

ՌԻՄԱՆՅԱՆ ՄԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՐԵՔ ԲԱԶՄԱՁԱՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ
ԿՈՄՊՈԶԻՏԻԱՅԻ ԿՈՄՊՐԻՆԱՏԱԿԱՆ ՑԱՆՑԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Գ. Ա. Նալբանդյան

Դիտարկենք $V^n = V^{n_1} \times V^{n_2} \times V^{n_3}$ ռիմանյան տարածությունը հետևյալ մետրիկայով՝

$$ds^2 = g_{i_1 k_1} (U^1; U^2; \dots; U^{n_1}) dU^{i_1} dU^{k_1} + e^{P(U^1, U^2, \dots, U^{n_1})^2} g_{i_2 k_2} (U^{n_1+1}; U^{n_1+2}; \dots; U^{n_1+n_2}) dU^{i_2} dU^{k_2} + e^{Q(U^1, U^2, \dots, U^{n_1+n_2})^2} g_{i_3 k_3} (U^{n_1+n_2+1}; U^{n_1+n_2+2}; \dots; U^{n_1+n_2+n_3}) dU^{i_3} dU^{k_3} \quad (1)$$

որտեղ

$$i_1, k_1 = 1, 2, \dots, n_1; \quad i_2, k_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2; \quad i_3, k_3 = n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3$$

ընդ որում՝ $n_1 + n_2 + n_3 = n$

Հայտնի է, որ յուրաքանչյուր տենզորին համապատասխանում է Բրիստոֆելի գործակիցներ, այսինքն.

$$\left. \begin{aligned} g_{i_1 k_1} (U^1; U^2; \dots; U^{n_1}) &\rightarrow \Gamma_{i_1 k_1}^1 \\ g_{i_2 k_2} (U^{n_1+1}; U^{n_1+2}; \dots; U^{n_1+n_2}) &\rightarrow \Gamma_{i_2 k_2}^2 \\ g_{i_3 k_3} (U^{n_1+n_2+1}; U^{n_1+n_2+2}; \dots; U^n) &\rightarrow \Gamma_{i_3 k_3}^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Եթե (1)-ից առանձնացնենք տենզորները ըստ $V^{n_1}, V^{n_2}, V^{n_3}$, ենթատարածությունների կստանանք հետևյալ մատրիցան՝

$$\Pi g_a \Pi = \left(\begin{array}{ccc|ccc} g_{i_1 k_1} & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & e^P g_{i_2 k_2} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & e^Q g_{i_3 k_3} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline & & & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \quad (3)$$

Ինչպես հայտնի է, V^n ռիմանյան տարածության Բրիստոֆելի գործակիցները, համընկնում են $V^{n_1}, V^{n_2}, V^{n_3}$, ենթատարածությունների Բրիստոֆելի գործակիցների հետ, եթե տեղի ունեն (2) պայմանները: Այժմ հաշվենք Բրիստոֆելի գործակիցները

$$\Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} = \frac{1}{2} g^{i_1 s} \left(\frac{\partial g_{j_1 s}}{\partial U^{k_1}} + \frac{\partial g_{s k_1}}{\partial U^{j_1}} - \frac{\partial g_{j_1 k_1}}{\partial U^s} \right) \quad (4)$$

Քանի որ

$$g^{i_1 s} = \begin{cases} g^{i_1 s_1}, & \text{եթե } s = s_1 \\ 0, & \text{եթե } s = s_2, \text{ կամ } s = s_3 \end{cases} \quad (5)$$

Հաշվի առնելով (5) պայմանը, (4)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} = \frac{1}{2} g^{i_1 s_1} \left(\frac{\partial g_{j_1 s_1}}{\partial U^{k_1}} + \frac{\partial g_{s_1 k_1}}{\partial U^{j_1}} - \frac{\partial g_{j_1 k_1}}{\partial U^{s_1}} \right) = \Gamma_{j_1 k_1}^{i_1}$$

(3) մատրիցի տարրերի համար ունենք՝ $g_{s_1 k_2} = g_{j_1 k_2} = 0$, իսկ քանի որ $g_{s_1 j_1}$ -ն կախված չէ k_2 -

խմբի կոորդինատներից, ուրեմն՝ $\frac{\partial g_{s_1 j_1}}{\partial U^{k_2}} = 0$, հետևաբար՝

$$\Gamma_{j_1 k_2}^s = \frac{1}{2} g^{s_1 s_1} \left(\frac{\partial g_{s_1 j_1}}{\partial U^{k_2}} + \frac{\partial g_{s_1 k_2}}{\partial U^{j_1}} - \frac{\partial g_{j_1 k_2}}{\partial U^{s_1}} \right) = 0;$$

(3) մատրիցի տարրերի համար ունենք՝ $g_{s_1 k_3} = g_{j_1 k_3} = 0$, իսկ քանի որ $g_{s_1 j_1}$ -ն կախված չէ k_3 -

խմբի կոորդինատներից, ուրեմն՝ $\frac{\partial g_{s_1 j_1}}{\partial U^{k_3}} = 0$, հետևաբար՝

$$\Gamma_{j_1 k_3}^s = \frac{1}{2} g^{s_1 s_1} \left(\frac{\partial g_{s_1 j_1}}{\partial U^{k_3}} + \frac{\partial g_{s_1 k_3}}{\partial U^{j_1}} - \frac{\partial g_{j_1 k_3}}{\partial U^{s_1}} \right) = 0;$$

(3) մատրիցի տարրերի համար ունենք՝ $g_{s_1 j_2} = g_{s_1 k_2} = 0$, ուրեմն՝

$$\Gamma_{j_2 k_2}^{j_1} = \frac{1}{2} g^{j_1 s_1} \left(\frac{\partial g_{s_1 j_2}}{\partial U^{k_2}} + \frac{\partial g_{s_1 k_2}}{\partial U^{j_2}} - \frac{\partial g_{j_2 k_2}}{\partial U^{s_1}} \right) = -\frac{1}{2} g^{j_1 s_1} \frac{\partial g_{j_2 k_2}}{\partial U^{s_1}}; \quad \text{Հաշվի առնելով, որ}$$

$e^P = e^{P(u^1, u^2, \dots, u^N)}$ և $g_{j_2 k_2} = e^{P^2} g_{j_2 k_2}^2$; ապա տեղադրելով կստացվի՝

$$\Gamma_{j_2 k_2}^{j_1} = -\frac{1}{2} g^{j_1 s_1} \left(\frac{\partial e^{P^2} g_{j_2 k_2}^2}{\partial U^{s_1}} \right) = -\frac{1}{2} g^{j_1 s_1} \left(e^{P^2} \frac{\partial P^2}{\partial U^{s_1}} \cdot g_{j_2 k_2}^2 + e^{P^2} \cdot \frac{\partial g_{j_2 k_2}^2}{\partial U^{s_1}} \right);$$

Զանի որ $g_{j_2 k_2}^2$ -ն կախված չէ s_1 - խմբի կոորդինատներից:

$$\text{Ուրեմն՝} \quad \frac{\partial^2 g_{j_2 k_2}^2}{\partial U^{s_1}} = 0, \quad \text{իսկ} \quad \frac{\partial P^2}{\partial U^{s_1}} = P_{s_1}, \text{ հետևաբար}$$

$$\Gamma_{j_2 k_2}^{j_1} = -\frac{1}{2} g^{j_1 s_1} P_{s_1} \cdot g_{j_2 k_2}^2 = -P^{j_1} g_{j_2 k_2}^2, \text{ որտեղ} \quad P^{j_1} = \frac{1}{2} g^{j_1 s_1} P_{s_1}$$

(3) մատրիցի տարրերի համար ունենք՝ $g_{j_2 s_1} = g_{k_3 s_1} = g_{j_2 k_3} = 0$, հետևաբար՝

$$\Gamma_{j_2 k_3}^{s_1} = \frac{1}{2} g^{s_1 s_1} \left(\frac{\partial g_{s_1 j_2}}{\partial U^{k_3}} + \frac{\partial g_{s_1 k_3}}{\partial U^{j_2}} - \frac{\partial g_{j_2 k_3}}{\partial U^{s_1}} \right) = 0$$

(3) մատրիցի տարրերի համար ունենք՝ $g_{s_1 j_3} = g_{s_1 k_3} = 0$, հետևաբար՝

$$\Gamma_{j_3 k_3}^{s_1} = \frac{1}{2} g^{s_1 s_1} \left(\frac{\partial g_{s_1 j_3}}{\partial U^{k_3}} + \frac{\partial g_{s_1 k_3}}{\partial U^{j_3}} - \frac{\partial g_{j_3 k_3}}{\partial U^{s_1}} \right) = -\frac{1}{2} g^{s_1 s_1} \frac{\partial g_{j_3 k_3}}{\partial U^{s_1}}$$

Զանի որ $e^Q = e^{Q(u^1, u^2, \dots, u^N, u^{N+1}, u^{N+2})}$ և $g_{j_3 k_3} = e^Q g_{j_3 k_3}^3$; ապա տեղադրելով կստացվի՝

$$\Gamma_{j_3 k_3}^{s_1} = -\frac{1}{2} g^{s_1 s_1} \frac{\partial (e^Q g_{j_3 k_3}^3)}{\partial U^{s_1}} = -\frac{1}{2} g^{s_1 s_1} \left(e^Q \frac{\partial Q}{\partial U^{s_1}} g_{j_3 k_3}^3 + e^Q \frac{\partial g_{j_3 k_3}^3}{\partial U^{s_1}} \right);$$

Իսկ $\frac{\partial g_{i j k_1}}{\partial U^{j s_1}} = 0$, որովհետև $g_{j k_1}$ կախված չէ s_1 -խմբի կոորդինատներից:

Ուրեմն՝

$$\Gamma_{j k_1}^i = -\frac{1}{2} g^{i s_1} \frac{\partial g}{\partial U^{s_1}} g_{j k_1} = -q^i g_{j k_1}; \text{ որտեղ } q^{i_1} = g^{i s_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial U^{s_1}}$$

Այսպիսով ստացվեց, որ

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{h k_1}^i &= \Gamma_{j k_1}^i & \Gamma_{h k_1}^{s_1} &= \Gamma_{h k_1}^{s_2} = \Gamma_{h k_1}^{s_3} = 0 \\ \Gamma_{j k_2}^i &= -P^i g_{j k_2} & \Gamma_{h k_2}^{s_1} &= -q^{s_1} g_{h k_2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{i_1} = \frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \left(\frac{\partial g_{\alpha s_2}}{\partial U^\beta} + \frac{\partial g_{\beta s_2}}{\partial U^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial U^{s_2}} \right); \quad \text{երբ } \alpha = i_1; \beta = k_1 \quad \text{ապա} \quad \text{կստացվի}$$

$$\Gamma_{i_1 k_1}^{i_2} = \frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \left(\frac{\partial g_{i_1 s_2}}{\partial U^{k_1}} + \frac{\partial g_{k_1 s_2}}{\partial U^{i_1}} - \frac{\partial g_{i_1 k_1}}{\partial U^{s_2}} \right)$$

Հաշվի առնելով որ $g_{i_1 s_2} = g_{k_1 s_2} = 0$ համաձայն (3) մատրիցային տեսքի, ապա

$$\text{կունենանք՝} \quad \Gamma_{i_1 k_1}^{i_2} = -\frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \frac{\partial g_{i_1 k_1}}{\partial U^{s_2}}$$

Բանի որ $g_{j k_1}$ կախված չէ s_2 -խմբի կոորդինատներից:

$$\text{Ուրեմն՝} \quad \Gamma_{i_1 k_1}^{i_2} = -\frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \frac{\partial g_{i_1 k_1}}{\partial U^{s_2}} = 0:$$

Բանի որ $g_{j_1 s_2} = g_{j_2 s_2} = 0$ համաձայն (3) մատրիցային տեսքի, հետևաբար՝

$$\Gamma_{i_1 k_2}^{i_2} = \frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \left(\frac{\partial g_{j_1 s_2}}{\partial U^{k_2}} + \frac{\partial g_{k_2 s_2}}{\partial U^{j_1}} - \frac{\partial g_{j_1 k_2}}{\partial U^{s_2}} \right) = \frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \frac{\partial g_{k_2 s_2}}{\partial U^{j_1}};$$

Բանի որ $g_{k_2 s_2} = e^P g_{j_2 k_2}$, ապա տեղադրելով կստացվի՝

$$\Gamma_{i_1 k_2}^{i_2} = \frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \frac{\partial \left(e^P g_{j_2 k_2} \right)}{\partial U^{j_1}} = \frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \left(\frac{\partial P}{\partial U^{j_1}} e^P g_{j_2 k_2} + e^P \frac{\partial g_{j_2 k_2}}{\partial U^{j_1}} \right);$$

Իսկ $\frac{\partial g_{j_2 k_2}}{\partial U^{j_1}} = 0$, որովհետև $g_{k_2 s_2}$ կախված չէ s_1 -խմբի կոորդինատներից:

$$\text{Ուրեմն՝} \quad \Gamma_{j_1 k_2}^{i_2} = \frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \frac{\partial P}{\partial U^{j_1}} g_{k_2 s_2} = P_{j_1} \delta_{k_2}^{i_2}; \text{ որտեղ } \frac{\partial P}{\partial U^{j_1}} = P_{j_1}, g^{i_2 s_2} g_{k_2 s_2} = \delta_{k_2}^{i_2}$$

Բանի որ $g_{j_1 s_2} = g_{k_3 s_2} = g_{j_1 k_3} = 0$, համաձայն (3) մատրիցային տեսքի: Ուրեմն՝

$$\Gamma_{j_1 k_3}^{i_2} = \frac{1}{2} g^{i_2 s_2} \left(\frac{\partial g_{j_1 s_2}}{\partial U^{k_3}} + \frac{\partial g_{k_3 s_2}}{\partial U^{j_1}} - \frac{\partial g_{j_1 k_3}}{\partial U^{s_2}} \right) = 0$$

Բանի որ $e^P = e^{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$ ֆունկցիան կախված չէ s_2 խմբի կոորդինատներից:

Ուրեմն՝

$$\Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} = \frac{1}{2} g^{i_1 k_1} \left(\frac{\partial g_{s_2 j_1}}{\partial U^{k_1}} + \frac{\partial g_{s_1 j_1}}{\partial U^{i_1}} - \frac{\partial g_{j_1 k_1}}{\partial U^{s_1}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{e^{i_1}} g \left(\frac{\partial \left(e^{i_1} g_{s_2 j_1} \right)}{\partial U^{k_1}} + \frac{\partial \left(e^{i_1} g_{s_1 j_1} \right)}{\partial U^{i_1}} - \frac{\partial \left(e^{i_1} g_{j_1 k_1} \right)}{\partial U^{s_1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{i_1 k_1} g \left(\frac{\partial g_{s_2 j_1}}{\partial U^{k_1}} + \frac{\partial g_{s_1 j_1}}{\partial U^{i_1}} - \frac{\partial g_{j_1 k_1}}{\partial U^{s_1}} \right) = \Gamma_{j_1 k_1}^{i_1}$$

Համաձայն (3) մատրիցային տեսքի $g_{s_2 k_3} = g_{j_3 k_3} = 0$: Իսկ $\frac{\partial g_{j_3 k_3}}{\partial U^{s_1}} = 0$, որովհետև

$g_{j_2 s_2}$ կախված չէ k_3 -խմբի կոորդինատներից: Ուրեմն՝

$$\Gamma_{j_2 k_3}^{i_2} = \frac{1}{2} g^{i_2 k_3} \left(\frac{\partial g_{j_2 s_2}}{\partial U^{k_3}} + \frac{\partial g_{s_2 k_3}}{\partial U^{j_2}} - \frac{\partial g_{j_2 k_3}}{\partial U^{s_2}} \right) = 0;$$

Բանի որ $g_{s_2 j_3} = g_{s_2 k_3} = 0$ համաձայն (3) մատրիցային տեսքի, ապա կստացվի՝

$$\Gamma_{j_3 k_3}^{i_3} = \frac{1}{2} g^{i_3 k_3} \left(\frac{\partial g_{s_1 j_3}}{\partial U^{k_3}} + \frac{\partial g_{s_1 j_3}}{\partial U^{i_3}} - \frac{\partial g_{j_3 k_3}}{\partial U^{s_1}} \right) = -\frac{1}{2} g^{i_3 k_3} \frac{\partial g_{j_3 k_3}}{\partial U^{s_1}}; \quad \text{Հաշվի առնելով որ}$$

$g_{j_3 k_3} = e^{i_3} g_{j_3 k_3}$, ապա տեղադրելով կստացվի՝

$$\Gamma_{j_3 k_3}^{i_3} = -\frac{1}{2} g^{i_3 k_3} \frac{\partial e^{i_3} g_{j_3 k_3}}{\partial U^{s_1}} = -\frac{1}{2} g^{i_3 k_3} \left(\frac{\partial g}{\partial U^{s_1}} \cdot e^{i_3} g_{j_3 k_3} + e^{i_3} \frac{\partial g_{j_3 k_3}}{\partial U^{s_1}} \right) = -\frac{1}{2} g^{i_3 k_3} \frac{\partial g}{\partial U^{s_1}} \cdot g_{j_3 k_3}$$

որտեղ $\frac{\partial g_{j_3 k_3}}{\partial U^{s_1}} = 0$, քանի որ $g_{j_3 k_3}$ կախված չէ s_2 -խմբի կոորդինատներից: Ուրեմն՝

$$\Gamma_{j_3 k_3}^{i_3} = -\frac{1}{2} g^{i_3 k_3} \frac{\partial g}{\partial U^{s_1}} \cdot g_{j_3 k_3} = -q^{i_3} g_{j_3 k_3}; \quad \text{որտեղ } q^{i_3} = \frac{1}{2} g^{i_3 k_3} \frac{\partial g}{\partial U^{s_1}}$$

Այսպիսով ստացվեց, որ

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} &= 0 & \Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} &= P_{j_1 k_1} \delta_{i_1}^{s_1} & \Gamma_{j_1 k_3}^{i_1} &= 0 \\ \Gamma_{j_2 k_2}^{i_2} &= \Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} & \Gamma_{j_2 k_3}^{i_2} &= 0 & \Gamma_{j_3 k_3}^{i_3} &= -q^{i_3} g_{j_3 k_3} \\ \Gamma_{\alpha \beta}^{i_3} &= \frac{1}{2} g^{i_3 \alpha} \left(\frac{\partial g_{s_3 \alpha}}{\partial U^{\beta}} + \frac{\partial g_{s_3 \beta}}{\partial U^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha \beta}}{\partial U^{s_3}} \right) \\ \Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} &= \frac{1}{2} g^{i_1 k_1} \left(\frac{\partial g_{s_2 j_1}}{\partial U^{k_1}} + \frac{\partial g_{s_2 j_1}}{\partial U^{i_1}} - \frac{\partial g_{j_1 k_1}}{\partial U^{s_2}} \right) = -\frac{1}{2} g^{i_1 k_1} \frac{\partial g_{j_1 k_1}}{\partial U^{s_2}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Բանի որ $g_{s_3 j_1} = g_{s_3 k_1} = 0$ համաձայն (3) մատրիցային տեսքի: Հետևաբար՝

$$\Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} = -\frac{1}{2} g^{i_1 k_1} \frac{\partial g_{j_1 k_1}}{\partial U^{s_2}}, \quad \text{բայց քանի որ } g_{j_1 k_1} \text{ կախված չէ } s_3 \text{-տիպի կոորդինատներից, ուրեմն՝}$$

$$\Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} = -\frac{1}{2} g^{i_1 k_1} \frac{\partial g_{j_1 k_1}}{\partial U^{s_2}} = 0$$

Կոմիտեանք՝

$$\Gamma_{jk_2}^{i_2} = \frac{1}{2} g^{i_2 j_2} \left(\frac{\partial g_{j_2 k_2}}{\partial u^{k_2}} + \frac{\partial g_{k_2 j_2}}{\partial u^{j_2}} - \frac{\partial g_{j_2 j_2}}{\partial u^{k_2}} \right) = 0$$

Քանի որ $g_{s,t} = g_{t,t} = 0$ համաձայն (3) մատրիցային տեսքի, ապա կունենանք

$$\Gamma_{jh}^i = \frac{1}{2} g^{i\delta_1} \left(\frac{\partial g_{\delta_1 j}}{\partial U^{\delta_3}} + \frac{\partial g_{\delta_1 h}}{\partial U^j} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial U^{\delta_3}} \right) = \frac{1}{2} g^{i\delta_1} \frac{\partial g_{\delta_1 k_3}}{\partial U^j} \quad \text{вектор} \quad \text{на}$$

$$g_{s_k} = e^q g_{s_3 k_3}; \text{ ապա տեղադրելով կստացվի}$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ijk}}{\partial U^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial (e^{\frac{3}{2}} g_{ijk})}{\partial U^k} = \frac{1}{2} g_{ijk} \left[\frac{\partial q}{\partial U^k} e^{\frac{3}{2}} + e^{\frac{3}{2}} \frac{\partial g_{ijk}}{\partial U^k} \right]$$

Մյուս կողմից՝ $\frac{\partial g_{s_3 k_3}}{\partial U^{j_1}} = 0$, որովհետև $g_{s_3 k_3}^3$ կախված չէ j_1 -խմբի կոորդինատներից:

Ուրեմն $\Gamma_{j_1 k_3}^{i_1} = \frac{1}{2} g^{i_1 j_1} \frac{\partial g}{\partial U_{j_1}} g_{i_1 k_3} = g_{j_1 k_3} \delta_{i_1}^{j_1}$, որտեղ $g_{j_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial U_{j_1}}$; $\delta_{k_3}^{i_1} = g^{i_1 k_3} g_{i_1 k_3}$

(3) մատրիցի տարրերի համար ունենք՝ $g_{s_2 j_2} = g_{j_2 k_2} = 0$, հետևաբար՝

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{sjk}}{\partial U^k} + \frac{\partial g_{sjk}}{\partial U^j} - \frac{\partial g_{jki}}{\partial U^s} \right) = \frac{1}{2} g^{ij} \cdot \frac{\partial g_{sjk}}{\partial U^k}$$

Զանի որ $g_{s_3 k_3} = e^q g_{s_3 k_3}$, ապա տեղադրելով և հաշվի առնելով որ $\frac{\partial g_{s_3 k_3}}{\partial U^3} = 0$,

որովհետև $g_{s,k}$ կախված չէ j_2 -խմբի կոորդինատներից: Հետևաբար կստացվի՝

$$\Gamma_{j,k}^{i,l} = \frac{1}{2} g^{i,k} \frac{\partial g_{j,l}}{\partial u^j} = \frac{1}{2} g^{i,k} \frac{\partial e^q g_{j,l}}{\partial u^h} = \frac{1}{2} g^{i,k} \left(\frac{\partial q}{\partial u^h} e^q g_{j,l} + e^q \frac{\partial g_{j,l}}{\partial u^h} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial u^j} g^{i,k} \cdot g_{j,l}$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial U^i} g^{jk} g_{kj} = q_{,i} \delta^j_k \text{ որովհ } q_{,i} = \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial U^i}, \delta^j_k = g^{jk} \cdot g_{kj}$$

Քանի որ $e^a = e^{a(u^1, u^2, \dots, u^m)}$ ֆունկցիան կախված չէ S_3 -խմբի կոորդինատներից, ապա կոնսնանթ

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) + \dots$$

Լկապիսոյ ստացվեց, որ

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{j_1 k_1}^b &= 0 & \Gamma_{j_1 k_2}^b &= 0 & \Gamma_{j_1 k_3}^b &= q_{j_1} \cdot \delta_{k_3}^b \\ \Gamma_{j_2 k_1}^b &= q_{j_2} \cdot \delta_{k_1}^b & \Gamma_{j_2 k_2}^b &= \Gamma_{j_2 k_3}^b \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Նշենք, որ կոորդինատական ցանցը կազմված է երեք ընտանիքների գծերից

$$I \begin{cases} U^{a_1} = U^{a_1} \\ U^{a_2} = U^{a_2} = const \\ U^{a_3} = U^{a_3} = const \end{cases} \quad II \begin{cases} U^{a_1} = U^{a_1} = const \\ U^{a_2} = U^{a_2} \\ U^{a_3} = U^{a_3} = const \end{cases} \quad III \begin{cases} U^{a_1} = U^{a_1} = const \\ U^{a_2} = U^{a_2} = const \\ U^{a_3} = U^{a_3} \end{cases}$$

Թեորեմ 1. I ընտանիքի ցանկացած զծի շոշափող վեկտորի ուղղությունը գուգահեռ տեղափոխվում է սյուս 2 ընտանիքների ցանկացած զծի ուղղությամբ:

Ապացույց: Իկցուր I ընտանիքի որևէ զծի շոշափող վեկտորը $P_{a_1}^a = \delta_{a_1}^a$ -ն է: Յույց տանք, որ $\frac{DP_{a_1}^a}{Dt} = 0$: Իրոք, ինչպես հայտնի է վեկտորի բացարձակ դիֆերենցիալը հաշվում են հետևյալ կերպ՝

$$\frac{DP_{a_1}^a}{Dt} = \frac{dP_{a_1}^a}{dt} + \Gamma_{bc}^a P_{a_1}^b \frac{dU^c}{dt} \quad (9)$$

$$\frac{dU^c}{dt} = \begin{cases} \frac{dU^{c_1}}{dt}, & \text{եթե } c = c_1 \\ 0, & \text{եթե } c \neq c_1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{dP_{a_1}^a}{dt} = \begin{cases} \frac{dP_{a_1}^{a_1}}{dt}, & \text{եթե } a = a_1 \\ 0, & \text{եթե } a \neq a_1 \end{cases} \quad (11)$$

Հաշվի առնելով (10) և (11) պայմանները, (9)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{DP_{a_1}^a}{Dt} = \frac{dP_{a_1}^{a_1}}{dt} + \Gamma_{bc_1}^{a_1} P_{a_1}^b \frac{dU^{c_1}}{dt} \quad (12)$$

Համաձայն (6) պայմանի կունենանք

$$\Gamma_{bc_1}^{a_1} = \begin{cases} \Gamma_{a_1 c_1}^{a_1}, & \text{եթե } b = c_1 \\ 0, & \text{եթե } b \neq c_1 \end{cases} \quad (13)$$

Մյուս կողմից $P_{a_1}^{a_1}$ -ն կախված չի II կամ III ընտանիքի կոորդինատներից՝ հետևաբար՝

$$\frac{dP_{a_1}^{a_1}}{dt} = \frac{dP_{a_1}^{a_1}}{dU^{a_2}} = \frac{dP_{a_1}^{a_1}}{dU^{a_3}} = 0 \quad (14)$$

Ուրեմն, հաշվի առնելով (13) և (14) պայմանները, (12) հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{DP_{a_1}^a}{Dt} = \frac{DP_{a_1}^a}{dU^{a_2}} = \frac{DP_{a_1}^a}{dU^{a_3}} = 0 \quad (15)$$

Իսկ դա նշանակում է, որ վեկտորը գուգահեռ տեղափոխվում է II կամ III ընտանիքի զծերի նկատմամբ: Թեորեմն ապացուցվեց:

Թեորեմ 2. $P_a = P_a(P_a; 0, 0)$ վեկտորը գուգահեռ տեղափոխվում է կոորդինատական ցանցի II և III ընտանիքների ցանկացած զծի ուղղությամբ:

Ապացույց: Թող $P_a = P_a(P_{a_1}; 0, 0)$, $P_a = P_a(U^1, U^2, \dots, U^n; 0, 0) - P_a(U^{c_1})$

վեկտորի բացարձակ դիֆերենցիալի բանաձևից՝

$$\frac{DP_a}{Dt} = \frac{dP_a}{dt} + \Gamma_{ba}^c P_c \frac{dU^b}{dt} \quad (16)$$

Հաշվի առնելով որ $P_a = P_a(U^c)$ վեկտորը կախված չէ II և III ընտանիքների կոորդինատներից, ապա

$$\frac{dP_a}{dt} = \frac{dP_a}{du^{a_2}} = \frac{dP_a}{du^{a_3}} = 0 \quad (17)$$

Հաշվի առնելով (17) պայմանը և եթե $t = U^{a_2}$ ապա համաձայն (6) առնչությունների, կստանանք՝

$$\frac{DP_a}{DU^{a_2}} = \frac{dP_a}{dU^{a_2}} + \Gamma_{ba}^c P_c \frac{dU^b}{dU^{a_2}} = \Gamma_{a_2 a}^c P_c = \Gamma_{a_2 a}^{a_3} P_{a_3} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } a = a_1 \\ 0, & \text{եթե } a = a_3 \\ -P^{a_1} g_{a_1 b_1} P_{b_1}, & \text{եթե } a = b_1 \end{cases} \quad (18)$$

Հաշվի առնելով (17) և (18) պայմանները, (16) հավասարությունից կստացվի՝

$$\frac{DP_a}{DU^{a_2}} = 0 \quad (19)$$

Հանգումորեն, հաշվի առնելով (17) պայմանը և եթե $t = U^{a_3}$ ապա համաձայն (6) առնչությունների կստանանք՝

$$\frac{DP_a}{DU^{a_3}} = \frac{dP_a}{dU^{a_3}} + \Gamma_{ba}^c P_c \frac{dU^b}{dU^{a_3}} = \Gamma_{a_3 a}^c P_c = \Gamma_{a_3 a}^{a_1} P_{a_1} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } a = a_1 \\ 0, & \text{եթե } a = a_2 \\ -q^{a_1} g_{a_1 b_1} P_{b_1}, & \text{եթե } a = b_1 \end{cases} \quad (20)$$

Հաշվի առնելով (17) և (20) պայմանները, (16) հավասարությունից կունենանք՝

$$\frac{DP_a}{DU^{a_3}} = 0 \quad (21)$$

Փաստորեն (19) և (21) պայմանները նշանակում են, որ P_a վեկտորը զուգահեռ տեղափոխվում է U^{a_2} տեսքի և U^{a_3} տեսքի գծերի ուղղությամբ:

Թեև որն է ապացուցված:

Թեորեմ 3. $q_a = q_a(q_{a_1}; q_{a_2}; 0)$ վեկտորը զուգահեռ տեղափոխվում է կոորդինատների զանգի 3-րդ ընտանիքի զանկազած գծի ուղղությամբ:

Ապացույց. Այժմ դիտարկենք

$$q = q(U^{c_1}; U^{c_2}) \quad (22)$$

$q_a = \frac{\partial q}{\partial U^a} = q_a(q_{a_1}; q_{a_2}; 0)$ վեկտորը կլինի շոշափող վեկտորը U^a գծի ուղղությամբ: Այժմ հարկվում բացարձակ դիֆերենցիալ՝

$$\frac{Dq_a}{DU^{a_3}} = \frac{dq_a}{dU^{a_3}} + \Gamma_{ba}^c q_c \frac{dU^b}{dU^{a_3}} = \Gamma_{a_3 a}^c q_c = \Gamma_{a_3 a}^{a_1} q_{a_1} + \Gamma_{a_3 a}^{a_2} q_{a_2} \quad (23)$$

$$\frac{dq_a}{dU^{a_3}} = 0 \quad (24)$$

քանի որ q_a վեկտորը կախված չէ U^{a_3} տեսքի կոորդինատներից: Համաձայն (6) և (7) բանաձևերի կստացվի՝

$$\Gamma_{a_3 a}^{a_1} = \begin{cases} 0; & \text{եթե } a = a_1 \\ 0; & \text{եթե } a = a_2 \\ -q^{a_1} g_{a_2 b_1}; & \text{եթե } a = b_1 \end{cases} \quad (25)$$

$$\Gamma_{a_2 a}^{a_2} = \begin{cases} 0; & \text{եթե } a = a_1 \\ 0; & \text{եթե } a = a_2 \\ -q^{a_2} g_{a_2 b_2}; & \text{եթե } a = b_2 \end{cases} \quad (26)$$

Հաշվի առնելով (24), (25) և (26) պայմանները, (23) հավասարությունը կրեդոնի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} \frac{Dq_{a_1}}{DU^{a_1}} = 0 \\ \frac{Dq_{a_2}}{DU^{a_2}} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

(27) պայմանը նշանակում է, որ $\frac{Dq_a}{DU^{a_3}} = 0$:

Փաստորեն դա նշանակում է, որ $q_a = q_a(q_{a_1}; q_{a_2}; 0)$ վեկտորը U^{a_3} գծի ուղղությամբ զուգահեռ տեղափոխվել է: Թեորեմն ապացուցվեց:

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են ռիմանյան մի տարածության երեք բազմաձևությունների օրթոգոնալ կոմպոզիցիայի կոորդինատական ցանցի և կոորդինատական մակերևույթների հատկությունները: Մասնավորապես, ապացուցվում է, որ կոորդինատական գծերը բաժանվում են երեք ընտանիքների, որոնցից առաջին ընտանիքի ցանկացած գծի շղջափող վեկտորը զուգահեռ տեղափոխվում է երկրորդ և երրորդ ընտանիքների ցանկացած գծի ուղղությամբ:

Резюме

В работе изучаются свойства координатной сети и координатных поверхностей одного риманова пространства, являющегося пространством ортогональной композиции трех многообразий. В частности, доказано, что координатные линии разделяются на три семейства, причем касательный вектор любой линии первого семейства переносится параллельно вдоль любой линии второго и третьего семейства.

Գրականություն

1. Коган В.Ф. Основы теория поверхностей. М.: ОГИЗ. 1948.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: 1964.
3. Матевосян Л.А. О геометрических свойствах некоторых ортогональных расслоений римановых пространств. Ученые записки ЕрГУ. 1979.
4. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: "Наука". 1976.
5. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ГИИЛ. 1948.

Արմէն մաթեմատիկայի ամբիոն