

О ТЕРНАРНЫХ $\forall\exists(\forall)$ -ТОЖДЕСТВАХ И СВЕРХТОЖДЕСТВАХ

Л.Р.Абрамян

Определим некоторые предварительные понятия.

Условимся наперед обозначать последовательность $x_n, x_{n+1}, \dots, x_m$ через x_n^m . Символ x_n^m имеет смысл, если $n \leq m$. Если $n > m$, то под x_n^m будем понимать пустую последовательность.

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество Q с одной n -арной операцией A называется n -группоидом и обозначается через $Q(A)$. Алгебра $Q(\Sigma)$ с n -арными операциями называется n -арной алгеброй. При $n=1,2,3$ n -арная алгебра, соответственно, называется унарной, бинарной и тернарной алгеброй.

Определение 2. n -группоид $Q(A)$ называется n -полугруппой, если в Q выполняется тождество

$$(x_i^{i-1} (x_i^{i+n-1}) x_{i+n}^{2n-1}) = (x_i^{i-1} (x_i^{j-n-1}) x_{j+n}^{2n-1})$$

для любых $i, j, i \neq j$ и $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, n \geq 2$ (для простоты, знак операции A в тождестве опускается).

Определение 3. n -группоид $Q(A)$ называется n -квазигруппой или n -арной квазигруппой, если в равенстве $A(x_i^n) = x_{n+1}$ всякие n элементы из x_i^{n+1} однозначно определяют $n+1$ -й. Иными словами, $Q(A)$ называется n -квазигруппой, если уравнение

$$A(a_i^{i-1}, x, a_{i-n}^n) = b$$

однозначно разрешимо для любых $a_i^n, b \in Q$ и для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

При $n=2$ получаем 2-квазигруппу или обычную (бинарную) квазигруппу, а при $n = 3-3$ -квазигруппу или тернарную квазигруппу.

Определение 4. Если n -квазигруппа Q одновременно является и n -полугруппой, то она называется n -группой ($n \geq 2$).

При $n=2$ получаем обычные (бинарные) полугруппы и группы.

Определение 5. Алгебра $\Theta(\Sigma)$ с тернарными операциями называется тернарной обратимой алгеброй, если $Q(A)$ -тернарная квазигруппа для любой операции $A \in \Sigma$. Алгебра $Q(\Sigma)$ называется обратимой, если для любой операции $A \in \Sigma, Q(A)$ является n -квазигруппой для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 6. Сверхтождество (или $\forall(\forall)$ -тождество) — формула языка второго порядка вида:

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (w_1 = w_2)$$

где $X_1, \dots, X_m$ — функциональные переменные, а $x_1, \dots, x_n$ — предметные переменные в словах (термах) w_1, w_2 . Обычно сверхтождества записываются без кванторной приставки, понимая их выполнимость (истинность) в алгебрах в следующем смысле: в алгебре (Q, Σ) выполняется сверхтождество

$$w_1 = w_2, (*)$$

если равенство $(*)$ справедливо, когда в нем каждая предметная переменная и каждая функциональная переменная заменяются соответственно любым элементом из Q и любой операцией, соответствующей арности из Σ (предполагается возможность такой замены, т.е. имеет место включение: $\{X_1, \dots, X_m\} \subseteq \{A \mid A \in \Sigma\}$, где $|S|$ — арность S).

Число m называется функциональным рангом сверхтождества. Если $m > 1$, то сверхтождество называется нетривиальным.

Более общим является понятие $\forall\exists(\forall)$ -тождества:

$$\forall X_1, \dots, X_k \exists X_{k+1}, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (w_1 = w_2),$$

выполнимость которого понимается аналогично.

В настоящей статье характеризуются $\forall\exists(\forall)$ -тождества тернарной ассоциативности в алгебрах с тернарными квазигрупповыми операциями.

Предложение 4.1. Если в нетривиальной тернарной обратной алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, определенное по равенству $((x, y, z), u, v) = (x, y, (z, u, v))$, тогда в нем каждая функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, каждое такое сверхтождество может быть только функционального ранга два и одного из следующих видов:

$$X(Y(x, y, z), u, v) = Y(x, y, X(z, u, v)), \quad (1)$$

$$X(X(x, y, z), u, v) = Y(x, y, Y(z, u, v)), \quad (2)$$

$$X(Y(x, y, z), u, v) = X(x, y, Y(z, u, v)). \quad (3)$$

Теорема 1. Если в тернарной обратной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется $\forall\exists(\forall)$ -тождество тернарной ассоциативности

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z (X(Y(x, y, z), u, v) = Y'(x, y, X'(z, u, v))),$$

тогда существует бинарная группа $Q(\circ)$ такая, что каждая $A_i \in \Sigma$ операция определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = \alpha_i(\beta_i x \circ \gamma_i y \circ \delta_i z),$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — подстановки множества Q .

Теорема 2. Если в тернарной обратной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется $\forall\forall(\forall)$ -тождество тернарной ассоциативности

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z (X(x, y, Y(z, u, v)) = Y'(X'(x, y, z), u, v)),$$

тогда существует бинарная группа $Q(\circ)$ такая, что каждая $A_i \in \Sigma$ операция определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = \alpha_i(\beta_i x \circ \gamma_i y \circ \delta_i z),$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — подстановки множества Q .

Следствие 1. Для того, чтобы в тернарной обратной алгебре $Q(\Sigma)$ выполнялось сверхтождество

$$X(Y(x, y, z), u, v) = Y(x, y, X(z, u, v)) \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы для произвольной операции $A_i \in \Sigma$

$$A_i(x, y, z) = x \circ \mu_i y \circ z,$$

где $Q(\circ)$ — бинарная группа, а μ_i — подстановка множества Q .

Теорема 3. Если в тернарной обратной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется $\forall\exists(\forall)$ -тождество тернарной ассоциативности

$$\forall X, \exists X' \forall x, y, z (X(X(x, y, z), u, v) = X'(x, y, X'(z, u, v))),$$

тогда существует бинарная группа $Q(\circ)$ такая, что каждая $A_i \in \Sigma$ операция определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = \alpha_i(\beta_i x \circ \gamma_i y \circ \delta_i z),$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — подстановки множества Q .

Теорема 4. Если в тернарной обратной алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется $\forall\exists(\forall)$ -тождество тернарной ассоциативности

$$\forall X, \exists X' \forall x, y, z (X(x, y, X(z, u, v)) = X'(X'(x, y, z), u, v)),$$

тогда существует бинарная группа $Q(\circ)$ такая, что каждая $A_i \in \Sigma$ операция определяется по правилу

$$A_i(x, y, z) = \alpha_i(\beta_i x \circ \gamma_i y \circ \delta_i z),$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – подстановки множества Q .

Следствие 2. Для того, чтобы в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполнялось сверхтождество

$$X(X(x, y, z), u, v) = Y(x, y, Y(z, u, v)), \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы для произвольной операции $A_i \in \Sigma$

$$A_i(x, y, z) = x \circ \delta_i y \circ z \circ t_i, \quad t_i^2 = t_j^2,$$

где $Q(\circ)$ – бинарная группа, δ – подстановка множества Q , $t_i \in Z[Q(\circ)]$.

Следствие 3. Для того чтобы в тернарной обратимой алгебре $Q(\Sigma)$ выполнялось сверхтождество

$$X(Y(x, y, z), u, v) = X(x, y, Y(z, u, v)), \quad (15)$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждой операции $A_i \in \Sigma$

$$A_i(x, y, z) = \beta^{-1} \cdot (\beta x \cdot \gamma y \cdot \delta z \cdot z),$$

где $Q(\cdot)$ – бинарная группа, $z, \in Z(Q(\cdot))$, отображения $\gamma, \beta: Q \rightarrow Q$ являются подстановками множества Q .

Ամփոփում

Հորվածը նվիրված է տերնար գուգորդական $\forall\exists(\forall)$ -նույնություններին: Դիտարկվում են
 $\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z (X(Y(x, y, z), u, v) = Y'(x, y, X'(z, u, v)))$
 $\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z (X(x, y, Y(z, u, v)) = Y'(X'(x, y, z), u, v))$
 $\forall X, \exists X' \forall x, y, z (X(X(x, y, z), u, v) = X'(x, y, X'(z, u, v)))$
 $\forall X, \exists X', \forall x, y, z (X(x, y, X(z, u, v)) = X'(X'(x, y, z), u, v))$
 $\forall\exists(\forall)$ -նույնությունները և բնութագրվում են այն տերնար հակադարձելի
 հանրահաշիվները, որտեղ նրանք իրացվում են:

Резюме

Статья посвящается $\forall\exists(\forall)$ -тождествам. Рассматриваются

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z (X(Y(x, y, z), u, v) = Y'(x, y, X'(z, u, v)))$$

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z (X(x, y, Y(z, u, v)) = Y'(X'(x, y, z), u, v))$$

$$\forall X, \exists X' \forall x, y, z (X(X(x, y, z), u, v) = X'(x, y, X'(z, u, v)))$$

$$\forall X, \exists X', \forall x, y, z (X(x, y, X(z, u, v)) = X'(X'(x, y, z), u, v))$$

$\forall\exists(\forall)$ -тождества и характеризуются те тернарные обратимые алгебры, в которых они выполняются.

Литература

1. Мовсисян Ю.М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд-во ЕГУ, Ереван, 1986.
2. Белоусов В.Д. n-Арные квазигруппы, Кишинев, Изд-во “Штиинца”, 1971.
3. Janes Usan. n-groups in the light of the neutral operations, Electronic version, 2006.