{cases} \left[a(k) \frac{\sin \alpha k x}{\alpha k} + b(k) \cos \alpha k x \right] \cdot \left[1 + 0 \left(\frac{1}{k} \right) \right], & 0 \leq x \leq a, \\ e^{i k x} \left[1 + 0 \left(\frac{1}{k} \right) \right], & x > a: \end{cases} \quad (5)$$

Այստեղ $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, $d(k)$ գործակիցները որոշվում են

$$a(k) = k e^{i k a} (\cos \alpha a k + \alpha \sin \alpha a k), \quad b(k) = e^{i k a} (\cos \alpha a k - \frac{i}{\alpha} \sin \alpha a k),$$

$$c(k) = -d(k) = \frac{e^{-i k a}}{2 k i} (\cos \alpha a k + \frac{i}{\alpha} \sin \alpha a k),$$

բանաձևերով:

(x, k) և $\psi(x, k)$ ֆունկցիաները, բացառությամբ նրանց $\psi(0, k)$ վիճակային գլուխների, կազմում են (1) հավասարման լուծումների գծորեն անկախ համակարգ:

$\psi(0, k) = 0$ հավասարման հետազոտումը բերում է L_A օպերատորի սպեկտր նկարագրող հետևյալ թեորեմին:

Թեորեմ 1: 1) L_A օպերատորի անընկալ սպեկտրը համընկնում է $\lambda > 0$ կիսաառանցքի հետ: 2) k -ի բավականաչափ մեծ արժեքների դեպքում, որտեղ $\operatorname{Im} k \geq 0$, L_A օպերատորի դիսկրետ սպեկտրը կազմված է հաշվելի բազմությամբ $\{\lambda_n\}$ պարզ սեփական արժեքներից՝ $\lambda_n = k_n^2 \sim \left(\frac{\pi n}{\alpha a} \right)^2$ ասիմպտոտիկայով: 3) Նթե մի որոշ $\varepsilon > 0$ թվի համար $q(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $e^{\varepsilon x}(q) \cdot x \in L_1(0, \infty)$; պայմանին, ապա $\operatorname{Im} k \geq 0$ կիսահարթության ցանկացած վերջավոր մասում L_A օպերատորն ունի միայն վերջավոր թվով սեփական արժեքներ և սպեկտրալ առանձնահատկություններ:

Թեորեմ 2: 1) $\lambda = k^2$, $\operatorname{Im} k > 0$, $\psi(0, k) \neq 0$ պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր λ թվերը պատկանում են L_A օպերատորի ռեզոլվենտային բազմությանը: R_λ ռեզոլվենտը

$$R_\lambda f = \int_0^\infty R(x, t, k) f(t) dt \quad (6)$$

առաջն ունեցող ինտեգրալային օպերատոր է, որի $R(x, t, k)$ կորիզը հավասար է

$$R(x, t, k) = \frac{1}{\psi(0, k)} \begin{cases} \varphi(x, k) \cdot \psi(t, k), & x < t, \\ \psi(x, k) \cdot \varphi(t, k), & x > t: \end{cases}$$

2) $0 < \delta \ll 1$ պայմանին բավարարող հաստատագրված δ թվի համար

$$G_\delta = \{k / \operatorname{Im} k > 0\} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{k / |k - k_n| \leq \delta\} \quad (7)$$

տիրություն իրավացի է

$$|R(x, t, k)| \leq \frac{C\delta}{|k|} \exp\{-|\operatorname{Im} \alpha k| \cdot |x - t|\}$$

գնահատականը:

Գիտություն: Սպեկտրալ վերլուծության բանաձևն արտածելիս հաշվումների հարմարության նպատակով (6) բանաձևի փոխարեն օգտագործելու ենք հետևյալ բանաձևը.

$$R_A(\rho \cdot f) = \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt$$

Այժմ անցնենք վերլուծության բանաձևի արտածմանը:

Դիցուք $f \in D(L_A)$: Ռեզոլվենտի հավասարումից մասերով ինտեգրման միջոցով ստանում ենք

$$\int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt = -\frac{f(x)}{k^2} + \frac{\sigma(x, k)}{k^2}, \quad (8)$$

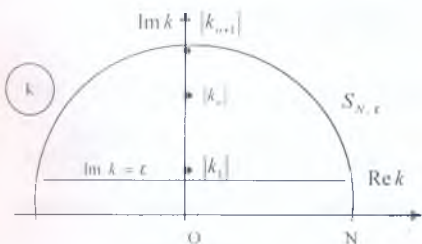
որտեղ $\sigma(x, k) = \int_0^{\infty} R(x, t, k)(q(t)f(t) - f''(t))dt$: (1) հավասարման $\varphi(x, k)$ և (x, k) լուծումների

հատկություններից հետևում է, որ $\sigma(x, k)$ -ն $\operatorname{Im} k \geq 0$ դեպքում k վափոխականի մերոմորֆ ֆունկցիա է: (7) բանաձևից դժվար չէ ստանալ, որ զրո կենտրոնով $N = \frac{1}{2}(|K_n| + |K_{n+1}|)$ շառավղով

S_N կիսաշրջանագծի վրա իրավացի է $\sigma(x, k) = 0\left(\frac{1}{k}\right)$ գնահատականը:

Ենթադրենք L_A օպերատորը չունի սպեկտրալ առանձնահատկություններ, իսկ $\lambda_n = k_n^2$, $\operatorname{Im} k > 0$, սեփական արժեքների հաջորդականությունն է՝ համարակալված մոդուլների աճման կարգով: Մենք համարում ենք, որ բոլոր սեփական արժեքները պարզ են (միապատիկ են): Թեորեմ 1-ից հետևում է, որ բազմապատիկ սեփական արժեքներ L_A օպերատորը կարող է ունենալ միայն վերջավոր թվով, ինչը եական նշանակություն չունի:

Նշանակենք $S_{N, \varepsilon}$ -ով S_N կիսաշրջանագծի այն մասը, որն ընկած է $\operatorname{Im} k = \varepsilon$ ուղղից վերև, այստեղ $0 < \varepsilon < |k_1|$: $\Gamma_{N, \varepsilon}$ -ով նշանակենք $S_{N, \varepsilon}$ աղեղով և $\operatorname{Im} k = \varepsilon$ ուղղով առաջացած փակ կոնտուրը, իսկ $\gamma_{N, \varepsilon}$ -ով նշանակենք $\Gamma_{N, \varepsilon} \setminus S_{N, \varepsilon}$ հատվածը (նկ. 1):



Նկ. 1

Դիտարկենք $\Gamma_{N, \varepsilon}$ փակ կոնտուրով տարածված հետևյալ ինտեգրալը.

$$I_{N, \varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{N, \varepsilon}} \left\{ \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right\} 2k dk \quad (9)$$

Մնացքների մասին Կոշու թեորեմի համաձայն՝

$$I_{N, \varepsilon} = \sum_{|k_n| < N} \operatorname{Res} \left(2k \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right): \quad (10)$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\Gamma_{N, \varepsilon} = S_{N, \varepsilon} \cup \gamma_{N, \varepsilon}$, ուստի (9)-ից կունենանք՝

$$I_{N, \varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{N, \varepsilon}} \left\{ \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right\} 2k dk + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{N, \varepsilon}} \left\{ \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right\} 2k dk \quad (11)$$

Համադրելով (10) և (11) հավասարությունները և հաշվի առնելով (8) բանաձևը, ստանում ենք հետևյալ հավասարությունը.

$$\begin{aligned} \sum_{|k_n| < N} \operatorname{Res} \left(2k \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right) &= \frac{1}{\pi i} \int_{S_{N, \varepsilon}} \frac{\sigma(x, k)}{k} dk - \frac{1}{\pi i} \int_{S_{N, \varepsilon}} \frac{f(x)}{k} dk + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_{N, \varepsilon}} \left\{ \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right\} k dk: \end{aligned} \quad (12)$$

Անցնենք (12) հավասարության մեջ սահմանի, երբ $\varepsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$: Ակնհայտ է, որ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{N, \varepsilon}} \frac{f(x)}{k} dk = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{S_N} \frac{f(x)}{k} dk = \pi i f(x): \quad (13)$$

Հաշվի առնելով $\sigma(x, k)$ -ի հասարակ ստացված $\sigma(x, k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$ գնահատականը, կարող ենք գրել

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{N, \varepsilon}} \frac{\sigma(x, k)}{k} dk = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{S_N} \frac{\sigma(x, k)}{k} dk = 0 \quad (14)$$

(12) հավասարության աջ մասի երրորդ ինտեգրալի սահմանը կլինի՝

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{N, \varepsilon}} \left\{ \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right\} k dk &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\infty} R(x, t, k + i0) \rho(t) f(t) dt \right\} k dk = \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} (R(x, t, k + i0) - R(x, t, -k - i0)) \rho(t) f(t) dt \right\} k dk: \end{aligned} \quad (15)$$

Հաշվի առնելով, որ $\varphi(x, -k) = \varphi(x, k)$ և օգտվելով

$\varphi(x, k) = \frac{1}{2ki} (\psi(0, -k) - \psi(x, k) - \psi(0, k) - \psi(x, -k))$ բանաձևից, որը տեղի ունի k -ի իրական

արժեքների դեպքում, ստանում ենք ռեզուլտենտի թույլի համալի հետևյալ ներկայացումը.

$$R(x, t, k + i0) - R(x, t, -k + i0) = \frac{2ki\varphi(t, k)\varphi(x, k)}{\psi(0, k)\psi(0, -k)} : \quad (16)$$

(15) և (16) բանաձևերից ստանում ենք՝

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right\} k dk = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t, k)\varphi(x, k)}{\psi(0, k)\psi(0, -k)} k^2 dk \right\} \rho(t) f(t) dt : \quad (17)$$

Այժմ հաշվենք (12) հավասարության ձախ մասի սահմանը:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k_n < N} \operatorname{Re} s \left(2k \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} s \left(2k \int_0^{\infty} R(x, t, k_n) \rho(t) f(t) dt \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} s \left\{ \frac{2k}{\psi(0, k)} \left(\int_0^{\infty} \psi(x, k) \varphi(t, k) \rho(t) f(t) dt + \int_0^{\infty} \varphi(x, k) \psi(t, k) \rho(t) f(t) dt \right) \right\} : \end{aligned} \quad (18)$$

Այստեղ մենք օգտվել ենք $R(x, t, k)$ ֆունկցիայի թեորեմ 2-ում բերված ներկայացումից:

Կիրառելով պարզ բևեռի դեպքում մնացքների հաշվման բանաձևը, և հաշվի առնելով, որ $\varphi(x, k_n) = a(k_n)\varphi(x, k_n)$, (18) բանաձևը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k_n < N} \operatorname{Re} s \left(2k \int_0^{\infty} R(x, t, k) \rho(t) f(t) dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n a(k_n) \varphi(x, k_n)}{\psi(0, k_n)} \int_0^{\infty} \varphi(t, k_n) \rho(t) f(t) dt \quad (19)$$

Հաշվի առնելով (13), (14), (17) և (19) բանաձևերը՝ (12) հավասարությունից վերջնականուպես ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t, k_n) \varphi(x, k_n) k^2}{\psi(0, k) \psi(0, -k)} dk \right\} \rho(t) f(t) dt - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2k_n a(k_n)}{\psi(0, k_n)} \int_0^{\infty} \varphi(t, k_n) \rho(t) f(t) dt \right\} \varphi(x, k_n) : \end{aligned} \quad (20)$$

Նշանակենք՝

$$F(s) = \int_0^{\infty} \varphi(t, s) \rho(t) f(t) dt, \quad C_n = \int_0^{\infty} \varphi(t, k_n) \rho(t) f(t) dt :$$

Այդ դեպքում (20) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S^2 F(s) \varphi(x, s)}{\psi(0, s) \psi(0, -s)} ds - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n a(k_n) C_n}{\psi(0, k_n)} \varphi(x, k_n) : \quad (21)$$

Այսպիսով, սպացուցված կարելի է համարել հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3: Դիցուք $f(x) \in D(L_A)$ և L_A օպերատորը չունի սպեկտրալ առանձնահատկություններ: Այդ դեպքում տեղի ունի (21) վերլուծությունը, որը գուցամիտում է $f(x)$ -ին ցանկացած հաստատագրված $x \geq 0$ թվի դեպքում:

Նշենք, որ (21) վերլուծության մեջ առաջին գումարելին՝ ինտեգրալային մասը, համապատասխանում է L_A օպերատորի անընդհատ սպեկտրին, իսկ երկրորդ գումարելին՝ դիսկրետ սպեկտրին:

L_A օպերատորի սպեկտրալ վերլուծության (21) բանաձևն արտածելիս մենք ենթադրում էինք, որ L_A օպերատորը չունի սպեկտրալ առանձնահատկություններ: Այժմ բերենք վերլուծության բանաձևն այն դեպքում, երբ L_A օպերատորն ունի սպեկտրալ առանձնահատկություններ:

k^- -ով k_1^- -ով նշանակենք, համապատասխանաբար, $\varphi(0, k)$ և $\varphi(0, -k)$ ֆունկցիոնների գլոբները $[0, \infty)$ միջակայքում, ընդ որում՝

$$0 < k_1^- < k_2^- < \dots < k_n^-:$$

Գիցուք Γ_δ կոնտուրը կազմված է

$$\{0, \infty\} \setminus \left\{ \bigcup_{j=1}^n (k_j^- - \delta, k_j^- + \delta) \bigcup_{j=1}^m (k_j^- - \delta, k_j^- + \delta) \right\}$$

հատվածներից k_j^- և k_n^- կոնտուրներով, δ շառավղով կիսաշրջաններից, որոնք գտնվում են համապատասխանաբար, վերին և ստորին կիսառիթմություններում: (նկ. 2) Այստեղ δ ն ընտրված է այնպես փոքր, որ կիսաշրջանագծերի տրամագծերը չհասվեն և 0 կետը չընկնի որևէ կիսաշրջանագծի ներսը:



Թեորեմ 4: Գիցուք $f(x) \in D(L_\gamma)$, $e^{\delta x} f(x) \in L_1(0, \infty)$: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ վերլուծությունը.

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{S^2 F(s) \varphi(x, s)}{\psi(0, s) \psi(0, -s)} ds - \sum_{j=1}^n \frac{2k_{n,j} a(k_{n,j}) C_{n,j} \varphi(x, k_{n,j})}{\psi(0, k_{n,j})} \quad (22)$$

Ամփոփում

Դիտարկվում է դրական կիսաառանցքում խզվող կշռային գործակցով 2-րդ կարգի գծային դիֆերենցիալ օպերատոր, որն առաջանում է

$$\ell(\lambda, y) \equiv -y'' + q(x)y - \lambda \rho(x)y = 0, \quad 0 \leq x < \infty$$

դիֆերենցիալ հավասարումով և $y(0) = 0$ եզրային պայմանով: Այստեղ

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, \operatorname{Im} \alpha \neq 0, & 0 \leq x \leq a, \\ 1, & x > a, \end{cases}$$

իսկ $q(x)$ կոմպակտորեն ֆունկցիան անընդհատ է $[0, \infty)$ միջակայքում և բավարարում է.

$$|q(x)| < ce^{-\varepsilon x}, \quad \varepsilon > 0$$

սպաճանին: Կոնտուրային ինտեգրման մեթոդով արտածվում է սպեկտրալ վերլուծության բանաձևը սպեկտրալ առանձնահատկությունների բացակայության դեպքում ինչպես նաև դրանց առկայության դեպքում:

Резюме

Рассматривается линейный дифференциальный оператор 2-го порядка с разрывным весовым коэффициентом на полуоси, порожденный дифференциальным уравнением

$$\ell(\lambda, y) \equiv -y'' + q(x)y - \lambda \rho(x)y = 0, \quad 0 \leq x < \infty$$

и граничным условием $y(0) = 0$. Здесь

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, \operatorname{Im} \alpha \neq 0, & 0 \leq x \leq a, \\ 1, & x > a, \end{cases}$$

а комплекснозначная функция $q(x)$ непрерывна на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условию:

$$|q(x)| < ce^{-\varepsilon x}, \quad \varepsilon > 0$$

Методом контурного интегрирования получен явный вид разложения по собственным функциям указанного оператора при отсутствии спектральных особенностей и при их наличии.

Գրականություն

1. Наймарк М.А. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси. Тр. Моск. матем. об-ва (3) (1954), 181-270.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Изд. 2 "Наука", 1969.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Изд. "Наукова Домка", Киев, 1977.
4. Гасымов М.Г. Прямые и обратные задачи спектрального анализа для одного класса уравнений с разрывными коэффициентами. "Неклассические методы в геофизике". Материалы международной конференции, 1977, май, г. Новосибирск.
5. Тичмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. I и II ИЛ, 1960
6. Петросян С.К. Спектр и разложение по собственным функциям линейного дифференциального оператора второго порядка с разрывным коэффициентом на полуоси. Рук. Дел. в ВИНТИИ N740-82, 23стр.
7. Ս.Կ.Պետրոսյան, Խզվող կշռային գործակցով մի եզրային խնդրի սպեկտրի հետազոտումը, ԱրՊՀ գիտական տեղեկագիր, 1(2), 1999: