2 (15), 2007

УДК 539.3 *Механика*

О СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ПОЛОСЫ

А.Б.Товмасян

Из геометрически нелинейных уравнений теории упругости асимптотическим методом выведены уравнения, описывающие внутренее напряженно-деформированное состояние термоупругой полосы и найдены решения этих уравнений. Решена смешанная плоская задача для полосы-балки на нижней кромке которой заданы значения касательного напряжения и нормального компонента вектора перемещения, а на верхней продольной стороне заданы значения напряжений.

1. Классические статические краевые задачи полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [1,2] . Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в линейной постановке в [2,3,4]. Первая краевая задача для анизотропного однослойного и двухслойного прямоугольников-полос, а также для ортотропной пластинки по геометрически нелинейной теории упругости решена в [5-7]. В работе [8] решен класс смешанных краевых задач для анизотропной полосы-балки по геометрически нелинейной теории упругости.

Требуется найти решение плоской задачи термоупругости анизотропного тела в области $\Omega = \{(x, y): x \in [0, \ell], |y| \le h, h << \ell\}$, на продольных сторонах $y = \pm h$ заданы условия.

$$v(-h) = \varepsilon^3 v^{-}(x), \ \sigma_{xy}(-h) = \varepsilon^4 \sigma_{xy}^{-}(x) \quad \left(\varepsilon = \frac{h}{l}\right) \tag{1.1}$$

$$\sigma_{xy}(h) = \varepsilon^4 \sigma_{xy}^{+}(x), \ \sigma_y(h) = \varepsilon^4 \sigma_y^{+}(x) \tag{1.2}$$

На полосу действуют заданные объемные силы с компонентами $F_x(x, y), F_y(x, y)$ и температурные воздействия. Изменение температурного поля $\Theta(x, y) = T - T_0$ считается известной, т.е. рассматривается несвязанная задача термоупругости, что вполне приемлемо в статических задачах. На торцах $x = 0, l$ будем считать, что заданы статические или смешанные краевые условия теории упругости. В плоскости полосы анизотропия самая общая.

В нелинейных уравнениях [9,10] плоской задачи упругого анизотропного тела перейдем к безразмерным переменным $\xi = x / l, \zeta = y / h$ и перемещениям $U = u / l, \ V = v / l$. В результате получим сингулярно-возмущенную малым параметром систему. Решение сформулированной выше краевой задачи складывается из внутреннего и типа пограничного слоя слагаемых.

Решение внутренней задачи отыскивается в виде рядов по степеням малого параметра [1-7]

$$Q = \varepsilon^q \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(s)} \tag{1.3}$$

где Q -любое из напряжений или безразмерных перемещений, s -число приближений. Непротиворечивые значения q подбираются следующим образом:

$$q = 3 \ \text{для} \ \sigma_x, \sigma_y, U, V, \quad q = 4 \ \text{для} \ \sigma_{xy} \tag{1.4}$$

Эта асимптотика по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [4], однако чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.3) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра. Асимптотике (1.4) соответствует выбор представлений (1.1), (1.2). Значения q в (1.4) получаются из соответствующих значений из линейной задачи [4], следующим образом: $q_{\text{Нел}} = q_{\text{Лин}} + 4$.

Вклад объемных сил и температурных воздействий в общее напряженное состояние будет соизмерим с вкладом поверхностных сил, т.е. соответствующие слагаемые будут входить в уравнения исходного приближения, если

$$F_x = l^{-1}\varepsilon^3\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{(s)}F_x^{(s)},\ F_y = l^{-1}\varepsilon^2\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{(s)}F_y^{(s)},\ \Theta = \varepsilon^3\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{(s)}\Theta^{(s)} \tag{1.5}$$

В противном случае соответствующие величины войдут в уравнения для последующих приближений и в зависимости от принятой точности, возможно пренебрежения некоторыми из них.

Подставив (1.3) с учетом (1.4), (1.5) в преобразованные уравнения теории упругости и приравнивая в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε, для определения $Q^{(s)}$ получим систему:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_x^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\zeta} + F_x^{(s)} + \sigma_1^{*(s)} = 0\\
\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_y^{(s)}}{\partial\zeta} + F_y^{(s)} + \sigma_2^{*(s)} = 0\\
\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_x^{(s)} + a_{12}\sigma_y^{(s)} + a_{16}\sigma_{xy}^{(s)} - U_\xi^{(s-3)} - V_\zeta^{(s-3)} + \alpha_{11}\Theta^{(s)}\\
\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{12}\sigma_x^{(s-1)} + a_{22}\sigma_y^{(s-1)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-2)} - U_\zeta^{(s-3)} - V_\zeta^{(s-3)} + \alpha_{22}\Theta^{(s-1)}\\
\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_y^{(s-1)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} - U_{\xi\zeta}^{(s-3)} - V_{\xi\zeta}^{(s-3)} + \alpha_{12}\Theta^{(s-1)}
\end{gathered} \tag{1.6}$$

где

$$\sigma_1^{*(s)} = \sigma_{11}^{(s-1)} + \sigma_{12}^{(s-3)};\quad \sigma_2^{*(s)} = \sigma_{21}^{(s-1)} + \sigma_{22}^{(s-4)};$$

$$\sigma_{11}^{(s)} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\zeta^2}\sigma_y^{(s-i)} + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma_y^{(s-i)}}{\partial\zeta}\right) \qquad (1;2;\ x;y;\ \xi;\zeta\ \ U;V)$$

$$\sigma_{12}^{(s)} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\xi^2}\sigma_x^{(s-i)} + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_x^{(s-i)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial\xi} + 2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\xi\partial\zeta}\sigma_{xy}^{(s-i)}\right)$$

$$\begin{gathered}
U_\xi^{(s)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\xi} \quad (U,V)\\
U_\zeta^{(s)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\zeta} \quad (U,V)\\
U_{\xi\zeta}^{(s)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\zeta} \quad (U,V)
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Решив систему (1.6), получим

$$
\begin{aligned}
&V^{(s)} = v^{s}(\xi) + v^{*(s)}(\xi,\zeta)\\
&U^{(s)} = u^{s}(\xi) + u^{*(s)}(\xi,\zeta)\\
&\sigma_y^{(s)} = \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) + \sigma_y^{*(s)}(\xi,\zeta)\\
&\sigma_x^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\frac{du^{(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\sigma_{y0}^{(s)}(\xi) + \sigma_x^{*(s)}(\xi,\zeta)\\
&\sigma_{xy}^{(s)} = -\frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{(s)}}{d\xi^2}\zeta + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\sigma_{y0}^{(s)}}{d\xi}\zeta + \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

где величины со звездочками для каждого приближения s известные функции от ξ,ζ, если определены величины предыдущих приближений. Они определяются по рекуррентным формулам:

$$
\begin{aligned}
&v^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{12}\sigma_x^{(s-1)} + a_{22}\sigma_{yx}^{(s-1)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-2)} + \alpha_{22}\Theta^{(s-1)}\right)d\zeta - \int_0^{\zeta}\left(U_{\zeta}^{(s-2)} + V_{\zeta}^{(s-2)}\right)d\zeta\\
&u^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_{yx}^{(s-1)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} + \alpha_{12}\Theta^{(s-1)} - \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta}\right)d\zeta - \int_0^{\zeta}\left(U_{\xi\zeta}^{(s-3)} + V_{\xi\zeta}^{(s-3)}\right)d\zeta\\
&\sigma_y^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-2)}}{\partial\xi} + F_y^{(s)} + \sigma_2^{*(s)}\right)d\zeta\\
&\sigma_{xy}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(s)}}{\partial\xi} + F_x^{(s)} + \sigma_1^{*(s)}\right)d\zeta\\
&\sigma_x^{*(s)} = \frac{1}{a_{11}}\left(\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi} - a_{12}\sigma_y^{*(s)} - a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)} - \alpha_{11}\Theta^{(s)}\right) + \frac{1}{a_{11}}\left(U_{\xi}^{(s-3)} + V_{\xi}^{(s-3)}\right)
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Решение (1.8) содержит четыре произвольные функции интегрирования $\sigma_{xy0}^{(s)}$, $\sigma_{y0}^{(s)}$, $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, которые определяются после удовлетворения условиям (1.1)-(1.2). Удовлетворив этим условиям получим:

$$
\begin{aligned}
&v^{(s)}(\xi) = l^{-1}v^{-(s)} - v^{*(s)}(\xi,-1)\\
&\sigma_{y0}^{(s)} = \sigma_y^{-(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi,1)\\
&\sigma_{xy0}^{(s)} = \frac{1}{2}\left[\sigma_{xy}^{-(s)} + \sigma_{xy}^{+(s)} - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,-1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,1)\right]
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

а также уравнение

$$
\frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{(s)}}{d\xi^2} = R^{(s)}
\tag{1.11}
$$

для определения перемещения $u^{(s)}$. Здесь

$$
R^{(s)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xy}^{+(s)} - \sigma_{xy}^{-(s)}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,-1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,1)\right) + \frac{a_{12}}{a_{11}}\left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(s)}(\xi)}{d\xi}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm(0)}, \quad \sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^{+}, \ v^{-(0)} = v\\
&\sigma_{xy}^{\pm(s)} = \sigma_y^{+(s)} =, \ v^{-(s)} = 0, \quad s > 0
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Таким образом, формулами (1.3), (1.4), (1.8)-(1.12) полностью определяются величины внутреннего напряженно-деформированного состояния. Отметим, что решение (1.8)-(1.12) в исходном приближении совпадает с решением той же задачи в линейной постановке [4]. Опо содержит две произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий $x = 0, \ell$. Если ограничится только решением внутренней задачи, эти условия могут быть удовлетворены лишь интегрально.

Ամփոփում

Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով առաձգականության տեսության ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված ջերմաառաձգական շերտի ներքին լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը նկարագրող հավասարումներ և գտնված են այդ հավասարումների լուծումները: Շերտ-ուղղանկյան համար լուծված է խառը խնդիր, երբ նրա երկայնական կողմերից մեկի վրա տրված են շոշափող լարման և տեղափոխության վեկտորի նորմալ բաղադրիչի արժեքները, իսկ մյուս երկայնական կողմի վրա՝ լարումների արժեքները: Ստացված լուծումը սկզբնական մոտավորությամբ համընկնում է նույն խնդրի գծային դրվածքով լուծման հետ:

Резюме

Методом асимптотического интегрирования из геометрически нелинейных уравнений теории упругости выведены уравнения, описывающие внутренее напряженно-деформированное состояние термоупругой полосы и найдены решения этих уравнений. Решена смешанная задача для полосы-балки, на нижней кромке которой заданы значения касательного напряжения и нормального компонента вектора перемещения, а на верхней продольной стороне заданы значения напряжений. Найденное решение в исходном приближении совпадает с решением той же задачи в линейной постановке.

Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М., 1976.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука,1997.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Издательство "Гитутюн" НАН РА, 2005, 468с.
4. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. О смешанной краевой задаче для ортотропной термоупругой полосы. // ДАН Армении. 1991, т. 92, N 2, С.76-81.
5. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости. // Изв. Северо-Кавказкого центра высшей школы. Сер. естест. Наук. 2001. Спецвыпуск . С. 16-18.
6. Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной двухслойной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости. // В сб. "Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем". Ер.: 2002. С. 213-218.
7. Хачатрян А.М. Товмасян А.Б. К решению первой краевой задачи для ортотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости. // Ученые Записки АрГУ, 2004, N1 (8), С.15-20.
8. Хачатрян А.М.,Товмасян А.Б. Смешанные краевые задачи для однослойной анизотропной полосы-балки по геометрически нелинейной теории упругости. // Труды V Межд. конф.. "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". 1-7 октября, Горис, 2005г. Ер.: Изд. "Гитутюн" НАН РА, 2005, С. 325-329.
9. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.ОГИЗ, 1948.
10. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988.

АрГУ, кафедра инженерии