УДК.517.948.25

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУПАРАМЕТРЕТРИЧЕСКОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

В.Ш.Манасян

кафедра прикладной математики и информатики

Рассматривается следующее двупараметрическое матричное уравнение

$$Ty = \lambda Ay + \mu By\,, \tag{1}$$

где T, A и B –вещественные матрицы порядка 2×2, $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$-двухкомпонентная C^2-значная искомая вектор-функция, λ и μ-комплексные параметры.

Определение (см., например, [1]). Если при $(\lambda,\mu)\in C^2$ $((\lambda,\mu)\neq(0.0))$ уравнение (1) имеет ненулевое решение, то (λ,μ) называется собственным значением уравнения (1), а соответствующее решение $y(x)$ - собственной функцией уравнения (1), соответствующей собственному значению (λ,μ).

Известно (см, [2]), что характеристическое уравнение, которому удовлетворяют собственные значения уравнения (1), можно записать в виде

$$\lambda^2 G(A,A) + 2\lambda\mu G(A,B) + \mu^2 G(B,B) - 2\lambda G(A,T) - 2\mu G(B,T) + G(T,T) = 0\,, \tag{2}$$

где

$$G(A,B) = \frac{\det(A+B) - \det A - \det B}{2}\,,$$

причем для любых матриц A, B и C порядка 2×2 $G(A,B)$ (см., [2]) удовлетворяет следующим свойствам:

1. $G(A,B) = G(B,A)\,,$ (3a)
2. $G(kA,B) = kG(A,B),\ \ k = const\,,$ (3b)
3. $G(A\pm B,C) = G(A,C)\pm G(B,C)\,.$ (3c)

В данной работе рассматривается следующая обратная задача: предполагается, что собственные значения уравнения (1) находятся на двух пересекающихся прямых

$$\lambda = \pm k\mu + b$$

в координатной плоскости $\mu\lambda$. Требуется определить матрицы T, A и B так, чтобы всякая точка, лежащая на одной из указанных прямых, являлась бы собственным значением уравнения (1), т.е. удовлетворяла бы характеристическому уравнению (2).

Имеем место

Теорема. Если собственные значения уравнения (1) находятся на пересекающихся прямых

$$\lambda = \pm k\mu + b\,, \tag{4}$$

то всякая точка, лежащая на одной из этих прямых, является собственным значением уравнения *(1)*, в которой матрицы T, A и B имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad T = bA, \quad B = kSA, \quad (\det A \neq 0), \tag{5}$$

где $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Предположим, что матрицы T, A и B имеют следующий вид:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, $T = bA$, $B = kSA$, где $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда нетрудно найти, что

$$G(SA, A) = \frac{\det(SA + A) - \det SA - \det A}{2} = 0 .$$

Далее, с учетом свойств (3a)-(3c), будем иметь

$$G(A \pm SA, T) = G(A \pm SA, bA) = G(A, bA) \pm G(SA, bA) = bG(A, A) \pm bG(SA, A) = bG(A, A).$$

Так как $G(A, A) = \det A \neq 0$, то из последних соотношений найдем

$$\frac{G(A + SA, T)}{G(A, A)} = \frac{G(A - SA, T)}{G(A, A)} = b. \tag{6}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{G^2(A,T)}{G^2(A, A)} - \frac{G^2(SA,T)}{G^2(A, A)} - \frac{G(T,T)}{G(A, A)} = \frac{G^2(A,bA)}{G^2(A, A)} - \frac{G^2(SA,bA)}{G^2(A, A)} - \frac{G(bA,bA)}{G(A, A)} = \\ &= \frac{b^2G^2(A, A)}{G^2(A, A)} - \frac{b^2G^2(SA, A)}{G^2(A, A)} - \frac{b^2G(A, A)}{G(A, A)} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Учитывая соотношения (6), запишем уравнения заданных прямых в виде:

$$\lambda = k\mu + \frac{G(SA + A, T)}{G(A, A)},$$

$$\lambda = -k\mu + \frac{G(A - SA, T)}{G(A, A)}.$$

или

$$k\mu + \frac{G(SA,T)}{G(A, A)} - \lambda + \frac{G(A,T)}{G(A, A)} = 0, \tag{8a}$$

$$k\mu + \frac{G(SA,T)}{G(A, A)} + \lambda - \frac{G(A,T)}{G(A, A)} = 0. \tag{8b}$$

Перемножив по частям равенства (8a)-(8b), найдем

$$\left(k\mu + \frac{G(SA,T)}{G(A, A)} \right)^2 - \left(\lambda - \frac{G(A,T)}{G(A, A)} \right)^2 = 0.$$

Далее, раскрыв скобки в полученном соотношении и, учитывая (7), получим следующее уравнение

$$k^2\mu^2 + 2k\mu\cdot\frac{G(SA,T)}{G(A,A)} - \lambda^2 + 2\lambda\cdot\frac{G(A,T)}{G(A,A)} - \frac{G(T,T)}{G(A,A)} = 0,$$

или

$$k^2\mu^2 G(A,A) + 2k\mu\cdot G(SA,T) - \lambda^2 G(A,A) + 2\lambda\cdot G(A,T) - G(T,T) = 0. \qquad (9)$$

С другой стороны, учитывая соотношения (5), а также свойства (3a)-(3c), будем иметь

$$G(B,A) = G(kSA,A) = kG(SA,A) = 0,$$

$$kG(SA,T) = G(kSA,T) = G(B,T),$$

$$-k^2G(A,A) = G(kSA,kSA) = G(B,B).$$

С учетом полученных соотношений равенство (9) запишется в виде:

$$\lambda^2 G(A,A) + 2\lambda\mu G(A,B) + \mu^2 G(B,B) - 2\lambda G(A,T) - 2\mu G(B,T) + G(T,T) = 0.$$

Таким образом, всякая пара чисел (λ,μ), удовлетворяющая соотношениям (4) является решением полученного уравнения, и, следовательно, является собственным значением уравнения (1).

Теорема доказана.

Ամփոփում

Աշխատանքում լուծվում է հակադարձ խնդիրը սիմետրիկ մատրիցներով մի երկպարամետրանոց մատրիցային հավասարման համար սեփական արժեքների կոմպոնենտների գծային կախվածության ենթադրությամբ.

Резюме

В статье решается обратная задача симметричными матрицами для одного двухпараметрического матричного уравнения в предположении линейной зависимости компонентов собственных значений.

Литература

1. P.J.Browne, *Two-parameter eigencurve theory*. Ordinary and Partial Differential Equations, v.II (1989), 52-60.
2. Г. Г. Саакян, О собственных значениях одного двупараметрического матричного уравнения. Կրթությունը և գիտությունը Արցախում, 3-4, 2005.