Известия НАН Армении, Физика, т.58, №4, с.539–546 (2023)

УДК 548.732
DOI:10.54503/0002-3035-2023-58.4-539

ВЕКТОРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОЛЯ И ПОЛЯ ЗАРЯДОВ В СРЕДАХ

М.К. БАЛЯН

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

e-mail: mbalyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 6 октября 2023 г.)

Рассмотрены векторные нестационарные дифракционные электромагнитные поля и поля зарядов в произвольным образом выбранном объеме как в однородных, так и в неоднородных средах. Эти формулы представлены в двух формах, каждая из которых имеет свои преимущества в применениях. Непосредственно получены также обобщения векторных формул Кирхгофа–Котлера для прерывных полей в нестационарном случае.

1. Введение

В предыдущих работах [1–4] были найдены векторные формулы для электромагнитного поля в произвольно выбранном объеме при наличии в объеме движущихся зарядов. Получены также векторные формулы для электромагнитного поля в средах в гармоническом случае. Был применен метод векторных функций Грина. Для последней найдены выражения как в свободном пространстве [1], так и в средах [4]. Учитываются как дифракционные поля, так и поля зарядов, движущихся внутри выбранного объема. Вследствие применения векторной функции Грина формулы Кирхгофа–Котлера получены непосредственно [4], без обычно применяемых предположений.

В этой работе исследована векторная теория дифракции и полей заряженных частиц в средах в нестационарном случае. Рассмотрены случаи однородных и неоднородных сред.

2. Уравнения нестационарного электромагнитного поля в неоднородных средах

Чтобы получить нестационарные векторные уравнения для электромагнитного поля $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ в неоднородных изотропных средах в произвольным образом выбранном объеме V с поверхностью S (рис.1), выпишем формулы для проекций полей на произвольный постоянный вектор $\mathbf{f}$ [1]:

$$\mathbf{fE}(\mathbf{r}_\mathrm{p},t_\mathrm{p})=\mathbf{f}\left(\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_\mathrm{p}}\oint_S[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]\frac{1}{R}dS+\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\oint_S\frac{[(\mathbf{E}\times\mathbf{n})]}{R}dS\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi}\nabla_\mathrm{p}\oint_S\frac{[\mathbf{En}]}{R}dS-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_\mathrm{p}}\int_V\frac{[\mathbf{j}]}{R}dV-\mathrm{grad}_\mathrm{p}\int_V\frac{[\rho]}{R}dV\right)$$

$$+\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \mathrm{rot}\left(\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{f}}{R}(t_\mathrm{p}-t-R/c)\theta(t_\mathrm{p}-t-R/c)\right)\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)d\mathbf{S}dt,$$

$$\mathbf{fB}(\mathbf{r}_\mathrm{p},t_\mathrm{p})=\mathbf{f}\left(-\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\oint_S\frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]}{R}dS+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_\mathrm{p}}\oint_S\frac{[(\mathbf{E}\times\mathbf{n})]}{R}dS+\frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}_\mathrm{p}\oint_S\frac{[\mathbf{Bn}]}{R}dS\right. \quad (1)$$

$$\left.+\frac{1}{c}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\int_V\frac{[\mathbf{j}]}{R}dV\right)-\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S\mathrm{rot}\left(\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{f}}{R}(t_\mathrm{p}-t-R/c)\theta(t_\mathrm{p}-t-R/c)\right)\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)d\mathbf{S}dt.$$

Здесь $\mathbf{r}_\mathrm{p}$ – радиус-вектор точки наблюдения p, t_p – время наблюдения. Дифракционные поля, выраженные через поверхностные интегралы, обусловлены внешними зарядами. Объемные интегралы выражают поля зарядов, движущихся внутри объема. Производные, имеющие индекс p означают дифференцирование по координатам точки наблюдения, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки интегрирования, $R=|\mathbf{r}_\mathrm{p}-\mathbf{r}|$, а скобка $[\cdot]$ означает, что значение функции внутри скобки берется в запаздывающий момент $t_\mathrm{p}-R/c$. Последние члены в (1) – поверхностные интегралы, содержащие полный ротор, равны нулю для непрерывных полей и их непрерывных первых производных. Они не равны нулю для прерывных полей. Интегрирование по частям по времени показывает, что Фурье-образы этих членов совпадают с членами, введенными Котлером для гармонических, прерывных на поверхности, полей. Этими членами, при использовании разрывных граничных условий Кирхгофа [4–6] в гармоническом случае, обусловлены добавочные члены в формуле Кирхгофа. Следовательно, поверхностные интегралы, содержащие полный ротор, являются обобщением на нестационарный случай членов, введенных Котлером для гармонических полей.

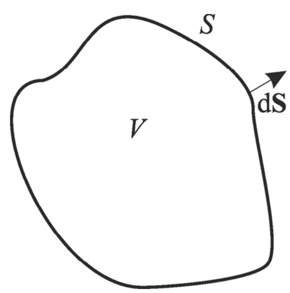

Рис.1. Объем V и поверхность интегрирования S. Показан элемент поверхности интегрирования $d\mathbf{S}$.

2.1. Нестационарный случай непрерывных полей в среде

В случае непрерывных полей в (1) поверхностные интералы по замкнутой поверхности, содержащие полные роторы, равны нулю. Плотности заряда и тока – $\rho=\rho_1+\rho_2$ и $\mathbf{j}=\mathbf{j}_1+\mathbf{j}_2$, где индекс 1 относится к зарядам, совершающим заданное движение, а индекс 2 – к индуцированным зарядам. Для индуцированных зарядов в немагнитной неоднородной среде имеем $\rho_2=-\mathrm{div}\mathbf{P}$ и $\mathbf{j}_2=\partial\mathbf{P}/\partial t$, где $\mathbf{P}$ – вектор поляризации [7]. Учитывая также, что $\mathbf{f}$ – произвольный вектор, из (1) получим

$$
\mathbf{E}(\mathbf{r}_\text{p},t_\text{p})=\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_\text{p}}\oint_S[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]\frac{1}{R}dS+\frac{1}{4\pi}\text{rot}_\text{p}\oint_S\frac{[(\mathbf{E}\times\mathbf{n})]}{R}dS+\frac{1}{4\pi}\nabla_\text{p}\oint_S\frac{[\mathbf{En}]}{R}dS
$$

$$
-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_\text{p}}\int_V\frac{[\mathbf{j}_1]}{R}dV-\text{grad}_\text{p}\int_V\frac{[\rho_1]}{R}dV-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_p^2}\int_V\frac{[\mathbf{P}]}{R}dV+\text{grad}_\text{p}\text{div}_\text{p}\int_V\frac{[\mathbf{P}]}{R}dV, \tag{2}
$$

$$
\mathbf{B}(\mathbf{r}_\text{p},t_\text{p})=-\frac{1}{4\pi}\text{rot}_\text{p}\oint_S\frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{B})]}{R}dS+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_\text{p}}\oint_S\frac{[(\mathbf{E}\times\mathbf{n})]}{R}dS
$$

$$
+\frac{1}{4\pi}\text{grad}_\text{p}\oint_S\frac{[\mathbf{Bn}]}{R}dS+\frac{1}{c}\text{rot}_\text{p}\int_V\frac{[\mathbf{j}_1]}{R}dV+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_\text{p}}\text{rot}_\text{p}\int_V\frac{[\mathbf{P}]}{R}dV.
$$

Связь между поляризацией и полем при линейном отклике среды в нестационарном случае дается через функцию отклика κ [8]:

$$
\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\kappa(\mathbf{r},t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t')dt'=\int_{-\infty}^{t}\kappa(\mathbf{r},t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t')dt'\,. \tag{3}
$$

Функция $\kappa(\mathbf{r},t-t')$, согласно принципу причинности, равна нулю при $t<t'$. Фурье-образом функции отклика является поляризуемость среды:

$$
\chi(\mathbf{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\kappa(\mathbf{r},t)e^{i\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}\kappa(\mathbf{r},t)e^{i\omega t}dt\,. \tag{3a}
$$

Диэлектрическая проницаемость для некоторой частоты равна

$$
\varepsilon(\mathbf{r},\omega)=1+4\pi\chi(\mathbf{r},\omega)\,. \tag{3b}
$$

Подставляя (3) в (2), мы получим интегродифференциальные уравнения для определения поля в неоднородной среде в нестационарном случае. Если возможно рассматривать поле во всем пространстве, то из (2) для определения поля в неоднородной среде также можно написать:

$$
\mathbf{E}(\mathbf{r}_\text{p},t_\text{p})=\mathbf{E}_\text{out}(\mathbf{r}_\text{p},t_\text{p})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_\text{p}}\int_V\frac{[\mathbf{j}_1]}{R}dV
$$

$$
-\text{grad}_\text{p}\int_V\frac{[\rho_1]}{R}dV-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_\text{p}^2}\int_V\frac{[\mathbf{P}]}{R}dV+\text{grad}_\text{p}\text{div}_\text{p}\int_V\frac{[\mathbf{P}]}{R}dV, \tag{4}
$$

$$
\mathbf{B}(\mathbf{r}_\text{p},t_\text{p})=\mathbf{B}_\text{out}(\mathbf{r}_\text{p},t_\text{p})+\frac{1}{c}\text{rot}_\text{p}\int_V\frac{[\mathbf{j}_1]}{R}dV+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_\text{p}}\text{rot}_\text{p}\int_V\frac{[\mathbf{P}]}{R}dV.
$$

Здесь индекс «out» обозначает поля внешних относительно среды зарядов. Если в выражении поляризации (3) использовать эти внешние поля и подставить в (4), то получим искомые поля в так называемом первом борновском приближении.

В работе [2] были получены формулы для полей в произвольным образом выбранном объеме, используя вторую форму векторной функции Грина. Другую формулу для полей в неоднородной немагнитной среде мы получим, используя эту вторую форму векторной функции Грина. Не приводя вывода, представим лишь результат:

$$
\mathbf{D}(\mathbf{r}_\text{p},t_\text{p})=\mathbf{E}(\mathbf{r}_\text{p},t_\text{p})+4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}_\text{p},t_\text{p})=-\frac{c}{4\pi}\text{rot}_\text{p}\text{rot}_\text{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{B}\theta(t_\text{p}-t-R/c)}{R}dSdt
$$

$$-\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot_p}\oint_S \frac{[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]}{R}dS+\mathrm{rot_p rot_p}\mathbf{Z}_1-4\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t_p-t)\mathbf{j}_1(\mathbf{r}_p,t)dt+\mathrm{rot_p rot_p}\mathbf{Z}_2,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_p,t_p)=-\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot_p}\oint_S \frac{[\mathbf{n}\times\mathbf{B}]}{R}dS+\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot_p rot_p}\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_S \frac{(\mathbf{n}\times\mathbf{E})}{R}\theta(t_p-t-R/c)dSdt \tag{5}$$

$$+\frac{1}{c}\mathrm{rot_p}\frac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial t_p}+\frac{1}{c}\mathrm{rot_p}\frac{\partial \mathbf{Z}_2}{\partial t_p}.$$

Здесь

$$\mathbf{Z}_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V \frac{\mathbf{j}_1\theta(t_p-t-R/c)}{R}dVdt\,, \tag{6}$$

$$\mathbf{Z}_2=\int_V \frac{[\mathbf{P}]}{R}dV\,. \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) – обобщенные на нестационарный случай векторы Герца для зарядов, совершающих заданное движение, и индуцированных зарядов, соответственно [2]. Вектор поляризации связан с полем по формуле (3). Поверхностные интегралы обусловлены внешними относительно объема зарядами. Если рассматривать все пространство, то (5) можно написать в виде

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}_p,t_p)=\mathbf{E}_{\mathrm{out}}+\mathrm{rot_p rot_p}\mathbf{Z}_1-4\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t_p-t)\mathbf{j}_1(\mathbf{r}_p,t)dt+\mathrm{rot_p rot_p}\mathbf{Z}_2,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_p,t_p)=\mathbf{B}_{\mathrm{out}}+\frac{1}{c}\mathrm{rot_p}\frac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial t_p}+\frac{1}{c}\mathrm{rot_p}\frac{\partial \mathbf{Z}_2}{\partial t_p}, \tag{8}$$

где $\mathbf{E}_{\mathrm{out}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{out}}$ – поля внешних зарядов. При выводе были использованы известные формулы векторного анализа [9–11] и свойств дельта-функции Дирака [12].

2.2. Нестационарный случай прерывных полей

В случае прерывных полей область интегрирования по поверхности в (1) в интегралах, содержащих полные роторы, делится на две части (или несколько). В каждой из этих частей поля непрерывны, но претерпевают разрыв на границе этих областей [5] (рис.2). Такая ситуация возникает, например, при применении граничных условий Кирхгофа в задаче дифракции на непрозрачном экране с отверстием. Будем предполагать, как обычно, что заряды находятся в полупространстве до экрана, требуется найти поле в полупространстве за экраном. В каждом из полупространств нет вещества. Граничные условия Кирхгофа предполагают, что поля в отверстии имеют те же значения, как при отсутствии экрана, а непосредственно под экраном равны нулю. При таких граничных условиях поля претерпевают разрыв на границе отверстия. Тогда интегралы по замкнутой по-

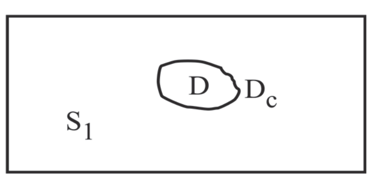

Рис.2. Поверхность интегрирования в случае прерывных полей. Показаны части поверхности интегрирования S_1 и D, на границе D_c которых поля прерывны.

верхности превращаются в интегралы по области D отверстия. Поэтому интегралы по поверхности, содержащие полные роторы, не равны нулю. Согласно теореме Стокса, эти интегралы выражаются через интегралы по контуру D_c отверстия. Тогда, из (1), для полей получим:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t_p) = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_p}\int_D [(\mathbf{n}\times\mathbf{B}^i)]\frac{1}{R}dS + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_p\int_D \frac{[(\mathbf{E}^i\times\mathbf{n})]}{R}dS + \frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}_p\int_D \frac{[\mathbf{E}^i\mathbf{n}]}{R}d\mathrm{S} \\
&-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_p}\int_V \frac{[\mathbf{j}]}{R}dV - \mathrm{grad}_p\int_V \frac{[\rho]}{R}dV - \frac{c}{4\pi}\mathrm{grad}_p\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{D_c}\frac{\theta(t_p - t - R/c)}{R}\mathbf{B}^i d\mathbf{l}dt, \\
&\mathbf{B}(\mathbf{r}_p, t_p) = -\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_p\oint_S \frac{[(\mathbf{n}\times\mathbf{B}^i)]}{R}dS + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_p}\oint_S \frac{[(\mathbf{E}^i\times\mathbf{n})]}{R}dS + \frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}_p\oint_S \frac{[\mathbf{B}^i\mathbf{n}]}{R}dS \\
&+\frac{1}{c}\mathrm{rot}_p\int_V \frac{[\mathbf{j}]}{R}dV + \frac{c}{4\pi}\mathrm{grad}_p\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{D_c}\frac{\theta(t_p - t - R/c)}{R}\mathbf{E}^i d\mathbf{l}dt.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь верхний индекс «i» у полей обозначает значение полей в отсутствие экрана. Последние члены в выражениях для электрического и магнитного полей, содержащих контурные интегралы, являются обобщением на нестационарный случай добавочных членов, введенных Котлером в случае гармонических полей. Как известно, в случае гармонически зависящих от времени прерывных полей Котлер предложил добавить к векторным уравнениям дифракции Кирхгофа члены, которые обеспечат удовлетворение полей уравнениям Максвелла [5, 6, 13]. Формулы (9), как нам известно, получены впервые и непосредственно с применением векторной функции Грина, без дополнительных предположений, которые являлись бы обобщением предположений Котлера для нестационарного случая.

3. Уравнения нестационарного электромагнитного поля в однородных средах

Полученные формулы (2), (4), (5) и (8) применимы также в случае однородных изотропных сред, в которых диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят от координат. В работе [4] на основе соответствующей векторной функции Грина однородной среды с временной дисперсией получены формулы для поля в гармоническом случае (формулы (22) в [4]). Беря Фурье-интегралы этих формул (22) из [4] по частоте, получим формулы именно для однородных сред в нестационарном случае. Не приводя вывода, здесь показываем лишь результат для немагнитных сред ($\mu = 1$):

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{D}(\mathbf{r}_p, t_p) = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_p}\int_V\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R, t_p - t' - t'')\tilde{\varepsilon}(t')\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t'')dt'dt''dV \\
&-4\pi\mathrm{grad}_p\int_V\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R, \mathrm{t}_p - t')\rho_1(\mathbf{r}, t')dt'dV - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_p}\oint_S\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R, t_p - t' - t'')\tilde{\varepsilon}(t')\mathbf{B}(\mathbf{r}, t'')\times d\mathbf{S}dt'dt'' \\
&-\mathrm{rot}_p\oint_S\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R, t_p - t')\mathbf{D}(\mathbf{r}, t')\times d\mathbf{S}dt' + \mathrm{grad}_p\oint_S\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R, t_p - t')\mathbf{D}(\mathbf{r}, t')d\mathbf{S}dt', \\
&\mathbf{B}(\mathbf{r}_p, t_p) = \frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}_p\int_V\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R, t_p - t')\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t')dt'dV + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_p}\oint_S\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R, \mathrm{t}_p - t')\mathbf{D}(\mathbf{r}, t')\times d\mathbf{S}dt' \\
&+\mathrm{rot}_p\oint_S\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R, t_p - t')\mathbf{B}(\mathbf{r}, t')\times d\mathbf{S}dt' + \mathrm{grad}_p\oint_S\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R, \mathrm{t}_p - t')\mathbf{B}(\mathbf{r}, t')d\mathbf{S}dt'.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь

$$\tilde{\varepsilon}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \delta(t)+4\pi\kappa(t), \tag{11}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r},t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t')dt',$$

$$\tilde{G}_{\mathrm{s}}(R,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_{\mathrm{s}}(R,\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \tag{12}$$

$$G_{\mathrm{s}}(R,\omega)=e^{i\omega R\sqrt{\varepsilon(\omega)}/c}\,/\,(4\pi R).$$

Дальнейшее исследование возможно, если задавать зависимость диэлектрической проницаемости от частоты. В самом простом случае диэлектрическая проницаемость не зависит от частоты. В таком случае $\tilde{\varepsilon}(t)=\varepsilon\delta(t)$, $\tilde{G}_{\mathrm{s}}(R,t)=\delta(t-R\sqrt{\varepsilon}/c)/(4\pi R)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и из (10) для полей имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}},t_{\mathrm{p}})&=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_{\mathrm{p}}}\int_V\frac{[\mathbf{j}_1]}{R}dV-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}_{\mathrm{p}}\int_V\frac{[\rho_1]}{R}dV-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t_{\mathrm{p}}}\oint_S\frac{[(\mathbf{B}\times d\mathbf{S})]}{R}\\&-\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\oint_S\frac{[(\mathbf{E}\times d\mathbf{S})]}{R}+\frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}_{\mathrm{p}}\oint_S\frac{[(\mathbf{E}d\mathbf{S})]}{R},\\\mathbf{B}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}},t_{\mathrm{p}})&=\frac{1}{c}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\int_V\frac{[\mathbf{j}_1]}{R}dV+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t_{\mathrm{p}}}\oint_S\frac{[(\mathbf{E}\times d\mathbf{S})]}{R}+\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\oint_S\frac{[(\mathbf{B}\times d\mathbf{S})]}{R}+\frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}_{\mathrm{p}}\oint_S\frac{[(\mathbf{B}d\mathbf{S})]}{R},\end{aligned} \tag{13}$$

здесь $[\cdot]$ показывает значение функции в скобках в момент времени $t_p-R\sqrt{\varepsilon}/c$. В среде скорость распространения равна $c/\sqrt{\varepsilon}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}},t_{\mathrm{p}})&=4\pi\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\int_V\int_{-\infty}^{t_p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varepsilon}(t'-t''-t''')\tilde{G}_s(R,t'')\mathbf{j}_1(t''')dt'''dt''dt'dV-4\pi\int_{-\infty}^{t_p}\mathbf{j}_1(\mathbf{r}_{\mathrm{p}},t')dt'\\&+\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\oint_S\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R,t_{\mathrm{p}}-t')\mathbf{D}(\mathbf{r},t')\times d\mathbf{S}dt'+c\,\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\oint_S\int_{-\infty}^{t_p}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R,t'-t'')\mathbf{B}(\mathbf{r},t'')\times d\mathbf{S}dt''dt',\\\mathbf{B}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}},t_{\mathrm{p}})&=\frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\int_V\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R,t_{\mathrm{p}}-t')\mathbf{j}_1(\mathbf{r},t')dt'dV+\mathrm{rot}_p\oint_S\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R,t_{\mathrm{p}}-t')\mathbf{B}(\mathbf{r},t')\times d\mathbf{S}dt'\\&-c\,\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\oint_S\int_{-\infty}^{t_p}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_s(R,t'-t'')\mathbf{E}(\mathbf{r},t'')\times d\mathbf{S}dt''dt'.\end{aligned} \tag{14}$$

В случае, когда диэлектрическая проницаемость не зависит от частоты, из (14) получим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}},t_{\mathrm{p}})&=\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\int_V\int_{-\infty}^{t_p}\frac{[\mathbf{j}_1]'}{R}dt'dV-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t_p}\mathbf{j}_1(\mathbf{r}_{\mathrm{p}},t')dt'\\&+\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\oint_S\frac{[(\mathbf{E}\times d\mathbf{S})]}{R}+\frac{c}{4\pi\varepsilon}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\oint_S\int_{-\infty}^{t_{\mathrm{p}}}\frac{[(\mathbf{B}\times d\mathbf{S})]'}{R}dt',\\\mathbf{B}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}},t_{\mathrm{p}})&=\frac{1}{c}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\int_V\frac{[\mathbf{j}_1]}{R}dV+\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\oint_S\frac{[(\mathbf{B}\times d\mathbf{S})]}{R}-\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\oint_S\int_{-\infty}^{t_{\mathrm{p}}}\frac{[(\mathbf{E}\times d\mathbf{S})]'}{R}dt',\end{aligned} \tag{15}$$

где $[\cdot]'$ означает, что значение функции внутри скобки берется в момент времени в момент времени $t' - R\sqrt{\varepsilon} / c$.

Полученные формулы могут быть применены в задачах дифракционного излучения, эффекта Смита–Парселя и т.д. [14–21].

4. Заключение

В этой работе, являющейся продолжением работ [1–4], исследуется векторная теория дифракции и полей заряженных частиц в электродинамике. Рассмотрены нестационарные поля как в однородных, так и в неоднородных средах. В нестационарном случае получены формулы для полей в произвольным образом выбранном объеме с применением Фурье-преобразования формул, полученных на основе векторной функции Грина в гармоническом случае в работе [4]. Приведены две формы для полей в нестационарном случае. Применение полученных формул к задаче дифракции на отверстии в непрозрачном экране позволило непосредственно получить обобщение векторной формулы Кирхгофа–Котлера на нестационарный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. **M.K. Balyan.** J. Contemp. Phys. (Armenian Ac. Sci.), **57**, 331 (2022).
2. **M.K. Balyan.** J. Contemp. Phys. (Armenian Ac. Sci.), **58**, 92 (2023).
3. **M.K. Balyan.** J. Contemp. Phys. (Armenian Ac. Sci.), **58**, 188 (2023).
4. **M.K. Balyan.** J. Contemp. Phys. (Armenian Ac. Sci.), **58**, (2023) (accepted for publication).
5. **J.A. Stratton.** Electromagnetic Theory. New York, McGraw-Hill, 1941.
6. **F. Kottler**. Ann. Phys. (Leipzig), **71**, 457 (1923).
7. **M. Born, E. Wolf.** Principles of Optics. Oxford: Pergamon Press, 1980.
8. **R. Boyd.** Nonlinear Optics. New York, Academic, 2003.
9. **G.A. Korn, T.M. Korn**. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York: McGraw Hill, 1968.
10. **B.G. Levich.** Theoretical Physics. An Advanced Text, vol. 1, Theory of the Electromagnetic Field. Theory of Relativity. Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company, 1970.
11. **J.D. Jackson.** Classical Electrodynamics. New York, Wiley, 1998.
12. **A.A. Sokolov, I. M. Ternov.** Radiation from Relativistic Electrons. New York: American Institute of Physics, 1986.
13. **S. Solimeno, B. Crosignani, P. DiPorto.** Guiding, Diffraction and Confinement of Optical Radiation. New York: Academic Press, 1986.
14. **М.Л. Тер-Микаелян, Б.В. Хачатрян.** Докл. Акад. Наук Арм ССР, Физ., **40**, 13 (1965).
15. **Б.В. Хачатрян.** Изв. Акад. Наук Арм ССР, Физ.-Мат. Науки, **18**, 133 (1965).
16. **B.M. Bolotovskii, G.V. Voskresenskii.** Sov. Phys. Usp. **9,** 73 (1966).
17. **B.M. Bolotovskii, E. A. Galst'yan.** Phys. Usp., **43**, 755 (2000).
18. **Y. Shibata, Sh. Hasebe, K. Ishi, T. Takahashi, T. Ohsaka, M. Ikezawa, T. Nakazato,**

M. Oyamada, Sh. Urasawa, T. Yamakawa, Y. Kondo. Phys. Rev., **E52,** 6787 (1995).
19. **A.P. Potylitsyn.** Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B, **145**, 60 (1998).
20. **A.R. Mkrtchyan**, **L.A. Gevorgian, L.Sh. Grigorian, B.V. Khachatryan, A.A. Saharian**. Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B, **145**, 67 (1998).
21. **A.P. Potylitsyn.** Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B, **145**, 169 (1998).

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԻՖՐԱԿՏԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԸ ԵՎ ԼԻՑՔԵՐԻ ԴԱՇՏԵՐԸ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ

Մ.Կ. ԲԱԼՅԱՆ

Դիտարկված են ոչ ստացիոնար էլեկտրամագնիսական դաշտերը և լիցքերի դաշտերը կամայականորեն ընտրված ծավալում ինչպես համասեռ, այնպես էլ անհամասեռ միջավայրերում: Այդ բանաձևերը ներկայացված են երկու տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի իր կիրառական առավելությունները: Անմիջականորեն ստացված են նաև Կիրխհոֆ–Կոտլերի վեկտորական բանաձևերի ընդհանրացումները խզվող ոչ ստացիոնար դաշտերի համար:

VECTOR NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC DIFFRACTION FIELDS AND FIELDS OF CHARGES IN MEDIA

M.K. BALYAN

Vector non-stationary diffraction electromagnetic fields and fields of charges in an arbitrarily chosen volume in both homogeneous and inhomogeneous media are considered. These formulas are presented in two forms, each of which has its own advantages in applications. Directly the generalization of the Kirchhoff–Kottler vector formulas for discontinuous fields in the non-stationary case are also obtained.