

УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. Г. Саакян

кафедра прикладной математики и информатики

Рассматривается следующая линейная однородная система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' + p(t)y_2 = 0, \\ y_2' + r(t)y_1 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $p(t), r(t) \in C[a, b]$.

Известно, что в общем случае указанная система не интегрируется в квадратурах (см., например [1]-[2]), поэтому особый интерес представляет исследование свойств решений системы при различных предположениях относительно коэффициентов $p(t)$ и $r(t)$ (см., например [3]-[6]).

Имеет место

Лемма 1. Компоненты всякого нетривиального решения системы (1) не могут иметь нуль в одной и той же точке.

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ - произвольное нетривиальное решение системы

(1). Предположим, что существует точка $t_0 \in [a, b]$, так что

$$y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0. \quad (2)$$

Тогда если рассмотреть условие (2) вместе с системой (1), то мы получим задачу Коши.

Очевидно, что $y(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ является решением задачи (1)-(2). Согласно теореме о

существовании и единственности решения задачи Коши (см., например [1], стр. 163), мы найдем, что

$$y_1(t) = y_2(t) = 0,$$

что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 2. Компоненты всякого нетривиального решения системы (1) при $p(t) \cdot r(t) \neq 0$ могут иметь на отрезке $[a, b]$ не более конечного числа нулей, причем все нули простые.

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ - произвольное нетривиальное решение системы (1).

Предположим, что точка t_0 является кратным нулем для компоненты $y_1(t)$, и, следовательно, $y_1(t_0) = y_1'(t_0) = 0$. Тогда, так как $p(t_0) \neq 0$, то из первого уравнения системы (1) найдем, что $y_2'(t_0) = 0$, что невозможно в силу леммы 1. Таким образом, нули компоненты $y_1(t)$ простые.

Предположим теперь, что $y_1(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ бесконечно много нулей $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$. Тогда по лемме Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{t_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \rightarrow t_0, t_0 \in [a, b]$. Не ограничивая

общности, можно считать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$. Так как $y_1(t_n) = 0$, то в силу непрерывности $y_1(t)$ получим, что $y_1(t_0) = 0$. По теореме Ролля на каждом интервале (t_n, t_{n+1}) найдется точка t_n^* такая, что $y_1'(t_n^*) = 0$. Так как $t_n^* \rightarrow t_0$, то по непрерывности $y_1'(t)$ найдем, что $y_1'(t_0) = 0$, что невозможно, так как всякий нуль $y_1(t)$ согласно вышеприведенным рассуждениям простой. Аналогично проводится доказательство и для нулей компоненты $y_2(t)$. Лемма доказана.

Теорема 1. Если в системе (1) $p(t)$ и $r(t)$ знакопостоянны на отрезке $[a, b]$, то нуль одной компоненты всякого нетривиального решения системы (1) является точкой экстремума для другой компоненты этого же решения.

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ - произвольное нетривиальное решение системы (1),

а t_1 - нуль второй компоненты, т.е. $y_2(t_1) = 0, t_1 \in (a, b)$. Заметим, что $y_2(t)$ не может иметь один и тот же знак и слева и справа от t_1 , так как в этом случае точка t_1 окажется точкой экстремума для $y_2(t)$, и мы получим, что $y_2'(t_1) = 0$. Но тогда из второго уравнения системы (1) будет следовать, что $y_1(t_1) = 0$, а это невозможно в силу леммы 1. Значит $y_2(t)$ будет иметь по разные стороны от t_1 разные знаки. Тогда, так как $p(t)$ знакопостоянна на отрезке $[a, b]$, то из первого уравнения системы (1) будет следовать, что y_1' при переходе через точку t_1 меняет свой знак, причем

$$y_1'(t_1) = -p(t_1)y_2(t_1) = 0,$$

а это значит, что точка t_1 является точкой экстремума для $y_1(t)$.

Аналогично доказывается, что нуль $y_1(t)$ всякого нетривиального решения системы (1) является точкой экстремума для $y_2(t)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если в системе (1) $p(t) \cdot r(t) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$, то между любыми соседними нулями любой из компонент всякого нетривиального решения системы (1) находится ровно один нуль другой компоненты того же решения (нули компонент перемежаются).

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ - произвольное нетривиальное решение системы (1).

Не теряя общности рассуждений, предположим, что t_1 и t_2 - соседние нули $y_2(t)$, т.е. $y_2(t_1) = y_2(t_2) = 0$ и $y_2(t) \neq 0$ при $t \in (t_1, t_2)$ (аналогично проводится доказательство и в случае $y_1(t_1) = y_1(t_2) = 0$). Заметим, что относительно функции $y_2(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ имеют место условия теоремы Ролля. Тогда, применив ее, найдем, что внутри отрезка $[t_1, t_2]$ существует по крайней мере одна такая точка $t_0 \in (t_1, t_2)$, что $y_2'(t_0) = 0$. Но тогда из второго равенства системы (1) будет следовать, что $y_1(t_0) = 0$. Следовательно, $y_1(t)$ имеет по крайней мере один нуль на интервале (t_1, t_2) .

Теперь предположим, что $y_1(t)$ имеет на отрезке (t_1, t_2) более одного нуля, и пусть t_3 и t_4 ($t_1 < t_3 < t_4 < t_2$) - два его соседних нуля. Тогда, повторив вышеизложенные рассуждения относительно $y_1(t)$ на интервале (t_3, t_4) , найдем, что $y_2(t)$ имеет на интервале (t_3, t_4) а.

следовательно, и на интервале (t_1, t_2) , хотя бы один нуль, а это противоречит предположению, что t_1 и t_2 соседние нули $y_2(t)$. Следовательно, $y_1(t)$ имеет на отрезке (t_1, t_2) ровно один нуль. Теорема доказана.

Приведем пример, иллюстрирующий утверждения теоремы 2. Пусть в системе (1) $p(x) = n^2$, $r(x) = -m^2$, $m, n \in \mathbb{R}$, $mn \neq 0$. В рассматриваемом случае $p(t) \cdot r(t) \neq 0$ на любом отрезке $[a, b]$, при этом система (1) будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} y_1' - n^2 y_2 = 0, \\ y_2' + m^2 y_1 = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя по t второе уравнение, и учитывая первое, найдем

$$y_2'' + m^2 y_1' = y_2'' + m^2 n^2 y_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение для полученного уравнения будет иметь вид

$$\lambda^2 + m^2 n^2 = 0,$$

откуда найдем

$$\lambda_{1,2} = \pm imn.$$

И, следовательно, общее решение рассматриваемой системы можно представить в виде

$$y_1(t) = A \sin(mnt + \varphi),$$

$$y_2(t) = \frac{Am}{n} \cos(mnt + \varphi).$$

Из структуры полученных решений следует, что на любом интервале $[a, b]$, длина которого больше или равна $\frac{2\pi}{mn}$, компоненты решения имеют более одного нуля, причем нули $y_2(t)$ и $y_1(t)$ перемежаются (см., рис. 1).

$$\begin{aligned} m &:= 1 & n &:= 4 \\ A &:= 0.5 & \varphi &:= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$y1(t) := A \cdot \sin(m \cdot n \cdot t + \varphi)$$

$$y2(t) := A \cdot \frac{m \cdot \cos(m \cdot n \cdot t + \varphi)}{n}$$

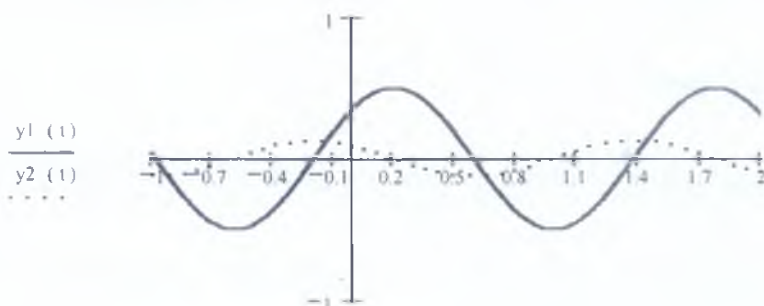


Рис. 1

Теорема 3. Если в системе (1) $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a, b]$ знакопостоянны и имеют одинаковые знаки, то наличие нуля на отрезке $[a, b]$ у одной из компонент произвольного

нетривиального решения системы (1) исключает существование других нулей компонент на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ - произвольное нетривиальное решение системы (1).

Умножив первое уравнение системы (1) на $y_2(t)$, а второе на $y_1(t)$, затем сложив полученные уравнения, найдем

$$(y_1 y_2)' = -p(t)y_1^2 - r(t)y_2^2. \quad (3)$$

Так как $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a, b]$ имеют одинаковые знаки, то в полученном соотношении правая часть, а значит, и левая, будут иметь при $t \in [a, b]$ всегда один и тот же знак. А это означает, что функция $y_1(t) \cdot y_2(t)$ при $t \in [a, b]$ будет либо строго возрастающей (при $p(t) < 0$ и $r(t) < 0$), либо строго убывающей (при $p(t) > 0$ и $r(t) > 0$). Отсюда следует, что $y_1(t) \cdot y_2(t)$ может иметь нуль на отрезке $[a, b]$ только в одной точке. Теорема доказана.

Следствие. Если в системе (1) $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a, b]$ знакопостоянны и имеют разные знаки, то ни одна из компонент произвольного нетривиального решения системы (1) не может иметь на отрезке $[a, b]$ более одного нуля.

Проиллюстрируем утверждение теоремы 3 на следующем примере. Предположим, что в системе (1) $p(x) = n^2$, $r(x) = m^2$, $m, n \in \mathbb{R}$, $mn \neq 0$. В рассматриваемом случае $p(t)$ и $r(t)$ знакопостоянны и имеют одинаковые знаки. Система (1) при этом будет иметь вид

$$\begin{cases} y_1' + n^2 y_2 = 0, \\ y_2' + m^2 y_1 = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя по t второе уравнение и, учитывая первое, найдем

$$y_2'' + m^2 y_1' = y_2'' - m^2 n^2 y_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение для полученного уравнения будет иметь вид

$$\lambda^2 - m^2 n^2 = 0,$$

откуда найдем

$$\lambda_{1,2} = \pm mn,$$

и, следовательно, общее решение системы (1) в рассматриваемом случае запишется в виде

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{n}{m} (-C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt}), \\ y_2(t) &= C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае каждая из компонент всякого нетривиального решения системы (1) может иметь нуль на всей оси не более, чем в одной точке (см., рис. 2).

$$m := 2 \quad n := 1$$

$$c1 := 0.02 \quad c2 := 0.5$$

$$y1(t) := \frac{n \cdot (-c1 \cdot e^{m \cdot n \cdot t} + c2 \cdot e^{-m \cdot n \cdot t})}{m}$$

$$y2(t) := c1 \cdot e^{m \cdot n \cdot t} + c2 \cdot e^{-m \cdot n \cdot t}$$

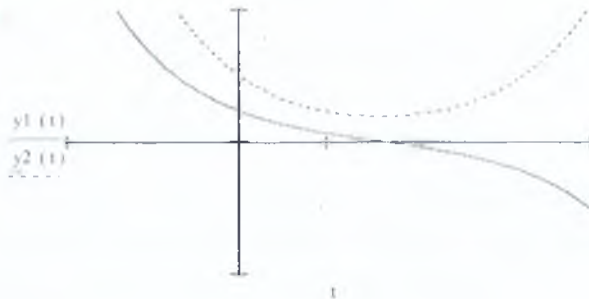


Рис. 2

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться и в том, что в приведенных выше примерах нуль любой компоненты всякого нетривиального решения является точкой экстремума для другой компоненты.

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու դիֆերենցիալ հավասարումների զծային համասեին և՛ համակարգի լուծումների կոմպոնենտների գրոհների հատկությունները:

Резюме

В работе рассматриваются свойства нулей компонент решений одной однородной линейной системы двух дифференциальных уравнений.

Литература

1. М. В. Федорюк, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука, 1985.
2. А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников, Дифференциальные уравнения, М., Наука, 1980.
3. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, М., Наука, 1988.
4. А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян, Распределение собственных значений, М., Наука, 1979.
5. В. В. Амеликин, Дифференциальные уравнения в приложениях, М., Наука, 1987.
6. Саакян Г.Г., Об одном методе исследования решений канонической системы Дирака, АрԴՄԱՆԻՍՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ, 2(9), 2004.