

371.31

ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՍԿԱԼԱՐ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՊԱՅՈՒՑՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ռ.Լ. Առաքելյան, Վ.Ռ. Առաքելյան

մաթեմատիկայի ամբիոն

Էվկլիդեսյան տարածությունում երկու վեկտորների սկալար արտադրալի հաշվման բանաձևը կորոդինատներով կարելի է օգտագործել որոշ անհավասարությունների ապացուցման ժամանակ:

Թող E_2 հարթության վրա տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: Այդ ժամանակ նրանց սկալար արտադրալը $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, որտեղ $\alpha = \vec{a} \wedge \vec{b}$ և $0 \leq \alpha \leq \pi$, իսկ կորոդինատներով՝ $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2\}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$:

Սահմանում $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ վեկտորը կոչվում է մոնոտոն, եթե $a_1 \leq a_2$: Օրինակ $\vec{a}_1 = \{3, 7\}$, $\vec{a}_2 = \{-5, 1\}$, $\vec{a}_3 = \{2, 2\}$ մոնոտոն վեկտորներ են, իսկ $\vec{b}_1 = \{5, 0\}$, $\vec{b}_2 = \{-2, -4\}$ վեկտորները՝ ոչ մոնոտոն: Եթե $\vec{b} = \{b_1, b_2\}$ մոնոտոն է՝ $b_1 < b_2$, ապա $\vec{b} = \{b_2, b_1\}$ ոչ մոնոտոն է:

Թեորեմ 1. Թող $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2\}$ մոնոտոն վեկտորներ են, իսկ $\vec{b} = \{b_2, b_1\}$ ոչ մոնոտոն: Այդ ժամանակ $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\text{Ապացույց} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) = a_1 (b_1 - b_2) + a_2 (b_2 - b_1) = (b_2 - b_1) (a_2 - a_1) \geq 0$$

որովհետև $b_2 \geq b_1$, $a_2 \geq a_1$.

Այս թեորեմը ունի հետևյալ երկրաչափական մեկնաբանությունը:

$$\cos \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \cos \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Այս բանաձևերում հայտարարներն իրար հավասար են ու դրական, հետևաբար $\vec{a} \cdot \vec{b}$ և $\vec{a} \cdot \vec{b}$ մեծությունները համեմատելու համար բավական է համեմատել $\vec{a} \wedge \vec{b}$ և $\vec{a} \wedge \vec{b}$ անկյունները:



գծ. 1



գծ. 2

Քանի որ նշված անկյունների մեծությունները կախված չեն $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորների նրկարություններից, ուստի կարող ենք համարել, որ նրանք ունեն միավոր նրկարություն Դժվար չէ նկատել որ մոնոտոն վեկտորները պատկերվում են $y=x$ ուղղով որոշված կիսաշրջանի այն շառավիղ վեկտորներով, որոնց համար $x < y$, իսկ ոչ մոնոտոն վեկտորները մյուս կիսաշրջանի շառավիղ վեկտորներով ($x > y$):

Թող $\bar{a}$ վեկտորը $y-x$ ուղղի հետ կազմում է α անկյուն: Պայմանականորեն նշանակենք $\bar{a} = \{\alpha\}$, $\bar{b} = \{\beta\}$. $\bar{b}$ համաչափ է $\bar{b}$ վեկտորին $y=x$ ուղղի նկատմամբ՝ ուստի $\bar{b} = \{\beta\}$

$\cos \bar{a} \bar{b} = \cos(\beta - \alpha)$ զժ. 1-ում $\beta > \alpha$ $\cos \bar{a} \bar{b} = \cos(\alpha + \beta)$: Քանի որ $\beta - \alpha < \beta + \alpha \Rightarrow \cos(\beta - \alpha) > \cos(\beta + \alpha)$, որը հետևում է $\cos x$ ֆունկցիայի $(0, \pi)$ -ում մոնոտոն նվազող լինելու հատկությունից:

Գժ. 2-ում $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \alpha - \beta$, $(\bar{a} \vee \bar{b}) = \alpha + \beta$, այստեղ ևս $\alpha - \beta < \alpha + \beta$ Այսպիսով, երկու դեպքերում էլ $\cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) \geq \cos(\bar{a} \vee \bar{b})$, այսինքն $\bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b}$

Այժմ անցնենք առաջադրված խնդրի լուծմանը, այսինքն նվազագույն արտադրյալի նշված հատկության օգնությամբ ապացուցենք մի քանի անհավասարություններ:

Օրինակ 1. Թող x և y -ը դրական թվեր են, $x < y$: Ապացուցել որ $x^3 + y^3 \geq x^2 y + y^2 x$

Կատարենք նշանակում $\bar{a} = \{x, y\}$ $\bar{b} = \{x^2, y^2\}$, ապա է, որ դրանք մոնոտոն վեկտորներ են: Հետևաբար, $\bar{b} = \{y^2, x^2\}$ ոչ մոնոտոն է: Թերևս 1-ի համաձայն

$\bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b}$ կամ $x^3 + y^3 \geq x^2 y + y^2 x$
Օրինակ 2. Ապացուցել, որ $x^3 y^2 + y^3 x^2 \leq x^5 + y^5$

Ընտրենք $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորները՝ $\bar{a} = \{x^3, y^3\}$ $\bar{b} = \left\{ \frac{1}{y^2}, \frac{1}{x^2} \right\}$ $\bar{b} = \left\{ \frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2} \right\}$, $x \leq y$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b} \Rightarrow \frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{x^2} \geq x + y \Rightarrow x^3 y^2 + y^3 x^2 \leq x^5 + y^5$$

Այժմ դիտարկենք վեկտորները E_3 նուաչափ էվկլիդեսյան տարածությունում, որտեղ $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ և $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հաշվում են $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ բանաձևով: Եռաչափ տարածությունում ևս գործում է $\bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b}$ անհավասարությունը, բայց $\bar{b}$ մոնոտոն վեկտորի կոորդինատների տեղափոխություններից ստացվում են $3! = 6$ հատ ոչ մոնոտոն վեկտորներ:

Օրինակ՝ $\bar{b} = \{2, 3, 5\}$ վեկտորից ստացվում են $\{2, 5, 3\}$, $\{3, 2, 5\}$, $\{3, 5, 2\}$, $\{5, 2, 3\}$ ոչ մոնոտոն վեկտորները:

Թերևս 2. Եթե $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ մոնոտոն, իսկ $\bar{b}_i = \{b_i, b_{j_1}, b_{j_2}\}$ ոչ մոնոտոն վեկտորներ են ապա $\bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b}_i$ կամ

$$a_1 b_i + a_2 b_{j_1} + a_3 b_{j_2} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Ապացույց: Նախքան թերևս 2-ը ընդհանուր ձևով ապացուցելը՝ պարզաբանենք նրա իրավացիությունը կոնկրետ թվային կոորդինատներ ունեցող վեկտորների համար: Թող $\bar{a} = \{1, 4, 6\}$, $\bar{b} = \{2, 3, 5\}$ մոնոտոն վեկտորներն են, ոչ մոնոտոն դրանք $\bar{b}_i$ ընտրենք $\bar{b}_1 = \{5, 3, 2\}$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \leq 1 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 2 \leq 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \leq 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Յուրաքանչյուր քայլում մի կոորդինատ թողնում ենք նույնը, իսկ մյուսը երկուսի օգնությամբ կազմում մոնոտոն վեկտոր, որոնց համար տեղի ունի թերևս 1-ը:

Այժմ թերորեն ավագուցնք ընդհանուր ձևով:

$$\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \quad \bar{h}_i = \{b_i, b_i, b_i\}; \quad \bar{a} \cdot \bar{h}_i = a_1 b_i + a_2 b_i + a_3 b_i$$

ենթադրենք

$$\text{ա. } b_1 > b_2 \text{ այդ ժամանակ } a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leq a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1$$

Համեմատենք b_1 և b_2 թվերը: Եթե $b_1 > b_2$, ապա $b_2 = b_1$, $b_3 = b_2$, $b_3 = b_1$ և թերորեն ավագուցված է:

բ. Իսկ եթե $b_1 < b_2$, ապա կգրենք $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leq a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1$ և այսպես շարունակ մինչև այդ մասում ստացվի $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ արտադրյալը: (Տես օրինակը) Թերորեն ավագուցված է:

Օրինակ 3. Ավագուցել, որ ցանկացած x, y, z դրական թվերի համար $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 y + y^2 z + z^2 x$:

Ավագուց: Թող $\bar{a} = \{x, y, z\}$ $\bar{b} = \{x^2, y^2, z^2\}$ մոնոտոն վեկտորներ են. իսկ $\bar{b} = \{z^2, x^2, y^2\}$ ոչ մոնոտոն: Ուստի $\bar{a} \cdot \bar{b} = x^3 + y^3 + z^3$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = xz^2 + yx^2 + zy^2$, համեմատենք 2-ի $x^3 + y^3 + z^3 \geq xz^2 + yx^2 + zy^2$

Օրինակ 4. Ավագուցենք որ եթե a, b, c դրական թվեր են, ապա

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Ավագուց: Թող $\bar{x} = \{a^2, b^2, c^2\}$ $\bar{y} = \left\{ \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b} \right\}$ մոնոտոն վեկտորներ

են, ուրեմն $\bar{y} = \left\{ \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c} \right\}$ ոչ մոնոտոն է, ուստի $\bar{x} \bar{y} \geq \bar{x} \bar{y}$ կամ

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} \quad (1)$$

$\bar{z} = \left\{ \frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a} \right\}$ ևս ոչ մոնոտոն է ուստի $\bar{x} \bar{y} \geq \bar{x} \bar{z}$ կամ

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \quad (2)$$

Գումարենք (1) և (2) անհավասարությունները, կստանանք

$$2 \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \geq \frac{a^2+c^2}{c+a} + \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} \geq \frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} = a+b+c$$

վերջնականապես $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Հարցը այժմ քննարկենք էվլիդեսյան ոչ-հավասարությունում:

Թող $\bar{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $\bar{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ $\bar{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

Թերորեն 3. Թող $\bar{a}$ և $\bar{b}$ մոնոտոն վեկտորներ են, $\bar{b}_i = \{b_i, b_i, \dots, b_i\}$ վեկտորը ոչ մոնոտոն վեկտոր է: Հիշտ է, $\bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b}$ անհավասարությունը:

Ավագուց: $\bar{b}_i$ վեկտորների թիվը հավասար է $(n!-1)$ -ի: Ընտրենք նրանցից մեկը, այն նշանակենք $\bar{b}_1$: $\bar{b}_1 = \{b_2, b_1, b_3, \dots, b_n\}$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$
 $\bar{a} \cdot \bar{b}_1 = a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$

Գրված երկու գումարների մեջ բացի առաջին երկու գումարելիներից մնացածները հավասար են, իսկ $a_1b_1 + a_2b_2 \geq a_1b_2 + a_2b_1$ համաձայն ապացուցված թեորեմ 1-ի, ուստի $\bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b}_1 \geq \bar{a} \cdot \bar{b}_2$: Դատողությունները նույն ձևով շարունակելով կստանանք, որ $\bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b}_i \quad i = 1, 2, \dots, (n-1)$: Թեորեմն ապացուցված է :

Օրինակ 5. Թող $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ դրական իրական թվեր են: Ապացուցել որ

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

Ապացույց: Թող $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, $\bar{b} = \left\{-\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \dots, -\frac{1}{a_n}\right\}$ մոնոտոն են.

$$\bar{b} = \left\{-\frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, -\frac{1}{a_4}, \dots, -\frac{1}{a_n}, -\frac{1}{a_1}\right\} \text{ ոչ մոնոտոն է, ուստի } \bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b} \text{ համաձայն թեորեմ 3-ի: Կամ}$$

$$-\frac{1}{a_1} \cdot a_1 - \frac{1}{a_2} \cdot a_2 - \frac{1}{a_3} \cdot a_3 - \dots - \frac{1}{a_n} \cdot a_n \geq -\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_3}{a_4} - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_1} \quad \text{կամ}$$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

Օրինակ 6. Ապացուցել որ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \geq 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n + n \cdot 1$

Ապացույց: Թող $\bar{a} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ $\bar{b} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ $\bar{b} = \{n, 1, 2, \dots, n-1\}$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \geq \bar{a} \cdot \bar{b} \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \geq 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n + n \cdot 1$$

Նման ձևով կարելի է ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները՝

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \geq 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + (n-1)n^2 + n \cdot 1^2$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \geq \sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 4} + \dots + \sqrt{(n-1)n} + \sqrt{n}$$

Ամփոփում

Մաթեմատիկայի ուսուցումը նպատակ ունի ոչ միայն տեսական դրույթների հաղորդում, այլ նաև նրանց կիրառությունը խնդիրների լուծման ժամանակ:

Սույն հոդվածի նպատակն է ցուցադրել վեկտորների սկալյար արտադրյալի կիրառությունը որոշակի անհավասարությունների ապացուցման ժամանակ:

Резюме

Обучение математике своей целью имеет не только сообщение математических теорий, но и их успешное прикладное применение.

В данной статье ставилась задача показать, как можно с помощью скалярного произведения векторов доказать определенные неравенства.

Գրականություն

1. Н.В.Ефимов, Э.Р.Розендори., Линейная алгебра и многомерная геометрия, "НАУКА" Москва, 1970.
2. Л.И.Головина, Линейная алгебра и некоторые ее приложения, "НАУКА", Москва, 1975.