

ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՍԿԱԼԱՐ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՏՈՒԿ
ՄԵՏՐԻԿԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ս. Ս. Մինսոյան

[1–3] աշխատանքներում կառուցվել է հատուկ մետրիկական տարածություն, որտեղ առիմանվել են երեք դիսկրետ երկրաչափություններ՝ էվկլիդեսյան, ոչ էվկլիդեսյան և պոլյեդրոնալ: Սույն աշխատանքում, հետևելով [1–3]-ում առաջարկված արսիտմատիկային և այնտեղ ստացված արդյունքներին, հետազոտվում է նորանկյան լուծման հնարավորությունն առանց դրա անկյունների օգտագործման՝ ելնելով միայն սկալյար արտադրյալով առաջացած որոշակի թվերից:

Ընդերք հետազոյի համար անհրաժեշտ որոշ արդյունքներ [3] -ից:

Դիտարկենք սկալյար հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \\ B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \end{cases} \quad (1)$$

(1) համակարգը կազմված է 3 հավասարումներից և արտունակում է 6 փոփոխականներ՝ $\{A, B, C, a, b, c\}$: Ակնհայտ է, որ այդ համակարգի բոլոր հնարավոր լուծումների թիվը հավասար է $C^3 = 20$: [3] աշխատանքում ստացված են (1) համակարգի երկու լուծումները (տես՝ թերթում 1 և թերթում 2):

Թերթում 1. Տրված $A = (A_1 B_1 \cdot A_1 C_1)$, $B = (B_1 A_1 \cdot B_1 C_1)$, $C = (C_1 A_1 \cdot C_1 B_1)$ սկալյար արտադրյալներով յուրաքանչյուր $\Delta A_1 B_1 C_1$ էվկլիդեսյան նորանկյանը կարելի է համապատասխանեցնել դրան հավասար $\Delta (A, B, C)$, որի կողմերը՝

$$(A, B) = |A_1 B_1| = \sqrt{A+B}, \quad (A, C) = |A_1 C_1| = \sqrt{A+C}, \quad (B, C) = |B_1 C_1| = \sqrt{B+C}$$

մեծություններն են, իսկ A, B, C զագայաները արտահայտված են իրական թվերով:

Թերթում 2. (A, B, C) սկալյար մեծությունների եռյակին համապատասխանում է

$|AB| = \sqrt{A+B}$, $|AC| = \sqrt{A+C}$, $|BC| = \sqrt{B+C}$ կողմերով և A, B, C զագայաներով էվկլիդեսյան նորանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները.

$$1) A+B > 0, A+C > 0, B+C > 0, \quad (2)$$

$$2) AB + AC + BC \geq 0: \quad (3)$$

Մեր նպատակն է մնացած տարևոյ դեպքերի համար ապացուցել համապատասխան նորանկյան գոյությունը, այսինքն՝ այնպիսի նորանկյան գոյությունը, որի պարամետրերը համակարգի տվյալ լուծումն է:

Ինչպես ստորոց ցույց կտանք մնացած տարևոյ դեպքերից տասնհինգում համակարգն ունի լուծում:

Թերթում 3: a, b կողմերով և A սկալյարով որոշվում է էվկլիդեսյան նորանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) 2A + a^2 - b^2 > 0$$

$$2) a^2 b^2 - b^4 + 2Ab^2 - A^2 \geq 0:$$

Այդ դեպքում $B = A + a^2 - b^2$, $c = \sqrt{2A + a^2 - b^2}$, $C = b^2 - A$:

Ապացույց: Հայտնի են եռանկյան a, b կողմերը և A անկյունը: Փորձենք գտնել c, B, C պարամետրերը: Դրա համար (1) համակարգում նշանակենք $B = x, c = y, C = z$: Լստանանք՝

$$\begin{cases} A = \frac{b^2 + y^2 - a^2}{2} \\ x = \frac{a^2 + y^2 - b^2}{2} \\ z = \frac{a^2 + b^2 - y^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2A + a^2 - b^2 \\ x = \frac{2A + a^2 - b^2 + a^2 - b^2}{2} \\ z = \frac{a^2 + b^2 - 2A + b^2 - a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2A + a^2 - b^2} \\ x = A + a^2 - b^2 \\ z = b^2 - A \end{cases}$$

Որոշելի պարամետրերի համար ստացանք $B = A + a^2 - b^2, c = \sqrt{2A + a^2 - b^2}, C = b^2 - A$ արժեքներ:

Այժմ ցույց տանք, որ տեղի ունեն 1) և 2) պայմանները:

1) Նախ ստուգենք 1) -ի իրավացիությունը:

$A + B > 0$, տեղադրենք B -ի արժեքը, Լստանանք՝

$$A + A + a^2 - b^2 > 0, 2A + a^2 - b^2 > 0$$

$A + C > 0$, տեղադրենք C -ի արժեքը

$$A + b^2 - A > 0, b^2 > 0$$

$B + C > 0$, տեղադրենք B -ի և C -ի արժեքները

$$A + a^2 - b^2 + b^2 - A > 0, a^2 > 0:$$

2) Մնում է ստուգել, որ տեղի ունի 2) պայմանը: Ունենք՝

$AB + AC + BC \geq 0$, տեղադրենք B, C պարամետրերի արժեքները: Լստանանք՝

$$A(A + a^2 - b^2) + A(b^2 - A) + (A + a^2 - b^2)(b^2 - A) = A^2 + Aa^2 - Ab^2 + Ab^2 - A^2 + Ab^2 - A^2 + a^2b^2 - Aa^2 - b^4 + Ab^2 = a^2b^2 - b^4 + 2Ab^2 - A^2 \geq 0:$$

$$\text{Այսպիսով՝ } a^2b^2 - b^4 + 2Ab^2 - A^2 \geq 0:$$

Ինչ պետք էր ապացուցել:

Թեորեմ 4: a, b կողմերով և B անկյունով որոշվում է կվիլիդյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) 2B - a^2 + b^2 > 0$$

$$2) a^2b^2 - a^4 + 2a^2B - B^2 \geq 0:$$

Այդ դեպքում $C = a^2 - B$, $A = B - a^2 + b^2$, $c = \sqrt{2B + b^2 - a^2}$:

Ապացույց: Հայտնի են եռանկյան a, b, B պարամետրերը: Փորձենք գտնել A, C, c պարամետրերը: Դրա համար (1) համակարգում նշանակենք $A = x, c = y, C = z$: Լստանանք՝

$$\begin{cases} x = \frac{b^2 + y^2 - a^2}{2} \\ B = \frac{y^2 + a^2 - b^2}{2} \\ z = \frac{a^2 + b^2 - y^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b^2 + y^2 - a^2}{2} \\ y^2 = 2B + b^2 - a^2 \\ z = \frac{a^2 + b^2 - y^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2B + b^2 - a^2} \\ x = B - a^2 + b^2 \\ z = a^2 - B \end{cases}$$

Որոշելի պարամետրերի համար ստացանք՝ $A = B - a^2 + b^2, c = \sqrt{2B + b^2 - a^2}, C = a^2 - B$ արժեքներ:

Այժմ ցույց տանք, որ տեղի ունեն 1) և 2) պայմանները: 1) Նախ ստուգենք 1) -ի իրավացիությունը՝ օգտվելով (2) -ից:

$$A + B > 0, \text{ տեղադրենք } B \text{ -ի արժեքը}$$

$$B - a^2 + b^2 + B > 0, 2B - a^2 + b^2 > 0$$

$A + C > 0$, տեղադրենք A -ի, C -ի արժեքները

$B - a^2 + b^2 + a^2 - B > 0$, $b^2 > 0$

$B + C > 0$, տեղադրենք C -ի արժեքը

$B + a^2 - B > 0$, $a^2 > 0$:

2) Մնում է ստուգել 2) պայմանը: Դրա համար (3)-ում տեղադրենք A, C պարամետրերի արժեքները:

$$B(B - a^2 + b^2) + (B - a^2 + b^2)(a^2 - B) + B(a^2 - B) = B^2 - a^2B + b^2B + a^2B - B^2 - a^4 + a^2B + b^2a^2 - b^2B + a^2B - B^2 = b^2a^2 - a^4 + 2a^2B - B^2 \geq 0:$$

Այսպիսով՝ $b^2a^2 - a^4 + 2a^2B - B^2 \geq 0$:

Ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

Թեորեմ 5: a, b կոդներով C սկալյարով որոշվում է էվկլիդեսյան նորմալություն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

1) $a^2 + b^2 - 2C > 0$

2) $a^2b^2 - C^2 \geq 0$:

Այդ դեպքում $A = b^2 - C$, $B = a^2 - C$, $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2C}$:

Ապացույց: Հայտնի են նորմալյան a, b, C պարամետրերը: Փորձենք գտնել A, B, c պարամետրերը: Դրա համար (1) համակարգում նշանակենք $A = x, B = y, c = z$: Կստանանք՝

$$\begin{cases} x = \frac{b^2 + z^2 - a^2}{2} \\ y = \frac{a^2 + z^2 - b^2}{2} \\ C = \frac{a^2 + b^2 - z^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b^2 + z^2 - a^2}{2} \\ y = \frac{a^2 + z^2 - b^2}{2} \\ z^2 = -2C + a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = b^2 - C \\ y = a^2 - C \\ z = \sqrt{a^2 + b^2 - 2C} \end{cases}$$

Որտեղի պարամետրերի համար ստացանք $A = b^2 - C$, $B = a^2 - C$, $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2C}$: արժեքներ:

Այժմ ցույց տանք, որ տեղի ունեն 1) և 2) պայմանները:

1) Նախ ստուգենք 1) պայմանը՝ օգտվելով (2)-ից:

$$A + B > 0, \text{ տեղադրենք } A = b^2 - C, B = a^2 - C$$

$$b^2 - C + a^2 - C = b^2 + a^2 - 2C > 0$$

$$A + C > 0, \text{ տեղադրենք } A = b^2 - C$$

$$b^2 - C + C = b^2 > 0$$

$$B + C > 0, \text{ տեղադրենք } B = a^2 - C$$

$$a^2 - C + C = a^2 > 0:$$

2) Մնում է ապացուցել 2)-ի իրավացիությունը: Դրա համար (3)-ում տեղադրենք A, B պարամետրերի արժեքները:

$$(b^2 - C)(a^2 - C) + C(b^2 - C) + C(a^2 - C) = a^2b^2 - b^2C - a^2C + C^2 + b^2C - C^2 + a^2C - C^2 = a^2b^2 - C^2 \geq 0:$$

$$\text{Այսպիսով՝ } a^2b^2 - C^2 \geq 0:$$

Ինչ պետք էր ապացուցել:

Թեորեմ 6: a, c կոդներով A սկալյարով որոշվում է էվկլիդեսյան նորմալություն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

1) $2A + a^2 - c^2 > 0$

2) $a^2c^2 - c^4 + 2c^2A - A^2 \geq 0$:

Այդ դեպքում $b = \sqrt{2A - c^2 + a^2}$, $B = c^2 - A$, $C = a^2 - c^2 + A$:

Ապացույց: Հայտնի են եռանկյան a, A, c պարամետրերը: Փորձենք գտնել b, B, C պարամետրերը: Դրա համար (1) համակարգում նշանակենք $b = x, B = y, C = z$:
Լստանանք՝

$$\begin{cases} A = \frac{x^2 + c^2 - a^2}{2} \\ B = \frac{a^2 + c^2 - x^2}{2} \\ C = \frac{a^2 + x^2 - c^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2A - c^2 + a^2 \\ y = c^2 - A \\ z = a^2 - c^2 + A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2A - c^2 + a^2} \\ y = c^2 - A \\ z = a^2 - c^2 + A \end{cases}$$

Որոշելի պարամետրերի համար ստացանք $b = \sqrt{2A - c^2 + a^2}$, $B = c^2 - A$,
 $C = a^2 - c^2 + A$ արժեքներ:

Այժմ ցույց տանք, որ տեղի ունեն 1) և 2) պայմանները:

1) Նախ ստուգենք 1) -ի իրավացիությունը՝ օգտվելով (2)-ից:

$$A + B > 0, \text{ տեղադրենք } B = c^2 - A$$

$$A + c^2 - A = c^2 > 0$$

$$A + C > 0, \text{ տեղադրենք } C = a^2 - c^2 + A$$

$$A + a^2 - c^2 + A = 2A + a^2 - c^2 > 0$$

$$B + C > 0, \text{ տեղադրենք } B = c^2 - A, C = a^2 - c^2 + A$$

$$c^2 - A + a^2 - c^2 + A = a^2 > 0:$$

2) Մնում է ստուգել, որ տեղի ունի 2) պայմանը: Դրա համար (3)-ի մեջ տեղադրենք
 $B = c^2 - A, C = a^2 - c^2 + A$:

$$\begin{aligned} &A(c^2 - A) + A(a^2 - c^2 + A) + (c^2 - A)(a^2 - c^2 + A) = Ac^2 - A^2 + a^2A - \\ &- c^2A + A^2 + a^2c^2 - c^4 + Ac^2 - Aa^2 + Ac^2 - A^2 = a^2c^2 - c^4 + 2c^2A - A^2 \geq 0: \end{aligned}$$

$$\text{Այսպիսով՝ } a^2c^2 - c^4 + 2c^2A - A^2 \geq 0:$$

Ինչ պետք էր ապացուցել:

Թեորեմ 7: a, c կողմերով B սկալյարով որոշվում է էվկլիդեսյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) c^2 + a^2 - 2B > 0$$

$$2) a^2c^2 - B^2 \geq 0:$$

$$\text{Այդ դեպքում } A = c^2 - B, b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2B}, C = a^2 - B:$$

Ապացույց: Հայտնի են եռանկյան a, c, B պարամետրերը: Փորձենք գտնել A, b, C պարամետրերը: Դրա համար (1) համակարգում նշանակենք $A = x, b = y, C = z$:
Լստանանք՝

$$\begin{cases} x = \frac{y^2 + c^2 - a^2}{2} \\ B = \frac{a^2 + c^2 - y^2}{2} \\ z = \frac{a^2 + y^2 - c^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2 + c^2 - a^2}{2} \\ y^2 = a^2 + c^2 - 2B \\ z = \frac{a^2 + y^2 - c^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c^2 - B \\ y = \sqrt{a^2 + c^2 - 2B} \\ z = a^2 - B \end{cases}$$

Որոշելի պարամետրերի համար ստացանք $A = c^2 - B$, $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2B}$, $C = a^2 - B$ արժեքներ:

Այժմ ցույց տանք, որ տեղի ունեն 1) և 2) պայմանները:

1) Նախ ստուգենք 1) պայմանը՝ օգտվելով (2)-ից:

$$A + B > 0, \text{ տեղադրենք } A = c^2 - B$$

$$c^2 - B + B = c^2 > 0$$

$$A + C > 0, \text{ տեղադրենք } C = a^2 - B, A = c^2 - B$$

$$c^2 - B + a^2 - B = a^2 + c^2 - 2B > 0$$

$$B + C > 0, \text{ տեղադրենք } C = a^2 - B$$

$$B + a^2 - B = a^2 > 0:$$

2) Մտնում է ստույգով, որ տեղի ունի 2) պայմանը: Գրա համար (3)-ի մեջ տեղադրենք

$$A = c^2 - B, C = a^2 - B:$$

$$B(c^2 - B) + (c^2 - B)(a^2 - B) + B(a^2 - B) = Bc^2 - B^2 +$$

$$+ a^2c^2 + B^2 - a^2B - c^2B + a^2B - B^2 = a^2c^2 - B^2 \geq 0:$$

$$\text{Այսպիսով } a^2c^2 - B^2 \geq 0:$$

Ինչ պետք էր ապացուցել:

Հանգումն դատադրություններով ապացուցվում են նաև հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 8: a, c կողմերով և C սկալյարով որոշվում է, էվկլիդեսյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) 2C + c^2 - a^2 > 0$$

$$2) 2a^2C + a^2c^2 - a^4 - C^2 \geq 0:$$

$$\text{Այդ դեպքում, } A = C + c^2 - a^2, b = \sqrt{2C + c^2 - a^2}, B = a^2 - C:$$

Թեորեմ 9: a կողմով և A, B սկալյարներով որոշվում է, էվկլիդեսյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) A + B > 0, A + a^2 - B > 0$$

$$2) Aa^2 + Ba^2 - B^2 \geq 0:$$

$$\text{Այդ դեպքում } b = \sqrt{A - B + a^2}, c = \sqrt{A + B}, C = a^2 - B:$$

Թեորեմ 10: a կողմով և A, C սկալյարներով որոշվում է, էվկլիդեսյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) A + a^2 - C > 0, A + C > 0$$

$$2) Aa^2 + Ca^2 - C^2 \geq 0:$$

$$\text{Այդ դեպքում } b = \sqrt{A + C}, B = a^2 - C, c = \sqrt{A - C + a^2}:$$

Թեորեմ 11: b, c կողմերով և A սկալյարով որոշվում է, էվկլիդեսյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) c^2 + b^2 - 2A > 0$$

$$2) c^2b^2 - A^2 \geq 0:$$

$$\text{Այդ դեպքում } a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2A}, B = c^2 - A, C = b^2 - A:$$

Թեորեմ 12: b, c կողմերով և B սկալյարով որոշվում է, էվկլիդեսյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) 2B + b^2 - c^2 > 0$$

$$2) b^2c^2 - c^4 - B^2 + 2Bc^2 \geq 0:$$

$$\text{Այդ դեպքում } a = \sqrt{2B + b^2 - c^2}, A = c^2 - B, C = B + b^2 - c^2:$$

Թեորեմ 13: b, c կողմերով և C սկալյարով որոշվում է, էվկլիդեսյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) 2C + c^2 - b^2 > 0$$

$$2) b^2c^2 + 2b^2C - b^4 - C^2 \geq 0:$$

$$\text{Այդ դեպքում } A = b^2 - C, a = \sqrt{2C + c^2 - b^2}, B = C + c^2 - b^2:$$

Թեորեմ 14: b կողմով և A, B սկալյարներով որոշվում է, էվկլիդեսյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) A + B > 0, b^2 - A + B > 0$$

$$2) Ab^2 - A^2 + Bb^2 \geq 0;$$

$$\text{Այդ դեպքում } a = \sqrt{B - A + b^2}, c = \sqrt{A + B}, C = b^2 - A:$$

Թեորեմ 15: c կողմով և A, C սկալյարներով որոշվում է Լվլլիդյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) A + C > 0, C + c^2 - A > 0$$

$$2) Ac^2 - A^2 + Cc^2 \geq 0;$$

$$\text{Այդ դեպքում } a = \sqrt{c^2 - A + C}, b = \sqrt{A + C}, B = c^2 - A:$$

Թեորեմ 16: b կողմով և B, C սկալյարներով որոշվում է Լվլլիդյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) B + C > 0, B + b^2 - C > 0$$

$$2) Cb^2 - C^2 + Bb^2 \geq 0;$$

$$\text{Այդ դեպքում } a = \sqrt{B + C}, c = \sqrt{b^2 + B - C}, A = b^2 - C:$$

Թեորեմ 17: c կողմով և B, C սկալյարներով որոշվում է Լվլլիդյան եռանկյուն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$1) B + C > 0, C + c^2 - B > 0$$

$$2) Bc^2 - B^2 + Cc^2 \geq 0;$$

$$\text{Այդ դեպքում } a = \sqrt{B + C}, A = c^2 - B, b = \sqrt{C + c^2 - B}:$$

(A, B, c) , (a, B, C) , (A, b, C) եռյակներին Լվլլիդյան եռանկյուն հնարավոր չէ համապատասխանեցնել:

Ամփոփում

Աշխատանքում, հետևելով [1–3]–ում առաջարկված արսիոմատիկային և այնտեղ ստացած արդյունքներին, հետազոտվում է եռանկյան լուծման հնարավորությունն առանց դրա անկյունների օգտագործման՝ լինելով միայն սկալյար արտադրյալով առաջացած որոշակի թվերից:

Резюме

Следуя методике, разработанной в [1–3], в работе исследуется возможность разрешимости треугольника без использования углов этого треугольника. Доказывается, что треугольник можно определить исходя из набора чисел, порожденных скалярным произведением.

Գրականություն

1. Grigoryan Yu. Axioms of inhomogeneous geometry //Proc. Of the Conf. Comput.Sci.and Information Technologies -Yerevan, Armenia, September 22-26,2003. p. 130-134(Eng).
2. Григорян Ю.Г. Геометрия арифметических графов.//Кибернетика, 1982, N4, с. 1-4.
3. Григорян Ю.Г. Пространство дискретных геометрий.// Кибернетика и системный анализ, 2006, N5, с. 21 - 32.

ԱրմՀ, մաթեմատիկայի ամբիոն