ԱՐՑԱԽԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРЦАХСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2 (15), 2007

УДК 517.9 *Математика*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.Г.Саакян

Рассматривается следующая линейная однородная система двух обыкновенных однородных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} y_1' + p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 = 0\,, \\ y_2' + p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2 = 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $p_{ij}(t)$ $(i,\ j = 1,2)$ – действительнозначные функции, определенные и непрерывные на некотором отрезке $[a,b]$.

Как известно [см, например, [1]-[6]], система (1) в общем случае не интегрируется в квадратурах, поэтому особый интерес представляет исследование свойств решений системы, поведение их нулей и т.д. Цель настоящей работы – рассмотрение осцилляционных свойств компонент решений системы (1) при определенных предположениях относительно коэффициентов $p_{ij}(t)$ $(i,\ j = 1,2)$.

Имеет место

Лемма. *Система* (1) *равносильна системе*

$$\begin{cases} z_1' + p(t)z_2 = 0\,, \\ z_2' + r(t)z_1 = 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

в которой

$$p(t) = p_{12}(t)e^{\int_{t_0}^{t}(p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau))d\tau}\,,\quad r(t) = p_{21}(t)e^{-\int_{t_0}^{t}(p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau))d\tau}\,, \tag{3}$$

т.е. всякому решению $z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ *системы* (2) *соответствует одно и только одно решение* $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ *системы* (1), *задаваемое формулой*

$$y_1(t) = z_1(t)e^{-\int_{t_0}^{t}p_{11}(\tau)d\tau}\,, \tag{4a}$$

$$y_2(t) = z_2(t)e^{\int_{t_0}^{t}p_{22}(\tau)d\tau}\,, \tag{4b}$$

где t_0 *– произвольная точка из отрезка* $[a,b]$.

Доказательство. Действительно, подставив в систему (1) значения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ из соотношений (4a)-(4b), будем иметь

$$z_1'(t)e^{\int_{t_0}^{t}p_{11}(\tau)d\tau} - z_1(t)e^{-\int_{t_0}^{t}p_{11}(\tau)d\tau}\cdot p_{11}(t) + p_{11}(t)z_1(t)e^{-\int_{t_0}^{t}p_{11}(\tau)d\tau} + p_{12}(t)z_2(t)e^{\int_{t_0}^{t}p_{22}(\tau)d\tau} = 0,$$

$$z_2'(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau} - z_2(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau}\cdot p_{22}(t) + p_{21}(t)z_1(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau} + p_{22}(t)z_2(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau} = 0,$$

или

$$z_1'(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau} + p_{12}(t)z_2(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau} = 0,$$

$$z_2'(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau} + p_{21}(t)z_1(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau} = 0,$$

Разделив первое уравнение на $e^{-\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau}$, а второе на $e^{-\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau}$, получим

$$z_1'(t) + p_{12}(t)z_2(t)e^{\int_{t_0}^{t}(p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau))d\tau} = 0,$$

$$z_2'(t) + p_{21}(t)z_1(t)e^{-\int_{t_0}^{t}(p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau))d\tau} = 0.$$

Полученную систему, очевидно, что можно записать в виде

$$z_1' + p(t)z_2 = 0\,,$$
$$z_2' + r(t)z_1 = 0\,,$$

где

$$p(t) = p_{12}(t)e^{\int_{t_0}^{t}(p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau))d\tau}, \quad r(t) = p_{21}(t)e^{-\int_{t_0}^{t}(p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau))d\tau}.$$

Аналогично вышеизложенному, можно показать, что указанными в лемме преобразованиями систему (2) можно свести к системе (1). Лемма доказана.

Замечание. Из соотношений (4a) и (4b), в частности, следует, что нули соответствующих компонент решений $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ и $z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ совпадают.

Приведение линейных систем вида (1) к равносильному виду (2) позволяет зачастую найти аналитическое представление решений данных систем. Покажем это на следующих примерах.

Пример 1. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1' + ty_1 - y_2 = 0, \\ y_2' - \dfrac{2}{t^2}y_1 + ty_2 = 0. \end{cases}$$

В данном случае имеем

$$p_{11}(t) = p_{22}(t) = t, \quad p_{12}(t) = -1, \quad p_{21}(t) = \frac{-2}{t^2}.$$

Воспользовавшись соотношениями (3), найдем

$$p(t) = p_{12}(t) = -1, \quad r(t) = p_{21}(t) = -\frac{2}{t^2}.$$

Тогда, согласно лемме, рассматриваемую систему можно свести к следующей равносильной системе

$$\begin{cases} u_1' - u_2 = 0, \\ u_2' - \dfrac{2}{t^2}u_1 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Умножив первое уравнение системы на y_1, а второе на y_2, затем сложив получим

$$u_2'u_1 - u_1'u_2 - \frac{2}{t^2}u_1^2 + u_2^2 = 0.$$

Разделив полученное уравнение на u_1^2, будем иметь

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)' - \frac{2}{t^2} + \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = 0. \qquad (6)$$

Обозначим

$$u(t) = \frac{u_2(t)}{u_1(t)}, \qquad (7)$$

тогда уравнение (6) запишется в виде

$$u' + u^2 - \frac{2}{t^2} = 0. \qquad (8)$$

Полученное уравнение является уравнением Рикатти (см., например [3]). Будем искать его частное решение в виде

$$u_0(t) = \frac{C}{t}, \qquad (9)$$

где C - некоторая постоянная. Для определения значения постоянной C, подставим y_0 вместо y в уравнение (8). Получим

$$-\frac{C}{t^2} + \frac{C^2}{t^2} - \frac{2}{t^2} = 0,$$

или

$$C^2 - C - 2 = 0,$$

откуда найдем, что $C = -1$ или $C = 2$.

Примем $C = -1$ и воспользуемся подстановкой

$$u = -\frac{1}{t} + \frac{1}{z}. \qquad (10)$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$\frac{1}{t^2} - \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{t^2} = 0$$

или

$$z' + \frac{2}{t}z = 1.$$

Нетрудно найти, что общее решение полученного линейного уравнения можно представить в виде

$$z(t) = \frac{\frac{t^3}{3} + C_1}{t^2} = \frac{t}{3} + \frac{C_1}{t^2}.$$

Учитывая соотношение (10), найдем, что

$$u(t) = -\frac{1}{t} + \frac{3t^2}{t^3 + C_2},$$

или, согласно (7),

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = -\frac{1}{t} + \frac{3t^2}{t^3 + C_2},$$

где C_2 -произвольная постоянная. Так как согласно первому уравнению системы (5) $u_1' = u_2$, то для определения $u_1(t)$, с учетом последнего соотношения, получим уравнение

$$u_1' = u_1\left(-\frac{1}{t} + \frac{3t^2}{t^3 + C_2}\right).$$

Решая ее методом разделения переменных, и, учитывая то, что $u(t) = \dfrac{u_2(t)}{u_1(t)}$, получим, что

$$u_1(t) = C_3 t^2 + \frac{C_4}{t},$$

$$u_2(t) = 2C_3 t - \frac{C_4}{t^2},$$

где C_3 и C_4 -произвольные постоянные.

Учитывая связь между компонентами решений рассматриваемой системы и равносильной ей системы (4a) и (4b), найдем, что

$$y_1(t) = u_1(t) e^{-\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau} = \left(C_3 t^2 + \frac{C_4}{t}\right) e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2}} = \left(C_5 t^2 + \frac{C_6}{t}\right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$y_2(t) = u_2(t) e^{-\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau} = \left(2C_3 t - \frac{C_4}{t^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2}} = \left(2C_5 t - \frac{C_6}{t^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где C_5 и C_6 -произвольные постоянные.

Пример 2. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1' + \dfrac{1}{t} y_1 + m^2 y_2 = 0, \\ y_2' - n^2 y_1 + \dfrac{1}{t} y_2 = 0, \end{cases}$$

где m, n произвольные вещественные числа, не равные нулю. В данном случае имеем $p_{11}(t) = p_{22}(t) = \dfrac{1}{t}$, $p_{12}(t) = m^2$, $p_{21}(t) = -n^2$. Воспользовавшись соотношениями (3), найдем $p(t) = p_{12}(t) = m$, $r(t) = p_{21}(t) = -n^2$.

Согласно лемме, рассматриваемую систему можно свести к следующей равносильной системе

$$\begin{cases} z_1' + m^2 z_2 = 0, \\ z_2' - n^2 z_1 = 0. \end{cases}$$

В полученной системе коэфиициенты являются постоянными числами. Используя один из традиционных для таких систем методов решения, нетрудно найти, что ее общее решение можно представить в виде

$$z_1(t) = A\sin(mnt + \phi),$$

$$z_2(t) = \frac{An}{m}\cos(mnt + \phi),$$

где A, ϕ произвольные постоянные. Тогда, вновь учитывая соотношения (4a) и (4b) получим, что

$$y_1(t) = A\sin(mnt + \phi)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau} = B\sin(mnt + \phi) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$z_2(t) = \frac{An}{m}\cos(mnt + \phi)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau} = \frac{Bn}{m}\cos(mnt + \phi) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где B, ϕ произвольные постоянные.

Для систем вида (2) доказано (см. [6]), что имеют место:

Теорема 1. *Если в системе* (2) $p(t)$ *и* $r(t)$ *знакопостоянны на отрезке* $[a,b]$, *то нуль одной компоненты всякого нетривиального решения системы* (2) *на интервале* (a,b) *является точкой экстремума для другой компоненты этого же решения.*

Теорема 2. *Между всякими соседними нулями любой из компонент всякого нетривиального решения системы* (2) *при* $p(t)\cdot r(t)\neq 0,\ t\in[a,b]$ *находится ровно один нуль другой компоненты того же решения (нули компонент перемежаются).*

Теорема 3. *Если в системе* (2) $p(t)$ *и* $r(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *знакопостоянны и имеют разные знаки, то наличие нуля на отрезке* $[a,b]$ *у одной из компонент произвольного нетривиального решения системы* (2) *исключает существование других нулей у компонент этого же решения на этом же отрезке .*

Учитывая теоремы 1-3, вышеприведенное замечание, а также то, что согласно соотношениям (3) знак функции $p(t)$ будет совпадать со знаком $p_{12}(t)$, а знак $r(t)$ – со знаком $p_{21}(t)$, получим, что для системы (1) верны следующие теоремы:

Теорема 4. *Если в системе* (1) $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ *знакопостоянны на отрезке* $[a,b]$, *то нуль одной компоненты всякого нетривиального решения системы* (1) *на интервале* (a,b) *является точкой экстремума для другой компоненты этого же решения.*

Теорема 5. *Между всякими соседними нулями любой из компонент всякого нетривиального решения системы* (1) *при* $p_{12}(t)\cdot p_{21}(t)\neq 0,\ t\in[a,b]$ *находится ровно один нуль другой компоненты того же решения (нули компонент перемежаются).*

Теорема 6. *Если в системе* (1) $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *знакопостоянны и имеют разные знаки, то наличие нуля на отрезке* $[a,b]$ *у одной из компонент произвольного нетривиального решения системы* (1) *исключает существование других нулей у компонент этого же решения на этом же отрезке.*

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներից համասեռ գծային համակարգը: Հատուկ ձևափոխության միջոցով այն բերվում է ուսումնասիրման տեսանկյունից ավելի պարզ տեսքի: Դիտարկվում են նաև լուծումների զրոների հատկությունները այն դեպքում, երբ համակարգի գործակիցները պահպանում են իրենց նշանները տրված հատվածում:

Резюме

В работе рассматривается линейная однородная система двух дифференциальных уравнений первого порядка. С помощью специального преобразования она сводится к более простому для изучения виду. Рассматриваются также свойства нулей решений в случае знакопостоянных коэффициентов.

Литература

1. Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Мн.: Высш. школа, 1979.
2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск.: Ижевская республиканская типография, 2000.
3. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-е изд., М.: Физматлит, 2005.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир , 1970.
5. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1986.
6. Саакян Г.Г. О свойствах решений одной линейной однородной системы двух дифференциальных уравнений. АрГУ, Ученые записки., 2(13), 2006.

АрГУ, кафедра прикладной математики и информатики