

ՏՏ 513.813

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՉԵՐԵՇԵՎՅԱՆ ԽՐՁԵՐ ՌԻՄԱՆՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Գ. Ա. Նալբանդյան
ամբիաստիկայի ամբիոն

Տանք մի քանի նախնական գաղափարներ, որոնք անհրաժեշտ են հետագայում

1. Դիտարկենք n -չափանի X^n դիֆերենցելի բազմաձևությունը:

Նրա կետի կոորդինատները նշանակենք u^i -ով ($i = 1, 2, \dots, n$):

Եթե X^n -ի վրա տրված է երկու անգամ կովարիանտ, սիմետրիկ, չվերասերվող $g_{ik}(u^1, u^2, \dots, u^n)$ տենզորական դաշտը, ապա X^n -ը անվանվում է n -չափանի տարածություն: Ռիմանյան n -չափանի տարածությունը նշանակվում է V^n -ով: V^n -ում $g_{ik}(u^1, u^2, \dots, u^n)$ տենզորով որոշվում է ռիմանյան մետրիկա՝

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (1)$$

V^n -ում որոշվում է առանց ոլորման աֆինական կապակցություն, որի նկատմամբ վեկտորների զուգահեռ տեղափոխման ժամանակ պահպանվում է նրանց սկալյար արտադրյալը: Այդ կապակցության $\Gamma_{jk}^i(u^1, u^2, \dots, u^n)$ գործակիցները արտահայտվում են g_{ik} տենզորի միջոցով հետևյալ բանաձևով՝

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^s} \right) \quad (2)$$

որտեղ g^{is} -ը g_{ik} տենզորի փոխադարձ տենզորն է: Այս կապակցությունը անվանվում է ռիմանյան կապակցություն, կամ g_{ik} տենզորի սեփական կապակցություն: $v^i(t)$ վեկտորի զուգահեռ տեղափոխությունը $v^i = v^i(t)$ կորի ուղղությամբ (կամ այդ կորի երկայնքով) որոշվում է հետևյալ դիֆերենցյալ հավասարումների համակարգով՝

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} v^k = 0 \quad (3)$$

1. Ցանցը V^n -ում անվանում ենք չեբիշկյան, եթե նրա ցանկացած ընտանիքի գծերի շոշափող վեկտորները մնացած ընտանիքների գծերի ուղղությամբ (կամ երկայնքով) տեղափոխվում են զուգահեռ V^n -ում որոշված ռիմանյան կապակցության նկատմամբ: Ռիմանյան տարածությունում ապացուցված է, հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: Որպեսզի V^n ռիմանյան տարածության կոորդինատական ցանցը լինի չեբիշկյան, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա կապակցության գործակիցները բավարարեն $\Gamma_{jk}^i = 0; i \neq j$ (4)-ում նշված պայմաններին:

Օգտվելով (2)-ից և (4)-ից, կստացվի՝

$$g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{si}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} \right) = 0; i \neq j \quad (5)$$

որտեղից՝

$$\frac{\partial g_{ip}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jp}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^p} = 0; i \neq j \quad (6)$$

V^n -մ ապացուցված է նաև հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: Որպեսզի V^n ռիմանյան տարածության կոորդինատական ցանցը լինի չեբիշկյան, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մետրիկան այդ կոորդինատական համակարգում ունենա $ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2 + \dots + (du^n)^2 + g_{ii}(u^1, u^2, \dots, u^n) du^i du^i, i \neq j$ (7) տեսքը:

Նշենք, որ $n=2$ դեպքում ստացված այս արդյունքները համընկնում են Էվլիդյան եռաչափ տարածության մեջ մակերևույթի համար ստացված արդյունքների հետ ([1], էջ 348): Հետևաբար, այս արդյունքները ընդհանրացնում են Էվլիդյան եռաչափ տարածության մակերևույթի (որը երկչափ ռիմանյան տարածություն է) համար ստացված արդյունքները չափանի ռիմանյան տարածությունների համար $n>3$ դեպքում:

2. V^n -ում դիտարկենք $A(u^{a_1}, u^{a_2}, \dots, u^{a_n})$ կետով անցնող լրացուցիչ չափերի նրկու մակերևույթներ՝ X^{n_1} և X^{n_2} ($n_1+n_2=n$): X^{n_1} մակերևույթը որոշենք հետևյալ հավասարումներով՝

$$\begin{cases} u^{a_1} = u^{a_2} \\ u^{a_2} = u^{a_2} = \text{const} \end{cases} \quad (8)$$

որտեղ՝

$$a_1=1, 2, \dots, n_1; \quad a_2=n_1+1, n_1+2, \dots, n:$$

Իսկ X^{n_2} -ը՝ հետևյալ հավասարումներով՝

$$\begin{cases} u^{a_1} = u^{a_1} = \text{const} \\ u^{a_2} = u^{a_2} \end{cases} \quad (9)$$

Ենթադրելով, որ A կետը տարածության կամայական կետ է, կստացվի, որ տարածության յուրաքանչյուր կետով անցնում է մեկ X^{n_1} և մեկ X^{n_2} մակերևույթներ: Ընդ որում նրկու X^{n_1} մակերևույթներ չեն հատվում, չեն հատվում նաև նրկու X^{n_2} մակերևույթներ:

X^{n_1} մակերևույթների ընտանիքը անվանում ենք X^{n_1} մակերևույթների խորձ, իսկ X^{n_2} մակերևույթների ընտանիքը՝ X^{n_2} մակերևույթների խորձ: Կարծության համար X^{n_1} մակերևույթների խորձը կանվանենք X^{n_1} խորձ, կամ 1-ին խորձ, իսկ X^{n_2} մակերևույթների խորձը՝ X^{n_2} խորձ, կամ 2-րդ խորձ:

Ենթադրենք, որ v^i վեկտորը տեղափոխվում է զուգահեռ X^{n_1} մակերևույթի ցանկացած

կորի ուղղությամբ, այդ դեպքում (3)-ի մեջ $\frac{du^j}{dt} = 0$, երբ $j=a_2$, հետևաբար այն կունենա

հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{dv^j}{dt} + \Gamma_{a_1 k}^{j} \frac{du^{a_1}}{dt} v^k = 0 \quad (10)$$

Ենթադրենք նաև, որ v^i վեկտորը պատկանում է X^{n_2} մակերևույթին: Այդ դեպքում

$v^i = \{0, 0, \dots, 0; v^{n_1+1}, v^{n_1+2}, \dots, v^n\}$, այսինքն՝ $v^{a_1}=0$, որտեղ ($a_1=1, 2, \dots, n_1$) և (10)-ից՝ $i=a_1$ դեպքում կունենանք՝

$$\Gamma_{a_2 a_2}^{b_1} \frac{du^{a_2}}{dt} v^{a_2} = 0 \quad (11)$$

Եթե X^{n_2} -ի ցանկացած վեկտոր տեղափոխվում է զուգահեռ X^{n_1} մակերևույթի ցանկացած

կորի ուղղությամբ, ապա (11)-ը պետք է տեղի ունենա ցանկացած $\frac{du^{a_2}}{dt}$ -ի և ցանկացած v^{a_2}

ի դեպքում, որտեղից էլ բխում է, որ՝

$$\Gamma_{a_1 a_2}^{b_1} = 0 \quad (12)$$

Համանման, եթե X^{n_1} -ի ցանկացած վեկտոր տեղափոխվում է զուգահեռ X^{n_2} -ի ցանկացած կորով, ապա տեղի կունենա՝

$$\Gamma_{a_2 a_1}^{b_2} = 0 \quad (13)$$

Նկատենք, որ $\Gamma_{a1a2}^{b2} = \Gamma_{a1a2}^{b2}$, քանի որ Γ_{jk}^i կապակցությունը առանց ոլորման կապակցություն է: Այդ դեպքում (12) և (13) պայմանները միասին կարելի է գրել այսպես՝

$$\Gamma_{a1a2}^{b2} = 0 \quad (14)$$

Այժմ սահմանենք չեփշկյան խտրժ:

Սահմանում: Եթե X^{n1} մակերևույթների ցանկացած շոշափող վեկտորը X^{n1} -ին պատկանող ցանկացած կորով տեղափոխվում է գուգահեռ, ապա X^{n1} խտրժը անվանում ենք չեփշկյան խտրժ:

Ի նկատի ունենալով (13)-ը՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3: Եթե ռիմանյան V^n տարածության X^{n1} մակերևույթների խտրժը չեփշկյան խտրժ է, ապա տեղի կունենան (13)-ի մեջ նշված պայմանները:

X^{n1} մակերևույթի (8) և X^{n2} մակերևույթի (9) հավասարումները կապված են տարածության u^a կոորդինատական համակարգի հետ: Եթե սկզբում դիտարկենք X^{n1} և X^{n2} լրացուցիչ չափի մակերևույթները, այնուհետև տարածության մեջ ընտրենք այնպիսի կոորդինատական համակարգ, որի նկատմամբ այդ մակերևույթները ունենան համապատասխանաբար (8) և (9) հավասարումները, ապա այդ կոորդինատական համակարգը անվանում ենք X^{n1} և X^{n2} խրժերին հարմարեցված (адаптированная) կոորդինատական համակարգ:

Ի նկատի ունենալով (14)-ը, կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 4: Եթե ռիմանյան V^n տարածության մեջ լրացուցիչ չափերի մակերևույթների արևո խրժեր չեփշկյան խրժեր են, ապա այդ խրժերին հարմարեցված կոորդինատական համակարգում այդ տարածության կապակցության գործակիցները բավարարում են (14)-ում նշված պայմաններին:

(14)-ի մեջ տեղադրենք Γ_{a1a2}^{b2} -ի արժեքը (2)-ից, կստանանք՝

$$g^{b2} \left(\frac{\partial g_{a1a2}}{\partial u^{a2}} + \frac{\partial g_{a1a2}}{\partial u^{a1}} - \frac{\partial g_{a1a2}}{\partial u^c} \right) = 0,$$

որտեղից կստացվի՝

$$\frac{\partial g_{a1a2}}{\partial u^{a2}} + \frac{\partial g_{a1a2}}{\partial u^{a1}} - \frac{\partial g_{a1a2}}{\partial u^c} = 0 \quad (15)$$

(15)-ից $c=a_1$ դեպքում, կստացվի՝

$$\frac{\partial g_{a1a2}}{\partial u^{a2}} = 0, \quad (16)$$

իսկ $c=a_2$ դեպքում՝

$$\frac{\partial g_{a1a2}}{\partial u^{a1}} = 0 \quad (17)$$

Ի նկատի ունենալով, որ $a_1=1, 2, \dots, n_1$; $a_2=a_1+1, n_1+2, \dots, n$, (16)-ից և (17)-ից համապատասխանաբար կստանանք՝

$$g_{a1a2} = g_{a1a2}(u^1, u^2, \dots, u^{a1}) = g_{a1a2}(u^{a1}) \quad (18)$$

որտեղ՝ $a_1=1, 2, \dots, n_1$; և

$$g_{a2a2} = g_{a2a2}(u^{a1+1}, u^{a1+2}, \dots, u^n) = g_{a2a2}(u^{a2}), \quad (19)$$

որտեղ՝ $a_2=a_1+1, n_1+2, \dots, n$:

Ի նկատի ունենալով (18)-ը և (19)-ը՝ տարածության (1) քառակուսային ձևը կր՝

$$ds^2 = g_{a1a1}(u^{a1})^2 du^{a1} du^{a1} + g_{a2a2}(u^{a2})^2 du^{a2} du^{a2} + g_{a3a3}(u^{a3})^2 du^{a3} du^{a3}$$

որտեղ՝ $a \neq b$:

Այսպիսով, ապացուցվեց հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 5: Եթե դիմանյա տարածությունը թույլ է տալիս լրացուցիչ չափման ներկայությունների ներկու չնքիչկյան խրճեր, ապա այդ խրճերին հարմարեցված կոորդինատական համակարգում տարածության մետրիկական ձևը ունի (20) տեսքը:

Ամփոփում

Աշխատանքում տրվում է Գ.Ա. Նալբանդյանի «Դիմանյա տարածության չնքիչկյան ցանցեր» հոդվածի տրամաբանական շարունակությունը, որտեղ ուսումնասիրվում չնքիչկյան խրճեր V^n –մ: Տրվում է չնքիչկյան խրճի հասկացությունը և ապացուցվում անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ որոնց դեպքում դիմանյա տարածությունը թույլատրում է լրացուցիչ չափողականություն ունեցող մակերևույթների՝ ներկու չնքիչկյան խրճերի: Ելնելով այդ արդյունքից՝ տրվում է V^n տարածության մետրիկական առանձնահատկությունները և մետրիկայի տեսքը:

Резюме

Данная работа является логическим продолжением статьи Г.А.Налбандяна «Сети Чебышева в римановых пространствах», где изучаются связки Чебышева в пространстве V^n . Дано понятие связки Чебышева и доказаны необходимые и достаточные условия, при которых римановы пространства допускают дополнительную размерность поверхности-двух связок Чебышева. Исходя из этого даны особенности метрики пространства V^n и его вид.

Գրականություն

1. В. Ф. Каган, Основы Теории Поверхностей, ОГНЗ, 1948г.
2. П.К.Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М.,1964г.
3. Л.А.Матевосян, О геометрических свойствах некоторых ортогональных расслоений римановых пространств, Ученые записи, Е.,1979г.