

ОБ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМОЙ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Г.Г.Саакян

Рассматривается следующая задача, состоящая из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' + p(t)y_2 = 0, \\ y_2' + r(t)y_1 = 0, \end{cases} \quad (1a)$$

и условия

$$y_1(a) = y_{10}, \quad y_2(a) = y_{20}, \quad (1b)$$

где $p(t), r(t)$ - действительные, непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, y_{10}, y_{20} - произвольные действительные числа, такие, что $y_{10}^2 + y_{20}^2 \neq 0$.

Как известно (см., например, [1]), пара функций $y_1(t), y_2(t)$, определенная на интервале $a < t < b$, называется *решением задачи* (1a)-(1b), если она, будучи подставленной в левые части уравнений системы (1a), обращает их в тождество на $a < t < b$, а также удовлетворяет условиям (1b). Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ при этом называются соответственно первой и второй компонентами решения задачи (1a)-(1b), причем компонента решения задачи (1a)-(1b) называется *осциллирующей* (колеблющейся) на отрезке $[a, b]$, если она имеет на этом отрезке более одного нуля.

Прежде, чем перейти к рассмотрению осцилляционных свойств решений задачи (1a)-(1b), сравним следующие системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' + p_1(t)y_2 = 0, \\ y_2' + r_1(t)y_1 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

и

$$\begin{cases} y_1' + p_2(t)y_2 = 0, \\ y_2' + r_2(t)y_1 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $p_i(t), r_i(t)$ ($i = 1, 2$) - действительные, непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции.

Имеет место

Теорема 1. Пусть $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ - соответственно нетривиальные

решения систем (2) и (3), и пусть

$$p_2(t) < p_1(t) < 0, \quad r_2(t) > r_1(t) > 0 \quad (4a)$$

или

$$p_1(t) > p_2(t) > 0, \quad r_1(t) < r_2(t) < 0. \quad (4b)$$

Тогда между соседними нулями любой компоненты $u(t)$ находится хотя бы один нуль одной из компонент $v(t)$ (нули чередуются).

Доказательство. Пусть $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – соответственно нетривиальные решения систем (2) и (3), и имеет место условие (4a) (доказательство в случае выполнения условия (4b) проводится аналогично). Тогда будем иметь систему тождеств

$$\begin{cases} u_1' + p_1(t)u_2 \equiv 0, \\ u_2' + r_1(t)u_1 \equiv 0, \end{cases} \quad (5)$$

и

$$\begin{cases} v_1' + p_2(t)v_2 \equiv 0, \\ v_2' + r_2(t)v_1 \equiv 0. \end{cases} \quad (6)$$

Предположим, что t_1 и t_3 – соседние нули одной из компонент $u(t)$. Не теряя общности рассуждений, предположим, что они являются нулями $u_1(t)$, т.е. $u_1(t_1) = u_1(t_3) = 0$ и $u_1(t) \neq 0$ при $t \in (t_1, t_3)$. Согласно теореме 2 (см., [2]) существует, причем только одна, точка $t_2 \in (t_1, t_3)$, являющаяся нулем для компоненты $u_2(t)$. Так как $u_1(t)$ не имеет нулей на интервале (t_1, t_3) , то она будет сохранять свой знак на (t_1, t_3) . Предположим, что на (t_1, t_3)

$$u_1(t) > 0 \quad (7)$$

(доказательство в случае $u_2(t) < 0$ проводится аналогично). Очевидно, что в этом случае будем иметь, что

$$u_1'(t_1) > 0.$$

Тогда, так как $p_1(t_1) < 0$, то из первого тождества системы (5) найдем, что

$$u_2(t_1) > 0, \quad (8)$$

и, так как $u_2(t_2) = 0$, то получим, что при $t \in (t_1, t_2)$

$$u_2(t) > 0 \quad (9)$$

и

$$u_2(t) < 0 \quad (10)$$

при $t \in (t_2, t_3)$.

Предположим, что ни одна из компонент $v(t)$ не имеет нулей на интервале (t_1, t_3) . Тогда $v_1(t)$ и $v_2(t)$ должны быть знакопостоянны на (t_1, t_3) . Предположим теперь, что на (t_1, t_3)

$$v_1(t) > 0, v_2(t) > 0. \quad (11)$$

Тогда, по непрерывности $v_1(t)$ и $v_2(t)$, будем иметь, что

$$v_1(t_1) \geq 0, v_2(t_1) \geq 0. \quad (12)$$

Далее, умножив вторые тождества систем (5) и (6) соответственно на v_1 и $(-u_1)$, а первые на $(-v_2)$ и u_2 , затем сложив полученные, будем иметь тождество

$$(u_2 \cdot v_1 - v_2 \cdot u_1)' \equiv (r_2(t) - r_1(t))u_1v_1 + (p_1(t) - p_2(t))u_2v_2. \quad (13)$$

Проинтегрируем его в пределах от t_1 до t_2 . Получим

$$(u_2 \cdot v_1 - v_2 \cdot u_1) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (r_2(t) - r_1(t))u_1(t)v_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} (p_1(t) - p_2(t))u_2(t)v_2(t)dt,$$

или, учитывая то, что $u_1(t_1) = u_2(t_2) = 0$, будем иметь

$$-u_1(t_2) \cdot v_2(t_2) - u_2(t_1) \cdot v_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (r_2(t) - r_1(t)) u_1(t) v_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} (p_1(t) - p_2(t)) u_2(t) v_2(t) dt.$$

В полученном равенстве левая часть согласно (7), (8), (11) и (12) будет неположительной, тогда как в силу (4а), (7), (9) и (11), правая часть — положительна. Получили противоречие. К противоречию мы придем и предположив, что $v_1(t) < 0$, $v_2(t) < 0$.

Предположим теперь, что на (t_1, t_3)

$$v_1(t) < 0, v_2(t) > 0 \quad (14)$$

(аналогично рассматривается и случай, когда $v_1(t) > 0$, $v_2(t) < 0$). Проинтегрируем вновь тождество (13), но в пределах от t_2 до t_3 и, учитывая то, что $u_1(t_3) = u_2(t_2) = 0$, получим

$$u_2(t_3) \cdot v_1(t_3) + v_2(t_2) \cdot u_1(t_2) = \int_{t_2}^{t_3} (r_2(t) - r_1(t)) u_1(t) v_1(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} (p_1(t) - p_2(t)) u_2(t) v_2(t) dt.$$

В этом равенстве левая часть, согласно (7), (9) и (14), будет неотрицательной, тогда как в силу (4а), (7), (10) и (14), правая часть — отрицательна. Полученное вновь противоречие и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. Пусть $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ — соответственно нетривиальные решения систем (2) и (3), удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям:

$$u_1(a) = v_1(a), \quad u_2(a) = v_2(a), \quad (15)$$

и пусть

$$p_2(t) \leq p_1(t) < 0, \quad r_2(t) \geq r_1(t) > 0 \quad (16a)$$

или

$$p_2(t) \geq p_1(t) > 0, \quad r_2(t) \leq r_1(t) < 0. \quad (16b)$$

Если одна из компонент $u(t)$ имеет ℓ нулей на отрезке $[a, b]$, то одна из компонент $v(t)$ имеет на том же отрезке $[a, b]$ не менее ℓ нулей, причем k -ый нуль компоненты $v(t)$ не больше k -ого нуля компоненты $u(t)$.

Доказательство. Предположим, что по отношению к системам (1) и (2) имеет место условие (16а) (аналогично проводится доказательство и в случае

$p_2(t) \geq p_1(t) > 0$, $r_2(t) \leq r_1(t) < 0$). Пусть $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ — соответственно

нетривиальные решения систем (1) и (2), тогда вновь будем иметь систему тождеств (5) и (6), а, следовательно, и тождество (13). Предположим, что t_1 — наиболее близкий к точке a нуль одной из компонент $u(t)$, отличный от a (в случае совпадения t_1 с a доказательство — очевидно). Такой нуль всегда существует, так как согласно лемме 2 (см. [1]), нули $u(t)$ — простые и изолированные. Не теряя общности рассуждений, предположим, что t_1 — нуль $u_2(t)$. Так как $u_2(t)$ по предположению не имеет нулей на (a, t_1) , то она будет сохранять свой знак на (a, t_1) . Предположим, что на (a, t_1)

$$u_2(t) > 0 \quad (17)$$

(доказательство в случае $u_2(t) < 0$ проводится аналогично). Отсюда будет следовать, что $u_2(a) > 0$ (если предположить, что $u_2(a) = 0$, то по теореме Ролля найдется точка $t_0 \in (a, t_1)$ такая, что $u_2'(t_0) = 0$, но тогда из второго тождества системы (5) найдем, что $u_1(t_0) = 0$, что противоречит предположению относительно выбора точки t_1). И так как $u_2(t_1) = 0$, то получим, что $u_2'(t) < 0$ при $t \in (a, t_1)$.

Очевидно, что для доказательства теоремы, в силу теоремы 1, достаточно показать, что одна из компонент $v(t)$ имеет на интервале $(a, t_1]$ по крайней мере один нуль. Предположим обратное, т.е. $v_1(t) \cdot v_2(t) \neq 0$ при $t \in (a, t_1]$. Тогда $v_1(t)$ и $v_2(t)$ будут сохранять свои знаки на $(a, t_1]$. И так как $v_2(a) = u_2(a) > 0$, то, следовательно, будем иметь, что

$$v_2(t) > 0, \quad (18)$$

и, в частности,

$$v_2(t_1) > 0. \quad (19)$$

Так как при $t \in (a, t_1)$ $u_2'(t) < 0$ и $r_1(t) > 0$, то из второго тождества системы (5) будет

$$u_1(t) > 0. \quad (20)$$

Тогда, так как $u_1(a) \neq 0$, то получим, что

$$u_1(a) > 0, \quad u_1(t_1) > 0. \quad (21)$$

(так как $u_2(t_1) = 0$, то в силу леммы 1 (см. [1]), $u_1(t_1)$ не может равняться нулю. Так как $v_1(t)$ сохраняет свой знак на $(a, t_1]$ и $v_1(a) = u_1(a) > 0$, то получим, что на интервале $(a, t_1]$

$$v_1(t) > 0. \quad (22)$$

Проинтегрируем тождество (13) в пределах от a до t_1 . Получим

$$(u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2) \Big|_a^{t_1} = \int_a^{t_1} (r_1(t) - r_2(t)) u_1(t) v_1(t) dt + \int_a^{t_1} (p_2(t) - p_1(t)) u_2(t) v_2(t) dt,$$

или, учитывая (15), и то, что $u_2(t_1) = 0$, будем иметь

$$u_1(t_1) \cdot v_2(t_1) = \int_a^{t_1} (r_1(t) - r_2(t)) u_1(t) v_1(t) dt + \int_a^{t_1} (p_2(t) - p_1(t)) u_2(t) v_2(t) dt.$$

В последнем равенстве левая часть, согласно (19) и (21), будет неотрицательной, тогда как в силу (14) и условий (17), (18), (20) и (22), правая часть – отрицательна. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Рассмотрим теперь задачу (1a)–(1b). Имеем место

Теорема 3. Если в системе (1a) на отрезке $[a, b]$ $p(t) > 0$, $r(t) < 0$ или $p(t) < 0$, $r(t) > 0$

и длина отрезка $[a, b]$ больше или равна $\frac{2\pi}{mn}$, где

$$m^2 = \min_{a \leq t \leq b} |p(t)|, \quad n^2 = \min_{a \leq t \leq b} |r(t)|, \quad m > 0, n > 0,$$

то решение задачи (1a)–(1b) будет на этом отрезке осциллирующим, причем нули компонент будут перемежаться, а каждый нуль одной компоненты будет являться точкой экстремума для другой.

Доказательство. Предположим, что в системе (1a) $p(t) > 0$, $r(t) < 0$ (аналогично рассматривается и случай $p(t) < 0$, $r(t) > 0$) и рассмотрим параллельно с задачей (1a)-(1b) задачу

$$\begin{cases} y_1' + m^2 y_2 = 0, \\ y_2' - n^2 y_1 = 0, \end{cases} \quad (23a)$$

$$y_1(t_0) = y_{10}, \quad y_2(t_0) = y_{20}, \quad (23b)$$

где

$$m^2 = \min_{a \leq t \leq b} p(t), \quad n^2 = -\max_{a \leq t \leq b} r(t), \quad m > 0, n > 0 \quad (23c)$$

Нетрудно показать, что $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ — решение задачи (23a)-(23b) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A \cos(mnt + \phi), \\ u_2(t) &= \frac{An}{m} \sin(mnt + \phi), \end{aligned} \quad (24)$$

причем, постоянные A и ϕ однозначно определяются из условий (23b), а именно: $u_1(t_0) = y_{10}$, $u_2(t_0) = y_{20}$. Из формул (24), в частности следует, что на любом отрезке $[a, b]$, длина которого больше или равна $\frac{2\pi}{mn}$, компоненты решения задачи (23a)-(23b) имеют более одного нуля. Примем

$$p_1(t) \equiv m^2, \quad r_1(t) \equiv -n^2, \quad p_2(t) \equiv p(t), \quad r_2(t) \equiv r(t),$$

тогда очевидно, что имеют место условия:

$$r_2(t) \leq r_1(t) < 0, \quad p_2(t) \geq p_1(t) > 0. \quad (25)$$

Предположим теперь, что $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ — решение задачи (1a)-(1b), тогда будем иметь,

что

$$u_1(a) = v_1(a), \quad u_2(a) = v_2(a). \quad (26)$$

Для систем (1a) и (1b), с учетом (25) и (26), имеют место условия теоремы 2. Применяя ее, а также, учитывая теоремы 1 и 2 (см. [1]), получим то, что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий утверждение теоремы 2.

Пример. Рассматривается следующая задача

$$\begin{cases} y_1' + ty_2 = 0, \\ y_2' - ty_1 = 0, \end{cases} \quad (27a)$$

$$y_1(2) = 1.5, \quad y_2(2) = 2 \quad (27b)$$

на отрезке $[2, 4]$. В данном случае $y_{10} = 1.5$, $y_{20} = 2$, $p(t) = t$ и $r(t) = t$. Далее, имеем

$$\min_{1 \leq t \leq 4} p(t) = \min_{1 \leq t \leq 4} r(t) = 2,$$

и, следовательно, $m = n = 2$. Замечим, что для рассматриваемой задачи имеют место условия теоремы 2, а именно

1. на отрезке $[2, 4]$ $p(t) > 0$ и $r(t) < 0$,

2. длина отрезка $[2, 4]$ больше, чем $\frac{2\pi}{mn} = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, одна из компонент решения задачи (27a)-(27b), согласно теореме 2, имеет на интервале $[2, 4]$ более одного нуля, т.е. является осциллирующей. Убедимся теперь в этом, проведя непосредственные вычисления. Нетрудно найти, что общее решение системы (27a) можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A \sin \left(\int_{t_0}^t \tau d\tau + \phi \right) = A \sin \left(\frac{t^2}{2} + \psi \right), \\ y_2(t) &= A \cos \left(\int_{t_0}^t \tau d\tau + \phi \right) = A \cos \left(\frac{t^2}{2} + \psi \right), \end{aligned}$$

где A и ψ – произвольные постоянные. Учитывая условия (27b), получим для определения значений постоянных A и ψ следующую систему уравнений

$$\begin{cases} A \sin(2 + \psi) = 1,5, \\ A \cos(2 + \psi) = 2, \end{cases}$$

решив которую найдем, что

$$A = 2,5; \psi \approx -1,36.$$

Для полученных значений A и ψ , как нетрудно убедиться, каждая из компонент решения действительно будет иметь на отрезке $[2, 4]$ два нуля, причем нули компонент перемежаются, а нуль каждой из компонент является точкой экстремума для другой компоненты.

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է խնդիր երկու դիֆերենցիալ հավասարումների գծային համասեռ մի համակարգից և սկզբնական պայմաններից: Դիտարկվող համակարգի համար ապացուցվում է համեմատման թեորեմը, իսկ այնուհետև, նրա օգնությամբ ապացուցվում է թեորեմ խնդրի լուծումների օսցիլյացիայի մասին հստատառուն նշաններով գործակիցների դեպքում:

Резюме

В статье рассматривается задача из одной однородной линейной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка и начального условия. Для рассматриваемой системы доказывается теорема сравнения, а затем с ее помощью доказывается теорема об осцилляции решений задачи в случае знакопостоянных коэффициентов.

Լիտերատուրա

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. т.1, М.: ИЛ, 1953.
2. Саакян Г.Г. О свойствах решений одной линейной однородной системы двух дифференциальных уравнений. Ученые записки АргУ. № 2. 2006.

ԱրГУ, кафедра прикладной математики и информатики