УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ- ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Г.А. Петросян

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в плоской зада анизотропной полосы. Считается, что плоскость полосы совпадает с плоскостью упругой сим материала. На продольных сторонах полосы заданы смешанные условия теории упругости, а на торца быть заданы различные комбинации торцевых условий. Применяется асимптотический метод интегриро и решение задачи представляется в виде суммы двух решений- незатухающего и типа погранслоя [1-5].

1. В работе [2] решены неклассические задачи напряженного состояния прямоугольни нижней кромке которой заданы значения перемещений, а на верхней продольной стороне з значения перемещений, напряжений или смешанные условия. Рассматриваются также ча случаи, при которых нижняя кромка прямоугольника жестко закреплена. В работе [5] рассм вопрос определения напряженно - деформированного состояния (НДС) в плоской задач анизотропной полосы, на продольных сторонах которой заданы значения напряжений. Обсу применимость прикладных и асимптотических методов для анизотропных материаллов. В раб исследовано НДС анизотропной термоупругой полосы, когда на одной из продольных (заданы значения напряжений, а на другой-смешанные граничные условия теории упругости.

Рассматривается плоская задача для анизотропный по $\Omega=\{(x,y): 0\le x\le l, |y|\le h, h<<l\}$, на продольных сторонах $y=\pm h$ которой заданы зна напряжений или перемещений в следующей форме:

$$\sigma_{xy}=\sigma_{xy}^{-}(x),\ v=\varepsilon^{-1}v^{-}(x),\ \text{при}\ y=-h$$
$$u=\varepsilon^{-1}u^{+}(x),\ \sigma_y=\varepsilon^{-1}\sigma_y^{+}(x),\ \text{при}\ y=h$$

а на торцах $x=0,l$ торцевые условия пока произвольные.

Для решения задачи используется асимптотический метод интегрирования [2,5,6]. безразмерную координатную систему $\xi=x/l$, $\zeta=y/h$, и, преобразовав соответств уравнения теории упругости анизотропного тела, получим систему, содержащую малый па $\varepsilon=h/l$. Решение таких уравнений складывается из двух типов решений-внутреннего и погранслоя [2,5,6].

Внутреннее решение ищем в виде [1,5,6]

$$Q=\varepsilon^{-q}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{s}Q^{(s)}$$

где Q любое из напряжений или безразмерных перемещений $U=u/l$, $V=v/l$, $Q^{(s)}\equiv 0$ пр $s<0$: q целое число и подбирается следующим образом [2]

$$q=1\ \ \text{для}\ \ \sigma_x,\sigma_y,U,V$$
$$q=0\ \ \text{для}\ \ \sigma_{xy}$$

Учитывая (1.3), подставляя (1.2) в уравнения плоской теории упругости и прира коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующую систему

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s)}}{\partial \zeta} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_x^{(s)} + a_{12}\sigma_y^{(s)} + a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{12}\sigma_x^{(s-1)} + a_{22}\sigma_y^{(s-1)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-2)}$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_y^{(s-1)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} \tag{1.4}$$

Интегрируя систему (1.4) по ζ, получим

$$\begin{aligned}
V^{(s)} &= v_0^{(s)}(\xi) + v^{*(s)}(\xi,\zeta)\\
U^{(s)} &= u_0^{(s)}(\xi) + u^{*(s)}(\xi,\zeta)\\
\sigma_y^{(s)} &= \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) + \sigma_y^{*(s)}(\xi,\zeta)\\
\sigma_x^{(s)} &= \frac{1}{a_{11}}\frac{du_0^{(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\sigma_{y0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)}(\xi,\zeta)\\
\sigma_{xy}^{(s)} &= \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\sigma_{y0}^{(s)}}{d\xi}\zeta - \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u_0^{(s)}}{d\xi^2}\zeta + \sigma_{xy0}^{(s)} + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned}
v^{*(s)} &= \int_0^{\zeta}\left(a_{12}\sigma_x^{(s-1)} + a_{22}\sigma_y^{(s-1)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-1)}\right)d\zeta\\
u^{*(s)} &= \int_0^{\zeta}\left(a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_y^{(s-1)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)d\zeta\\
\sigma_y^{*(s)} &= -\int_0^{\zeta}\frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-2)}}{\partial \xi}d\zeta\\
\sigma_x^{*(s)} &= \frac{1}{a_{11}}\frac{du^{*(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\sigma_y^{*(s)} - \frac{a_{16}}{a_{11}}\sigma_{xy}^{(s-1)}\\
\sigma_{xy}^{*(s)} &= -\int_0^{\zeta}\frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \xi}d\zeta
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования

$$v_0^{(s)}(\xi),\ u_0^{(s)}(\xi),\ \sigma_{y0}^{(s)}(\xi),\ \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi)$$

$$\sigma_{y0}^{(s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi,1)$$

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{+(s)}}{d\xi^2} + \sigma_{xy}^{-(s)} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\sigma_y^{*(s)}(\xi,1)}{d\xi} + \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{*(s)}(\xi,1)}{d\xi^2} - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,-1) \tag{1.7}$$

$$u_0^{(s)} = u^{+(s)} - u^{*(s)}(\xi,1)$$

$$v_0^{(s)} = v^{+(s)} - v^{*(s)}(\xi,-1)$$

где

$$\sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^+,\ u^{+(0)} = u^+,\ \sigma_{xy}^{-(0)} = \sigma_{xy}^-,\ v^{-(0)} = v^-$$

$$\sigma_y^{+(s)} = \sigma_{xy}^{-(s)} = 0,\ u^{+(s)} = v^{-(s)} = 0,\quad s > 0$$

Подставляя (1.7) в (1.5), получим следующие окончательные формулы для напряжений и перемещений

$$\sigma_x^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\frac{du^{+(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\sigma_y^{+(s)} - \frac{1}{a_{11}}\frac{du^{*(s)}(\xi,1)}{d\xi} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\sigma_y^{*(s)}(\xi,1) + \sigma_x^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi}(1+\zeta) - \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{+(s)}}{d\xi^2}(1+\zeta) + \sigma_{xy}^{-(s)} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\sigma_y^{*(s)}(\xi,1)}{d\xi}(1+\zeta) +$$

$$+\frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{*(s)}(\xi,1)}{d\xi^2}(1+\zeta) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,-1)$$

$$\sigma_y^{(s)} = \sigma_y^{+(s)} + \sigma_y^{*(s)}(\xi,\zeta) - \sigma_y^{*(s)}(\xi,1) \quad (1.8)$$

$$U^{(s)} = u^{+(s)} + u^{*(s)}(\xi,\zeta) - u^{*(s)}(\xi,1)$$

$$V^{(s)} = v^{-(s)} + v^{*(s)}(\xi,\zeta) - v^{*(s)}(\xi,-1)$$

Если функции, входящие в правые части условий (1.1) являются полиномами, то итерационный процесс обрывается на определенном приближении и мы получим решение внутренней задачи в замкнутом виде.

Рассмотрим частные решения внутренней задачи. Пусть

$$\sigma_{xy}^- = \tau = const,\ v^- \equiv 0$$

$$u^+ \equiv 0,\ \sigma_y^+ = p + qx$$

Пользуясь решениями (1.8) и формулами (1.5) и вычисляя все приближения до $s = 2$ включительно и перейдя к первоначальным координатам, получим следующее решение частной задачи

$$\sigma_x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{1}{h}(pl+qx) - \frac{A_{16}}{a_{11}}\frac{q}{h}(h-y) - \frac{a_{16}}{a_{11}}\tau$$

$$\sigma_{xy} = \tau$$

$$\sigma_y = \frac{1}{h}(pl+qx) \quad (1.9)$$

$$u = \left[\frac{A_{16}}{h}(pl+qx) + A_{66}\tau + \frac{a_{16}A_{16}}{2a_{11}h}q(y-h)\right](y-h)$$

$$v = \left[\frac{A_{11}}{h}(pl+qx) + \frac{a_{12}A_{16}}{2a_{11}h}q(y+3h) + \left(\frac{l}{h}a_{26} - \frac{a_{12}a_{16}}{a_{11}}\right)\tau\right](y+h)$$

При $q = 0,\ \tau = 0$ из (1.9) следует

$$\sigma_x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{l}{h}p,\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_y = \frac{l}{h}p$$

$$u = \frac{A_{16}}{h}pl(y-h),\ v = \frac{A_{11}}{h}pl(y+h),$$

А при $p = q = 0, \tau \neq 0$

$$\sigma_x = -\frac{a_{16}}{a_{11}}\tau,\ \ \sigma_{xy} = \tau,\ \sigma_y = 0$$

$$u = A_{66}\tau(y-h),\ \ v = \left(\frac{l}{h}a_{26} - \frac{a_{12}a_{16}}{a_{11}}\right)\tau(y+h),$$

2. Для построения пограничного слоя вблизи торца $\xi = 0$ в уравнениях теории упругости сделаем новую замену переменных $t = \xi/\varepsilon$. Этим преобразованием выделяется дифференцирование в продольном направлении. Решение вновь полученных уравнений ищем в виде функций типа пограничного слоя [2,5]

$$R_p = \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{\chi_p + s} R_p^{(s)}(t,\zeta) \tag{2.1}$$

где R_p -любое из напряжений и перемещений и

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_{xp}^{(s)}, \sigma_{xyp}^{(s)}, \sigma_{yp}^{(s)}\right) = \left(\sigma_1^{(s)}(\zeta), \sigma_{12}^{(s)}(\zeta), \sigma_2^{(s)}(\zeta)\right)\exp(-\lambda t) \\ &\left(u_p^{(s)}, v_p^{(s)}\right) = \left(u_1^{(s)}(\zeta), u_2^{(s)}(\zeta)\right)\exp(-\lambda t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

χ_p -показатель интенсивности, $\lambda = const$ характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния. Для пограничного слоя, соответствующего краю $\xi = 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Число χ_p выбирается следующим образом [2,5]

$\chi_p = \chi$ для напряжений ,

$\chi_p = \chi + 1$ для перемещений.

С помощью (2.1), (2.2) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &-\lambda\sigma_1^{(s)}(\zeta) + \frac{d\sigma_{12}^{(s)}(\zeta)}{d\zeta} = 0 \\ &-\lambda\sigma_{12}^{(s)}(\zeta) + \frac{d\sigma_2^{(s)}(\zeta)}{d\zeta} = 0 \\ &-\lambda u_1^{(s)}(\zeta) = a_{11}\sigma_1^{(s)}(\zeta) + a_{12}\sigma_2^{(s)}(\zeta) + a_{16}\sigma_{12}^{(s)}(\zeta) \\ &\frac{du_1^{(s)}(\zeta)}{d\zeta} - \lambda u_2^{(s)}(\zeta) = a_{16}\sigma_1^{(s)}(\zeta) + a_{26}\sigma_2^{(s)}(\zeta) + a_{66}\sigma_{12}^{(s)}(\zeta) \\ &\frac{du_2^{(s)}(\zeta)}{d\zeta} = a_{12}\sigma_1^{(s)}(\zeta) + a_{22}\sigma_2^{(s)}(\zeta) + a_{26}\sigma_{12}^{(s)}(\zeta) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Выразив все неизвестные функции в последней системе через $\sigma_2^{(s)}, \lambda$, получим:

$$\begin{aligned} &\sigma_1^{(s)} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2\sigma_2^{(s)}}{d\zeta^2},\ \ \sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\sigma_2^{(s)}}{d\zeta} \\ &u_1^{(s)} = -\left(\frac{a_{11}}{\lambda^3}\frac{d^2\sigma_2^{(s)}}{d\zeta^2} + \frac{a_{12}}{\lambda}\sigma_2^{(s)} + \frac{a_{16}}{\lambda}\frac{d\sigma_2^{(s)}}{d\zeta}\right) \\ &u_2^{(s)} = -\left(\frac{a_{11}}{\lambda^4}\frac{d^3\sigma_2^{(s)}}{d\zeta^3} + (a_{12} + a_{66})\frac{1}{\lambda^2}\frac{d\sigma_2^{(s)}}{d\zeta} + \frac{a_{26}}{\lambda}\sigma_2^{(s)} + \frac{2a_{16}}{\lambda^3}\frac{d^2\sigma_2^{(s)}}{d\zeta^2}\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\sigma_2^{(s)}$ определяется из уравнения

$$a_{11}\frac{d^4\sigma_2^{(s)}}{d\zeta^4}+2\lambda a_{16}\frac{d^3\sigma_2^{(s)}}{d\zeta^3}+(a_{66}+2a_{12})\lambda^2\frac{d^2\sigma_2^{(s)}}{d\zeta^2}+2\lambda^3 a_{26}\frac{d\sigma_2^{(s)}}{d\zeta}+a_{22}\lambda^4\sigma_2^{(s)}=0 \qquad (2.5)$$

В силу объемности решений (2.4), (2.5), в дальнейшем будем рассматривать решение пограничного слоя для ортотропной полосы, для которой $a_{16}=a_{26}=0$.

Характеристическое уравнение, соответствующее (2.5), для ортотропных материалов, в зависимости от a_{ij}, может иметь корни следующих типов [2,4]

а) $\pm i\beta$ в) $\pm i\beta_1, \pm i\beta_2$ в) $\pm\alpha \pm i\beta$

Этим корням соответствуют следующие решения

$$\text{а) } \sigma_2^{(s)}(\zeta)=\left(A^{(s)}+B^{(s)}\zeta\right)\cos\lambda\beta\zeta+\left(C^{(s)}+D^{(s)}\zeta\right)\sin\lambda\beta\zeta \qquad (2.6)$$

$$\text{в) } \sigma_2^{(s)}(\zeta)=A^{(s)}\cos\lambda\beta_1\zeta+B^{(s)}\sin\lambda\beta_1\zeta+C^{(s)}\cos\lambda\beta_2\zeta+D^{(s)}\sin\lambda\beta_2\zeta \qquad (2.7)$$

$$\text{в) } \begin{aligned}\sigma_2^{(s)}(\zeta)&=A^{(s)}ch\alpha\lambda\zeta\cos\lambda\beta\zeta+B^{(s)}sh\alpha\lambda\zeta\sin\lambda\beta\zeta+\\&+C^{(s)}ch\alpha\lambda\zeta\sin\lambda\beta\zeta+D^{(s)}sh\alpha\lambda\zeta\cos\lambda\beta\zeta\end{aligned} \qquad (2.8)$$

В (2.6)-(2.8) $A^{(s)}, B^{(s)}, C^{(s)}, D^{(s)}$ произвольные постоянные интегрирования.

С помощью (2.4) определяются $\sigma_1^{(s)}(\zeta), \sigma_{12}^{(s)}(\zeta), u_1^{(s)}(\zeta), u_2^{(s)}(\zeta)$. Поскольку граничные условия (1.1) удовлетворены решением внутренней задачи, то (2.4) должно удовлетворить следующим однородным условиям

$$\begin{aligned}&\sigma_{12}^{(s)}(-1)=0 \quad u_2^{(s)}(-1)=0\\&u_2^{(s)}(1)=0 \qquad \sigma_2^{(s)}(1)=0\end{aligned} \qquad (2.9)$$

В случае а) удовлетворив однородным условиям (2.9), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных $A^{(s)}, B^{(s)}, C^{(s)}, D^{(s)}$

$$A^{(s)}\cos\lambda\beta+B^{(s)}\cos\lambda\beta+C^{(s)}\sin\lambda\beta+D^{(s)}\sin\lambda\beta=0$$

$$A^{(s)}\beta\sin\lambda\beta+B^{(s)}\left(\frac{1}{\lambda}\cos\lambda\beta-\beta\sin\lambda\beta\right)+C^{(s)}\beta\cos\lambda\beta+D^{(s)}\left(-\frac{1}{\lambda}\sin\lambda\beta-\beta\cos\lambda\beta\right)=0 \quad (2.10)$$

$$A^{(s)}b_1\cos\lambda\beta+B^{(s)}\left(\frac{2a_{11}\beta}{\lambda^2}\sin\lambda\beta+b_1\cos\lambda\beta\right)+C^{(s)}b_1\sin\lambda\beta+D^{(s)}\left(b_1\sin\lambda\beta-\frac{2a_{11}\beta}{\lambda^2}\cos\lambda\beta\right)=0$$

$$A^{(s)}b_2\beta\sin\lambda\beta+B^{(s)}(b_3\cos\lambda\beta-b_2\sin\lambda\beta)+C^{(s)}b_2\beta\cos\lambda\beta+D^{(s)}(-b_3\sin\lambda\beta+b_2\cos\lambda\beta)=0$$

где $b_1=\left(a_{11}\beta^2-a_{12}\right)\lambda^{-1}$, $b_2=\left(a_{11}\beta^2-a_{12}-a_{66}\right)\lambda^{-1}$, $b_3=\left(a_{12}+a_{66}-3a_{11}\beta^2\right)\lambda^{-2}$

Однородная система уравнений (2.10) будет иметь нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Приравнивая определитель системы к нулю получим трансцендентное уравнение, откуда определяется λ. Соответствующее трансцендентное уравнение имеет вид

$$\cos z+mz\sin z=0 \qquad (2.11)$$

где $z=2\lambda\beta$, $\quad m=\left(a_{11}\beta^2-(a_{12}+a_{66})\right)/4a_{11}\beta^2$

Трансцендентное уравнение (2.11) имеет бесконечное множество комплексных корней. Нас интересуют только корни удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} z>0$.

Так как определитель системы равен нулю, то все неизвестные величины можно выразить через одну неизвестную, например, через $D^{(s)}$.

Тогда из (2.6) получим

$$\sigma_2^{(s)} = \left[\left(\frac{1}{\lambda\beta} - \frac{\sin 2\lambda\beta}{\cos 2\lambda\beta} - \frac{\cos\lambda\beta}{\sin\lambda\beta\cos 2\lambda\beta} + \zeta\frac{\cos\lambda\beta}{\sin\lambda\beta}\right)\cos\lambda\beta\zeta + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2\cos^2\lambda\beta}{\cos\lambda\beta} - \frac{1}{\lambda\beta}\frac{\cos\lambda\beta}{\sin\lambda\beta} + \frac{1}{\cos 2\lambda\beta} + \zeta\right)\sin\lambda\beta\zeta\right]D^{(s)} \qquad (2.12)$$

В случае в), при удовлетворении условий (2.9), получим систему

$$\begin{aligned} &A^{(s)}\cos\lambda\beta_1 + B^{(s)}\sin\lambda\beta_1 + C^{(s)}\cos\lambda\beta_2 + D^{(s)}\sin\lambda\beta_2 = 0 \\ &A^{(s)}\beta_1\sin\lambda\beta_1 + B^{(s)}\beta_1\cos\lambda\beta_1 + C^{(s)}\beta_2\sin\lambda\beta_2 + D^{(s)}\beta_2\cos\lambda\beta_2 = 0 \\ &A^{(s)}b_4\cos\lambda\beta_1 + B^{(s)}b_4\sin\lambda\beta_1 + C^{(s)}b_5\cos\lambda\beta_2 + D^{(s)}b_5\sin\lambda\beta_2 = 0 \\ &A^{(s)}b_6\sin\lambda\beta_1 + B^{(s)}b_6\cos\lambda\beta_1 + C^{(s)}b_7\sin\lambda\beta_2 + D^{(s)}b_7\cos\lambda\beta_2 = 0 \end{aligned} \qquad (2.14)$$

где $b_4 = \left(a_{11}\beta_1^2 - a_{12}\right)\lambda^{-1}$, $b_5 = \left(a_{11}\beta_2^2 - a_{12}\right)\lambda^{-1}$, $b_6 = \left(a_{11}\beta_1^2 - a_{12} - a_{66}\right)\beta_1\lambda^{-1}$,
$b_7 = \left(a_{11}\beta_2^2 - a_{12} - a_{66}\right)\beta_2\lambda^{-1}$

Приравнивая определитель системы (2.14) к нулю, получим следующее уравнение

$$\cos z\cos lz = 0 \qquad (2.15)$$

где $z = 2\lambda\beta_1$, $l = \beta_2/\beta_1$,

А решение (2.7) примет вид

$$\sigma_2^{(s)} = \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{\sin\lambda\beta_1\cos 2\lambda\beta_2}{\cos\lambda\beta_2\cos 2\lambda\beta_1}\cos\lambda\beta_1\zeta - \frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{\cos\lambda\beta_1\cos 2\lambda\beta_2}{\cos\lambda\beta_2\cos 2\lambda\beta_1}\sin\lambda\beta_1\zeta - \frac{\sin\lambda\beta_2}{\cos\lambda\beta_2}\cos\lambda\beta_2\zeta + \sin\lambda\beta_2\zeta\right)D^{(s)}$$
(2.16)

Аналогичным образом получается решение соответствующее случаю в)

$$\sigma_2^{(s)} = \frac{1}{d}\left(d_1 ch\alpha\lambda\zeta\cos\lambda\beta\zeta + d_2 sh\alpha\lambda\zeta\sin\lambda\beta\zeta + d_3 ch\alpha\lambda\zeta\sin\lambda\beta\zeta + d sh\alpha\lambda\zeta\cos\lambda\beta\zeta\right)D^{(s)} \qquad (2.17)$$

где

$$d = \frac{2\alpha\beta a_{11}}{\lambda}\left(\left(-\alpha\psi_4 + \beta\psi_3\right)\left(\psi_2\psi_4 - \psi_1\psi_3\right) + \left(\alpha\psi_3 + \beta\psi_4\right)\left(\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3\right) + \left(\alpha\psi_2 + \beta\psi_1\right)\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)\right)$$

$$d_1 = \frac{2\alpha\beta a_{11}}{\lambda}\left(\left(\alpha\psi_1 - \beta\psi_2\right)\left(\psi_1\psi_3 - \psi_2\psi_4\right) - \left(\alpha\psi_3 + \beta\psi_4\right)\left(\psi_3^2 + \psi_4^2\right) - \left(\alpha\psi_2 + \beta\psi_1\right)\left(\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3\right)\right)D^{(s)}$$

$$d_2 = \frac{2\alpha\beta a_{11}}{\lambda}\left(\left(\alpha\psi_4 - \beta\psi_3\right)\left(\psi_3^2 + \psi_4^2\right) + \left(\alpha\psi_1 - \beta\psi_2\right)\left(\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3\right) + \left(\alpha\psi_2 + \beta\psi_1\right)\left(\psi_1\psi_3 - \psi_2\psi_4\right)\right)D^{(s)}$$

$$d_3 = -\frac{2\alpha\beta a_{11}}{\lambda}\left(\left(\alpha\psi_4 - \beta\psi_3\right)\left(\psi_2\psi_3 + \psi_1\psi_4\right) - \left(\alpha\psi_3 + \beta\psi_4\right)\left(\psi_1\psi_3 - \psi_2\psi_4\right) + \left(\alpha\psi_1 - \beta\psi_2\right)\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)\right)D^{(s)}$$

$\psi_1 = ch\alpha\lambda\cos\lambda\beta$, $\psi_2 = sh\alpha\lambda\sin\lambda\beta$, $\psi_3 = ch\alpha\lambda\sin\lambda\beta$, $\psi_4 = sh\alpha\lambda\cos\lambda\beta$

Соответствующее трансцендентное уравнение будет

$$ch^2 z - \sin^2 kz = 0 \qquad (2.18)$$

где $z = 2\alpha\lambda$, $k = \beta/\alpha$

Аналогичным образом строится пограничный слой, вблизи торца $\xi = 1$. Если отсчет вести от $x = 0$, данные $R_p^{[2]}$ этого пограничного слоя получаются из приведенного формальной заменой t на $t_1 = 1/\varepsilon - t = (a - x)/h$.

Интеграл задачи представим в виде

$$J = Q + R_p^{[1]} + R_p^{[2]} \qquad (2.19)$$

где Q-решение внутренней задачи, $R_p^{[1]}$ и $R_p^{[2]}$ решении пограничного слоя, при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, соответственно.

Представление (2.19) содержит достаточное число произвольных постоянных, с помощью которых удовлетворяются торцевые условия.

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է անիզոտրոպ շերտի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը հարթ խնդրի դեպքում: Ենթադրվում է, որ շերտի երկայնական կողմերի վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ: Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով խնդրի լուծումը ներկայացվում է ներքին խնդրի ու սահմանային շերտի տիպի լուծումների գումարի տեսքով:

Եվ ներքին, և սահմանային շերտի տիպի լուծումները գտնելու համար օգտվում ենք առաձգականության տեսության համապատասխան հավասարումներից:

Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ:

Резюме

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в плоской задаче для анизотропной полосы. Считается, что плоскость полосы совпадает с плоскостью упругой симметрии материала. На продольных сторонах полосы заданы смешанные условия теории упругости, а на торцах могут быть заданы различные комбинации торцевых условий. Применяется асимптотический метод интегрирования, и решение задачи представляется в виде суммы двух решений- незатухающего и типа погранслоя.

Для нахождения как внутреннего решения, так и решения типа пограничного слоя, пользуемся соответствующими уравнениями теории упругости.

Рассмотрены конкретные примеры.

Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. Физматлит. 1997.415с.
3. Агаловян Л.А. Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2005. 468с.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука.1977. 416с.
5. Хачатрян Ш.М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы.//Изв. АН Арм. ССР. Механика. т.29. N 6. 1976.с. 19-32.
6. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы //Докл. АН Армении. т. 92. N 2. 1991.с. 76-81

АрГУ, кафедра математики