

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Г.Г.Саакян

кафедра математики

Рассматривается следующая граничная задача с частными производными

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + q(x)u + \lambda a(x)u = 0, \quad (1)$$

$$u(\ell_1, x_2) = \rho_1 u(0, x_2), \quad u(x_1, \ell_2) = \rho_2 u(x_1, 0), \quad \rho_1 u(0, \ell_2) = \rho_2 u(\ell_1, 0), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1 = \ell_1} = \rho_1 \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1 = 0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2 = \ell_2} = \rho_2 \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2 = 0}, \quad |\rho_r| = 1, \quad r = 1, 2, \quad (3)$$

где $q(x) = q(x_1, x_2) = q_1(x_1) + q_2(x_2)$, $a(x) = a(x_1, x_2) = a_1(x_1) + a_2(x_2)$ - непрерывные на $I = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$ функции, $u(x) = u(x_1, x_2)$ - непрерывная, дважды дифференцируемая на $I = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$ неизвестная функция.

Отметим, что рассматриваемое уравнение в частных производных было предметом изучения многих математиков. Разложения по собственным функциям в конечной области с заданными граничными условиями были проведены Гильбертом и Курантом (см., [1]). Э. Ч. Титчмарш в своей монографии (см., [2]), предложил новый метод в исследовании спектральных свойств рассматриваемой задачи как в конечной, так и в бесконечной областях.

В данной статье излагается несколько иной подход к изучению уравнения (1) с краевыми условиями (2)-(3) при определенных предположениях, основанный на применении многопараметрической спектральной теории (см, например, [3]-[8]).

Будем искать решение задачи (1)-(3) в виде $u(x) = u_1(x_1)u_2(x_2)$. Подставив значение $u(x)$ в уравнение (1), получим

$$-u_1''(x_1)u_2(x_2) - u_1(x_1)u_2''(x_2) + q_1(x_1)u_1(x_1)u_2(x_2) + q_2(x_2)u_1(x_1)u_2(x_2) + \lambda a_1(x_1)u_1(x_1)u_2(x_2) + \lambda a_2(x_2)u_1(x_1)u_2(x_2) = 0$$

или

$$(-u_1''(x_1) + q_1(x_1)u_1(x_1) + \lambda a_1(x_1)u_1(x_1))u_2(x_2) + (-u_2''(x_2) + q_2(x_2)u_2(x_2) + \lambda a_2(x_2)u_2(x_2))u_1(x_1) = 0$$

Так как мы ищем нетривиальные решения, то разделив обе части полученного уравнения на $u_1(x_1)u_2(x_2)$, найдем

$$\frac{-u_1''(x_1) + q_1(x_1)u_1(x_1) + \lambda a_1(x_1)u_1(x_1)}{u_1(x_1)} = \frac{-u_2''(x_2) + q_2(x_2)u_2(x_2) + \lambda a_2(x_2)u_2(x_2)}{u_2(x_2)}$$

При фиксированном значении x_1 из $[0, \ell_1]$ левая часть этого уравнения будет постоянной и зависящей от x_2 . Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{-u_1''(x_1) + q_1(x_1)u_1(x_1) + \lambda a_1(x_1)u_1(x_1)}{u_1(x_1)} &= \mu, \\ \frac{-u_2''(x_2) + q_2(x_2)u_2(x_2) + \lambda a_2(x_2)u_2(x_2)}{u_2(x_2)} &= -\mu, \end{aligned}$$

где μ - некоторая постоянная.

Отсюда найдем

$$\begin{cases} -u_1''(x_1) + q_1(x_1)u_1(x_1) = -\lambda a_1(x_1)u_1(x_1) + \mu u_1(x_1) \\ -u_2''(x_2) + q_2(x_2)u_2(x_2) = -\lambda a_2(x_2)u_2(x_2) - \mu u_2(x_2) \end{cases} \quad (5)$$

Введем обозначения

$$u_1 = y_1^1, (u_1)' = y_2^1, u_2 = y_1^2, (u_2)' = y_2^2. \quad (6)$$

Тогда систему (5) можно записать в виде

$$\begin{cases} (y_1^1)' = y_2^1 \\ -(y_2^1)' + q_1 y_1^1 = (-\lambda a_1 + \mu) y_1^1 \\ (y_1^2)' = y_2^2 \\ -(y_2^2)' + q_1 y_1^2 = (-\lambda a_2 - \mu) y_1^2 \end{cases} \quad (7)$$

Далее, если принять

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, G_1(x_1) = \begin{pmatrix} q_1(x_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G_2(x_2) = \begin{pmatrix} q_2(x_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$A_{11}(x_1) = \begin{pmatrix} -a_1(x_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{12}(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{21}(x_2) = \begin{pmatrix} -a_2(x_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{22}(x_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

то система (7) запишется в виде

$$S \frac{dy^r}{dx_r} + G_r y^r = (\lambda A_{r1} + \mu A_{r2}) y^r, \quad (10)$$

$$\text{где } y^r(x_r) = \begin{pmatrix} y_1^r(x_r) \\ y_2^r(x_r) \end{pmatrix}, r = 1, 2.$$

Заметим, что так как $u_r(x_r) \neq 0$, то из условий (2)-(3) будет следовать, что

$$u_r(\ell_r) = \rho_r u_r(0), \quad \left. \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right|_{x_r = \ell_r} = \rho_r \left. \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right|_{x_r = 0}, \quad r = 1, 2.$$

С учетом обозначений (8)-(9), полученные граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} y_1'(\ell_r) &= \rho_r y_1'(0), \\ y_2'(\ell_r) &= \rho_r y_2'(0), \end{aligned}$$

или

$$y'(\ell_r) = \rho_r y'(0). \quad (11)$$

Таким образом, рассматриваемая задача (1)-(3) свелась к следующей двупараметрической задаче Дирака (см., [9])

$$S \frac{dy'}{dx_r} + G_r y' = (\lambda A_{r1} + \mu A_{r2}) y', \quad (12)$$

$$y'(\ell_r) = \rho_r y'(0), \quad (13)$$

причем $A_s^* = A_s$, $G_s^* = G_s$, $r, s = 1, 2$.

Известно (см., например, [7]), что если для данного $(\lambda, \mu) \in C^2$ многопараметрическая система (12) имеет решение $(y^1(x_1, \lambda), y^2(x_2, \mu)) \neq (0, 0)$, удовлетворяющее условиям (13), то (λ, μ) называется собственным значением, а тензор $y(x, \lambda, \mu) = y^1(x_1, \lambda) \otimes y^2(x_2, \mu)$ - собственной функцией задачи (12)-(13), соответствующей собственному значению. (λ, μ)

Пусть $H = L_2[0, \ell_1] \otimes L_2[0, \ell_2]$,

$$\Delta_0(x) = A_{11}(x_1) \otimes A_{22}(x_2) - A_{12}(x_1) \otimes A_{21}(x_1) = \begin{pmatrix} a(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

Δ_0 -оператор, порожденный матрицей $\Delta_0(x)$ и действующий в H по формуле

$$\Delta_0 h = \Delta_0(x) h(x).$$

Тогда имеют место (см. [9])

Теорема 1. Если Δ_0 -оператор положительного типа в H , то

а) собственные значения задачи (12)-(13) вещественны и их множество счетно,

б) собственные функции $y(x, \lambda), z(x, \mu)$, соответствующие различным собственным значениям

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, Δ_0 -ортогональны, т.е.

$$(\Delta_0 y, z) = 0. \quad (15)$$

Теорема 2. Если оператор Δ_0 удовлетворяет условию

$$(\Delta_0 h, h) \geq \gamma \|h\|^2, \quad \gamma > 0 \quad (16)$$

для любого элемента $h \in H$, то для любого тензора $f \in H$ справедливо равенство Парсеваля

$$(\Delta_0 f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} |(\Delta_0 f, y_n)|^2, \quad (17)$$

где $\{y_n\}_n$ -система Δ_0 -ортонормированных собственных функций задачи (12)-(13).

Теорема 3. Пусть оператор Δ_0 удовлетворяет условию (16), матрицы

$A_r(x), G_r(x)$ из $C^1[0, \ell_r]$ ($r, s = 1, 2$), $y^1(x_1)$ и $y^2(x_2)$ дважды непрерывно дифференцируемы

и удовлетворяют граничным условиям (13), тогда ряд $\sum_n (\Delta_0 u, u_n) u_n$ сходится равномерно к $u(x)$,

где $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - Δ_0 -ортонормированная система собственных функций $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (12)-(13).

Учитывая (14), а также обозначения (6), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} (\Delta_0 y, z) &= \int_I a(x) y_1^1(x_1) y_1^2(x_2) \overline{z_1^1(x_1) z_1^2(x_2)} dx = \int_I a(x) u_1(x_1) u_2(x_2) \overline{v_1(x_1) v_2(x_2)} dx = \\ &= \int_I a(x) u(x) \overline{v(x)} dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда положительная определенность оператора Δ_0 будет обусловлена выполнением условия

$$\int_I a(x) |g(x)|^2 dx \geq 0 \quad (19)$$

для любого $g(x) \in L_2(I)$. В частности, при $a(x) > 0$ условие (19) будет выполняться

Соответственно условие (16) станет равносильным условию

$$\int_I a(x) |g(x)|^2 dx \geq \gamma \|g\|^2, \quad (20)$$

где $g(x) = h_1^1(x_1)h_1^2(x_2)$. Заметим, что в случае $a(x) > 0$ условие (20) также будет иметь место, т.к. в качестве γ можно например взять $\min_{x \in I} a(x)$.

Тогда из теоремы 1 будет следовать

Теорема 1а. Если функция $a(x) > 0$ для любого $x \in I$, то

- а) собственные значения задачи (1)-(3) вещественны и их множество счетно,
б) собственные функции $u(x, \lambda), v(x, \lambda')$, соответствующие различным собственным значениям λ и λ' , ортогональны с весом $a(x)$, т.е.

$$\int_I a(x) u(x) \overline{v(x)} dx = 0$$

Далее, заметим, что собственные функции задачи (12)-(13) с учетом обозначений (6) будут иметь вид

$$y_n(x) = y_n^1(x_1) \otimes y_n^2(x_2) = \left(u_1^{(n)}(x_1) u_2^{(n)}(x_2), u_1^{(n)}(x_1) \frac{\partial u_2^{(n)}(x_2)}{\partial x_2}, \frac{\partial u_1^{(n)}(x_1)}{\partial x_1} u_2^{(n)}(x_2), \frac{\partial u_1^{(n)}(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^{(n)}(x_2)}{\partial x_2} \right)$$

Тогда, учитывая соотношение (17) и теоремы 2,3, получим, что верны

Теорема 2а. Если $a(x) > 0$ для любого $x \in I$, то для любого $g(x) \in L_2(I)$ справедливо равенство Парсеваля

$$\int_I a(x) |g(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_I a(x) g(x) \overline{u^{(n)}(x)} dx \right|^2, \quad (17)$$

где $\{u^{(n)}\}_n$ - система $a(x)$ -ортонормированных собственных функций задачи (1)-(3).

Теорема 3а. Если $a(x) > 0$ для любого $x \in I$, матрицы $q_r(x_r), a_r(x_r)$ из $C^1[0, \ell_r]$ ($r, s = 1, 2$), $u_1(x_1)$ и $u_2(x_2)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют граничным условиям (2)-(3), тогда ряд $\sum_n c_n u^{(n)}(x)$ сходится

равномерно к $u(x) = u_1(x_1)u_2(x_2)$, где $\{u^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ - $a(x)$ -ортонормированная система собственных

функций задачи (1)-(3), $c_n = \int_I a(x) u(x) \overline{u^{(n)}(x)} dx$.

ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՄԵԿ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Գ. Տ. Սահակյան

Մասնակի ածանցյալներով մեկ եզրային խնդրի համար ապացուցվում է սեփական արժեքների հաշվելիությունը, սեփական ֆունկցիաների լրիվությունը և ըստ սեփական ֆունկցիաների վերլուծության հավասարաչափ զուգամիտությունը:

Резюме

В работе доказывается счетность собственных значений, полнота системы собственных функций, а также равномерная сходимость разложения по системе собственных функций для одной граничной задачи.

Литература

1. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, М., 1946
2. Э.Ч.Титчмарш. Разложение по собственным функциям связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. т. II. -М., 1961
3. Sleeman B. D. Some aspects of Multi-parameter spectral theory. Dep.Math.Univ. Scotland, 1970.- p.81-94.
4. Sleeman B. D. Multi-parameter eigenvalue problems in ordinary differential equations. Bull.Inst. Poli. Jazzy 1971.-17(21) 51-60.
5. Browne P. J. A multi-parameter eigenvalue problems.-J. Math. Anal.and Applications, 1972.- v.38.- p. 553-568.
6. Atkinson F. V. Multiparameter Eigenvalue Problems.- V. 82-I,- Academic Press, New York and London, 1972.-V.1
7. Sleeman B. D. Multiparameter spectral theory in Hilbert space. J.Math. Anal. Appl.,1978, 511-530.
8. Browne P. J. Multi-parameter problems the last decade. -Lect. Notes Math., 1982.- v. 964.- p.95-109.
9. Саакян Г.Г. О полноте собственных функций двухпараметрической задачи Дирака, -Ученые записки ЕрГУ. -2002.-т.1. с.9-13.