ԱՐՑԱԽԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРЦАХСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1 (14), 2007

УДК 539.3 *Меха*

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ[1]

А.М. Хачатрян, А.Б.Товмасян

Асимптотическим методом решена первая краевая задача для анизотропной прямоугол пластинки по геометрически нелинейной теории упругости. Получены формулы позволяю определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с заранее зада асимптотической точностью. Построено решение соответствующее внутренней задаче, прове сопоставление выведенных основных двумерных разрешающих уравнений с соответствую уравнениями классической теории пластин, когда имеется плоскость упругой симметрии.

1.Классические статические краевые задачи полос, пластин и оболочек асимптотиче методом решены в [1,2]. Тем же методом решены неклассические краевые задачи анизотро слоистых балок, пластин и оболочек в монографии [3]. Вопрос определения напряже деформированного состояния анизотропных пластин рассмотрен в [7,8]. Метод ока эффективным также для решения динамических задач тонких тел [9]. В работах [1 асимптотическим методом решена первая краевая задача для однослойного и двухслой анизотропных прямоугольников – полос и для ортотропной пластины по геометрич нелинейной теории упругости, проведено сравнение с решением по линейной теории.

Рассмотрим анизотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины $2h$. Б считать, что материал пластинки обладает общей анизотропией и подчиняется обобщенному за Гука. Пользуемся декартовой системой координат x, y, z, располагая оси Ox, Oy в средн плоскости пластинки. Вводятся безразмерные переменные $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\zeta = z/h$ и бе мерные перемещения $U = u/a, V = v/a$, $W = w/a$, где a – характерный тангенциальный р пластинки.

Считается, что на верхней $z = h$ и нижней $z = -h$ лицевых плоскостях пластинки за значения компонентов тензора напряжений. Соответствующие условия запишутся в виде

$$\sigma_{xz} = \left(\frac{h}{a}\right)^4 X^+(x,y),\ \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{a}\right)^4 Y^+(x,y),\ \sigma_z = \left(\frac{h}{a}\right)^5 Z^+(x,y) \quad \text{при } z = h$$

$$\sigma_{xz} = -\left(\frac{h}{a}\right)^4 X^-(x,y),\ \sigma_{yz} = -\left(\frac{h}{a}\right)^4 Y^-(x,y),\ \sigma_z = \left(\frac{h}{a}\right)^5 Z^-(x,y) \quad \text{при } z = -h$$

Требуется найти решение нелинейных уравнений пространственной задачи теории упру анизотропного тела [4-6]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{xz}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{yz}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma\right.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_x + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_{xy} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma_{xz}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_{xy} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_y + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma_{yz}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_{xz} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_{yz} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma\right.$$

[1] Работа доложена на Международной конференции "Механика композитов и оптимальное проектирова Тезисы докладов. Ереван, 25-28 сентября 2006г.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_{xy}+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_{xz}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_{xy}+\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_y+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_{yz}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_{xz}+\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_{yz}+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_z\right]=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{13}\sigma_z+a_{14}\sigma_{yz}+a_{15}\sigma_{xz}+a_{16}\sigma_{xy}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]=a_{12}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+a_{23}\sigma_z+a_{24}\sigma_{yz}+a_{25}\sigma_{xz}+a_{26}\sigma_{xy} \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]=a_{13}\sigma_x+a_{23}\sigma_y+a_{33}\sigma_z+a_{34}\sigma_{yz}+a_{35}\sigma_{xz}+a_{36}\sigma_{xy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=a_{14}\sigma_x+a_{24}\sigma_y+a_{34}\sigma_z+a_{44}\sigma_{yz}+a_{45}\sigma_{xz}+a_{46}\sigma_{xy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}=a_{15}\sigma_x+a_{25}\sigma_y+a_{35}\sigma_z+a_{45}\sigma_{yz}+a_{55}\sigma_{xz}+a_{56}\sigma_{xy}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+a_{36}\sigma_z+a_{46}\sigma_{yz}+a_{56}\sigma_{xz}+a_{66}\sigma_{xy}$$

при граничных условиях (1.2) и условиях краевых задач теории упругости на боковой поверхности (они пока не конкретизируются).

В безразмерных координатах ξ, η, ζ система уравнений (1.2) превратится в новую систему, содержащую малый параметр $\varepsilon = h/a$. Эта система сингулярно возмущенная и ее решение складывается из решений внутренней задачи (основное решение) и пограничного слоя.

Решение внутренней задачи отыскивается в виде ряда по степеням малого параметра [1-3,7-12]

$$Q=\varepsilon^q\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^s Q^{(s)} \qquad (1.3)$$

где Q –любое из напряжений или безразмерных перемещений, $Q^{(s)}\equiv 0$ при $s<0$, q –целое число, подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(s)}$. Число q определяется для каждой величины единственным образом[12]:

$$q=3 \ \text{для} \ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, U, V, \quad q=4 \ \text{для} \ \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$$

$$q=2 \ \text{для} \ W, \ q=5 \ \text{для} \ \sigma_z \qquad (1.4)$$

Эта асимптотика по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [7,8], однако, здесь, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.3) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра. По этому, было принято $q=q_0+5$, где q_0 значение асимптотики, соответствующее задачи в линейной теории упругости. Асимптотике (1.3), (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.3) в преобразованную систему (1.2), с учетом (1.4), для определения коэффициентов разложения (1.3), получим систему

$$\frac{\partial\sigma_x^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_1^{(s-3)}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{y}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_2^{(s-3)}=0 \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{z}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_3^{(s-3)}=0$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \xi}+U_{\xi}^{(s-3)}+V_{\xi}^{(s-3)}+W_{\xi}^{(s-1)}=a_{11}\sigma_x^{(s)}+a_{12}\sigma_y^{(s)}+a_{13}\sigma_z^{(s-2)}+a_{14}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{15}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{16}\sigma_{xy}^{(s)}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \eta}+U_{\eta}^{(s-3)}+V_{\eta}^{(s-3)}+W_{\eta}^{(s-1)}=a_{12}\sigma_x^{(s)}+a_{22}\sigma_y^{(s)}+a_{23}\sigma_z^{(s-2)}+a_{24}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{25}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{26}\sigma_{xy}^{(s)}$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}+U_{\zeta}^{(s-3)}+V_{\zeta}^{(s-3)}+W_{\zeta}^{(s-1)}=a_{13}\sigma_x^{(s-2)}+a_{23}\sigma_y^{(s-2)}+a_{33}\sigma_z^{(s-4)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(s-3)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(s-3)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(s-2)}$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}+U_{\eta\zeta}^{(s-3)}+V_{\eta\zeta}^{(s-3)}+W_{\eta\zeta}^{(s-1)}=a_{14}\sigma_x^{(s-1)}+a_{24}\sigma_y^{(s-1)}+a_{34}\sigma_z^{(s-3)}+a_{44}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}+U_{\xi\zeta}^{(s-3)}+V_{\xi\zeta}^{(s-3)}+W_{\xi\zeta}^{(s-1)}=a_{15}\sigma_x^{(s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(s-1)}+a_{35}\sigma_z^{(s-3)}+_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \xi}+U_{\xi\eta}^{(s-3)}+V_{\xi\eta}^{(s-3)}+W_{\xi\eta}^{(s-1)}=a_{16}\sigma_x^{(s)}+a_{26}\sigma_y^{(s)}+a_{36}\sigma_z^{(s-2)}+a_{46}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s)}$$

где

$$\sigma_1^{(s)}=\sum_{i=0}^{s}\left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \sigma_x^{(s-i)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial \zeta}\right)+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_y^{(s-i)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-i)}}{\partial \zeta}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \sigma_x^{(s-i)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial \zeta}\right)+\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \xi^2}\sigma_x^{(s-i)}+\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \eta^2}\sigma_y^{(s-i)}+\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \zeta^2}\sigma_z^{(s-i)}+$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \xi\partial \eta}\sigma_{xy}^{(s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \xi\partial \zeta}\sigma_{xz}^{(s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \eta\partial \zeta}\sigma_{yz}^{(s-i)}\right]\quad (1,2,3;U,V,W;\xi,\eta,\zeta)$$

$$U_{\xi}^{(s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \xi},\quad U_{\xi\eta}^{(s)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \eta}\quad (U,V,W),(\xi,\eta,\zeta) \tag{1.6}$$

Решив систему (1.5), получим

$$\begin{aligned}
&W^{(s)}=w^{(s)}(\xi,\eta)+w^{*(s)}\\
&U^{(s)}=-\zeta\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi}+u^{(s)}(\xi,\eta)+u^{*(s)}\quad (u,v)\\
&\sigma_x^{(s)}=\zeta\tau_{x1}^{(s)}+\tau_{x0}^{(s)}+\sigma_x^{*(s)}\quad (x,y)\\
&\sigma_{xy}^{(s)}=\zeta\tau_{xy1}^{(s)}+\tau_{xy0}^{(s)}+\sigma_{xy}^{*(s)}\\
&\sigma_{xz}^{(s)}=1/2\zeta^2\tau_{xz2}^{(s)}+\zeta\tau_{xz1}^{(s)}+\tau_{xz0}^{(s)}+\sigma_{xz}^{*(s)}\quad (x,y)\\
&\sigma_z^{(s)}=1/6\zeta^3\tau_{z3}^{(s)}+1/2\zeta^2\tau_{z2}^{(s)}+\zeta\tau_{z1}^{(s)}+\tau_{z0}^{(s)}+\sigma_z^{*(s)}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\begin{aligned}
&\tau_{x0}=B_{11}\varepsilon_1+B_{12}\varepsilon_2+B_{16}\omega\quad (x,y;1,2)\\
&\tau_{xy0}^{(s)}=B_{16}\varepsilon_1^{(s)}+B_{26}\varepsilon_2^{(s)}+B_{66}\omega^{(s)}\\
&\tau_{x1}^{(s)}=B_{11}\chi_1^{(s)}+B_{12}\chi_2^{(s)}+B_{16}\tau^{(s)}\quad (x,y;1,2)\\
&\tau_{xy1}^{(s)}=B_{16}\chi_1^{(s)}+B_{26}\chi_2^{(s)}+B_{66}\tau^{(s)}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\tau_{xz1}^{(s)}=-\left(\frac{\partial \tau_{x0}^{(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tau_{xy0}^{(s)}}{\partial \eta}\right)=-L_{11}(B_{ij})u^{(s)}-L_{12}(B_{ij})v^{(s)}\quad (x,y;\xi,\eta)$$

$$\tau_{xz2}^{(s)}=-\left(\frac{\partial \tau_{x1}^{(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tau_{xy1}^{(s)}}{\partial \eta}\right)=-L_{13}(B_{ij})w^{(s)}$$

$$\tau_{z1}^{(s)}=-\left(\frac{\partial \tau_{xz0}^{(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tau_{yz0}^{(s)}}{\partial \eta}\right)=\frac{1}{2}L_{33}(B_{ij})w^{(s)}-\left(\frac{\partial X_2^{(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial Y_2^{(s)}}{\partial \eta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s)}(\varsigma=1)}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s)}(\varsigma=-1)}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_{yz}^{(s)}(\varsigma=1)}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{yz}^{(s)}(\varsigma=-1)}{\partial \xi}\right)$$

$$\tau_{z2}^{(s)} = -\left(\frac{\partial \tau_{xz1}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz1}^{(s)}}{\partial \eta}\right) = -L_{13}(B_{ij})u^{(s)} - L_{23}(B_{ij})v^{(s)}$$

$$\tau_{z3}^{(s)} = -\left(\frac{\partial \tau_{xz2}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz2}^{(s)}}{\partial \eta}\right) = -L_{33}(B_{ij})w^{(s)}$$

$$\varepsilon_1^{(s)} = \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi},\ \varepsilon_2^{(s)} = \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \eta},\ \ \omega^{(s)} = \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \xi}$$

$$\chi_1^{(s)} = -\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \xi^2},\ \chi_2^{(s)} = -\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \eta^2},\ \ \tau^{(s)} = -2\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \xi \partial \eta} \qquad (1.9)$$

Коэффициенты B_{ij} определяются по формулам

$$\begin{gathered} B_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Omega,\ B_{22} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Omega \\ B_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Omega,\ B_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Omega \\ B_{16} = (a_{12}a_{22} - a_{16}a_{22})/\Omega,\ B_{26} = (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26})/\Omega \\ \Omega = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{66} + 2a_{12}a_{16}a_{26} - a_{11}a_{26}^2 - a_{22}a_{16}^2 \end{gathered} \qquad (1.10)$$

Величины со звездочками, как всегда, известны и определяются по формулам

$$w^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{13}\sigma_x^{(s-2)} + a_{23}\sigma_y^{(s-2)} + a_{33}\sigma_x^{(s-4)} + a_{34}\sigma_{yz}^{(s-3)} + a_{35}\sigma_{xz}^{(s-3)} + a_{36}\sigma_{xy}^{(s-2)} - \left(U_\zeta^{(s-3)} + V_\zeta^{(s-3)} + W_\zeta^{(s-1)}\right)\right)d\zeta$$

$$u^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{15}\sigma_x^{(s-1)} + a_{25}\sigma_y^{(s-1)} + a_{35}\sigma_z^{(s-3)} + a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)} - \frac{\partial w^{*(s)}}{\partial \xi} - \left(U_{\xi\zeta}^{(s-3)} + V_{\xi\zeta}^{(s-3)} + W_{\xi\zeta}^{(s-1)}\right)\right)d\zeta$$

$$v^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{14}\sigma_x^{(s-1)} + a_{24}\sigma_y^{(s-1)} + a_{34}\sigma_x^{(s-3)} + a_{44}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{45}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{46}\sigma_{xy}^{(s-1)} - \frac{\partial w^{*(s)}}{\partial \eta} - \left(U_{\eta\zeta}^{(s-3)} + V_{\eta\zeta}^{(s-3)} + W_{\eta\zeta}^{(s-1)}\right)\right)d\zeta \qquad (1.11)$$

$$\sigma_x^{*(s)} = B_{11}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{16}\omega^{*(s)} + a_3\sigma_z^{(s-2)} + a_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + a_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_y^{*(s)} = B_{12}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{26}^{(k)}\omega^{*(s)} + b_3\sigma_z^{(s-2)} + b_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + b_5\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = B_{16}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{66}\omega^{*(s)} + c_3\sigma_z^{(s-2)} + c_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + c_5\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_{xz}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial \eta} + \sigma_1^{(s-3)}\right)d\zeta \quad (x, y; \xi, \eta; 1,2)$$

$$\sigma_z^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{*(s)}}{\partial \eta} + \sigma_3^{(s-3)}\right)d\zeta$$

где

$$\begin{gathered} \varepsilon_1^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi} + U_\xi^{(s-3)} + V_\xi^{(s-3)} + W_\xi^{(s-1)} \\ \varepsilon_2^{*(s)} = \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \eta} + U_\eta^{(s-3)} + V_\eta^{(s-3)} + W_\eta^{(s-1)} \\ \omega^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(s-3)} + V_{\xi\eta}^{(s-3)} + W_{\xi\eta}^{(s-1)} \end{gathered} \qquad (1.12)$$

$$a_i = -(a_{1i}B_{11} + a_{2i}B_{12} + a_{i6}B_{16}),\ \ b_i = -(a_{1i}B_{12} + a_{2i}B_{22} + a_{i6}B_{26})$$

$$c_i = -(a_{1i}B_{61} + a_{2i}B_{26} + a_{i6}B_{66}) \qquad (i = 1,2,\ldots,6)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1) для определения неизвестных величин, получается следующая система уравнений

$$L_{11}(B_{ij})u + L_{12}(B_{ij})v = p_1^{(s)} \qquad (1.13)$$

$$L_{12}(B_{ij})u + L_{22}(B_{ij})v = p_2^{(s)}$$

$$L_{33}(B_{ij})w = q^{(s)} \qquad (1.14)$$

где дифференциальные операторы L_{ij} имеют вид

$$L_{11}(B_{ij}) = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$L_{22}(B_{ij}) = B_{22}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$$

$$L_{12}(B_{ij}) = B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{26}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \qquad (1.15)$$

$$L_{13}(B_{ij}) = -\left[B_{11}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + 3B_{16}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta} + (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta^2} + B_{26}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}\right]$$

$$L_{23}(B_{ij}) = -\left[B_{22}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3} + 3B_{26}\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\eta^2} + (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta} + B_{16}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\right]$$

$$L_{33}(B_{ij}) = B_{11}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 4B_{16}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\eta} + 2(B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2} + 4B_{26}\frac{\partial^4}{\partial\eta\partial\eta^3} + B_{22}\frac{\partial^4}{\partial\eta^4}$$

В (1.13) $p_1^{(s)}$, $p_2^{(s)}$, $q^{(s)}$ играют роль обобщенных нагрузок, для вычисления которых получаются формулы

$$p_1^{(s)} = -X_1^{(s)} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{xz}^{*(s)}(\zeta = -1)\right)$$

$$p_2^{(s)} = -Y_1^{(s)} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{yz}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{yz}^{*(s)}(\zeta = -1)\right)$$

$$q^{(s)} = \frac{3}{2}\left[2Z_2^{(s)} + 2\frac{\partial X_2^{(s)}}{\partial\xi} + 2\frac{\partial Y_2^{(s)}}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sigma_{xz}^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_{xz}^{*(s)}(\zeta=-1)\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sigma_{yz}^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_{yz}^{*(s)}(\zeta=-1)\right) - \left(\sigma_z^{*(s)}(\zeta=1) - \sigma_z^{*(s)}(\zeta=-1)\right)\right] \qquad (1.16)$$

Остальные неизвестные функции интегрирования $\tau_{xz0}^{(s)}$, $\tau_{yz0}^{(s)}$ и $\tau_{z0}^{(s)}$ опредляются по формулам

$$\tau_{xz0}^{(s)} = X_2^{(s)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{xz}^{*(s)}(\zeta = -1)\right) - \frac{1}{2}L_{13}(B_{ij})w^{(s)}$$

$$\tau_{yz0}^{(s)} = Y_2^{(s)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{yz}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{yz}^{*(s)}(\zeta = -1)\right) - \frac{1}{2}L_{23}(B_{ij})w^{(s)} \qquad (1.17)$$

$$\tau_{z0}^{(s)} = Z_1^{(s)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_1^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial p_2^{(s)}}{\partial\eta}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{xz}^{*(s)}(\zeta = -1)\right)$$

где

$$X_{1,2}^{(s)} = \frac{1}{2}\left(X^{-(s)} \pm X^{-(s)}\right),\quad Y_{1,2}^{(s)} = \frac{1}{2}\left(Y^{+(s)} \pm Y^{-(s)}\right),\quad Z_{1,2}^{(s)} = \frac{1}{2}\left(Z^{+(s)} \pm Z^{-(s)}\right)$$

$$X^{+(0)} = X^{+},\ Y^{+(0)} = Y^{+},\ Z^{+(0)} = Z^{+},\ X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = Z^{\pm(s)} = 0,\ s > 0$$

Легко убедиться, что при $s = 0$ система уравнений (1.13) совпадает с уравнениями обобщенной плоской задачи, а уравнение (1.14) - классическим уравнением изгиба пластинки, когда имеется плоскость упругой симметрии. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости.

Ամփոփում

Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով կատարված է առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի ուսումնասիրությունը, երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումների հիման վրա: Գտնված է ասիմպտոտիկան և կառուցված է ներքին խնդրին համապատասխանող լուծումը: Ստացված են ռեկուրենտ բանաձևեր, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշելու լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բոլոր բաղադրիչները:

Դուրս բերված հավասարումները և բանաձևերը գրոյական մոտավորությունում համընկնում են անիզոտրոպ սալի համապատասխան հավասարումների և բանաձևերի հետ, երբ սալի նյութը ունի առաձգական սիմետրիայի հարթություն: Հաջորդ մոտավորությունների համար փոխվում են միայն հավասարումների աջ մասերը, որտեղ մտնում են ընդհանուր անիզոտրոպիան բնութագրող գործակիցները, ինչպես նաև առաձգականության տեսության ոչ գծային հավասարումներով պայմանավորված անդամները:

Резюме

Методом асимптотического интегрирования проведено исследование нелинейных уравнений трехмерной задачи теории упругости без принятия каких-либо гипотез. Полное напряженное состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряженных состояний. Найдена асимптотика и построено решение соответствующее внутренней задаче. Получены реккурентные формулы, позволяющие определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения внутренней задачи с заранее заданной асимптотической точностью.

Выведенные уравнения и формулы в нулевом приближении совпадают с соответствующими уравнениями и формулами анизотропных пластин, когда имеется плоскость упругой симметрии.
Для последующих приближений меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости.

Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М. 1976.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2005. с 468.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1967. с 268.
5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М. ОГИЗ. 1948.
6. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ. 1988.
7. Агаловян Л.А., Хачатрян Ш.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией// В сб.: " XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин". Тезисы докладов. М., 1977.
8. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида // Изв. НАН РА. Механика. 1996. т. 49. N 3. с.10-22.
9. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. // Механика оболочек и пластин. Сб. докл. XIX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. РФ. Нижний Новгород. 1999. с. 16-20.
10. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости. // Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. естест. Наук. 2001. Спецвыпуск. с.16-18.
11. Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной двухслойной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости// В сб: "Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем". Ер: 2002. с. 213-218.
12. Хачатрян А.М., Товмасян А. Б. К решению первой краевой задачи для ортотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости. Ученые записки АрГУ. N1(8). 2004.с.15-20.

АрГУ, кафедра инжинерии