

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՈՒՄԱՆ ԵՐԿՉԱՓ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ  
ՄԻ ՆՆԴԻՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Վ.Ս. Սաֆարյան, Ռ. Մ. Հարությունյան, Վ. Շ. Մանասյան

Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման զգայնության վերլուծությունը (լուծման կախվածության ուսումնասիրությունը նպատակային ֆունկցիայի գործակիցներից և սահմանափակումների ազատ անդամներից) հանգում է պարամետրական ծրագրավորման խնդիրներին [1, 2]: Պարամետրական գծային և քառակուսային ծրագրավորման խնդիրներին լուծման ալգորիթմը և հիմնական թեորեմները բերված են [3, 4] աշխատանքներում:

Ստորև դիտարկվում է պարամետրական ոչ գծային ծրագրավորման երկչափ խնդիր, որի մաթեմատիկական մոդելն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} Z = a_1 x_1 + a_2 x_2 \rightarrow \max, \\ |\varphi_1(\alpha) x_1 + \varphi_2(\alpha) x_2| \leq P, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, P \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

որտեղ  $\varphi_1(\alpha)$ ,  $\varphi_2(\alpha)$  ֆունկցիաները սահմանափակ, կտոր առ կտոր ողորկ ֆունկցիաներ են  $\alpha \in [a, b]$  հատվածի վրա:

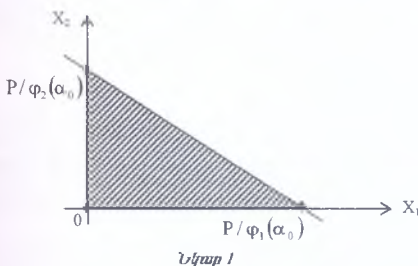
Դիտարկենք հետևյալ նրբը դեպքերը.

$$1. \varphi_1(\alpha) \cdot \varphi_2(\alpha) > 0, \alpha \in [a, b];$$

Այս դեպքում խնդրի մաթեմատիկական մոդելն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} Z = a_1 x_1 + a_2 x_2 \rightarrow \max, \\ \varphi_1(\alpha) x_1 + \varphi_2(\alpha) x_2 \leq P, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ \varphi_1(\alpha) > 0, \varphi_2(\alpha) > 0, \alpha \in [a, b]; \end{cases} \quad (2)$$

Որևէ ֆիքսված  $\alpha_0 \in [a, b]$  արժեքի դեպքում (2) խնդրի սահմանափակումներով որոշված լուծումների թույլատրելի բազմությունը ներկայադրորեն կապակցվողի հետևյալ կերպ (նկ. 1).



Հայտնի է, որ (2) խնդրի լուծումը կարող է հանգիստանալ թույլատրելի բազմության եզրային կետերից որևէ մեկը [1], հետևաբար

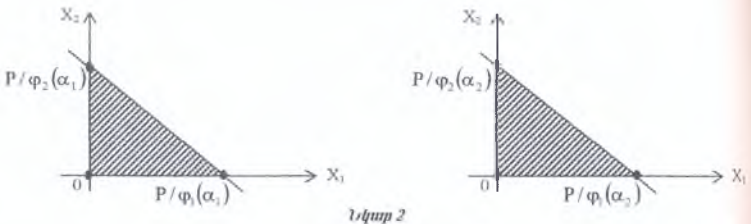
$$Z = \max \left( 0, a_1 \frac{P}{\varphi_1(\alpha_0)}, a_2 \frac{P}{\varphi_2(\alpha_0)} \right), \quad (3)$$

ընդ որում  $Z = 0$  միայն այն դեպքում, երբ  $a_1 \leq 0$  և  $a_2 \leq 0$ :

((1)-ից հետևում է, որ  $\varphi_1(\alpha) < 0$ ,  $\varphi_2(\alpha) < 0$ ,  $\alpha \in [a, b]$  դեպքը բերվում է  $\varphi_1(\alpha) > 0$ ,  $\varphi_2(\alpha) > 0$  դեպքին):

Ենթադրենք  $\alpha_1 \in [a, b]$  և  $\alpha_1$ -ը  $\varphi_1(\alpha)$ -ի մինիմումի կետն է՝  $\varphi_1(\alpha_1) \leq \varphi_1(\alpha)$ ,  $\alpha_2 \in [a, b]$  և  $\alpha_2$ -ը  $\varphi_2(\alpha)$ -ի փոքրագույն արժեքի կետն է՝  $\varphi_2(\alpha_2) \leq \varphi_2(\alpha)$ ,  $\alpha \in [a, b]$ :

$\alpha_1$  և  $\alpha_2$  արժեքների դեպքում (2) խնդրի լուծումների թույլատրելի բազմությունը ներկայացվող են կապակցվող հետևյալ տեսքով (նկ. 2):



Հետևաբար, (2) խնդրի նպատակային ֆունկցիայի արժեքը և լուծումը կորոշվեն հետևյալ առնչություններից.

$$Z = \max \left( 0, P \frac{a_1}{\varphi_1(\alpha_1)}, P \frac{a_2}{\varphi_2(\alpha_1)}, P \frac{a_1}{\varphi_1(\alpha_2)}, P \frac{a_2}{\varphi_2(\alpha_2)} \right),$$

$$1. \quad a_1 \leq 0, a_2 \leq 0 \Rightarrow Z = 0, X = (0, 0),$$

$$2. \quad a_1 \geq 0, a_2 \geq 0 \Rightarrow Z = \max \left( P \frac{a_1}{\varphi_1(\alpha_1)}, P \frac{a_2}{\varphi_2(\alpha_2)} \right) \quad \text{և} \quad \text{համապատասխանաբար}$$

$$X = (P/\varphi_1(\alpha_1), 0) \quad \text{կամ} \quad X = (0, P/\varphi_2(\alpha_2)),$$

$$3. \quad a_1 \geq 0, a_2 \leq 0 \Rightarrow Z = P \frac{a_1}{\varphi_1(\alpha_1)}, X = (P/\varphi_1(\alpha_1), 0),$$

$$4. \quad a_1 \leq 0, a_2 \geq 0 \Rightarrow Z = P \frac{a_2}{\varphi_2(\alpha_2)}, X = (0, P/\varphi_2(\alpha_2)):$$

$$\text{II. } \varphi_1(\alpha) \cdot \varphi_2(\alpha) < 0, \alpha \in [a, b]:$$

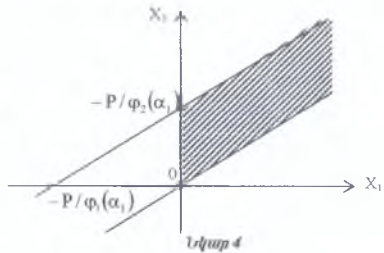
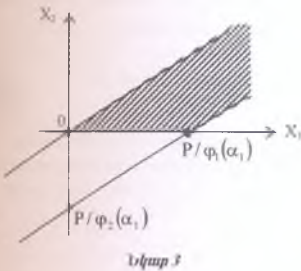
Ընդունենք  $\varphi_1(\alpha) > 0$  և  $\varphi_2(\alpha) < 0$ \* (երբ  $\varphi_1(\alpha) < 0$  և  $\varphi_2(\alpha) > 0$  դատողությունները հանգումորեն) և այս դեպքում նախնական խնդիրը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տարբերակներով.

\* Երբ  $\varphi_1(\alpha)$ -ն, ինչպես նաև  $\varphi_2(\alpha)$ -ն փոխում են նշանը, երբ  $\alpha \in [a, b]$ , ապա  $[a, b]$ -ն կարելի է տրոհել վերջավոր թվով միջակայքների, որտեղ նրանք պահպանում են նշանը և այդ տեղամասերում նպատակային ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը կլինի խնդրի լուծումը:

$$\begin{cases} Z = a_1 x_1 + a_2 x_2 \rightarrow \max, \\ \varphi_1(\alpha) x_1 + \varphi_2(\alpha) x_2 \geq 0, \\ \varphi_1(\alpha) x_1 + \varphi_2(\alpha) x_2 \leq P, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} Z = a_1 x_1 + a_2 x_2 \rightarrow \max, \\ \varphi_1(\alpha) x_1 + \varphi_2(\alpha) x_2 \leq 0, \\ -\varphi_1(\alpha) x_1 - \varphi_2(\alpha) x_2 \leq P, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0: \end{cases} \quad (5)$$

(4) և (5) խնդիրների լուծումների թույլատրելի բազմությունները ներկայացված են նկ. 3-ում և նկ. 4-ում:



Դիտարկենք (4) խնդրի լուծումը.

1.  $a_1 \leq 0, a_2 \leq 0 \Rightarrow Z = 0, X = (0, 0)$

2.  $a_1 > 0, a_2 > 0 \Rightarrow Z \rightarrow \infty,$

3.  $a_1 > 0, a_2 < 0 \Rightarrow$  եթե գոյություն ունի  $\alpha_0 \in [a, b]$ , որ  $\left| \frac{\varphi_2(\alpha_0)}{\varphi_1(\alpha_0)} \right| > \left| \frac{a_2}{a_1} \right|$ , ապա  $Z \rightarrow \infty$ ,

հակառակ դեպքում  $Z = P \frac{a_1}{\varphi_1(\alpha_1)}, X = (P / \varphi_1(\alpha_1), 0)$  որտեղ  $\varphi_1(\alpha_1) \leq \varphi_1(\alpha), \alpha \in [a, b]$ ,

1.  $a_1 < 0, a_2 > 0 \Rightarrow$  եթե գոյություն ունի  $\alpha_0 \in [a, b]$ , որ  $\left| \frac{\varphi_2(\alpha_0)}{\varphi_1(\alpha_0)} \right| < \left| \frac{a_2}{a_1} \right|$ , ապա  $Z \rightarrow \infty$ ,

հակառակ դեպքում  $Z = 0, X = (0, 0)$ .

Նույն դատողությունները կարելի է կատարել (5) խնդրի վերաբերյալ:

III. Ենթադրենք  $\alpha_0 \in [a, b]$ ,  $\varphi_1(\alpha_0) = 0$  ( $\varphi_2(\alpha_0) = 0$ ) հավասարման արմատն է և  $a_1 > 0$  ( $a_2 > 0$ ), ապա  $Z \rightarrow \infty$ , հակառակ դեպքում (եթե  $\varphi_1(\alpha_0) = 0$  և  $a_1 \leq 0$ ,  $\varphi_2(\alpha_0) = 0$  և  $a_2 \leq 0$ ) խնդիրը բերվում է I և II դեպքերին:

Եթե  $\varphi_1(\alpha_0) \cdot \varphi_2(\alpha_0) = 0$ , ապա նպատակային ֆունկցիայի արժեքն անսահմանափակ է: Պարամետրական ոչ գծային ծրագրավորման (I) խնդրի լուծումը հանգում է գծային ծրագրավորման երկչափ խնդիրների լուծմանը, որն իրագործվում է երկրաչափորեն:

### *Ամփոփում*

Ներկայացվող պարամետրական ոչ գծային ծրագրավորման երկչափ խնդրում քննարկվում են դեպքեր՝ կախված նրա մեջ մտնող ֆունկցիաներից, որոնց շնորհիվ էլ խնդրի լուծումը հանգում է երկրաչափորեն իրագործվող գծային ծրագրավորման երկչափ խնդիրների լուծմանը:

### *Резюме*

В предлагаемой двумерной задаче нелинейного параметрического программирования рассматриваются случаи, зависящие от входящих в нее функций, благодаря которым решение задачи сводится к решению геометрически реализуемых двумерных задач линейного программирования.

### *Գրականություն*

1. Таха Х. Введение в исследование операций. М., с 901, 2005..
2. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М., с.280, 1975.
3. Jizmagian G.S. Generalized Programming Solution of Continuous - Time Linear - System Optimal Control Problems, Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, Cal., 1968.
4. Jizmagian G.S. An Algorithm for Parametric Linear Programming with Nonlinear Functions of the Parameter, 10th Meeting of the Institute of Management Sci., Atlanta, Georgia, Oct. 1969.

**ԵՊՏ, կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոն**  
**ԱՐՊՏ, մաթեմատիկայի ամբիոն**  
**ԱՐՊՏ, կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոն**